Hermitski operatori

Knežević, Jasmina

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studiji Matematika

Jasmina Knežević

Hermitski operatori

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Jasmina Knežević

Hermitski operatori

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2023.

Sažetak: Tema ovog završnog rada su hermitski operatori. Hermitski operator je linearni operator koji je jednak svom hermitski adjungiranom operatoru, odnosno operatoru koji se dobiva transponiranjem i kompleksno konjugiranjem tog linearnog operatora. U radu su objašnjena važna svojstva hermitskih operatora, definirana je hermitska matrica te je naveden bitan teorem o dijagonalizaciji hermitske matrice.

Ključne riječi: hermitski adjungiran operator, hermitski operator, hermitska matrica

Hermitian operator

Abstract: The topic of this final paper is hermitian operators. A hermitian operator is a linear operator that is equal to its hermitian adjoint operator, that is, the operator obtained by transposing and complex conjugation of that linear operator. In the paper, the important properties of hermitian operators are explained, the hermitian matrix is defined, and an important theorem on the diagonalization of the hermitian matrix is stated.

Keywords: hermitian adjonit operator, hermitian operator, hermitian matrix

Sadržaj

Uvod

Tema ovog završnog rada su hermitski operatori. Hermitski operator je linearni operator koji je jednak svom hermitski adjungiranom operatoru, odnosno operatoru koji se dobiva transponiranjem i kompleksno konjugiranjem tog linearnog operatora. Naziv su dobili u čast francuskom matematičaru Charlesu Hermitu, predvodniku proučavanja teorije hermitskih operatora. Fundamentalni su koncept u linearnoj algebri, koji se koristi za razumijevanje i analizu različitih matematičkih i fizičkih problema, posebno u kontekstu kvantne mehanike.

U prvom poglavlju opisani su ključni pojmovi potrebni za bolje shvaćanje hermitskih operatora. Definirani su skalarni produkt i prostor na kojemu je on definiran, odnosno unitarni prostor. Opisana je ortogonalnost te je uveden pojam ortonormirane baze. Definiran je hermitski adjungirani operator, te su navedena njegova važna svojstva.

Drugo poglavlje bavi se hermitskim operatorima i njihovim svojstvima. Uveden je pojam hermitske matrice, te su navedeni teoremi vezani za svojstvene vrijednosti i svojstvene potprostore hermitskog operatora, te teorem o dijagonalizaciji hermitskog operatora, odnosno matrice pripadnog operatora.

1. Osnovni pojmovi

Prije nego što detaljnije istražimo pojam hermitskih operatora, pažnju ćemo posvetiti pojmovima koji će nam pomoći da bolje razumijemo hermitske operatore. Sve definicije navedene u ovom poglavlju preuzete su iz [1, 2].

1.1. Unitarni prostor i ortogonalnost

Najprije, prisjetimo se definicije vektorskog prostora koji je osnova na kojoj se grade različite vrste prostora, uključujući unitarne prostore, te je zbog toga ključan za razumijevanje i definiranje tih specifičnih matematičkih struktura.

Definicija 1.1. *Vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ je uređena trojka $(P, +, \cdot)$, gdje je P neprazan skup, $+$ je binarna operacija zbrajanja u P, $\cdot$ je binarna operacija množenja sa skalarima iz polja $\mathbb{K}$. Da bi uređena trojka $(P, +, \cdot)$ bila vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$, moraju se zadovoljiti sljedeći uvjeti:*

1. *Asocijativnost zbrajanja u skupu P: za sve $p, q, g \in P$, vrijedi $p + (q + g) = (p + q) + g$.*
2. *Postojanje neutralnog elementa: postoji element $0 \in P$ takav da za svaki vektor $p \in P$ vrijedi $p + 0 = 0 + p = p$.*
3. *Postojanje suprotnog elementa: za svaki vektor $p \in P$ postoji vektor $(-p) \in P$ takav da vrijedi $p + (-p) = (-p) + p = 0$.*
4. *Komutativnost zbrajanja u skupu P: za sve vektore p i q iz P vrijedi $p + q = q + p$.*
5. *Kvaziasocijativnost množenja: za sve skalarne vrijednosti α, β iz polja $\mathbb{K}$ i sve vektore p iz P vrijedi $\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p$*
6. *Distributivnost množenja skalarima u odnosu na zbrajanje skalara: za sve skalarne vrijednosti α, β iz polja $\mathbb{K}$ i sve vektore p iz P vrijedi $(\alpha + \beta)p = \alpha p + \beta p$.*
7. *Distributivnost množenja skalarima u odnosu na zbrajanje vektora: za sve skalarne vrijednosti α iz polja $\mathbb{K}$ i sve vektore $p, q \in P$ vrijedi $\alpha(p + q) = \alpha p + \alpha q$.*
8. *Netrivijalnost množenja skalarima: za svaki vektor $p \in P$ vrijedi $1 \cdot p = p$.*

Elemente vektorskog prostora nazivamo vektorima, dok elemente polja $\mathbb{K}$ nazivamo skalarima.

