Važne nejednakosti u teoriji vjerojatnosti

Keglević, Nera

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Nera Keglević

Važne nejednakosti u teoriji vjerojatnosti

Završni rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Nera Keglević

Važne nejednakosti u teoriji vjerojatnosti

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2016.

Sadržaj

Sažetak

U ovom radu upoznat ćemo se s nejednakostima koje su od iznimne važnosti u području vjerojatnosti i statistike. Za početak, prisjetit ćemo se osnovnih definicija i teorema koji su nam potrebni za razumijevanje spomenutih nejednakosti. U drugom dijelu rada ćemo iskazati i dokazati najvažnije nejednakosti koje nam svakodnevno pomažu prilikom određivanja vjerojatnosti, npr. Čebiševljevu, Markovljevu, Cauchy-Schwartzovu. Naposljetku, predstavit ćemo neke primjere nejednakosti iz svakodnevnog života.

Ključne riječi: nejednakosti, Čebiševljeva nejednakost, Markovljeva nejednakost, Cauchy-Schwartzova nejednakost, Hölderova nejednakost, Jensenova nejednakost, Ljapunova nejednakost, primjene nejednakosti

Abstract

In this paper we will introduce some inequalities which are very important in the field of probability and statistics. First of all, we will recall some of the basic definitions and theorems, which will help us to understand the mentioned inequalities. In the second part of the paper, the inequalities which usually help us with some probability problems will be formulated and proven (e.g. Chebyshev's, Markov's, Cauchy-Schwartz). Finally, we will introduce some examples of inequalities in everyday life.

Key words: inequalities, Chebyshev's inequality, Markov's inequality, Cauchy-Schwartz inequality, Hölder's inequality, Jensen's inequality, Lyapunov's inequality, application of inequalities

1 Uvod i motivacija

Poznavanje nejednakosti jedno je od matematičarima prijeko potrebnih znanja. Pojava teorije vjerojatnosti i nejednakosti koje su uz nju usko vezane veže se uz hazardne igre koje se pojavljuju sredinom 17. stoljeća. Nejednakosti u teoriji vjerojatnosti pojavljuju se već kod same definicije funkcije P, odnosno, poznato je da za vjerojatnost proizvoljnog događaja A uvijek vrijedi

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Osim toga, vjerojatnost je funkcija za koju vrijedi σ-subaditivnost, odnosno ako je $(A_i, i \in I)$ prebrojiva familija događaja slijedi

$$P(\cup_{i \in I} A_i) \leq \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Ovo su neke od najjednostavnijih nejednakosti, no mi ćemo se u ovom radu upoznati s nekim kompliciranijim, koje nam mogu pomoći u brojnim situacijama, kao što je na primjer određivanje vjerojatnosti odstupanja od očekivanog broja sunčanih sati na Hvaru u jednoj godini. Osim toga, nejednakosti su nam pouzdane prilikom procjenjivanja numeričkih vrijednosti (npr. očekivanja slučajne varijable), a jedan od alata, kojeg ćemo spomenuti u ovom radu je interval pouzdanosti. Kako bi nam bilo što lakše razumjeti glavni dio rada, u prvom poglavlju podsjetit ćemo se bitnih definicija i teorema koji će nam biti potrebni u nastavku. U glavnom dijelu rada navest ćemo i dokazati važne nejednakosti u teoriji vjerojatnosti. Naposljetku, u zadnjem poglavlju navest ćemo primjene nejednakosti u svakodnevnom životu.

2 Osnovni pojmovi

Dobro nam je poznato da je vjerojatnost funkcija $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, pri čemu je $\mathcal{F}$ σ-algebra, definirana na prostoru elementarnih događaja $\Omega \neq \emptyset$. Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ naziva se vjerojatnosni prostor. U nastavku ćemo najprije definirati slučajnu varijablu, koja svakom ishodu slučajnog pokusa pridružuje realan broj.

Definicija 2.1. Neka je $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ vjerojatnosni prostor i $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ σ-algebra na $\mathbb{R}$ koja sadrži otvorene podskupove od $\mathbb{R}$ i nazivamo je Borelova σ-algebra. Svaka funkcija
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ takva da je skup $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ događaj iz $\mathcal{F}$, za svaki $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, tj. $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$, za svaki $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, tj. $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, za svaki $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ nazivamo slučajna varijabla.

Slučajne varijable dijelimo na neprekidne i diskretne i one su potpuno određene svojim funkcijama distribucije koje često mogu biti komplicirane. Međutim, razvojem teorije vjerojatnosti došli smo do spoznaje da svaka slučajna varijabla ima karakteristične brojeve koji nam pomažu pri njihovom opisivanju. Ti brojevi nazivaju se numeričke karakteristike slučajne varijable, a najvažnije su matematičko očekivanje i varijanca.

2.1 Diskretna slučajna varijabla

Definicija 2.2. Slučajna varijabla $X : \Omega \to \mathbb{R}$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je diskretna ako postoji diskretan skup $D \subset \mathbb{R}$ takav da je $P(X \in D) = 1$, tj. ako joj je slika diskretan skup.

Definicija 2.3. Na diskretnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ svaka je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla i to diskretna.

Matematičko očekivanje osnovna je numerička karakteristika slučajne varijable.

Definicija 2.4. Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretan vjerojatnosni prostor i X slučajna varijabla na njemu. Ako red $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$ apsolutno konvergira, tj. ako konvergira red $\sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|P(\omega)$, onda kažemo da slučajna varijabla ima matematičko očekivanje i broj

$$E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$$

nazivamo matematičko očekivanje (očekivanje) slučajne varijable X.

U nastavku ćemo navesti neka osnovna svojstva matematičkog očekivanja diskretne slučajne varijable koja će nam pomoći pri dokazivanju nejednakosti u glavnom poglavlju rada.

