Kombinatorni principi u osnovnoškolskom obrazovanju

Subašić, Katarina

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Diplomski nastavnički studij matematike i informatike

Katarina Subašić

Kombinatorni principi u osnovnoškolskom obrazovanju

Diplomski rad

Osijek, 2024.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Diplomski nastavnički studij matematike i informatike

Katarina Subašić

Kombinatorni principi u osnovnoškolskom obrazovanju

Diplomski rad

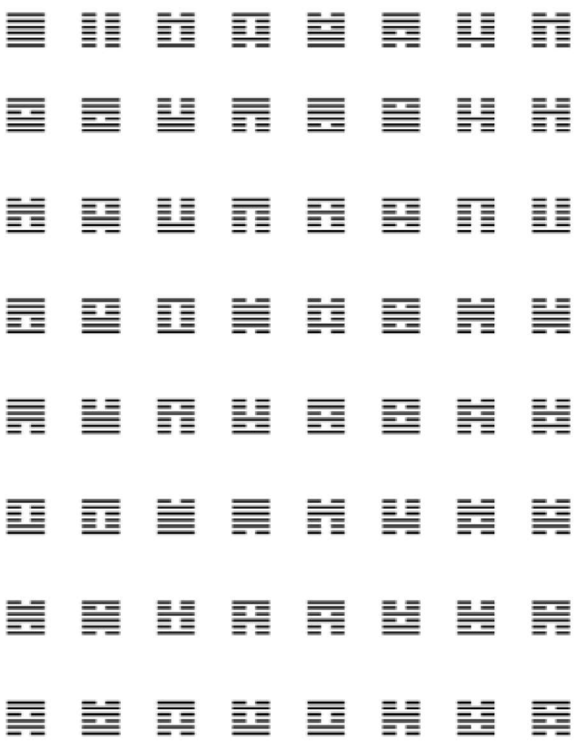
Voditelj: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2024.

Sadržaj

Uvod

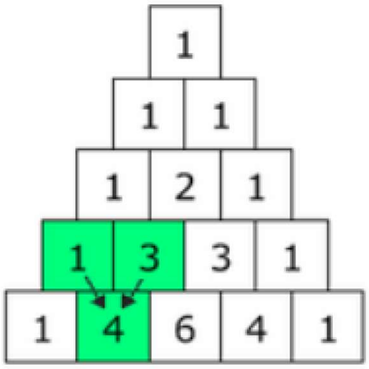
Kombinatorika je matematička disciplina koja se bavi prebrojavanjem objekata te proučavanjem njihovog odabira i rasporeda. Pri tome redoslijed objekata može biti od značaja, ali i ne mora, ovisno o specifičnosti problema. Objekti kombinatorike su elementi diskretnih, konačnih skupova. Najčešće su to prirodni brojevi, s kojima se prvi put susrećemo već u ranom djetinjstvu. "Kada djeca počinju usvajati pojam broja i učiti što znači "dva", a što "tri", postavljaju im se pitanja poput "Koliko imaš godina? Koliko je jabuka na stolu? Koliko bombona imaš u ruci?". Djeca tada broje koliko određenih predmeta vide, odnosno prebrojavaju objekte. Prebrojavanje elemenata konačnih skupova osnovno je područje interesa kombinatorike.", [12].
Kombinatorika ima bogatu povijest koja seže tisućama godina unatrag. Njeni korijeni mogu se pratiti do antičkih civilizacija, poput Indije, Kine i Grčke, gdje su rani matematičari istraživali osnovne probleme permutacija i kombinacija. Jedan od najranijih poznatih tekstova o kombinatorici je kineski "I Ching" (Knjiga promjena), koja datira iz 1000. godine prije nove ere, a sadrži analize različitih kombinacija heksagrama, [17]. Heksagram se sastoji od šest isprekidanih ili punih linija, a povezuju se sa kineskom filozofijom postojanja dvije nespojive sile prirode yin i yang.



Slika 1: Različite kombinacije heksagrama iz Knjige promjena, preuzeto iz [17].

U staroj Grčkoj, filozofi poput Platona i Arhimeda također su se bavili kombinatornim problemima. U srednjem vijeku, kombinatorika je dalje razvijana u zemljama islama. Matematičari poput Al-Khwarizmija i Omar Khayyama istraživali su binomne koeficijente i polinome. Binomni koeficijenti igraju ključnu ulogu u kombinatorici, posebno u računanjima vezanim za kombinacije i permutacije. Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ daje broj načina na koje se k elemenata može odabrati iz skupa od n elemenata, bez obzira na redoslijed.

U Europi, renesansa je donijela novo zanimanje za kombinatoriku, s matematičarima kao što su Blaise Pascal i Pierre de Fermat, koji su proučavali vjerojatnosti i kombinatorne principe. Pascalov trokut, na primjer, postao je ključni alat za računanje binomnih koeficijenata. Pascalov trokut je trokutasta tablica binomnih koeficijenata, gdje je svaki broj jednak zbroju dva broja iznad njega (Slika 2). Omogućuje jednostavno izračunavanje kombinacija, što je fundamentalno za razumijevanje rasporeda i odabira elemenata unutar skupova.



Slika 2: Pascalov trokut, preuzeto iz [6].

Moderni razvoj kombinatorike započeo je u 18. i 19. stoljeću s radovima matematičara poput Leonharda Eulera, koji je uveo pojam grafa, i Augusta De Morgana, koji je radio na načelima inkluzije i ekskluzije. Kombinatorika je postala formalizirana grana matematike u 20. stoljeću, s daljnjim doprinosima matematičara kao što su Paul Erdős i Gian-Carlo Rota, koji su značajno proširili teoriju i primjenu kombinatoričkih metoda.
Unatoč njenoj apstraktnoj prirodi, kombinatorika ima široku primjenu u različitim znanstvenim područjima, uključujući statistiku, informatiku, teoriju igara, teorijsku fiziku i biologiju. U obrazovanju, kombinatorika je ključna za razvoj logičkog razmišljanja, analitičkih sposobnosti i vještina rješavanja problema kod učenika. U [16] se navodi nekoliko ključnih razloga zašto bi kombinatorika trebala biti dio školskog kurikuluma. Kombinatorika ne zahtijeva predznanje iz algebre, što omogućuje njeno rano podučavanje bez oslanjanja na vještine računanja. Kombinatorika pomaže učenicima u razvijanju sposobnosti brojanja, procjenjivanja, generalizacije i sustavnog razmišljanja. Ovaj diplomski rad istražuje kako se kombinatorika može integrirati u nastavni plan matematike u osnovnoškolskom obrazovanju, te kako se mogu koristiti kombinatorne metode u učionici. Proučavaju se teorijske osnove kombinatorike, njezini ključni principi, te miskoncepcije s kojima se učenici susreću.
U prvom poglavlju rada, kroz definicije, teoreme i popratne primjere, obradit će se temeljni pojmovi kombinatorike, uključujući permutacije, kombinacije te osnovne principe prebrojavanja.
U drugom poglavlju rada prikazani su primjeri kombinatornih zadataka s kojima se učenici susreću u osnovnoškolskom obrazovanju.
U trećem poglavlju analizirat će se nekoliko zanimljivih strategija i metoda poučavanja kombinatorike, kao što su Placemat metoda i Metoda bijekcije.
U četvrtom poglavlju govorit će se o miskoncepcijama s kojima se učenici susreću pri učenju kombinatorike.

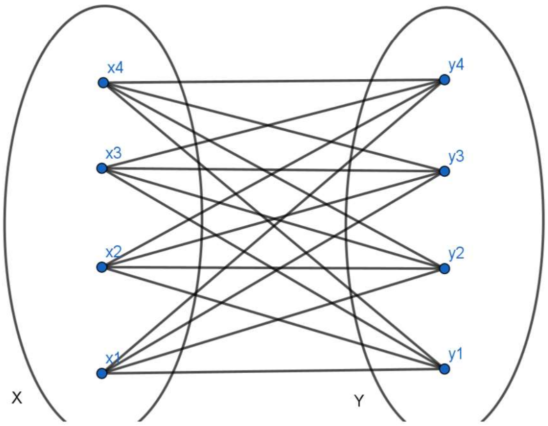
1. Osnovni principi prebrojavanja

U ovom poglavlju prikazane su osnovne metode prebrojavanja, biranja i raspoređivanja elemenata unutar skupova. Prolazeći kroz teorijsku osnovu i prikladne primjere, obradit će se temeljni pojmovi kombinatorike, uključujući permutacije, kombinacije, varijacije te osnovne principe prebrojavanja. Navedene definicije preuzete su iz [5].