Definirajmo sada bazu vektorskog prostora koja je bitna jer omogućuje jedinstveno predstavljanje svakog vektora u prostoru kao linearnu kombinaciju elemenata te baze. Također baza nam pruža način za računanje koordinata vektora, olakšavajući analizu i manipulaciju njima. Određuje dimenziju vektorskog prostora, što je ključno za razumijevanje njegove veličine i strukture. Uvedimo, prije definiranja baze, pojam linearne kombinacije koja se spominje u definiciji baze.

Definicija 1.2. *Neka je P vektorski prostor nad polje $\mathbb{K}$, te neka su $p_1, ..., p_l$ vektori iz P, $\alpha_1, ..., \alpha_l$ skalari iz $\mathbb{K}$ i $l \in \mathbb{N}$. Tada izraz oblika*

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i$$

nazivamo linearna kombinacija vektora $p_1, ..., p_l$ s koeficijenitima $\alpha_1, ..., \alpha_l$.

Definicija 1.3. *Baza vektorskog prostora P je podskup B od P koji zadovoljava dvije ključne osobine: prvo, elementi u B su linearno nezavisni, što znači da se niti jedan element iz B ne može izraziti kao linearna kombinacija drugih elemenata iz B; drugo, B razapinje cijeli vektorski prostor P, što znači da se svaki element iz P može izraziti kao linearna kombinacija elemenata iz B.*

Definicija 1.4. *Broj elemenata baze vektorskog prostora P je dimenzija tog prostora i označava se kao dim P. Za vektorski prostor kojemu je baza konačan skup kažemo da je konačnodimenzionalan.*

Pojam potprostora vektorskog prostora P je važan jer omogućuje dublje razumijevanje prostora i primjenu vektorskog prostora u različitim matematičkim kontekstima.

Definicija 1.5. *Potprostor vektorskog prostora P je neprazan podskup L od P koji je također i sam vektorski prostor uz iste operacije kao i P.*

Definicija 1.6. *Presjek potprostora L i N vektorskog prostora P je također i sam potprostor.*

Unija dvaju potprostora vektorskog prostora u većini slučajeva neće biti vektorski prostor, zbog toga možemo potražiti najmanji potprostor od P koji sadrži uniju ta dva potprostora.

Definicija 1.7. *Suma potprostora L i N od P, u oznaci $L + N$, je najmanji potprostor od vektorskog prostora P koji sadrži potprostore L i N.*

Definirajmo sada svojstva potprostora koja će nam biti potrebna u nastavku rada.

Definicija 1.8. *Suma potprostora je direktna kada je presjek potprostora prazan skup, što znači da ti potprostori nemaju zajedničkih elemenata osim nulvektora. Za potprostor N od P kažemo da je direktan komplement potprostora L ako je suma potprostora L i N direktna.*

Definirajmo sada preslikavanje na vektorskom prostoru uz koje će vektorski prostor biti unitarni prostor. Unitarni prostor je ključan za definiranje i proučavanje hermitskih operatora.

Definicija 1.9. *Skalarni produkt na vektorskom prostoru P nad poljem $\mathbb{K}$ je preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : P \to \mathbb{K}$ koje zadovoljava sljedeća svojstva:*

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0, \ \forall x \in P;$

(2) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

(3) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \ \forall x, y, z \in P;$

(4) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall x, y \in P.$

Definicija 1.10. *Unitarni prostor je vektorski prostor na kojemu je definiran skalarni produkt.*

Primjer 1.1. *Jedan primjer unitarnog prostora je $\mathbb{R}^n$. Neka su $\alpha_1, ..., \alpha_n > 0$ fiksni realni brojevi. Za vektore $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ definiramo*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i.$$

Preslikavanje definirano na ovaj način je (standardni) skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$.

Za vektore iz unitarnog prostora P uvodimo pojam norme, odnosno duljine vektora.

Definicija 1.11. *Preslikavanje* $\|\cdot\|\colon P \to \mathbb{R}$ *definirano s*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

naziva se norma na unitarnom prostoru P.

Norma iz prethodne definicije naziva se norma inducirana skalarnim produktom.

Propozicija 1.1 (Vidi [1], Propozicija 6.1.7.)**.** *Za preslikavanje iz definicije 1.11 vrijede sljedeća svojstva:*

(1) $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in P$;

(2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|,\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x \in P$;

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall x, y \in P$.

Elementima unitarnog prostora P prirodno je, zbog definiranja skalarnog produkta i norme na P, pridružiti pojam normiranosti i ortogonalnosti.

Definicija 1.12. *Neka je* P *unitarni prostor. Za vektor* x *iz* P *kažemo da je normiran (jedinični) ako je* $\|x\| = 1$.

Definicija 1.13. *Neka je* P *unitarni prostor. Za vektore* $x,y \in P$ *kažemo da su međusobno okomiti ili ortogonalni (oznaka:* $x \perp y$*) ako je*

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

Za konačan skup vektora $\{e_1, ..., e_k\}$ *kažemo da je ortogonalan ako* $\forall i \neq j$ *vrijedi*

$$\langle e_i, e_j\rangle = 0.$$

Skup $\{e_1, ..., e_k\}$ *je ortonormiran ako je ortogonalan i ako je svaki vektor iz tog skupa normiran.*

Definicija 1.14. *Ortonormirani skup* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *u unitarnom prostoru* P *je ortonormirana baza ako je taj skup ujedno i baza za* P.