Teorem 2.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *diskretan vjerojatnosni prostor i*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \cdots \end{pmatrix}$$

slučajna varijabla na njemu. Redovi $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$ *i* $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i p_i$ *istovremeno ili apsolutno konvergiraju ili apsolutno divergiraju. U slučaju apsolutne konvergencije sume su im jednake, tj. vrijedi*

$$E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i p_i.$$

Dokaz. Vidi [1, str. 86, Teorem 2.1]. □

Teorem 2.2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *diskretan vjerojatnosni prostor,*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \cdots \end{pmatrix}$$

slučajna varijabla na njemu i $g : R(X) \to \mathbb{R}$ *funkcija takva da postoji* $E(g(X))$*. Tada vrijedi*

$$E(g(X)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} g(x_i)p_i.$$

Dokaz. Vidi [1, str. 86, Teorem 2.2]. □

Koristeći prethodni teorem možemo dokazati sljedeća svojstva matematičkog očekivanja:

1. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ i X slučajna varijabla takva da postoji $E(X)$. Tada slučajna varijabla $aX + b$ ima očekivanje i vrijedi

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

2. **Monotonost očekivanja**
   Ako su X, Y slučajne varijable takve da postoje $E(X), E(Y)$ i ako je $X(\omega) \le Y(\omega)$, za svaki $\omega \in \Omega$, onda je $E(X) \le E(Y)$.

3. **Nenegativnost očekivanja**
   Ako je X slučajna varijabla koja ima očekivanje takva da je $X(\omega) \ge 0$, za svaki $\omega \in \Omega$, onda je $E(X) \ge 0$.

Teorem 2.3 (Linearnost očekivanja). *Neka su* X *i* Y *dvije slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *koje imaju očekivanja* $E(X)$*, odnosno* $E(Y)$*. Tada za proizvoljne* $a, b \in \mathbb{R}$ *slučajna varijabla* $aX + bY$ *također ima očekivanje i vrijedi*

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Dokaz. Vidi [1, str. 87, Teorem 2.3]. □

2.2 Neprekidna slučajna varijabla

Definicija 2.5. Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ i $X : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija za koju vrijedi

- $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\} \in \mathcal{F}$, za svaki $x \in \mathbb{R}$
- postoji nenegativna realna funkcija realne varijable f, takva da vrijedi

  $$P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

  za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Funkciju X zovemo apsolutno neprekidna slučajna varijabla ili neprekidna slučajna varijabla. Funkciju f tada zovemo funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable X ili samo funkcija gustoće slučajne varijable X.

Svojstva funkcije gustoće

1. nenegativnost: $f(x) \geq 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.
2. normiranost:

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

   Dokaz. Vidi [1, str. 61, 2)]. □

3. Vjerojatnost da slučajna varijabla X, čija je funkcija gustoće f, primi vrijednost iz intervala $(a, b]$ može se izračunati korištenjem funkcije gustoće na sljedeći način

   $$P(a < X \leq b) = P(X \in (a, b]) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

   Dokaz. Vidi [1, str. 61, 3)]. □

Definicija 2.6. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Ako je konačan integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx,$$

onda kažemo da slučajna varijabla X ima očekivanje i broj

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx$$

zovemo matematičko očekivanje neprekidne slučajne varijable X.

Treba naglasiti da sva spomenuta svojstva matematičkog očekivanja (poglavlje 2.1) koja vrijede za diskretne slučajne varijable vrijede i za neprekidne slučajne varijable. Dodatno, ako je dana realna funkcija realne varijable g, onda očekivanje slučajne varijable $g(X)$, ako ono postoji, možemo računati kao

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

Iskazat ćemo svojstva još jedne važne numeričke karakteristike, koju nazivamo varijanca slučajne varijable, a bit će nam potrebna u nastavku.

Definicija 2.7. Ako postoji $E(X-E(X))^2$ onda taj pozitivan realan broj nazivamo varijanca slučajne varijable X i označavamo s $VarX$, σ_X^2, σ^2.

Svojstva varijance slučajne varijable

1. $$VarX = E(X^2) - (E(X))^2.$$

   Dokaz. Vidi [1, str. 93, 3)]. □

2. Neka je X slučajna varijabla koja ima varijancu te a i b realni brojevi, tada slučajna varijabla $aX + b$ ima varijancu

   $$Var(aX + b) = a^2 VarX.$$

   Dokaz. Vidi [1, str. 93, 1)]. □

3. Ako za slučajnu varijablu X vrijedi $VarX = 0$, onda ona zapravo nema karakter slučajnosti, tj. $P(X = konst.) = 1$. Vrijedi i drugi smjer, tj. ako za slučajnu varijablu X vrijedi $P(X = konst.) = 1$ onda je $VarX = 0$.

   Dokaz. Vidi [1, str. 93, 2)]. □

Ako je slučajna varijabla neprekidna, varijancu računamo s

$$VarX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx.$$

Definicija 2.8 (Standardna devijacija)**.** Korijen iz varijance, tj. pozitivan realan broj $\sqrt{VarX}$ nazivamo standardna devijacija i označavamo sa σ ili σ_X.

2.3 Dodatni bitni pojmovi

U ovom poglavlju iskazat ćemo definicije potrebne za razumijevanje i dokazivanje nejednakosti koje ćemo navesti u glavnom dijelu rada. Za početak ćemo objasniti pojam izmjerivosti funkcije u paru σ-algebri, kako bi mogli definirati Borelovu funkciju, koju ćemo spominjati pri iskazu nekih nejednakosti.

Definicija 2.9. Neka su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ izmjerivi prostori, $A \subseteq X$ skup i $f : A \to Y$ funkcija. Funkcija f je izmjeriva u paru $\sigma - algebri$ $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ ili kraće $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ izmjeriva ako je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki $B \in \mathcal{B}$.