Broj članova nekog skupa možemo dobiti tako da ga jednostavno prebrojimo. No ponekad možemo koristiti načine brojanja koji su brži i učinkovitiji, a koji se temelje na dva osnovna principa prebrojavanja u kombinatorici, principu sume i principu produkta.

Primjer 1.1. *U ekipnim šahovskim natjecanjima, svaki član ekipe igra protiv svakog člana suprotne ekipe, pružajući jedinstvene mečeve između svakog igrača. Ako se svaka ekipa sastoji od četiri igrača, koliki je ukupni broj međusobnih mečeva?*

Svaki član prve ekipe sudjelovat će u četiri susreta, odigravajući ih protiv svakog člana druge ekipe. Isto toliko mečeva će odigrati i preostala tri igrača. Dakle, ukupan broj susreta iznosi $4 \cdot 4 = 16$*. Iako se u ovom slučaju radi o manjim skupovima, bilo bi moguće popisati sve te susrete s imenima igrača iz svake ekipe. No, ova logika vrijedi i za skupove s velikim brojem elemenata, gdje bi takav popis bio nepraktičan.*



Slika 3: Shematski prikaz ekipnih susreta šahista

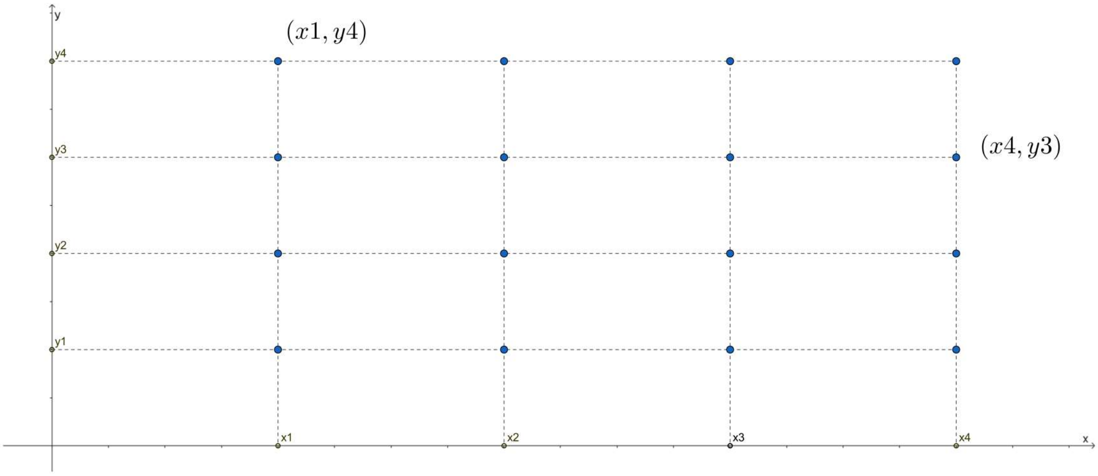
Slika 3 prikazuje međusobne susrete između šahista kao uređene parove poput $(x1, y4)$ ili $(x4, y3)$, gdje $x1$ i $x4$ predstavljaju šahiste iz ekipe X, a $y4$ i $y3$ predstavljaju šahiste iz ekipe Y.

Definicija 1.1. *Neka su* X *i* Y *dva skupa,* $X, Y \neq \emptyset$*. Skup* $X \times Y$ *čiji su elementi uređeni parovi* (x, y)*, pri čemu je* $x \in X$*,* $y \in Y$*, nazivamo Kartezijev umnožak skupova* X *i* Y*. Pišemo*

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Uređeni parovi $(x1, y1)$ i $(x2, y2)$ su jednaki ako i samo ako je $x1 = x2, y1 = y2$. Zanimat će nas koliko Kartezijev umnožak skupova sadrži elemenata. Razmotrimo skupove s ograničenim brojem elemenata kako bismo mogli prebrojati sve članove Kartezijeva umnoška. Neka je $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2\}$. Tada se $X \times Y$ sastoji od uređenih parova:

$$(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2).$$



Slika 4: Grafički prikaz Kartezijevog umnoška dvaju skupova

Prebrojimo li elemente Kartezijeva umnoška $X \times Y$ dobivamo broj 6, a to je upravo umnožak broja elemenata skupa X s brojem elemenata skupa Y. Slično zaključujemo i sa skupovima koji imaju veći broj elemenata. Ako je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}, Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, onda Kartezijev umnožak $X \times Y$ sadrži sljedeće uređene parove:

$$\begin{array}{cccc} (x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \cdots & (x_1, y_m) \\ (x_2, y_1) & (x_2, y_2) & \cdots & (x_2, y_m) \\ (x_3, y_1) & (x_3, y_2) & \cdots & (x_3, y_m) \\ \vdots & & & \\ (x_l, y_1) & (x_l, y_2) & \cdots & (x_l, y_m) \end{array}$$

Definicija 1.2. *Neka skup X ima l elemenata, a skup Y ima m elemenata. Kartezijev umnožak $X \times Y$ ima $l \cdot m$ elemenata.*

U prethodnom primjeru imali smo samo 2 ekipe, no što ako ima više ekipa, odnosno više od dva neprazna skupa.

Primjer 1.2. *Koliko različitih osmeroznamenkastih šifri postoji, ako znamo da prva znamenka ne može biti jednaka nuli?*

Broj različitih osmeroznamenkastih šifri izračunat ćemo na sljedeći način. Jedna šifra je uređena osmorka, dakle element Kartezijeva umnoška osam skupova, od kojih prvi $X_1 = \{1, 2, \ldots, 9\}$ ima devet, a preostali skupovi $X_2, \ldots, X_8$ po deset elemenata, $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Stoga je broj svih različitih šifri jednak broju elemenata tog Kartezijeva umnoška i iznosi

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000000.$$

Teorem 1.1. *(vidjeti [13] Tm 2.2.) Neka su skupovi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ konačni. Broj elemenata u Kartezijevu umnošku n konačnih skupova je*

$$k(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) = l_1 \cdot l_2 \cdots l_n = k(X_1) \cdot k(X_2) \cdots k(X_n),$$

gdje je l_i broj elemenata skupa X_i, $i = 1, 2, \cdots, n$.

Prethodnim teoremom je iskazan **princip produkta**.

1.1. Varijacije

Promotrimo sada slučaj kada su skupovi Kartezijeva umnoška svi jednaki.

Primjer 1.3. *Koliko različitih osmeroznamenkastih šifri postoji, ako znamo da niti jedna znamenka ne može biti jednaka nuli?*

Ovdje se radi o skupu $X = \{1, 2, \ldots, 9\}$ te iz tog skupa za svaku znamenku šifre biramo jednu znamenku, a za izbor svake znamenke imamo 9 mogućnosti pa je rješenje

$$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^8 = 43046721.$$

Definicija 1.3. *Neka je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ zadani skup. Varijacija s ponavljanjem k-tog razreda u n-članom skupu X je svaka uređena k-torka Kartezijeva umnoška k skupova $X \times X \times \cdots \times X = X^k$. Broj varijacija s ponavljanjem $\overline{V}_n^k$ jednak je broju elemenata Kartezijeva umnoška X^k:*

$$\overline{V}_n^k = k(X \times X \times \cdots \times X) = [k(X)]^k = n^k.$$

Sada se primjer sa šifrom može dodatno zakomplicirati.