Sljedeći korolar ukazuje na egzistenciju ortonormirane baze u konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru.

Korolar 1.1 (Vidi [1], Korolar 6.1.17)**.** *Svaki konačnodimenzionalni unitarni prostor ima ortonormiranu bazu.*

Unitarni prostor je i sam vektorski prostor pa vrijede sva svojstva vektorskog prostora. Također svaki unitarni prostor ima potprostor za kojeg vrijede sljedeće tvrdnje.

Definicija 1.15. *Neka je* L *potprostor unitarnog prostora* P. *Ortogonalan komplement potprostora* L *je*

$$L^{\perp} = \{x \in P\colon \langle x, v\rangle = 0,\ \forall v \in L\}. \tag{1}$$

Posljedica definicije 1.15 je sljedeći teorem.

Teorem 1.1 (Vidi [1], Teorem 6.1.21.). *Neka je P konačnodimenzionalni unitarni prostor i L potprostor od P. Tada je $L^{\perp}$ (jedan) direktan komplement od L u P.*

Ortogonalni komplement potprostora L je također potprostor od P. Unitarni prostor P obično zapisujemo kao $P = L \bigoplus L^{\perp}$.

Promotrimo sada preslikavanja unitarnih prostora, odnosno definirajmo operatore na unitarnim prostorima za koje vrijede dodatna korisna svojstva koja slijede iz strukture unitarnih prostora. Prvo pogledajmo linearne funkcionale.

Definicija 1.16. *Neka je P unitarni prostor nad poljem $\mathbb{K}$. Neka je $v \in P$ proizvoljni fiksni vektor iz P. Preslikavanje*

$$f_v \colon P \to \mathbb{K}$$

definirano s

$$f_v(p) = \langle p, v \rangle$$

je linearni funkcional na P.

Teorem 1.2 (Vidi [1], Teorem 6.2.1.). *Neka je f linearni funkcional na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru P. Tada postoji jedinstveni vektor $v \in P$ takav da je $f = f_v$, odnosno*

$$f(p) = \langle p, v \rangle, \ \forall p \in P.$$

1.2. Unitarni operatori

Uzmimo da je $A \colon P \to T$ linearni operator, pri čemu su P i T konačnodimenzionalni vektorski prostori. Svojstva linearnih operatora vrijede i za operatore koji su definirani u nastavku.

Definicija 1.17. *Neka su P i T unitarni prostori takvi da je dim $P =$ dim T. Kažemo da je $A \in L(P, T)$ unitarni operator ako vrijedi*

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \ \forall x, y \in P.$$

Primjer 1.2. *Primjeri unitarnih operatora su centralna simetrija s obzirom na ishodište pravokutnog koordinatnog sustava za koju vrijedi*

$$\langle x, y \rangle \mapsto \langle -x, -y \rangle,$$

te zrcaljenje na osi x

$$\langle x, y \rangle \mapsto \langle x, -y \rangle.$$

Uvjet iz definicije 1.17 možemo zapisati i pomoću norme, odnosno operator A je unitaran ako vrijedi da je $\|Ax\| = \|x\|$, za svaki x iz P. Primjetimo, unitarni operator A je bijektivan. Svojstvo injektivnosti je ispunjeno jer iz $Av = 0$, zbog uvjeta $\|Ax\| = \|x\|$, vektor v može biti jedino nulvektor. Kako za unitarni operator A vrijedi $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in P$ *i dim* $P =$ *dim* T i uz to je operator A injekcija, u tom slučaju je ispunjena i surjektivnost. Tada za operator A možemo definirati inverzni operator A^{-1}, koji je također unitarni operator. Sljedeća propozicija govori o svojstvu inverznog operatora.

Propozicija 1.2 (Vidi [1], Propozicija 6.2.6.). *Neka su P i T unitarni prostori i $A \in L(P,T)$ unitarni operator. Tada je*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^{-1}y\rangle, \ \forall x \in P, \ \forall y \in T.$$

Prije nego što iskažemo sljedeću propoziciju definirajmo pojmove koji će biti spomenuti u toj propoziciji kako bismo ju bolje razumjeli.

Definicija 1.18. *Za linearni operator $A\colon P \to P$, pri čemu je P vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$, smatra se da ima svojstvenu vrijednost λ_0 iz polja $\mathbb{K}$ ako postoji nenul vektor x u P takav da vrijedi $Ax = \lambda_0 x$. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A nazivamo spektar operatora A. Vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti nazivamo svojstveni vektor.*

Propozicija 1.3 (Vidi [1], Propozicija 6.2.9.). *Na unitarnom prostoru P definiran je unitarni operator $A \in L(P)$ s nepraznim spektrom. Apsolutna vrijednost svake svojstvene vrijednosti operatora A jednaka je 1. Za svojstvene potprostore pridružene različitim svojstvenim vrijednostima vrijedi da su međusobno ortogonalni.*

1.3. Hermitski adjungiran operator

Teorem 1.3 (Vidi [1], Teorem 6.2.9.). *Neka je $A \in L(P,T)$ pri čemu su P i T konačnodimenzionalni unitarni prostori. Postoji jedinstveni operator $A^* \in L(T,P)$ takav da je*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$$

za sve vektore x iz P i y iz T.