U prethodnoj definiciji $f^{-1}(B)$ označava prasliku skupa B, tj.

$$f^{-1}(B) := \{x \in A : f(x) \in B\} \subseteq A.$$

Budući da je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor, koristeći prethodnu definiciju, možemo definirati Borelovu funkciju na njemu.

Definicija 2.10. Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor i $A \subseteq \Omega$ skup. Ako je $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, onda za izmjerivu funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ kažemo da je Borelova ili izmjeriva u smislu Borela.

Napomena 2.1. Ako usporedimo definiciju izmjerive funkcije s definicijom 2.1 možemo zaključiti da su one ekvivalentne, tj. slučajna varijabla je izmjeriva funkcija.

U nastavku ćemo iskazati propoziciju koja će nam biti potrebna u dokazu Cauchy-Schwartzove i Hölderove nejednakosti, a ona nam govori koliko je matematičko očekivanje povezano s pojmom "gotovo sigurno (g.s.)". Naime, kada neka tvrdnja ili svojstvo vrijedi gotovo sigurno to znači da ta tvrdnja vrijedi s vjerojatnošću 1, tj. ne vrijedi na skupu mjere nula (Vidi [3, str. 107, Poglavlje 3.5]).

Najprije ćemo definirati pojam linearnog funkcionala, koji će nam također biti potreban za iskaz spomenute propozicije.

Definicija 2.11. Skup $\mathcal{L}(P)$ je realan vektorski prostor i matematičko očekivanje je linearan funkcional na tom vektorskom prostoru. Prema tome, ako su $X_1, ..., X_n \in \mathcal{L}(P)$ i $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, tada je $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i \in \mathcal{L}(P)$ i vrijedi

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i).$$

Propozicija 2.1. *1. Ako je $X = 0$ (g.s.) tada je $E(X) = 0$.*

2. Ako je $X = Y$ (g.s.) i $X \in \mathcal{L}(P)$, tada je $Y \in \mathcal{L}(P)$ i vrijedi $E(X) = E(Y)$.

Dokaz. Vidi [5, str. 294, Propozicija 10.3]. □

Zbog lakšeg dokazivanja i razumijevanja Cauchy-Schwartzove i Hölderove nejednakosti u nastavku ćemo objasniti i pojmove r-tog momenta i r-tog apsolutnog momenta slučajne varijable.

Definicija 2.12. Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i $r > 0$.

- Ako postoji $E(X^r)$, onda broj $\mu_r = E(X^r)$ zovemo moment r-tog reda ili r-ti moment od X.
- Ako postoji $E(|X|^r)$, onda broj $E(|X|^r)$ zovemo apsolutni moment r-tog reda ili r-ti apsolutni moment.
- Ako postoji $E(X)$ i $E(|X - E(X)|^r)$, onda broj $E(|X - E(X)|^r)$ zovemo r-ti centralni moment slučajne varijable X.

Napomena 2.2. Očekivanje $E(X)$ slučajne varijable X je njezin moment prvog reda.

Napomena 2.3. Varijanca $VarX$ je drugi centralni moment. Varijanca predstavlja očekivano kvadratno odstupanje slučajne varijable od njezinog očekivanja.

Također, definirat ćemo pojam kovarijance koji će nam biti potreban prilikom primjene Cauchy-Schwartzove nejednakosti.

Definicija 2.13. Kovarijanca dvodimenzionalnog slučajnog vektora (X, Y) definirana je izrazom

$$Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

3 Važne nejednakosti

U ovom, glavnom poglavlju rada opisat ćemo nejednakosti koje se često koriste u vjerojatnosti i statistici. Primijetit ćemo da između nekolicine postoji veza, tj. da su neke nejednakosti specijalni slučajevi drugih. Na primjer, u Hölderovoj nejednakosti koristit ćemo tzv. konjugirane eksponente $p, q > 1$, a uzimanjem specijalnih vrijednosti za p i q iz te nejednakosti dobit ćemo Cauchy-Schwartzovu nejednakost. Navedene nejednakosti primjenjive su kako na neprekidne tako i na diskretne slučajne varijable.

Sljedeća propozicija određuje gornju granicu vjerojatnosti da je slučajna varijabla po apsolutnoj vrijednosti veća ili jednaka od neke proizvoljne pozitivne konstante, ukoliko slučajnu varijablu promatramo s rastućom funkcijom g. Propozicija nam je bitna jer je usko povezana s Markovljevom nejednakosti.
Za početak, definirat ćemo vjerojatnost proizvoljnog događaja i matematičko očekivanje na drugačiji način. Definicije ćemo koristiti pri dokazivanju propozicije 3.1.

Definicija 3.1. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Tada za događaj $A \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$P(A) = \int_A dP.$$

Definicija 3.2. U teoriji vjerojatnosti, matematičko očekivanje (ako ono postoji) općenito možemo definirati na sljedeći način:

$$E(X) = \int_\Omega X dP = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega) = \begin{cases} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega), \ X \text{ diskretna} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \ X \text{ neprekidna} \end{cases},$$

gdje je Ω skup elementarnih događaja i X slučajna varijabla na Ω.

Propozicija 3.1. *Neka je X slučajna varijabla i g nenegativna Borelova funkcija takva da je $E(g(X)) < \infty$. Ako je g parna funkcija i rastuća na $[0, +\infty)$, tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}. \tag{1}$$

Dokaz. Neka je $A = \{|X| \geq \varepsilon\}$. Tada vrijedi

$$E(g(X)) = \int_A g(X)dP + \int_{A^C} g(X)dP \geq \int_A g(X)dP \geq g(\varepsilon) \int_A dP = g(\varepsilon)P(A).$$

Slijedi

$$P(A) \leq \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}.$$

□

3.1 Markovljeva nejednakost

Korolar 3.1 (Markovljeva[1] nejednakost). *Neka je $r > 0$ i $E(|X|^r) < \infty$. Tada za prizvoljan $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X|^r)}{\varepsilon^r}. \tag{2}$$

U nastavku ćemo iskazati i dokazati poseban slučaj Markovljeve nejednakosti, kojeg ćemo kasnije koristiti u dokazu Čebiševljeve[2] nejednakosti.