Primjer 1.4. *Koliko različitih osmeroznamenkastih šifri postoji, ako sve znamenke moraju biti različite?*

Iz skupa $X = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ biramo znamenke šifre, ali moramo paziti da se te znamenke moraju razlikovati. Tako ćemo za prvu znamenku imati 10 mogućnosti, za drugu znamenku 9 mogućnosti jer smo morali "izbaciti" znamenku koja je odabrana za prvu znamenku. Tako nastavimo dalje sve do posljednje znamenke pa je rješenje:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1814400.$$

Definicija 1.4. *Neka je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ zadani skup. Varijacija bez ponavljanja k-tog razreda u n-članom skupu X je svaka uređena k-torka različitih elemenata iz skupa X. Pri tome mora biti $k \leq n$. Broj varijacija bez ponavljanja označavamo s V_n^k.*

Ako prvi element možemo izabrati na n različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) drugi element možemo izabrati na $n-1$ načina, nakon toga treći element možemo izabrati na $n-2$ načina itd. Posljednji k-ti element možemo izabrati na $n-(k-1) = n-k+1$ načina. Stoga je, prema Teoremu 1.1

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1).$$

U prethodnih nekoliko primjera koristili smo **princip uzastopnog prebrojavanja**.

Teorem 1.2. *(vidjeti [13] Tm 2.3.) Ako element x_1 možemo izabrati iz skupa X_1 na l_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element x_2 iz skupa X_2 na l_2 načina, nakon toga element x_3 iz skupa X_3 na l_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $x_1, x_2, \ldots, x_k$ jednak*

$$L = l_1 \cdot l_2 \cdots l_k.$$

1.2. Permutacije

U ovom potpoglavlju ćemo se baviti načinom na koji se elementi određenog skupa mogu rasporediti.

Definicija 1.5. *Permutacija skupa* $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ *od* n *različitih elemenata uređena je* n*-torka svih njegovih članova. Broj različitih permutacija skupa s* n *elemenata označavamo s* P_n*,*

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Primjer 1.5. *Neka je zadan skup* $A = \{1, 2, 3, 4\}$*. Permutaciju dobivamo nekim poretkom izbora njegovih elemenata: - prvi element možemo izabrati na četiri načina, - drugi element možemo izabrati na tri načina, - treći element možemo izabrati na dva načina, - za izbor četvrtog elementa ostao je samo jedan način (jer je samo jedan element preostao). Ukupan broj načina je* $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$*.*
Sve moguće permutacije napisane su u četiri stupca. Svaki stupac odgovara jednoj od četiri mogućnosti izbora prvog elementa. Radi jednostavnosti zapisivanja, uređenu četvorku $(1, 2, 3, 4)$ *pišemo jednostavnije kao* 1 2 3 4.

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

Permutacija je zapravo varijacija n-tog razreda u skupu od n elemenata.

$$V_n^n = P_n.$$

Primjer 1.6. *Koliko se različitih riječi (smislenih i besmislenih) može sastaviti od svih slova riječi PUT.*

Ukupan broj riječi je $3! = 6$*. Ispišimo ih:*

$$\begin{array}{ccc} PTU & TPU & UPT \\ PUT & TUP & UTP. \end{array}$$

Može se primijetiti da smo u prvom stupcu ispisali sve riječi koje počinju slovom P, koje je prvo po abecedi, zatim u drugom stupcu riječi koje počinju slovom T, koje je iduće po abecedi. Ovakav se način ispisivanja permutacija naziva leksikografski poredak.

U primjeru 1.6 imali smo permutacije riječi kojoj su sva slova različita. Pogledajmo idući primjer.

Primjer 1.7. *Koliko se različitih riječi (smislenih i besmislenih) može sastaviti od svih slova riječi PUP. Pretpostavimo, u svrhu primjera, da se slova P razlikuju te ih označimo s* P_1 *i* P_2*.*
Ukupan broj riječi je $3! = 6$*. Ispišimo ih:*

$$\begin{array}{ccc} P_1P_2U & P_2P_1U & UP_1P_2 \\ P_1UP_2 & P_2UP_1 & UP_2P_1. \end{array}$$

Pritom P_1P_2U i P_2P_1U izgledaju kao različite permutacije, ali, uklanjanjem indeksa one postaju jednake. Tada je ukupan broj različitih riječi koji se mogu sastaviti od slova riječi PUP jednak 3, i to su PUP,PPU i UPP.

Definicija 1.6. *Neka u nizu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ postoji prva skupina od k_1 identičnih elemenata, druga skupina od k_2 identičnih elemenata,..., r-ta skupina od k_r identičnih elemenata, $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$. Bilo koji razmještaj elemenata takva niza nazivamo permutacijom s ponavljanjem. Njihov ukupni broj označavamo s $P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r}$ i vrijedi*

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_r!}.$$

Primjeni li se ova definicija na prethodnom primjeru dobije se

$$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3,$$

što se podudara s našim zaključkom dobivenim ispisivanjem različitih riječi.

Primjer 1.8. *Koliko se različitih riječi može napisati od slova riječi PARALELEPIPED?*

Ovdje je riječ o nizu slova A, A, D, E, E, E, I, L, L, P, P, P, R. Zato je

$$P_{13}^{2,1,3,1,2,3,1} = \frac{13!}{2!1!3!1!2!3!1!} = 43243200.$$

Po dogovoru, u ovakvim primjerima ne pišemo broj 1 niti u oznaci, niti u razlomcima:

$$P_{13}^{3,3,2,2} = \frac{13!}{3!3!2!2!}.$$

1.3. Kombinacije

Kada se suočavamo s problemima u kojima je redoslijed odabranih elemenata nevažan, kao što je to slučaj u mnogim igrama na sreću, koristimo kombinacije. Primjerice, u igri poput LOTO gdje izvlačimo 7 brojeva iz skupa od 39, bitno je samo koje brojeve izvučemo, a ne njihov redoslijed. Generalno, broj načina na koji možemo izabrati k elemenata iz skupa od n elemenata bez obzira na poredak označavamo s $C(n, k)$.

Definicija 1.7. *Broj različitih podskupova s k elemenata skupa S, gdje je $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, izračunava se na sljedeći način:*

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k},$$

a svaki podskup skupa S koji sadrži k elemenata skupa S nazivamo kombinacijom u skupu S.

Primjer 1.9. *U školi se nudi pet predmeta iz društvenih znanosti: Povijest, Geografija, Psihologija, Sociologija i Ekonomija. Na koliko načina učenik može odabrati točno tri predmeta?*

Neka skup $D = \{Povijest, Geografija, Psihologija, Sociologija, Ekonomija\}$ predstavlja skup predmeta društvenih znanosti. Ako želimo odabrati tri elementa iz ovog skupa, možemo to učiniti na 10 načina:

$$C(5, 3) = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

No, što ako osim društvenih znanosti imamo i skupinu prirodnih znanosti?

Primjer 1.10. *U školi se nudi pet predmeta iz društvenih znanosti: Povijest, Geografija, Psihologija, Sociologija i Ekonomija, te tri predmeta iz prirodnih znanosti: Biologija, Kemija i Fizika.*
Na koliko načina učenik može odabrati točno šest predmeta?

Neka skup

$$D = \{Povijest, Geografija, Psihologija, Sociologija, Ekonomija\}$$

predstavlja skup predmeta društvenih znanosti, a skup

$$P = \{Biologija, Kemija, Fizika\}$$

skup predmeta prirodnih znanosti. Primjetimo najprije da su ta dva skupa disjunktna, odnosno da nemaju zajedničkih elemenata.
Budući ukupan broj predmeta mora biti šest, u prvom slučaju pretpostavimo da učenik odabere sva tri ponuđena predmeta iz skupa prirodnih znanosti i onda bira još tri predmeta iz skupa društvenih znanosti.
Pomoću kombinacija i principa produkta dobivamo

$$\binom{5}{3}\binom{3}{3},$$

što je 10 *načina za odabir* 6 *predmeta iz skupova D i P.*
U drugom slučaju učenik može odabrati četiri predmeta iz skupa D i dva predmeta iz skupa P, što rezultira s dodatnih 15 *načina:*

$$\binom{5}{4}\binom{3}{2}.$$

Konačno, u zadnjem slučaju učenik može odabrati svih pet predmeta iz skupa društvenih znanosti i jedan predmet iz skupa prirodnih znanosti, a to može učiniti na 3 *načina:*

$$\binom{5}{5}\binom{3}{1}.$$

Dakle, imali smo tri različita slučaja odabira šest elemenata iz dva disjunktna skupa D i P te smo za svaki slučaj dobili određeni broj načina na koji učenik može odabrati predmete; 10, 15 i 3. Ukupan broj načina na koji učenik može odabrati šest predmeta i skupova D i P je zbroj svih dobivenih mogućnosti, 28. Rezultat se dobije koristeći ***princip sume****.*

Teorem 1.3. *(vidjeti [4]) Neka su skupovi $D_1, D_2, \ldots, D_l$ konačni i međusobno disjunktni. Tada je i skup $D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_l$ također konačan i vrijedi:*

$$k(D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_l) = k(D_1) + k(D_2) + \ldots + k(D_l).$$

U prethodnom primjeru lijepo se može vidjeti kako se princip produkta i princip sume upotpunjavaju. Prvo se principom produkta odabere iz svakog od disjunktnih skupova određeni broj elemenata tako da je ukupan broj izabranih elemenata jednak traženom broju elemenata, a onda se principom sume pobroji sve dobivene mogućnosti te tako dođe do konačnog rješenja.