Definicija hermitski adjungiranog operatora direktno slijedi iz teorema 1.3.

Definicija 1.19. *Neka su P i T konačnodimenzionalani unitarani prostori i $A \in L(P,T)$. Operator $A^* \in L(T,P)$ sa svojstvom*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \ \forall x \in P, \ \ \forall y \in T$$

zove se hermitski adjungiran operator operatoru A.

Promotrimo vezu između unitarnog i hermitski adjungiranog operatora. Naime, propozicija 1.2 sugerira da ako je $A \in L(P)$ unitarni operator onda je hermitski adjunigran operator A^* operatora A jednak inverznom operatoru A^{-1} operatora A. Lako se pokaže da vrijedi i obrat ove tvrdnje.

U idućoj propoziciji iskazana je važnost matričnog prikaza hermitski adjungiranog operatora.

Propozicija 1.4 (Vidi [1], Propozicija 6.2.11.). *Neka su P i T konačnodimenzionalni unitarani prostori i neka su $e = \{e_1, ..., e_n\}$ i $f = \{f_1, ..., f_m\}$ ortonormirane baze za P i T. Tada za svaki linearni operator $A\colon P \to T$ vrijedi*

$$[A^*]_e^f = ([A]_e^f)^*.$$

Za hermitski adjungirani operator vrijede svojstva iskazana u sljedećem korolaru.

Korolar 1.2 (Vidi [1], Korolar 6.2.12.). *Za konačnodimenzionalne unitarne prostore P,T,Z vrijedi:*

1. $(A+G)^* = A^* + G^*$ *za sve* A, G *iz* $L(P,T)$;
2. $(\mu A)^* = \overline{\mu} A^*$ *za svaki* μ *iz* $\mathbb{K}$ *i za svaki* A *iz* $L(P,T)$;
3. $(GA)^* = A^* G^*$ *za svaki* A *iz* $L(P,T)$ *i za svaki* G *iz* $L(T,Z)$;
4. $(A^*)^* = A$ *za svaki* A *iz* $L(P,T)$.

Kao posljedica definicije ortogonalnog komplementa i teorema 1.1 slijedi iduća propozicija.

Propozicija 1.5 (Vidi [1], Propozicija 6.2.13.). *Neka je* A *iz* $L(P,T)$ *pri čemu su* P *i* T *konačnodimenzionalni unitarni prostori. Tada vrijedi*

$$P = \text{Ker } A \bigoplus \text{Im } A^* \text{ i } T = \text{Ker } A^* \bigoplus \text{Im } A.$$

Nadalje, vrijedi da je rang operatora A^* *jednak rangu operatora* A.

Promotrimo pobliže matrični zapis unitarnog operatora u ortonormiranoj bazi.

Propozicija 1.6 (Vidi [1], Propozicija 6.2.15.). *Neka je* $A \colon P \to P$ *linearni operator i neka je* $e = \{e_1, ..., e_n\}$ *ortonormirana baza za* P. *U tom slučaju za matrični zapis operatora* A *vrijedi*

$$[A]_e^e([A]_e^e)^* = ([A]_e^e)^*[A]_e^e = I.$$

Iz propozicije 1.6 prirodno slijedi iduća definicija.

Definicija 1.20. *Za kompleksnu kvadratnu matricu* A *kažemo da je unitarna ako vrijedi*

$$AA^* = A^*A = I.$$

Kažemo da je realna kvadratna matrica A *ortogonalna ako je*

$$AA^t = A^tA = I.$$

2. Hermitski operatori

Definicija 2.1. *Neka je P konačnodimenzionalni unitarni prostor. Kažemo da je linearni operator $A\colon P \to P$ **hermitski** ako vrijedi*

$$A^* = A.$$

Za operator $A \in L(P)$ kažemo da je antihermitski ako vrijedi da je $A^* = -A$. Ako je prostor P realan, hermitski operator nazivamo simetrični operator, a antihermitski nazivamo antisimetrični operator.

Primjer 2.1. *Neka je U unitarni prostor kojemu je L pravi potprostor. Na osnovu dekompozicije*

$$U = L \bigoplus L^{\perp}$$

i jedinstvenog prikaza svakog vektora $v \in U$ u obliku

$$v = m + n,\ m \in L,\ n \in L^{\perp},$$

na L definiramo ortogonalni projektor,

$$P\colon U \to U,\ P(v) = m.$$

Preostaje pokazati da je operator P hermitski operator. Neka je

$$u \in U,\ u = l + k,\ l \in L, k \in L^{\perp}.$$

Tada je

$$\langle Pv, u\rangle = \langle m, l + k\rangle = \langle m, l\rangle = \langle m + n, l\rangle = \langle v, Pu\rangle.$$

Za hermitski operator propozicija 1.5 iskazana je na sljedeći način:

Korolar 2.1 (Vidi [1], Korolar 6.2.22.)**.** *Neka je P konačnodimenzionalni unitarni prostor i neka je $A \in L(P)$ hermitski operator. Tada je*

$$P = \text{Ker } A \bigoplus \text{Im } A.$$

Proučimo sada matrični zapis hermitskog operatora koji nam zbog svojih specifičnih svojstava pojednostavljuje analizu i rješavanje problema u kontekstu hermitskih operatora.