[1]Andrey Andreyevich Markov (1856.-1922.), ruski matematičar
[2]Pafnuty Lvovich Chebyshev(1821.-1894.), ruski matematičar

Korolar 3.2 (Specijalni slučaj Markovljeve nejednakosti). *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ i $g : R(X) \to \mathbb{R}$ nenegativna funkcija takva da postoji $E(g(X))$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$P(g(X) \geq \varepsilon) \leq \frac{E(g(X))}{\varepsilon}. \tag{3}$$

Dokaz. Definirajmo indikator slučajnu varijablu

$$I_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}.$$

Budući da je I_A diskretna slučajna varijabla, možemo zapisati njezinu tablicu distribucije, pri čemu je $p = P(\omega \in A)$:

$$I_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, p \in (0,1).$$

Odredimo još očekivanje slučajne varijable I_A:

$$\begin{aligned} E(I_A) &= 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p \\ &= p \\ &= P(I_A = 1) \\ &= P(\omega \in \Omega : I_A(\omega) = 1) \\ &= P(\omega \in \Omega : \omega \in A) = P(A). \end{aligned}$$

Nadalje, očekivanje funkcije g iznosi

$$E(g(X)) = E(g(X) I_{\{\omega \in \Omega : g(X(\omega)) \geq \varepsilon\}} + g(X) I_{\{\omega \in \Omega : g(X(\omega)) < \varepsilon\}}).$$

Sada zbog svojstva linearnosti i monotonosti očekivanja, te nenegativnosti funkcije g vrijedi

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= E(g(X) I_{\{g(X) \geq \varepsilon\}}) + E(g(X) I_{\{g(X) < \varepsilon\}}) \\ &\geq E(g(X) I_{\{g(X) \geq \varepsilon\}}) \geq E(\varepsilon I_{\{g(X) \geq \varepsilon\}}) = \varepsilon E(I_{\{g(X) \geq \varepsilon\}}) \\ &= \varepsilon P(g(X) \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

□

3.2 Čebiševljeva nejednakost

Korolar 3.3 (Čebiševljeva nejednakost). *Neka je X slučajna varijabla s očekivanjem μ i varijancom σ^2 i neka je $k > 0$. Tada vrijedi*

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}. \tag{4}$$

Dokaz. Zbog apsolutne vrijednosti je $|X - \mu| \geq 0$ te $\sigma \geq 0$, pa izraz možemo pisati kao

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) = P(|X - \mu|^2 \geq k^2\sigma^2).$$

Budući da je $|X - \mu|^2$ nenegativna funkcija, primjenit ćemo Markovljevu nejednakost, tj. (3)

$$P(|X-\mu|^2 \geq k^2\sigma^2) \leq \frac{E(X-\mu)^2}{k^2\sigma^2} = \frac{VarX}{k^2\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}.$$

□

Primjetimo da nam Čebiševljeva nejednakost govori da je vjerojatnost da slučajna varijabla X odstupa od svog očekivanja po apsolutnoj vrijednosti za više ili jednako k standardnih devijacija, manja ili jednaka $\frac{1}{k^2}$.
U nastavku ćemo objasniti "obrat" Čebiševljeve nejednakosti koji će slijediti upravo iz Čebiševljeve nejednakosti i svojstva vjerojatnosti suprotnog događaja.

Napomena 3.1. Vrijedi

$$P(|X-\mu| < k\sigma) = 1 - P(|X-\mu| \geq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2},$$

odnosno, vjerojatnost da slučajna varijabla odstupa od svog očekivanja za manje od k standardnih devijacija veća je ili jednaka od $1-\frac{1}{k^2}$.

3.3 Cauchy-Schwartzova nejednakost

Propozicija 3.2 (Cauchy[3]-Schwartzova[4] nejednakost). *Neka su X i Y slučajne varijable takve da je $E(X^2) < \infty$ i $E(Y^2) < \infty$. Tada je $E(|XY|) < \infty$ i vrijedi*

$$[E(|XY|)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2). \tag{5}$$

Dokaz. Prema propoziciji 2.1.1 nejednakost (5) slijedi trivijalno ako je barem jedna X ili Y jednaka 0. Zbog toga ćemo pretpostaviti da je $E(X^2) > 0$ i $E(Y^2) > 0$.
Nejednakost ćemo dokazati pomoću nejednakosti koja vrijedi za sve realne brojeve

$$2|ab| \leq a^2 + b^2,$$

a slijedi trivijalno iz $(|a|-|b|)^2 \geq 0$. Stavimo da je

$$a = \frac{X}{E(X^2)^{\frac{1}{2}}}, b = \frac{Y}{E(Y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Tada je

$$2\left|\frac{X}{E(X^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{Y}{E(Y^2)^{\frac{1}{2}}}\right| \leq \frac{X^2}{E(X^2)} + \frac{Y^2}{E(Y^2)}.$$

Budući da je $E(X^2) > 0$ i $E(Y^2) > 0$ vrijedi

$$2\left[\frac{1}{E(X^2)E(Y^2)}\right]^{\frac{1}{2}}|XY| \leq \frac{X^2}{E(X^2)} + \frac{Y^2}{E(Y^2)},$$

odnosno

[3] Augustin-Louis Cauchy(1789.-1857.), francuski matematičar
[4] Hermann Amandus Schwarz (1843.-1912.), njemački matematičar

$$|XY| \leq \frac{1}{2}[E(X^2)E(Y^2)]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{X^2}{E(X^2)} + \frac{Y^2}{E(Y^2)}\right].$$

Možemo zaključiti da $|XY|$ ima konačno očekivanje, tj. $E(|XY|) < \infty$. Ako uzmemo očekivanje od $|XY|$ dobijemo

$$E(|XY|) \leq \frac{1}{2}[E(X^2)E(Y^2)]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{E(X^2)}{E(X^2)} + \frac{E(Y^2)}{E(Y^2)}\right],$$

tj.

$$E(|XY|) \leq \frac{1}{2}[E(X^2)E(Y^2)]^{\frac{1}{2}}[1+1].$$

Kvadriranjem slijedi

$$[E(|XY|)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$$

□

3.4 Hölderova nejednakost

U ovom poglavlju dokazat ćemo Hölderovu nejednakost, no prije nego što to učinimo definirat ćemo pojam konjugiranih eksponenata.