No, učenici često "pomiješaju" ove principe što im stvori određene miskoncepcije pri učenju kombinatorike, o čemu ćemo nešto više u poglavlju 4.

U primjeru 1.9 trebalo se izabrati tri različita predmeta od pet ponuđenih predmeta. Što ako predmeti ne moraju biti različiti, odnosno neki predmet možemo odabrati više puta? Za to će nam trebati kombinacije s ponavljanjima.

Definicija 1.8. *Broj različitih kombinacija s ponavljanjem k-tog razreda u skupu od n elemenata jednak je*

$$\bar{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Primjer 1.11. *Na koliko načina se može odabrati točno tri predmeta iz skupa*

$$D = \{Povijest, Geografija, Psihologija, Sociologija, Ekonomija\},$$

uz uvjet da se predmeti mogu ponavljati? Ako bi se ispisivalo sve moguće kombinacije, ispis bi izgledao ovako:

- *Povijest, Povijest, Povijest*
- *Povijest, Povijest, Geografija*
- *Povijest, Povijest, Psihologija*
- ...
- *Ekonomija, Ekonomija, Ekonomija*
- *Ekonomija, Ekonomija, Povijest*
- *Ekonomija, Ekonomija, Geografija*
- ...

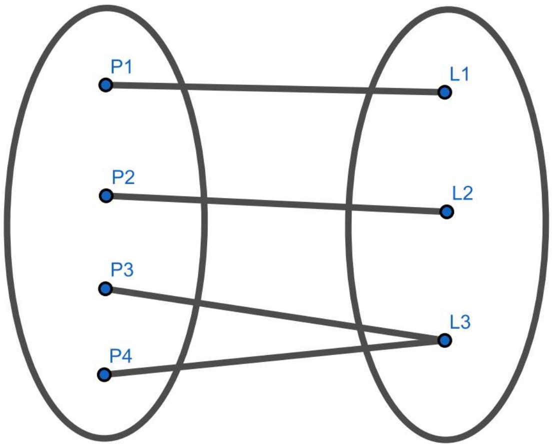
tako bismo ispisali sve moguće kombinacije s ponavljanjima i došli do ukupno 35 kombinacija, što odgovara izračunu

$$\bar{C}_5^3 = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3}.$$

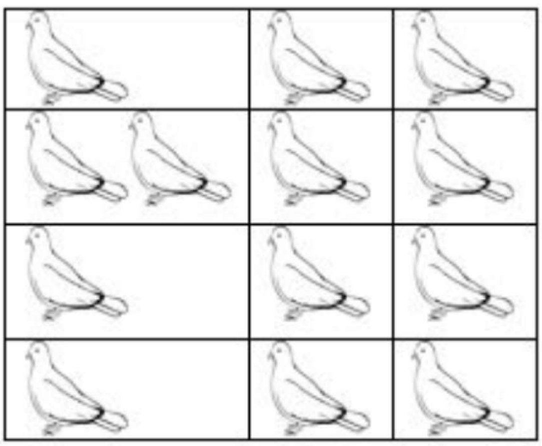
1.4. Dirichletov princip

Dirichletov princip (poznat i kao: Dirichletovo pravilo, princip kutija, princip pretinaca, princip golubinjaka, problem zečeva i kaveza) jedan je od najosnovnijih principa elementarne kombinatorike. Zamislimo da imamo četiri para čarapa koje trebamo pospremiti u tri ladice. Ako rasporedimo čarape po ladicama, Dirichletov princip nam kaže da će barem jedna ladica morati sadržavati više od jednog para čarapa, jer imamo više parova čarapa nego ladica.
U suštini, ovaj princip govori da ako imamo više predmeta nego mjesta za njihovo spremanje, tada barem jedno mjesto mora sadržavati više od jednog predmeta.

"U školskoj matematici Dirichletov princip ne spada u redoviti program nego u program natjecanja iz matematike u kojemu piše da učenici osnovnih škola koji sudjeluju na



Slika 5: Shematski prikaz Dirichletova principa. P1, P2, P3 i P4 predstavljaju parove čarapa, a L1, L2 i L3 ladice.



Slika 6: Slika prikazuje 13 golubova koji su smješteni u 12 golubinjaka. Slika preuzeta s [20]

županijskom, regionalnom ili državnom natjecanju mogu očekivati zadatke iz raznih područja, a među njima i Dirichletovog principa.", [11]. No, u narednom poglavlju vidjet će se da se ovaj princip krije i u najjednostavnijim zadatcima već u razrednoj nastavi.

Teorem 1.4. *(vidjeti [11] Tm 1) Ako imamo n+1 predmeta koje, na bilo koji način, rasporedimo u n kutija (pretinaca), pri čemu je n prirodan broj, tada bar jedna kutija sadrži bar dva predmeta.*

2. Kombinatorika u osnovnoj školi

Ako se pogleda Kurikulum predmeta Matematika, Kombinatorika je predviđena kao nastavni sadržaj trećeg razreda srednje škole u domeni: Podatci, statistika i vjerojatnost. No, učenici se s osnovnim principima kombinatorike prvi put susreću u okviru nastave matematike već u razrednoj nastavi osnovne škole. U ovom poglavlju proći će se kroz primjere zadataka iz područja kombinatorike s kojima bi se učenici mogli susresti u redovnoj i dodatnoj nastavi u osnovnoj školi. Jedan od prvih principa s kojim bi se učenici mogli upoznati je Dirichletov princip.

Primjer 2.1. *Učionica ima 15 klupa, a razred se sastoji od 16 učenika. Hoće li svaki učenik sjediti sam u klupi?*

Ovakvi primjeri pokazuju kako se Dirichletov princip može primijeniti u svakodnevnom školskom okruženju, čineći učenje relevantnijim za učenike. Naravno, u toj dobi još se ne spominju matematički koncepti i definicije. U [9] se navodi kako bi u nižim razredima bilo dobro učenicima dati konkretne primjere, posude i kuglice, tražiti od učenika da razmjeste kuglice u posude te tako na slikovit način demonstrirati Dirichletov princip bez direktnog navođenja samog principa.
U višim razredima, Dirichletov princip se krije u problemskim zadatcima, najčešće unutar dodatne nastave matematike. Tijekom dodatne nastave, predviđeno je da učenici koji se pripremaju za natjecateljski dio uče o Dirichletovom principu, ali i o formuli uključivanja i isključivanja, te principu produkta. U problemskim zadatcima, u kojima je potrebno primijeniti Dirichletov princip, prvi je korak identificirati da se zaista radi o Dirichletovom principu. Nakon identifikacije, [9] navodi kako je potrebno poduzeti još nekoliko važnih koraka: razlaganje (analiza) zadatka, određivanje i otkrivanje kutija i predmeta, generalizacija itd. Evo jednog primjera koji bi se mogao naći u dodatnoj nastavi osmoga razreda, a u kojemu je potrebno koristiti Dirichletov princip.