Definicija 2.2. *Kaže se da je kvadratna matrica $A = [\alpha_{ij}] \in M_n$ hermitska ako vrijedi $A^* = A$, tj.*

$$\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ij}},\ \forall i, j = 1, .., n.$$

Ako je matrica realna, onda izraz hermitska matrica možemo zamijeniti izrazom simetrična matrica. Pogledamo primjere hermitske matrice u slučaju kada je ona realna i kada je kompleksna.

Primjer 2.2. *Pokažimo da je matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 8 \\ -7 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

hermitska. Kako je matrica $A \in M_3(\mathbb{R})$, za hermitski adjungiranu matricu vrijedi da je jednaka transponiranoj matrici matrice A, odnosno vrijedi da je $A^* = A^t$. Vrijedi da je

$$A^t = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 8 \\ -7 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

Kako je $A = A^t = A^*$. Očito vrijedi da je matrica A hermitska.

Primjer 2.3. *Pokažimo da je matrica*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2+3i & 4+i \\ 2-3i & 6 & 6-4i \\ 4-i & 6+4i & -8 \end{bmatrix}$$

hermitska. Pogledajmo kako izgleda matrica B^*.

$$B^* = \begin{bmatrix} 3 & 2+3i & 4+i \\ 2-3i & 6 & 6-4i \\ 4-i & 6+4i & -8 \end{bmatrix}$$

Vrijedi da je $B = B^*$ iz čega slijedi da je matrica B hermitska.

Primjer 2.4. *U ravnini $\mathbb{R}^2$ primjeri simetričnih, odnosno hermitskih matrica su*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ovim matricama su opisani realni operatori centralna simetrija i homotetija.

Sljedeća propozicija je posljedica propozicije 1.4.

Propozicija 2.1 (Vidi [1], Propozicija 6.2.24.)**.** *Neka je P konačnodimenzionalni unitarni prostor i neka je $A \in L(P)$. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(i) A je hermitski operator;

(ii) za svaku ortonormiranu bazu b u P matrica $[A]_b^b$ je hermitska;

(iii) postoji ortonormirana baza e u P takva da je matrica $[A]_e^e$ hermitska.

Propozicije u nastavku govore o svojstvima svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora te su vrlo važne za proučavanje hermitskih operatora.

Propozicija 2.2 (Vidi [1], Propozicija 6.2.26.)**.** *Neka je P kompleksni konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(P)$ hermitski operator. Sve svojstvene vrijednosti operatora A su realni brojevi.*

Dokaz. Uzmimo svojstven vektor y pridružen svojstvenoj vrijednosti μ operatora A. Sada je

$$\mu\langle y, y\rangle = \langle \mu y, y\rangle = \langle Ay, y\rangle = \langle y, Ay\rangle = \langle y, \mu y\rangle = \overline{\mu}\langle y, y\rangle.$$

Nakon dijeljenja s $\langle y, y\rangle$, što je različito od 0 jer y je svojstven vektor, dobivamo $\mu = \overline{\mu}$. □

Propozicija 2.3 (Vidi [1], Propozicija 6.2.26.)**.** *Neka je P konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(P)$ hermitski operator. Svojstveni potprostori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima operatora A međusobono su okomiti.*

Dokaz. Neka su λ, μ različite svojstvene vrijednost iz spektra operatora A i neka su v_1 *i* v_2 pripadajući svojstveni vektori za koje vrijedi

$$Av_1 = \lambda v_1, \ Av_2 = \mu v_2.$$

Sada prema prethodnoj propoziciji vrijedi da je $\overline{\mu} = \mu$, čak i u slučaju kompleksnog prostora pa je

$$\lambda\langle v_1, v_2\rangle = \langle \lambda v_1, v_2\rangle = \langle Av_1, v_2\rangle = \langle v_1, Av_2\rangle = \langle v_1, \mu v_2\rangle = \overline{\mu}\langle v_1, v_2\rangle = \mu\langle v_1, v_2\rangle.$$

Iz čega slijedi

$$(\lambda - \mu)\langle v_1, v_2\rangle = 0$$

i zbog toga je

$$\langle v_1, v_2\rangle = 0.$$

□

Da bismo iskazali i dokazali teorem koji smatramo glavnim rezultatom za hermitske operatore potrebno je iskazat sljedeću tvrdnju o spektru operatora A.