Definicija 3.3. Neka su p i q realni brojevi, $p > 1$ i $q = \frac{p}{p-1} > 1$. Tada je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i kažemo da su p i q konjugirani eksponenti.

Propozicija 3.3 (Hölderova[5] nejednakost). *Neka su $p, q \in \mathbb{R}$, takvi da je $p > 1, q > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nadalje, neka su X i Y slučajne varijable takve da je $E(|X|^p) < \infty$ i $E(|Y|^q) < \infty$. Tada je $E(|XY|) < \infty$ i vrijedi*

$$E(|XY|) \leq [E(|X|^p)]^{\frac{1}{p}}[E(|Y|^q)]^{\frac{1}{q}}. \tag{6}$$

Dokaz. Budući da su p i q konjugirani eksponenti, iz Youngove nejednakosti slijedi da za $\alpha \geq 0$ i $\beta \geq 0$, $p > 1$ i $q > 1$ vrijedi

$$0 \leq \alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \tag{7}$$

Ako je barem jedan od α i β jednak nula, onda (7) trivijalno vrijedi. Pretpostavimo da je $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ te definirajmo funkciju φ tako da je

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}, t > 0.$$

Tada je derivacija funkcije φ jednaka

$$\varphi'(t) = t^{p-1} - t^{-q-1}.$$

Neka je $t_0 > 0$ rješenje jednadžbe $\varphi'(t) = 0$. U tom slučaju vrijedi

$$\begin{aligned} t_0^{p-1} - t_0^{-q-1} &= 0 \\ \frac{1}{t_0}(t_0^p - t_0^{-q}) &= 0, \end{aligned}$$

[5] Otto Hölder(1859.-1937.), njemački matematičar

iz čega slijedi da je $t_0^{p+q} = 1$ odnosno $t_0 = 1$.
Osim toga je $\varphi'(t) < 0$ za $t \in (0,1)$, a $\varphi'(t) > 0$ za $t > 1$ te vrijedi

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \lim_{t\to +\infty} \varphi(t) = +\infty,$$

iz čega slijedi da je $t = 1$ jedinstveni minimum funkcije φ na intervalu $(0, +\infty)$ tj.

$$\frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q} \geq \varphi(1) = 1, \text{za svaki } t > 0. \tag{8}$$

Ukoliko stavimo da je $t = \frac{\alpha^{\frac{1}{q}}}{\beta^{\frac{1}{p}}}$ i uvrstimo u (8) dobivamo (7). Prema propoziciji 2.1.1., Hölderova nejednakost (6) vrijedi ako je barem jedna X ili Y jednaka 0 (g.s.). Pretpostavimo da je $E(|X|^p) > 0$ i $E(|Y|^q) > 0$. Ako je $\omega \in \Omega$ i

$$\alpha = \frac{|X(\omega)|}{[E(|X|^p)]^{\frac{1}{p}}}, \beta = \frac{|Y(\omega)|}{[E(|Y|^q)]^{\frac{1}{q}}},$$

uvrštavanjem u (7) dobivamo

$$0 \leq \frac{|X(\omega)|}{[E(|X|^p)]^{\frac{1}{p}}} \frac{|Y(\omega)|}{[E(|Y|^q)]^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{X(\omega)^p}{pE(|X|^p)} + \frac{Y(\omega)^q}{qE(|Y|^q)},$$

odnosno

$$|XY| \leq E(|X|^p)^{\frac{1}{p}} E(|Y|^q)^{\frac{1}{q}} \left[\frac{1}{p}\frac{|X|^p}{E(|X|^p)} + \frac{1}{q}\frac{|Y|^q}{E(|Y|^q)}\right].$$

Slijedi da je matematičko očekivanje od $|XY|$ konačno, pa je

$$E(|XY|) \leq E(|X|^p)^{\frac{1}{p}} E(|Y|^q)^{\frac{1}{q}} \left[\frac{1}{p}\frac{E(|X|^p)}{E(|X|^p)} + \frac{1}{q}\frac{E(|Y|^q)}{E(|Y|^q)}\right],$$

a skraćivanjem dobivamo nejednakost

$$E(|XY|) \leq E(|X|^p)^{\frac{1}{p}} E(|Y|^q)^{\frac{1}{q}} \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right].$$

Budući da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, iz prethodnog računa slijedi Hölderova nejednakost

$$E(|XY|) \leq E(|X|^p)^{\frac{1}{p}} E(|Y|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

□

3.5 Nejednakost Minkowskog

Propozicija 3.4 (Nejednakost Minkowskog[6]). *Neka je $1 \leq p < \infty$ i neka su X i Y slučajne varijable takve da je $E(|X|^p) < \infty$ i $E(|Y|^p) < \infty$. Tada je $E(|X+Y|^p) < \infty$ i vrijedi*

$$[E(|X+Y|^p)]^{\frac{1}{p}} \leq [E(|X|^p)]^{\frac{1}{p}} + [E(|Y|^p)]^{\frac{1}{p}}. \tag{9}$$