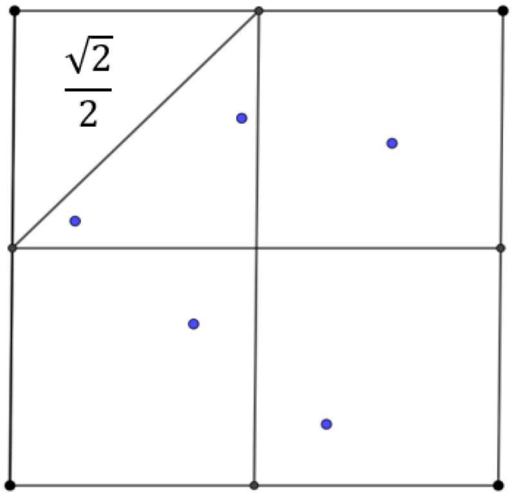
Primjer 2.2. *U jediničnom kvadratu dano je 5 točaka. Dokažite da postoje dvije od njih čija udaljenost nije veća od* $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Podijelimo jedinični kvadrat na četiri manja kvadrata duljine stranice $\frac{1}{2}$. Imamo 5 točaka koje su raspoređene u ovih 4 kvadrata. Prema Dirichletovom principu, ako stavimo 5 točaka u 4 kvadrata, barem jedan kvadrat će sadržavati najmanje 2 točke, Slika 7. Najveća moguća udaljenost između dvije točke unutar kvadrata sa stranicom $\frac{1}{2}$ je dijagonala tog kvadrata, što je:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dakle, postoje dvije točke u jediničnom kvadratu čija udaljenost nije veća od $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ovakvi zadatci su često izazovni za učenike jer učenici teško povezuju dva različita područja matematike, primjerice kombinatoriku i geometriju. Zato je vrlo važno učenike poticati da skiciraju zadatak. Skica pomaže vizualizirati podjelu jediničnog kvadrata na manje dijelove i raspored točaka unutar tih dijelova.
Svi kombinatorni principi temelje se na skupovima, odnosno na izdvajanju određenih elemenata iz istih. Upravo su skupovi dio nastavnog plana i programa za peti razred osnovne škole, što se može vidjeti u Tablici 1. Kroz realizaciju ovog odgojno-obrazovnog ishoda



Slika 7: Slika prikazuje jedinični kvadrat unutar kojeg je smješteno pet točaka.

ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHOD	**RAZRADA ODGOJNO-OBRAZOVNOG ISHODA**
MAT OŠ B.5.2. Prikazuje skupove i primjenjuje odnose među njima za prikaz rješenja problema.	• Oblikuje i prikazuje skupove (brojeva, podataka) i njihove odnose s pomoću Vennovih dijagrama (presjek, unija, podskup). • Određuje broj elemenata skupa. Prepoznaje prazan skup. • Koristi se matematičkim simbolima u zapisu skupova i njihovih odnosa. • Skupovnim zapisom prikazuje rješenja jednostavne nejednadžbe u skupu prirodnih brojeva s nulom. Prošireni sadržaji: Ispisuje i prebrojava elemente skupa u kombinatornim zadatcima.

Tablica 1: Sadržaj tablice preuzet iz Kurikuluma predmeta matematika, [19].

učenici grade temelje za razumijevanje kombinatornih principa.

U Tablici 1 može se vidjeti da je u proširenom dijelu kurikuluma predmeta matematika za peti razred osnovne škole naglasak na aktivnostima kao što su zapisivanje i prebrojavanje elemenata skupa u kontekstu kombinatornih problema. To se obično realizira na dodatnoj nastavi matematike. U nastavku je zadatak sa državnog natjecanja iz matematike za peti razred osnovne škole.

Zadatak 2.1. *(Državno natjecanje iz matematike 2021., 5.razred, [23])*
Na Morskim susretima, natjecanju u igrama uz more i bazen, sudjeluje 8 Dubrovčana, 7 Zadrana, 2 Hvarana i 3 Splićana. Trebaju sastaviti peteročlanu ekipu u kojoj će biti barem

jedan natjecatelj iz svakog od ta četiri grada. Na koliko različitih načina mogu sastaviti ekipu?

Zadatak se trebalo riješiti pomoću kombinacija bez ponavljanja. Najprije se istaknu sve moguće ekipe, pazeći na uvjet zadatka. Neka D označava natjecatelja iz Dubrovnika, Z natjecatelja iz Zadra, H natjecatelja iz Hvara i S natjecatelja iz Splita. Prema uvjetima zadatka moguće su sljedeće ekipe: DDZHS, ZZDHS, HHDZS i SSDZH. Nakon toga se za svaku ekipu računa na koliko se načina može izabrati pojedini član:

1. Ekipa DDZHS: Dva natjecatelja iz Dubrovnika biraju se na $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ načina. Jedan natjecatelj iz Zadra bira se na 7 načina, jedan natjecatelj iz Hvara na 2 načina, a jedan natjecatelj iz Splita na 3 načina. Ukupan broj ekipa DDZHS je:
$$28 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 = 1176.$$
2. Ekipa ZZDHS: Dva natjecatelja iz Zadra biraju se na $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ način. Jedan natjecatelj iz Dubrovnika bira se na 8 načina, jedan natjecatelj iz Hvara na 2 načina, a jedan natjecatelj iz Splita na 3 načina. Ukupan broj ekipa ZZDHS je:
$$21 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3 = 1008.$$
3. Ekipa HHDZS: Oba natjecatelja iz Hvara su članovi ekipe pa ih se može odabrati samo na 1 način. Jedan natjecatelj iz Dubrovnika bira se na 8 načina, jedan natjecatelj iz Zadra na 7 načina, a jedan natjecatelj iz Splita na 3 načina. Ukupan broj ekipa HHDZS je:
$$1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 = 168.$$
4. Ekipa SSDZH: Dva natjecatelja iz Splita biraju se na $\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ načina. Jedan natjecatelj iz Dubrovnika bira se na 8 načina, jedan natjecatelj iz Zadra na 7 načina, a jedan natjecatelj iz Hvara na 2 načina. Ukupan broj ekipa SSDZH je:
$$3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2 = 336.$$

Na kraju se rješenje zadatka dobije, po principu sume, zbrajanjem dobivenih rješenja:

$$1176 + 1008 + 168 + 336 = 2688.$$

Pogledajmo sada zadatak za osmi razred osnovne škole sa državnog natjecanja iste godine.

Zadatak 2.2. *(Državno natjecanje iz matematike 2021., 8.razred, [23])*
Dvanaest prijatelja odlučilo je n večeri zaredom izaći na zajedničku večeru. U svakom od tih n izlazaka oni se raspoređuju tako da sjede oko m stolova, za svakim stolom isti broj prijatelja. Pitanje je može li svaki od njih barem jednom sjediti za istim stolom sa svakim od 11 preostalih prijatelja, ovisno o različitim kombinacijama n i m.

Među 12 prijatelja ima $\binom{12}{2} = 66$ parova prijatelja. Može li svaki od 66 parova barem jednom sjediti za istim stolom? Metodom pogađanja pogledajmo nekoliko slučajeva broja stolova(m) i broja večeri(n).

- $n = 5$ i $m = 4$: Za svakim od 4 stola sjede 3 prijatelja te se za jednim stolom mogu ostvariti 3 zajednička sjedenja. Budući da je stolova 4, a različitih večera 5, nije moguće ostvariti više od $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ zajedničkih sjedenja, pa tako ni 66.

- $n = 4$ i $m = 3$: Za svakim od 3 stola sjede 4 prijatelja te se za jednim stolom mogu ostvariti 6 zajedničkih sjedenja, a na ukupno 3 stola 18 zajedničkih sjedenja. Na sljedećoj večeri nije moguće ostvariti toliko novih zajedničkih sjedenja. Promotrimo 4 osobe koje su na prethodnoj večeri sjedile za istim stolom. Barem dvije od njih moraju i na sljedećoj večeri sjediti za istim stolom, jer je stolova ukupno 3. Kako imamo ukupno 3 stola, imamo i tri para takvih osoba koji će i na sljedećoj večeri morati biti za istim stolom. To znači da na sljedećoj večeri može biti najviše $18 - 3 = 15$ zajedničkih sjedenja, tj. za 4 večere to je najviše $18 + 15 + 15 + 15 = 63$ zajedničkih sjedenja, pa ne mogu ostvariti 66 zajedničkih sjedenja.

- $n = 3$ i $m = 2$: U ovom slučaju je moguć takav raspored. Označimo prijatelje brojevima od 1 do 12.