Teorem 2.1 (Vidi [1], Teorem 6.2.27.)**.** *Neka je P konačnodimenzionalni realni unitarni prostor, neka je $A \in L(P)$ hermitski operator. Tada je spekar operatora A neprazan.*

Dokaz. Neka je b ortonormirana baza u P, te neka je formirana matrica

$$[A]_b^b = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Prema propoziciji 2.1 matrica $[A]_b^b$ je hermitska. Označimo s k_A svojstveni polinom operatora A i neka vrijedi

$$k_A(\mu) = 0.$$

Trebamo pokazati da je μ realan broj. Time ćemo dokazati i više nego izraz propozicije tvrdi. Promotrimo operator množenja s matricom $[A]_b^b$ definiran na unitarnom prostoru jednostupčanih kompleksnih matrica.

$$L_{[A]_b^b} \colon M_{n1}(\mathbb{C}) \to M_{n1}(\mathbb{C}),$$

$$L_{[A]_b^b}\left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}\right) = [A]_b^b \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Na kompleksnom unitarnom prostoru dobili smo linearni operator. Očito je da u standardnoj ortonormiranoj bazi e prostora $M_{n1}(\mathbb{C})$ imamo matrični zapis

$$[L_{[A]_b^b}]_e^e = [A]_b^b.$$

Zbog toga je, prema propoziciji 2.1, operator $L_{[A]_b^b}$ hermitski. Zbog te propozicije je i svojstveni polinom operatora $L_{[A]_b^b}$ jednak je svojstvenom polinomu operatora A. Dakle, vrijedi da je μ nultočka svojstvenog polinoma operatora $L_{[A]_b^b}$ na kompleksnom prostoru $L_{[A]_b^b}$. Pošto je prostor kompleksan, onda je μ svojstvena vrijednost operatora $L_{[A]_b^b}$. Prema propoziciji 2.2 je μ realna svojstvena vrijednost. □

Teorem 2.2 (Vidi [1], Teorem 6.2.28.). *Neka je P konačnodimenzionalni unitarni prostor, neka je $A \in L(P)$ hermitski operator. Postoji ortonormirana baza e u prostoru P u kojoj je matrični zapis $[A]_e^e$ operatora A dijagonalna matrica.*

Dokaz. Teorem dokazujemo indukcijom po dimenziji prostora. Trivijalno, tvrdnja vrijedi $dim\ P = 1$.
Pretpostavit ćemo da za svaki hermitski operator na unitarnim prostorima dimenzije $n-1$ tvrdnja ovog teorema vrijedi. Neka je P unitarni prostor za koji vrijedi $dim\ P = n$ i neka je $A \in L(P)$ hermitski operator.
Prvo pronađimo jednu svojstvenu vrijednost μ za operator A. Prema prethodnom teoremu to je moguće. Neka je c jedinični svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti μ. Definirajmo

$$L \ = [\{c\}] \leq P.$$

Tada je

$$P = L \bigoplus L^{\perp}$$

i zbog toga je $dim\ L^{\perp} = n-1$.
Pokažimo da je za A potprostor $L^{\perp}$ invarijantan, odnosno da vrijedi

$$x \in L^{\perp} \implies Ax \in L^{\perp}.$$

Zaista, za to dovoljno je vidjeti $\langle a, Ax\rangle = 0$, no

$$\langle a, Ax\rangle = \langle Ax, a\rangle = \lambda\langle a, x\rangle = 0,$$

zato što smo uzeli $x \in L^{\perp}$.
Označimo restrikciju operatora A na potprostor $L^{\perp}$ s $A_1 : L^{\perp} \to L^{\perp}$. Očito je da je i taj operator linearan, te da vrijedi

$$\langle A_1x, y\rangle = \langle x, A_1y\rangle$$

za $\forall x, y \in \ L^{\perp}$ zbog toga što jednakost $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ vrijedi za svaki vektor prostora P.
Poslije svega, uočimo da smo na unitarnom prostoru $L^{\perp}$ dimenzije $n-1$ dobili hermitski operator A_1. Prema pretpostavci indukcije, postoji ortonormirana baza $\{e_2, ..., e_n\}$ prostora $L^{\perp}$ u kojem se matrica operatora A_1 dijagonalizira; tj. vrijedi

$$A_1e_i = \lambda_ie_i, \quad \forall i = 2, ..n.$$

Sada je očito da je $e = \{a, e_2, ..., e_n\}$ ortonormirana baza prostora P u kojem je matrica operatora A dijagonalna. □

Prethodni teorem možemo smatrati glavnim rezultatom za hermitske operatore jer ukazuje na to da svaki hermitski operator dozvoljava dijagonalizaciju u nekoj ortonormiranoj bazi. To nam uvelike olakšava rad s matricama zbog toga jer je najlakše računati s dijagonalnim matricama. Jedna od važnijih matričnih formulacija prethodnog teorema je sljedeći korolar.

Korolar 2.2 (Vidi [1], Korolar 6.2.31.). *Svaka hermitska matrica je unitarno slična nekoj dijagonalnoj matrici. Preciznije: ako je $H \in M_n$ hermitska matrica onda postoje dijagonalna matrica*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

pri čemu su $\lambda_1, ..., \lambda_n$ realni brojevi, i unitarna matrica U takve da je $H = UDU^{-1}$.