Dokaz. Promatrat ćemo slučaj $1 < p < \infty$ jer je $p = 1$ trivijalan slučaj.
Naime, za $p = 1$ vrijedi

$$E(|X+Y|) \leq E(|X| + |Y|) = E(|X|) + E(|Y|).$$

Promotrimo sada slučaj $1 < p < \infty$.
Za slučajne varijable X i Y i $r > 0$ vrijedi

$$|X+Y|^r \leq [2\max(|X|, |Y|)]^r \leq 2^r[|X|^r + |Y|^r],$$

a iz te nejednakosti slijedi

$$E(|X+Y|^r) \leq 2^r[E(|X|^r) + E(|Y|^r)]. \tag{10}$$

Dakle, ukoliko X i Y imaju konačan r-ti apsolutni moment, tada i $X+Y$ ima konačan r-ti apsolutni moment. Prema (10) i pretpostavci propozicije da je $E(|X|^p) < \infty$ i $E(|Y|^p) < \infty$, slijedi da je $E(|X+Y|^p) < \infty$. Nadalje, izaberimo q takav da je $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Budući da je $p < \infty$, zaključujemo da je tada i $q < \infty$ te vrijedi $(p-1)q = p$.

Izraz $|X+Y|^p$ možemo pomoću nejednakosti trokuta prikazati na sljedeći način:

$$|X+Y|^p = |X+Y||X+Y|^{p-1} \leq |X||X+Y|^{p-1} + |Y||X+Y|^{p-1}. \tag{11}$$

Zbog $(p-1)q = p$ vrijedi

$$E(|X+Y|^{(p-1)q}) = E(|X+Y|^p) < \infty.$$

Primjenom Hölderove nejednakosti (6) na X i $(X+Y)^{p-1}$, te na Y i $(X+Y)^{p-1}$ slijedi

$$E(|X||X+Y|^{p-1}) \leq E(|X|^p)^{\frac{1}{p}} E(|X+Y|^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}} = E(|X|^p)^{\frac{1}{p}} E(|X+Y|^p)^{\frac{1}{q}}, \tag{12}$$

$$E(|Y||X+Y|^{p-1}) \leq E(|Y|^p)^{\frac{1}{p}} E(|X+Y|^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}} = E(|Y|^p)^{\frac{1}{p}} E(|X+Y|^p)^{\frac{1}{q}}. \tag{13}$$

Uzimanjem očekivanja od $|X+Y|^p$ i uvrštavanjem (12) i (13) u (11) slijedi

$$\begin{aligned} E(|X+Y|^p) &\leq E(|X||X+Y|^{p-1}) + E(|Y||X+Y|^{p-1}) \\ &\leq E(|X|^p)^{\frac{1}{p}} E(|X+Y|^p)^{\frac{1}{q}} + E(|Y|^p)^{\frac{1}{p}} E(|X+Y|^p)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq E(|X+Y|^p)^{\frac{1}{q}} [E(|X|^p)^{\frac{1}{p}} + E(|Y|^p)^{\frac{1}{p}}]. \end{aligned}$$

[6]Hermann Minkowski(1864.-1909.), poljsko-njemački matematičar

Ako je $E(|X+Y|^p) = 0$ onda nejednakost vrijedi trivijalno. Inače, ako je $E(|X+Y|^p) > 0$, dijeljenjem desne strane prethodne nejednakosti s $E(|X+Y|^p)^{\frac{1}{q}}$ slijedi nejednakost Minkowskog (9). $\square$

3.6 Jensenova nejednakost

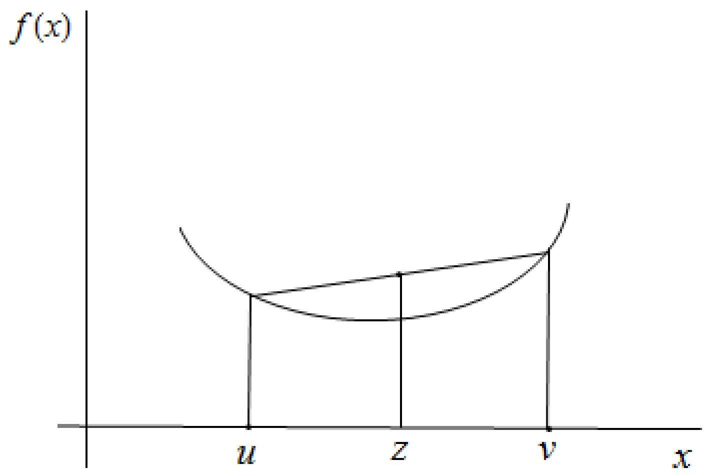
Kako bismo na što lakši način dokazali Jensenovu nejednakost, koja nam je bitna jer nam govori da je vrijednost funkcije f u očekivanju varijable X manja ili jednaka od očekivane vrijednosti funkcije f u X, ukoliko je f konveksna funkcija, u nastavku ćemo definirati i objasniti pojam konveksne funkcije.

Definicija 3.4 (Konveksna funkcija)**.** Za realnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je konveksna ako vrijedi

$$f(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha f(u) + (1-\alpha)f(v)$$

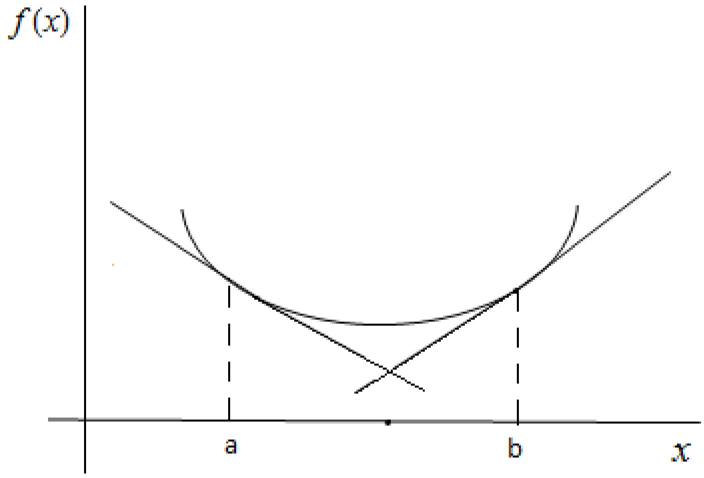
za svaki $u, v \in \mathbb{R}$ i $\alpha \in [0,1]$.