  – 1. večera:
    * 1. stol: 1, 2, 3, 4, 5, 6
    * 2. stol: 7, 8, 9, 10, 11, 12

  – 2. večera:
    * 1. stol: 1, 2, 3, 7, 8, 9
    * 2. stol: 4, 5, 6, 10, 11, 12

  – 3. večera:
    * 1. stol: 1, 2, 3, 10, 11, 12
    * 2. stol: 4, 5, 6, 7, 8, 9

  Očito je takav raspored dobar. Naime, prijatelje smo podijelili u 4 grupe (1-3, 4-6, 7-9, 10-12), svaka od grupa je međusobno ostvarila zajedničko sjedenje na svakoj večeri, a svaka od te grupe je bila s onom drugom grupom jednom za istim stolom.

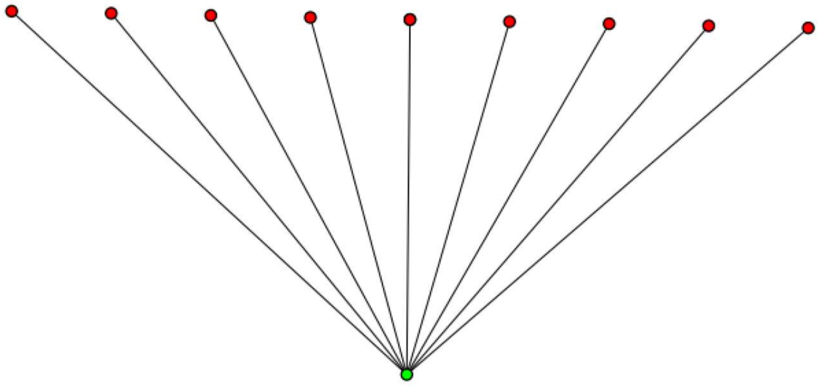
Primijetimo kako su se u Zadatku 2.1 za rješenje koristile kombinacije bez ponavljanja, dok se u Zadatku 2.2, uz kombinacije bez ponavljanja, pomoću kojih se dobije ukupan broj parova prijatelja, treba koristiti i analiza maksimalnog broja zajedničkih sjedenja koji se mogu ostvariti raspodjelom prijatelja po stolovima. Dakle, težina zadatka se, kroz četiri razreda, znatno povećala. Ovakvi zadatci potiču napredne učenike na razvijanje vještina rješavanja problema, što je korisno za njihov intelektualni razvoj. "Učenjem kombinatorike razvijaju se svi matematički procesi: prikazivanje i komunikacija, povezivanje, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje problema i matematičko modeliranje te primjena tehnologije.", [12]. S druge strane, zadatci ove vrste mogu biti vrlo zahtjevni za prosječnog učenika tog uzrasta, što bi moglo dovesti do frustracije i gubitka interesa za matematiku. Zato je važno postupno kroz godine "otežavati" zadatke. No, da bi se to moglo, ključno je s kombinatorikom početi u nižim razredima na najosnovnijim primjerima. Zatim, kroz godine, postepeno uvoditi nove kombinatorne principe. Idući zadatak je sa školskog natjecanja za četvrti razred osnovne škole.

Zadatak 2.3. *(Školsko natjecanje iz matematike 2020., 4.razred, [23]) Na šahovskom turniru sudjelovalo je 10 igrača. Svaki je igrač igrao sa svakim od preostalih igrača po jednu partiju.*

1. *Koliko je svaki pojedini igrač odigrao partija?*

2. *Koliko je ukupno partija šaha odigrano na tom turniru?*

Riješimo najprije ovaj zadatak kako bi to trebali riješiti učenici četvrtog razreda. Svaki igrač igra protiv svakog od preostalih igrača. Ako imamo 10 igrača, svaki igrač će igrati sa 9 drugih igrača. Dakle, svaki igrač odigra 9 partija. Do ovog zaključka bi se moglo doći i crtanjem grafa, kao što je prikazano na Slici 8, u kojem točke simboliziraju igrače. Crtanje



Slika 8: Grafički prikaz broja partija koji svaki igrač (zelena točka) odigra sa svim ostalim igračima (crvene točke). Slika preuzeta s [23]

grafova korisna je metoda poučavanja permutacija, o čemu ćemo više u Poglavlju 3.
Za drugi dio zadatka ispisat ćemo sve moguće partije koje igrači mogu igrati, pazeći da se već zapisane partije ne ponavljaju.

- Igrač 1: 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 1-7, 1-8, 1-9, 1-10 (9 partija)
- Igrač 2: 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 2-7, 2-8, 2-9, 2-10 (8 partija)
- Igrač 3: 3-4, 3-5, 3-6, 3-7, 3-8, 3-9, 3-10 (7 partija)
- Igrač 4: 4-5, 4-6, 4-7, 4-8, 4-9, 4-10 (6 partija)
- Igrač 5: 5-6, 5-7, 5-8, 5-9, 5-10 (5 partija)
- Igrač 6: 6-7, 6-8, 6-9, 6-10 (4 partija)
- Igrač 7: 7-8, 7-9, 7-10 (3 partije)
- Igrač 8: 8-9, 8-10 (2 partije)
- Igrač 9: 9-10 (1 partija)

Ukupno: $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ partija.
Ovaj zadatak je dobar primjer kako se već u četvrtom razredu grade temelji za razumijevanje kombinacija i permutacija. Dobra bi praksa bila dati učenicima ovaj primjer u višim razredima, možda čak unutar redovne nastave u srednjoj školi, kao motivaciju. Kada ga učenici riješe na jedan od gore navedenih načina, uvesti pojmove permutacija i kombinacija te ih pojasniti na danom primjeru. Učenici bi na kraju sata trebali zaključiti da su zadatak mogli riješiti na sljedeći način. Ukupan broj partija možemo izračunati pomoću kombinacija. U

ovom slučaju iz skupa od 10 igrača biramo 2 igrača koja čine par. Broj parova igrača koji su igrali jedan protiv drugoga je:

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

Također, možemo razmisliti na sljedeći način: svaki od 10 igrača igra 9 partija, pa bi ukupno odigranih partija bilo

$$10 \cdot 9 = 90.$$

Međutim, ovdje smo svaku partiju brojili dva puta (jer partija između A i B je ista kao partija između B i A). Dakle, moramo podijeliti s 2:

$$\frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

3. Strategije i metode za poučavanje kombinatorike

Uloga učitelja u poučavanju kombinatorike ključna je za razvijanje učenikove sposobnosti kritičkog i analitičkog razmišljanja. Kroz primjenu različitih strategija i metoda, učitelji mogu učinkovito voditi učenike kroz složene kombinatoričke koncepte, osiguravajući razumijevanje i primjenu stečenih znanja u stvarnim situacijama. Učiteljev primarni zadatak je prepoznati miskoncepcije koje učenik ima, a onda ih i nastojati otkloniti. Tijekom usvajanja kombinatornih principa učenici mogu doživjeti "paniku" suočavajući se sa zadatkom kojeg ne razumiju, što ih navodi da uvijek traže formulu kao najbrže rješenje, bez istinskog razumijevanja zadatka, [16]. Važno je da učitelji ne pružaju odmah najbrže rješenje ili formulu za rješavanje problema, jer takav pristup nije učinkovit te dovodi do nerazumijevanja osnovnih koncepata i učenja formula napamet.
Učenje kombinatorike najučinkovitije je kada se učenici aktivno angažiraju i samostalno dolaze do novih ideja i metoda. Kada naiđu na problem koji ne mogu riješiti, dobro je da o njemu raspravljaju s drugim učenicima u razredu. Iako se često čini da su svi zapeli, razmjena bilješki i različitih ideja može otvoriti više puteva do rješenja. Ponekad će otkriti da postoji više načina za tumačenje problema, što ih potiče na zajedničko promišljanje o zadatku. Cilj je da učenici nauče kako samostalno otkrivati ideje i metode, a ne samo primjenjivati unaprijed zadane formule. [1] navodi da ovakav način učenja vodi do dubljeg razumijevanja i učinkovitijeg usvajanja kombinatornih principa, jer rješavanje problema potiče razvoj intuicije i kreativnog razmišljanja.