Primjer 2.5. *Pokažimo da za matricu $H \in M_2(\mathbb{C})$,*

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1+3i \\ 1-3i & 5 \end{bmatrix},$$

vrijedi tvrdnja iz korolara 2.2. Prvo provjerimo da je matrica H hermitska, odnosno da je $H^* = H$.

$$H^* = \begin{bmatrix} 2 & 1+3i \\ 1-3i & 5 \end{bmatrix} = H$$

Dobili smo da je matrica H hermitska. Sada trebamo pronaći matrice D i U za koje će vrijediti $H = UDU^{-1}$. Najprije pronađimo svojstvene vrijednosti za matricu H, odnosno nultočke karakterističnog polinoma za pripadnu matricu. Riješimo $k_H(\lambda) = det(H - \lambda I) = 0$.

$$det(H - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1+3i \\ 1-3i & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - (1+3i)(1-3i) = 10 - 7\lambda + \lambda^2 - 10 =$$
$$\lambda^2 - 7\lambda = 0$$

Slijedi da su svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 0 \ i \ \lambda_2 = 7,$$

pa je matrica D jednaka

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, da bismo odredili matricu U potrebno je pronaći svojstvene vektore za naše svojstvene vrijednosti. Za $\lambda_1 = 0$ svojstveni vektor ćemo izračunati tako da riješimo sustav Gauss-Jordanovom metodom. Izračunajmo

$$det(H - 0I)v_1 = 0, \ odnosno$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1+3i & | & 0 \\ 1-3i & 5 & | & 0 \end{bmatrix}$$

iz čega dobivamo

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{-1-3i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Analogno dobivamo svojstveni vektor v_2 za $\lambda_2 = 7$

$$v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1+3i}{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica U jednaka je

$$U = \begin{bmatrix} \frac{-1-3i}{2} & \frac{1+3i}{5} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Njezin inverz je matrica

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1+3i}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1-3i}{7} & \frac{5}{7} \end{bmatrix}.$$

Provjerimo vrijedi li $H = UDU^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} \frac{-1-3i}{2} & \frac{1+3i}{5} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1+3i}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1-3i}{7} & \frac{5}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7\frac{1+3i}{5} \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1+3i}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1-3i}{7} & \frac{5}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1+3i \\ 1-3i & 5 \end{bmatrix} = H.$$

U slučaju kada je matrica H realna prethodna propozicija se može preformulirati na sljedeći način :

Korolar 2.3 (Vidi [1], Korolar 6.2.32.). *Svaka simetrična matrica je ortogonalno slična dijagonalnoj matrici. To znači: ako je $H \in M_n(\mathbb{R})$ hermitska matrica onda postoje dijagonalna matrica $D \in M_n(\mathbb{R})$ i ortogonalna matrica $U \in M_n(\mathbb{R})$ za koje je*

$$H = UDU^{-1}.$$

Primjer 2.6. *Pokažimo primjerom da za realnu matricu*

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

vrijedi tvrdnja iz korolara 2.3. Prvo provjerimo da je matrica H hermitska. Kako je H realna matrica vrijedi da je $H^* = H^t$.

$$H^t = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = H$$

Iz čega slijedi da je matrica H hermitska. Sada trebamo pronaći realne matrice D i U. Pronađimo prvo svojstvene vrijednosti za matricu H, odnosno nultočke karakterističnog polinoma za pripadnu matricu. Riješimo $k_H(\lambda) = det(H - \lambda I) = 0$.

$$det(H - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 4 - 5\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = 0$$

Slijedi da su svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 0 \ i \ \lambda_2 = 5,$$

pa je matrica D jednaka

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, da bismo odredili matricu U potrebno je pronaći svojstvene vektore pripadnih svojstvenih vrijednosti. Za $\lambda_1 = 0$ svojstveni vektor ćemo izračunati tako da riješimo sustav Gauss-Jordanovom metodom. Izračunajmo

$$det(H - 0I)v_1 = 0, \ odnosno$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

iz čega dobivamo

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Analogno dobivamo svojstveni vektor v_2 za $\lambda_2 = 5$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica U jednaka je

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Njezin inverz je matrica

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Provjerimo vrijedi li $H = UDU^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = H.$$

Za hermitski operator $A \in L(P)$ kažemo da je pozitivan, odnosno pozitivno semidefinitan, u oznaci $A \geq 0$, ako je

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0, \ \forall x \in P.$$

Ukoliko iz

$$\langle Ax, x \rangle = 0$$

slijedi da je x nulvektor, za operator A kažemo da je strogo pozitivan i to označavamo s $A > 0$. Analogno definiramo negativni i strogo negativni hermitski operator. Za hermitski operator koji nije niti pozitivan niti negativan kažemo da je indefinitan.

2.1. Dekompozicije linearnog operatora

Hermitski operatori imaju puno dobrih svojstava i lako se geometriski interpretiraju. Prikazat ćemo linearne operatore kao jednostavnu kompoziciju hermitskih, antihermitskih i unitarnih operatora.