Definicija konveksne funkcije ima i svoju geometrijsku interpretaciju. Naime, ako izaberemo proizvoljne vrijednosti u, v na x-osi i povučemo pravac kroz točke $(u, f(u))$ i $(v, f(v))$ onda će funkcija imati vrijednost u bilo kojoj točki $(z, f(z))$, čija apscisa leži između u i v, kao npr. $z = \alpha u + (1-\alpha)v$. U tom slučaju, točka $(z, f(z))$ će se nalaziti ispod pravca, ako je $0 \leq \alpha \leq 1$.



Slika 1: Konveksna funkcija f

Konveksnu funkciju možemo promatrati i na drugi način koji će nam biti prikladniji u dokazu Jensenove nejednakosti. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konveksna ako i samo ako je graf funkcije $y = f(x)$ uvijek iznad tangente u proizvoljnoj točki $(z, f(z))$, za neki $z \in \mathbb{R}$.



Slika 2: Tangente u točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$

Jednadžba tangente na graf funkcije f u točki $(z, f(z))$ je dana s

$$y = f(z) + k(x - z),$$

gdje $k \in \mathbb{R}$ predstavlja koeficijent smjera tangente.
Budući da je graf konveksne funkcije f uvijek iznad tangente u proizvoljnoj točki, slijedi nejednakost

$$f(x) \geq f(z) + k(x - z),$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Teorem 3.1 (Jensenova[7] nejednakost). *Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna Borelova funkcija i X slučajna varijabla takva da je $E(|X|) < \infty$. Tada vrijedi*

$$f(E(X)) \leq E(f(X)). \tag{14}$$

Dokaz. Definirajmo $z := E(X)$ i neka je X dana slučajna varijabla. Budući da je f konveksna funkcija, prema prethodnom razmatranju vrijedi nejednakost $f(x) \geq f(z) + k(x - z)$, za proizvoljan $x \in \mathbb{R}$, odnosno

$$f(X) \geq f(E(X)) + k(X - E(X)).$$

Ako djelujemo s matematičkim očekivanjem na prethodnu nejednakost dobivamo

$$E(f(X)) \geq f(E(X)) + E(k(X - E(X))).$$

Korištenjem svojstva matematičkog očekivanja slijedi

$$E(f(X)) \geq f(E(X)) + k(E(X) - E(X)).$$

[7] Johan Jensen(1859.-1925.), danski matematičar

Budući da je $E(X) - E(X) = 0$ slijedi Jensenova nejednakost

$$E(f(X)) \geq f(E(X)).$$

□

3.7 Nejednakost Ljapunova

Teorem 3.2 (**Nejednakost Ljapunova**[8]**).** *Za* $0 < s < t$ *vrijedi*

$$[E(|X|^s)]^{\frac{1}{s}} \leq [E(|X|^t)]^{\frac{1}{t}}. \tag{15}$$

Dokaz. Ljapunovu nejednakost dokazat ćemo pomoću Jensenove nejednakosti za slučajnu varijablu Y, gdje je $Y = |X|^s$, $r = \frac{t}{s}$ i $f(X) = |X|^r$.
Dakle, iz nejednakosti (14) slijedi

$$f(E(Y)) \leq E(f(Y)),$$

odnosno, uvrštavanjem $Y = |X|^s$ dobivamo

$$f(E(|X|^s)) \leq E(f(|X|^s)).$$

Djelovanjem funkcije f, te uvrštavanjem $r = \frac{t}{s}$ slijedi

$$(E(|X|^s))^{\frac{t}{s}} \leq E(|X|^s)^{\frac{t}{s}},$$

$$((E(|X|^s))^{\frac{1}{s}})^t \leq E(|X|^t),$$

te konačno potenciranjem s $\frac{1}{t}$ slijedi Ljapunova nejednakost

$$(E(|X|^s))^{\frac{1}{s}} \leq (E(|X|^t))^{\frac{1}{t}}.$$

□

[8]Aleksandr Mikhailovich Lyapunov(1857.-1918.), ruski matematičar

4 Primjene važnih nejednakosti

Primjeri nejednakosti u stvarnom životu mogu biti vrlo komplicirani, a u ovom poglavlju objasnit ćemo one koje smo naveli u uvodnom dijelu rada. Osim toga, detaljno ćemo objasniti interval pouzdanosti, koji je od velike važnosti u području statistike te na koji način nam Jensenova nejednakost može pomoći prilikom dokazivanja odnosa između aritmetičke i geometrijske sredine.
Za početak, predstavit ćemo primjere Čebiševljeve i Markovljeve nejednakosti.

Primjer 4.1. Neka je X slučajna varijabla koja modelira broj sunčanih sati na Hvaru tijekom jedne godine. Poznat je podatak da je očekivani broj sunčanih sati na Hvaru 2718, a standardna devijacija 30. Ocijenite vjerojatnost da broj sunčanih sati na Hvaru tijekom jedne godine odstupa od očekivanog broja za više od 50 sati.
Rješenje:
Trebamo izračunati odstupanje slučajne varijable od njezinog očekivanja te ćemo koristiti Čebiševljevu nejednakost. U zadatku nam je zadano: $\mu = 2718$, $\sigma = 30$.
Uvrštavanjem zadanih vrijednosti u Čebiševljevu nejednakost

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2},$$

slijedi

$$P(|X - 2718| \geq 50) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Također, možemo izračunati i vrijednost od k:

$$k\sigma = 50 \Rightarrow k = \frac{50}{30} \approx 1.667$$

te je sada

$$P(|X - 2718| \geq 50) \leq \frac{1}{1.667^2} \approx 0.36101.$$

Vjerojatnost da broj sunčanih sati na Hvaru tijekom jedne godine odstupa od 2718 za više od 50 sati iznosi približno 0.36101.