3.1. Placemat metoda

Izvrstan primjer strategije suradničkog učenja je Placemat metoda. Učenici su podijeljeni u male grupe. Svaki učenik piše svoje ideje na svoj dio papira, a zatim zajedno raspravljaju i pišu zajedničke zaključke u središnji dio papira. Ova metoda potiče suradnju, razvoj kritičkog mišljenja i aktivno uključivanje svih učenika. Eksperiment proveden u odabranoj srednjoj školi u Slovačkoj Republici, [4], pokazao je da su kroz Placemat metodu učenici razvili bolje razumijevanje matematičkih koncepata i poboljšali uspjeh u rješavanju zadataka usmjerenih na kombinatorna načela. Eksperimentalna grupa, koja je koristila Placemat metodu, postigla je statistički značajno bolje rezultate u završnom testiranju u usporedbi s kontrolnom grupom koja je koristila tradicionalne metode poučavanja. Ovi rezultati sugeriraju da uključivanje novih metoda poučavanja, poput Placemat metode, može poboljšati razumijevanje i uspješnost učenika u kombinatorici. Evo jednog primjera zadatka koji bi se mogao dati učenicima kroz Placemat metodu.

Primjer 3.1. *Na koliko različitih načina možete obojiti trokut koristeći tri različite boje: crvenu, plavu i zelenu, tako da svaka stranica trokuta bude obojena jednom od tih boja?*

Prvi način na koji bi neki učenik mogao riješiti zadatak je zapisivanjem i prebrojavanjem svih mogućih načina. Označimo stranice trokuta kao A, B i C.

- A: crvena, B: plava, C: zelena
- A: crvena, B: zelena, C: plava
- A: plava, B: crvena, C: zelena
- A: plava, B: zelena, C: crvena

- A: zelena, B: crvena, C: plava
- A: zelena, B: plava, C: crvena

Ukupno: 6 različitih načina. Drugi bi se učenik mogao dosjetiti crtati trokute kombinirajući boje stranica. Treći bi učenik mogao razmišljati u smjeru permutacija. Ako za stranicu A imamo na raspolaganju sve tri boje i odaberemo jednu od njih, za stranicu B tada imamo na raspolaganju dvije boje od kojih također odaberemo jednu i preostala boja nam je za stranicu C. Broj načina je onda umnožak $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Nakon što svaki učenik individualno zapiše svoje ideje na papir, podijele svoje rješenje s ostalima u grupi te nakraju donesu zajednički zaključak kojeg zapisuju u središte papira.

3.2. Princip bijekcije

Još jedna metoda koja može uvelike olakšati razumijevanje kombinatorike je Princip bijekcije. Princip bijekcije navodi da dva skupa imaju isti broj elemenata ako postoji bijekcija između njih. U [14] se tvrdi da je princip bijekcije često implicitno korišten u rješavanju kombinatoričkih problema, ali se rijetko izričito navodi u udžbenicima. Kod kombinatornih zadataka koji uključuju prebrojavanje elemenata učenici nerijetko ne mogu prepoznati koje elemente treba prebrojati. Princip bijekcije je koristan alat za rješavanje ovog problema.

Primjer 3.2. *Na koliko načina se može raspodijeliti 11 kugli sladoleda na 4 korneta?*

Riješimo ga koristeći princip bijekcije. Promotrimo nekoliko različitih načina za podijelu kugli sladoleda na kornete. Recimo da su korneti dobili redom 4, 2, 1 i 4 kugle sladoleda, tim redoslijedom; to ćemo zapisati kao OOOO+OO+O+OOOO. Ako su korneti dobili 2, 0, 5 i 4 kugli sladoleda, zapisali bismo to kao OO++OOOOO+OOOO. Sada treba pitati učenike uočavaju li neku sličnost u zapisima. Učenici bi trebali doći do zaključka kako u oba zapisa imamo 11 znakova O i 3 znaka +. Sada se problem raspodjele kugli sladoleda, pomoću principa bijekcije, zamjenjuje problemom prebrojavanja sekvenci slova O i znakova +. Pomoću učiteljevog navođenja učenici bi trebali zaključiti da se zadatak svodi na biranje tri 3 znaka + iz sekvence od ukupno 14 znakova, a to je ništa drugo nego kombinacije s ponavljanjem:

$$\binom{11+3}{3} = \binom{14}{3}.$$

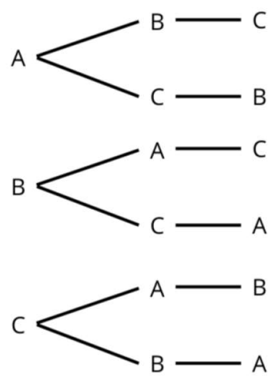
Dakle, postoji $\binom{14}{3}$ načina da se 11 kugli sladoleda raspodijeli na 4 korneta.

3.3. Crtanje grafova

Dijagrami i grafovi pomažu učenicima da vizualiziraju apstraktne kombinatorne probleme, čime se problemi čine konkretnijima i lakše razumljivima. Vizualnim prikazima učenici imaju mogućnost vidjeti odnose i strukture koje su teže prepoznati kroz samo tekstualne ili numeričke opise, [10]. Učenici mogu sami crtati dijagrame ili grafove, što ih potiče da aktivno sudjeluju u procesu učenja.

Primjer 3.3. *Na koliko različitih načina možemo rasporediti tri različite knjige A, B i C na policu?*

Treba odrediti sve moguće permutacije triju različitih knjiga na polici. Kod permutacija je poredak bitan, a upravo se to može lijepo demonstrirati pomoću grafova. Promotrimo Sliku



Slika 9: Grafički prikaz svih rasporeda tri knjige A, B i C na polici.

9. Ako prvo odaberemo knjigu A postaviti na policu, tada nakon nje možemo postaviti ili knjigu B ili knjigu C, što je prikazano prvim dvijema granama grafa. Slično zaključujemo ako se prvo odabere knjiga B i knjiga C. Na kraju je broj različitih rasporeda knjiga na policu jednak ukupnom broju grana koje sadrži graf, a to je u ovom slučaju 6.

3.4. Kombinatoričko-logičke igre

Kombinatoričko-logičke igre izvrstan su način za poticanje interesa i angažmana učenika jer učenici moraju prepoznati odnose između brojeva i koristiti kombinatoričke tehnike za pronalaženje rješenja, čime razvijaju kritičko razmišljanje i preciznost, [24]. Neke od poznatijih kombinatoričko- logičkih igara su šah, bridž, slaganje Rubikove kocke, i možda najpopularnija od svih kombinatoričko-logičkih igara, Sudoku.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Slika 10: Sudoku, preuzeto iz [25]

Sudoku je igra s jednostavnim pravilima, [3]: svaki od devet redaka, devet stupaca i devet 3x3 kvadrata unutar mreže 9x9 mora sadržavati sve brojeve od 1 do 9, pri čemu se svaki broj može pojaviti samo jednom u svakom retku, stupcu i kvadratu. Sudoku zagonetke su popularne i zabavne, što ih čini izvrsnim alatom za motiviranje učenika. Ove igre ne samo da zabavljaju učenike, već ih također uvode u osnovne kombinatoričke principe na intuitivan i praktičan način, potičući kreativno razmišljanje i rješavanje problema. "Prednosti igre sudoku su izuzetno jednostavna pravila i to što vam ne treba suigrač, a možete je igrati bilo gdje i bilo kada.", [3]. Zato je sudoku vrlo praktičan alat za razbijanje monotonije i poticanje motivacije kod učenika.

4. Miskoncepcije u poučavanju kombinatorike

Miskoncepcije (pogrešna shvaćanja) učenika pri učenju kombinatorike mogu značajno ometati njihovo razumijevanje i rješavanje kombinatornih problema. Neke od najčešćih miskoncepcija su:

1. **Sve kombinacije/permutacije imaju isti broj mogućnosti.** Učenici često misle da, bez obzira na specifičnosti problema, svaka kombinacija ili permutacija ima isti broj mogućih načina. Primjerice učenici mogu misliti da je broj načina za odabrati 3 člana iz grupe od 5 isti kao broj načina za odabrati 3 člana iz grupe od 7, ili da je broj načina za rasporediti 3 različita objekta isti bez obzira na to koliko objekata imamo na raspolaganju. Kada uoče ovu miskoncepciju kod učenika, učitelji trebaju demonstrirati kako se broj kombinacija povećava kada se poveća broj elemenata u skupu. U tome će najbolje pomoći vizualizacija problema preko grafova ili nekih drugih vizualnih alata.