Propozicija 2.4 (Vidi [3], Propozicija 1., poglavlje 13.7.)**.** *Svaki se operator $C \in L(P)$, pri čemu je P unitarni prostor, može na jedinstven način prikazati u obliku*

$$C = H + A,$$

gdje je H hermitski, a A antihermitski operator.

Dokaz. Dokažimo prvo egzistenciju rastava. Neka je

$$H = \tfrac{1}{2}(C + C^*), \quad A = \tfrac{1}{2}(C - C^*).$$

Onda je

$$H^* = [\tfrac{1}{2}(C + C^*)]^* = \tfrac{1}{2}(C + C^*)^* = \tfrac{1}{2}(C^* + C) = \tfrac{1}{2}(C + C^*) = H,$$

pa je H hermitski, i

$$A^* = [\tfrac{1}{2}(C - C^*)]^* = \tfrac{1}{2}(C - C^*)^* = \tfrac{1}{2}(C^* - C) = -\tfrac{1}{2}(C - C^*) = -A,$$

odnosno A je antihermitski operator. Očito vrijedi

$$C = H + A$$

pa je egzistencija dokazana. Ako bi postojao još jedan rastav

$$C = \overline{H} + \overline{A}$$

za kojeg vrijedi isto svojstvo, nakon oduzimanja imali bismo

$$H - \overline{H} = \overline{A} - A,$$

pri čemu je lijeva strana očigledno hermitski, a desna strana antihermitski operator. Kako vrijedi da je operator istovremeno i hermitski i antihermitski onda i samo onda ako je nul-operator, zaključujemo da mora biti $H = \overline{H}$ *i* $A = \overline{A}$, čime je pokazana jedinstvenost rastava.

□

Operator H iz prethodne propozicije nazivamo hermitski, a operator A antihermitski dio operatora C.

Propozicija 2.5 (Vidi [3], Propozicija 2., poglavlje 13.7.)**.** *Svaki operator $C \in L(P)$, pri čemu je P kompleksni unitarni prostor, dopušta jedinstven prikaz oblika*

$$C = H + iG,$$

gdje su H i G hermitski operatori, a i imaginarna jedinica.

Dokaz. Prema propoziciji 2.4 operator C možemo zapisati u obliku

$$C = H + A = H + i(-iA),$$

pri čemu je H hermitski operator i A antihermitski operator. Zbog toga je dovoljno provjeriti da je $G = -iA$ hermitski operator. Imamo

$$G^* = (-iA)^* = iA^* = -iA = G,$$

iz čega slijedi da je G zaista hermitski operator. Lako se provjeri da je prikaz jedinstven. □

Teorem 2.3 (Vidi [3], Teorem 4., poglavlje 13.7.)**.** *Neka je $C \in L(P)$ bilo koji operator na unitarnom prostoru P. Onda operator C dopušta prikaz*

$$C = U \circ H,$$

pri čemu je U unitarni operator, a H pozitivni hermitski operator. Pritom je H jedinstven, a ako je C regularan operator, onda je i U jedinstven.

Dokaz. Promotrimo operator $C^* \circ C$. Kako je $(C^* \circ C)^* = C^* \circ C$ i vrijedi

$$((C^* \circ C)(v), v) = (C(v), C(v)) \geq 0,$$

za svaki $v \in P$, zaključujemo da je $C^* \circ C$ pozitivni operator. Postoji kvadratni korijen tog operatora, odnosno postoji jedinstveni operator H takav da je

$$H^2 = C^* \circ C.$$

Ako je sada $x \in P$ bilo koji vektor, imamo

$$(C(x), C(x)) = (x, (C^* \circ C)(x)) = (x, H^2(x)) = (H(x), H(x)),$$

iz čega slijedi da su C i H izometrički jednaki operatori. Prema lemi 3., poglavlje 13.7., iz [3] u tom slučaju postoji unitarni operator U takav da je $C = U \circ H$, pa je egzistencija tražene faktorizacije dokazana. Preostaje pokazati jedinstvenost operatora H. Neka je $C = U \circ H$ bilo koja dekompozicija traženog tipa. Tada je

$$C^* = (U \circ H)^* = H^* \circ U^* = H \circ U^{-1}$$

i

$$C^* \circ C = (H \circ U^{-1}) \circ (U \circ H) = H^2$$

iz čega slijedi da je H kvadratni korijen pozitivnog operatora koji je, budući da je H nužno pozitivan, jedinstven. Nadalje, ukoliko je C regularan onda je i H regularan, pa iz promatrane dekompozicije imamo

$$U = C \circ H^{-1}.$$

Time je dokazana i jedinstvenost operatora U. □

Napomena 2.1. *Uočimo da u prethodnom teorem tvrdnja vrijedi i za realni i za kompleksni unitarni prostor.*

Prikaz operatora iz teorema 2.3 naziva se polarna dekompozicija linearnog operatora.

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, d.d., Zagreb, 2019.

[2] D. Butković, *Predavanja iz linearne algebre*, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2008.

[3] K. Horvatić, *Linearna algebra*, Golden marketing - Tehnička knjiga, 2004.