Primjer 4.2. Bacamo asimetričan novčić 250 puta za redom, pri čemu je vjerojatnost da padne glava $\frac{1}{20}$. Kolika je vjerojatnost da padne glava barem 125 puta?
Rješenje:
Ovaj problem riješit ćemo pomoću Markovljeve nejednakosti.
Neka je X slučajna varijabla koja broji koliko puta je pala glava. Slučajna varijabla X ima binomnu distribuciju sa $p = \frac{1}{20}$ i $n = 250$.
Očekivani broj glava je $E(X) = np = \frac{250}{20} = 12.5$.
Uvrstimo li dane podatke u Markovljevu nejednakost dobivamo

$$P(X \geq 125) \leq \frac{E(X)}{125} = \frac{12.5}{125} = 0.1.$$

Dakle, vjerojatnost da glava padne barem 125 puta je manja ili jednaka 0.1.

Primjer 4.3 (Interval pouzdanosti). Ako želimo neku numeričku vrijednost (npr. očekivanje) procijeniti jednim brojem koristimo činjenicu da je procjenitelj slučajna varijabla. Procjenu ćemo napraviti pomoću intervala uz izabrani $\gamma \in (0,1)$. γ se naziva pouzdanost intervalne procjene. Interval pouzdanosti se određuje pod uvjetom da se stvarna vrijednost veličine koju želimo odrediti nalazi u tom intervalu s vjerojatnošću γ. U $100\gamma\%$ slučajeva unutar dobivenog intervala nalazit će se tražena vrijednost. Granice intervala bit će slučajne varijable. Za traženje intervala pouzdanosti iskoristit ćemo Čebiševljevu nejednakost suprotnog događaja, tj.

$$P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Uvrštavajući $k = 2$ slijedi

$$P(|X-\mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}.$$

Ova ocjena nam kaže da sa 75% sigurnosti možemo tvrditi da rezultat odstupa od očekivane vrijednosti za najviše dvije standardne devijacije, tj. da je rezultat u intervalu $(\mu-2\sigma, \mu+2\sigma)$.
Za $k = 3$ imamo

$$P(|X-\mu| < 3\sigma) \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0.88,$$

odnosno za $k = 3$ rezultat će pripadati intervalu $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ sa 88% sigurnosti.
Pogledajmo još interval za $k = 4$. U tom slučaju imamo

$$P(|X-\mu| < 4\sigma) \geq 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0.9375.$$

Dakle, u gotovo 94% slučajeva rezultat će biti u intervalu $(\mu - 4\sigma, \mu + 4\sigma)$.
Možemo zaključiti da je za veći k interval pouzdanosti točniji.

U sljedećem primjeru objasnit ćemo na koji način korištenjem Jensenove nejednakosti možemo dokazati nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine.

Primjer 4.4. Neka su $a_1, ..., a_n$ pozitivni realni brojevi, te neka je X diskretna slučajna varijabla čija je funkcija gustoće zadana s $f_X(a_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, ..., n$. Funkcija $g(x) = -\log x$ je konveksna na intervalu $(0, \infty)$ i vrijedi

$$-\log \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = -\log(E(X)).$$

Zbog Jensenove nejednakosti $g(E(X)) \leq E(g(X))$ slijedi

$$-\log(E(X)) \leq E(-\log(X)).$$

Budući da vrijedi jednakost

$$E(-\log(X)) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log a_i,$$

slijedi

$$-\log \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \leq -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log a_i.$$

Korištenjem svojstva logaritama slijedi

$$\log \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right),$$

što je ekvivalentno s

$$\log \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \log \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Sada je očito da smo dobili traženu nejednakost, tj. odnos aritmetičke i geometrijske sredine.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

U sljedećem primjeru povezat ćemo Cauchy-Schwartzovu nejednakost s pojmom kovarijance, koju smo definirali u definiciji 2.13.

Primjer 4.5. Neka su X, Y slučajne varijable takve da postoje $E(X^2)$, $E(Y^2)$ i $E(XY)$, odnosno $E(X^2) < \infty$, $E(Y^2) < \infty$ i $E(XY) < \infty$. Tada vrijedi

$$(Cov(X,Y))^2 \leq VarX \cdot VarY. \tag{16}$$

Dokaz. Primjetimo da nejednakost (16) vrijedi ako i samo ako je $X = a + b \cdot Y$, za neke $a, b \in \mathbb{R}$. Definicija kovarijance glasi

$$Cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

Neka je $V_1 = X - E(X)$ i $V_2 = Y - E(Y)$. Tada je kovarijanca jednaka

$$Cov(X,Y) = E(V_1 \cdot V_2)$$

te kvadriranjem izraza slijedi

$$Cov^2(X,Y) = E^2(V_1 \cdot V_2).$$

Primjenom Cauchy-Schwartzove nejednakosti dobivamo

$$E^2(V_1 \cdot V_2) \leq E(V_1^2)E(V_2^2) = E((X - E(X))^2)E((Y - E(Y))^2).$$

Budući da je $VarX = E((X - E(X))^2)$ slijedi

$$Cov^2(X,Y) \leq VarX \cdot VarY.$$

$\square$

Literatura

[1] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[2] M. Benšić, N. Šuvak, *Primjenjena statistika*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2013.

[3] D. Jukić, *Mjera i integral*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2012.

[4] N. Mukhopadhyay, *Probability and statistical inference*, Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.

[5] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 1986.

[6] A. Yadin, *Introduction to probability (Lecture 11)*, Ben-gurion University of the Negev, Department of mathematics, Beersheba, Israel, 2014.