2. **Kombinatorni problemi su isti kao i aritmetički.** Učenici često misle da se kombinatorni problemi mogu riješiti jednostavnim aritmetičkim operacijama. Mogu pretpostaviti da je broj načina za rasporediti 3 različita objekta u 3 različita položaja isti kao i zbroj tih brojeva $(3 + 2 + 1)$. Kako bi to spriječio, učitelj bi trebao uvoditi nove principe korak po korak kroz praktične primjere koji su bliski učenicima.

3. **Redoslijed nije važan.** Učenici često zanemaruju redoslijed elemenata u permutacijama, misleći da je rezultat isti bez obzira na redoslijed. Primjerice mogu zaključiti da su permutacije ABC i CAB iste. Učitelji trebaju jasno objasniti razliku između permutacija, gdje je redoslijed važan, i kombinacija, gdje redoslijed nije važan. Koristeći konkretne primjere i zadatke, učenici trebaju identificirati i primijeniti ispravan princip.

4. **Korištenje pogrešnih formula.** Učenici pomiješaju formule za kombinacije, permutacije ili varijacije. Učitelji najprije trebaju biti sigurni da nisu učenicima dali gotove formule, nego da iza svake formule stoji kombinatorno načelo koje su učenici usvojili. Ako i tada učenici koriste krive formule, mogu se poslužiti zadatcima u kojima se provjerava razumijevanje i pravilno korištenje formule. Na primjer, mogu kreirati zadatke koji uključuju izbor elemenata s ponavljanjem i bez ponavljanja i tražiti od učenika da identificiraju ispravnu formulu. Svakako je dobro ponuditi učenicima zadatak u kojemu se mogu primijeniti i kombinacije i permutacije te na njemu pojasniti u kojem dijelu se koristi koja formula.

5. **Ne razumijevanje osnovnih koncepata.** Primjerice učenici mogu misliti da je izbor 3 elementa iz skupa od 5 isti kao izbor 5 elemenata iz skupa od 3. Osnovne koncepte treba uvoditi kroz aktivnosti koje uključuju manipulaciju stvarnim objektima (poput kartica, blokova ili kuglica) kako bi učenici fizički isprobali sve moguće kombinacije ili permutacije za različite skupove elemenata. Koristeći igre i zadatke koji uključuju grupiranje i uređenje objekata, učenici mogu intuitivno razumjeti osnovne kombinatoričke principe. Na primjer, učenici mogu koristiti blokove ili druge objekte za stvaranje različitih skupova i podskupova, čime se potiče praktično razumijevanje kombinatorike.

Literatura

[1] K.P. Bogart, *Combinatorics through guided discovery.*, Kenneth P. Bogart. 2004.

[2] M. Bóna, *A walk through combinatorics: an introduction to enumeration and graph theory.*, 2002.

[3] Ž. Čulić, *Sudoku i druge popularne kombinatorno-logičke društvene igre. Matematičko fizički list*, **65(260)**,(2015) 278-284.

[4] V. T. Ďuriš, G. Pavlovičová, D. Gonda, A. Tirpáková , *Teaching combinatorial principles using relations through the placemat method. Mathematics*, **9(15)**,(2021) 1825.

[5] N. Elezović, B. Dakić, *Matematika 4 Brojevi, kombinatorika, vjerojatnost, nizovi*, Element, Zagreb, 2003. (udžbenik)

[6] A. Golemac, D. Šarac i T. Vučičić , *Pascalov trokut za t-dizajne. Math. e*, **21(1)**,(2012) 30-38.

[7] D. Guichard, *An introduction to combinatorics and graph theory.* Whitman College-Creative Commons, 2017.

[8] U. T. Jankvist, M. Niss , *Counteracting destructive student misconceptions of mathematics. Education Sciences*, **8(2)**,(2018) 53.

[9] M. Kajinić, *Kombinatorika u zadacima s natjecanja*, Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2021. (diplomski rad)

[10] V. Krekić-Pinter, J. Ivanović, Ž. Namestovski i L. Major, *Strategy and methods for solving combinatorial problems in initial instruction of mathematics. International Journal of Modern Education Research*, **2(6**,(2015) 77-87.

[11] S. Majstorović, *Dirichlet's box principle. Osječki matematički list*, **6(2)**,(2006) 99-105.

[12] A. Martinović, *Kombinatorika u nastavi matematike*, Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2023. (diplomski rad)

[13] M. Mikić, *Osnovni principi kombinatorike u teoriji vjerojatnosti*, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, 2019. (završni rad)

[14] M. Spira, *The bijection principle on the teaching of combinatorics. In Trabajo presentado en el 11th International Congress on Mathematical Education*, Monterrey, México. 2008.

[15] M. Stepić, K. Brleković, A. Brmbota, S. Lopardić i M. Balat, *Digitalni obrazovni sadržaji Matematika 3.*, `https://edutorij-admin-api.carnet.hr/storage/extracted/2260128/html/337_kombinatorika`

[16] E. Syahputra, *Combinatorial Thinking. Analysis of student difficulties and alternative solution.* In Proceedings of the Third Annual International Seminar on Trends in Science and Science Education, Medan, Indonesia, (2016) 7-8.

[17] R. Wilson i J.J. Watkins, *Combinatorics: ancient & modern.* OUP Oxford, 2013.

[18] https://element.hr/wp-content/uploads/2020/06/unutra-13680.pdf

[19] https://mzo.gov.hr/UserDocsImages/dokumenti/Publikacije/Predmetni/Kurikulumi%20nastav

[20] https://www.geeksforgeeks.org/discrete-mathematics-the-pigeonhole-principle/

[21] https://hr.izzi.digital/DOS/134964/409648.html

[22] https://brilliant.org/wiki/combinatorics/

[23] https://natjecanja.math.hr/

[24] https://www.kraket.nl/en/sector/article/2021-01-04-the-combinatorics-of-sudoku

[25] https://hr.wikipedia.org/wiki/Sudoku

Sažetak

U ovom diplomskom radu govori se o primjeni kombinatorike u osnovnoškolskom obrazovanju. Ističe se da je kombinatorika ključna za razvoj matematičkog razmišljanja kod učenika te da bi trebala biti integrirana u nastavni plan od rane dobi. Rad se sastoji od nekoliko ključnih poglavlja koja pokrivaju osnovne principe prebrojavanja, primjere kombinatorike u osnovnoj školi, strategije i metode poučavanja te miskoncepcije i njihove prevencije. Naglašava se važnost korištenja konkretnih primjera, vizualizacije problema, manipulacije stvarnim objektima i korištenje kombinatoričko-logičkih igara kako bi se učenici motivirali i angažirali u učenju. Različite metoda poučavanja mogu pomoći u prevladavanju uobičajenih miskoncepcija i poboljšati razumijevanje kombinatoričkih principa, čime se potiče dublje i trajnije učenje.

Ključne riječi: Kombinatorika, Permutacije, Kombinacije

Combinatory principles in primary school education

Summary

This thesis discusses the application of combinatorics in primary education. It emphasizes that combinatorics is crucial for developing mathematical thinking in students and should be integrated into the curriculum from an early age. The thesis consists of several key chapters covering the basic principles of counting, examples of combinatorics in primary school, teaching strategies and methods, and misconceptions and their prevention. The importance of using concrete examples, problem visualization, manipulation of real objects, and combinatorial-logical games is highlighted to motivate and engage students in learning. Various teaching methods can help overcome common misconceptions and improve the understanding of combinatorial principles, fostering deeper and more lasting learning.

Keywords: Combinatorics, Permutations, Combinations

Životopis

Rođena sam 28. prosinca 1997. godine u Osijeku, a trenutno živim u Karlovcu. Moj obrazovni put započeo je u Osnovnoj školi "Grigor Vitez" Osijek. Nakon osnovne škole, upisala sam Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Osijeku, koju sam završila 2016. godine. Zatim sam upisala Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, koji sada nosi naziv Fakultet primijenjene matematike i informatike. Preddiplomski studij završila sam 2021. godine završnim radom "Pravčaste plohe," pod mentorstvom doc. dr. sc. Ljiljane Primorac Gajčić. Iste godine upisala sam Diplomski nastavnički studij matematike i informatike. Tijekom studiranja radila sam na Poljoprivrednom Institutu Osijek i u trgovačkom lancu "Kaufland". Od rujna 2023. godine radim u Ekonomsko-turističkoj školi u Karlovcu na mjestu nastavnice matematike i informatike.