Osnovne ideje i primjeri za razumijevanje funkcija u srednjoj školi

Škugor, Vedran

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Vedran Škugor

Osnovne ideje i primjeri za razumijevanje funkcija u srednjoj školi

Diplomski rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Vedran Škugor

Osnovne ideje i primjeri za razumijevanje funkcija u srednjoj školi

Diplomski rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2023.

Sadržaj

Uvod

Funkcija je jedan od najvažnijih pojmova u matematici općenito. Pogledamo li kurikulum nastavnog predmeta Matematika, možemo uočiti da je jedna od domena tog predmeta upravo Algebra i funkcije. Zamislimo onda samo koliko je važno razumijevanje pojma funkcije. Nažalost, učenicima pojam funkcije nije toliko intuitivan koliko bi nastavnici htjeli da bude. Vrlo često se mogu uočiti različite miskoncepcije vezane uz pojam funkcije kod učenika, što je dokaz da učenici ne shvaćaju pojam funkcije u potpunosti.
Kroz ovaj rad prikazat će se neki od načina na koje nastavnici mogu približiti pojam funkcije učenicima kroz različite primjere u nastavi. U svakodnevnom životu postoji jako puno situacija koje se mogu opisati funkcijama. Zbog toga je vrlo važno učenicima predstaviti pojam funkcije na taj način, kako bi im pobliže opisali važnost i ulogu tog matematičkog pojma.

1. Pojam funkcije općenito

U ovom odlomku prisjetit ćemo se definicije funkcije te nekih svojstava vezanih uz pojam funkcije. Funkcije strogo matematički definiramo već u drugom razredu srednje škole, a definicija funkcije glasi ovako:

Definicija 1.1. *Neka su D i K bilo koja dva neprazna skupa. Preslikavanje f koje svakom elementu skupa $x \in D$ pridružuje točno jedan element skupa $y \in K$ naziva se funkcija ili preslikavanje sa D u K i pišemo*

$$f : D \to K.$$

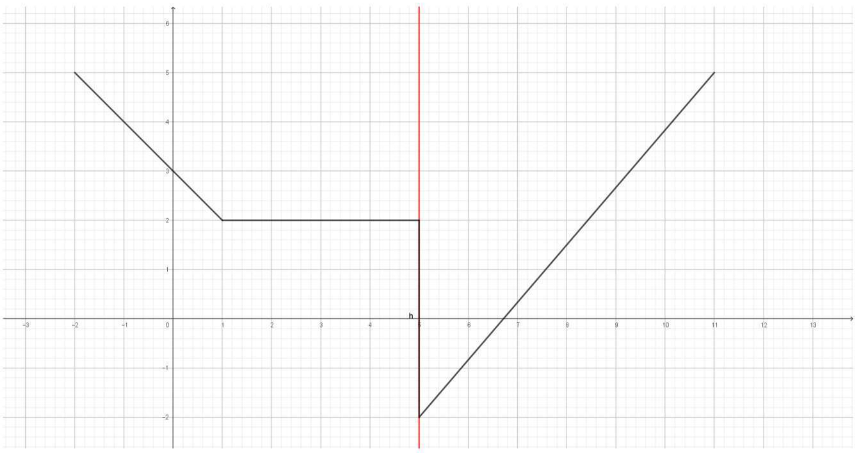
Skup D zovemo domena ili prirodno područje definicije, a skup K kodomena ili područje vrijednosti funkcije f.
Elemente x domene D zovemo argumenti funkcije ili nezavisne varijable, a elemente y kodomene K zovemo vrijednosti funkcije ili zavisne varijable.

Primjedba 1.1. *Funkcije kojima su domena i kodomena podskupovi skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ zovemo realnim funkcijama realne varijable.*

Primjedba 1.2. *Jedan od načina za provjeru je li neko preslikavanje funkcija ili nije jest vertikalni test. Vertikalnim testom može se na jednostavan način provjeriti je li dano preslikavanje funkcija tako da pogledamo u koliko točaka pravac okomit na x os siječe graf. Ukoliko takav pravac siječe graf u više od jedne točke, onda to nije graf funkcije.*

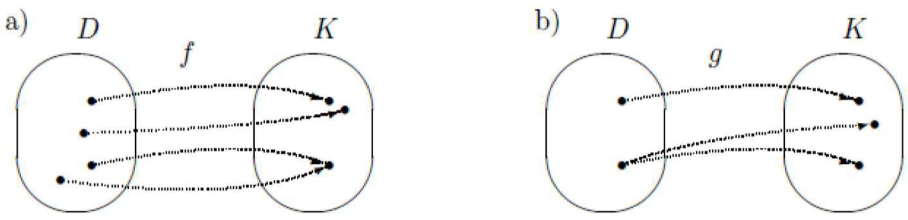
Pogledajmo sada na sljedećem primjeru na koji način vertikalnim testom provjeramo je li dani graf graf funkcije.

Primjer 1.1. *Na Slici 1 moguće je vidjeti primjer grafa koji nije graf funkcije budući da pravac okomit na x os siječe taj graf u više od jedne točke na jednom dijelu tog grafa.*



Slika 1: Primjer korištenja vertikalnog testa.

Primjer 1.2. *Na Slici 2.a može se vidjeti primjer pridruživanja koje jest funkcija budući da je svakom elementu iz skupa D pridružen točno jedan element skupa K.*
Međutim, pridruživanje na Slici 2.b nije funkcija budući da su jednom elementu iz skupa D pridružena dva elementa iz skupa K, odnosno nije zadovoljena definicija funkcije.



Slika 2: Primjer pridruživanja koje je funkcija (a) te onog koje nije (b).

Definicija 1.2. *Svakom $x \in D$ odgovarajući (jedinstveni) pridruženi element $y \in K$ označavamo s $f(x)$ i zovemo slika elementa x ili vrijednost funkcije f u točki x. Skup svih vrijednosti funkcije f, tj. skup*

$$\mathcal{R}(f) = \{f(x) : x \in D\}$$

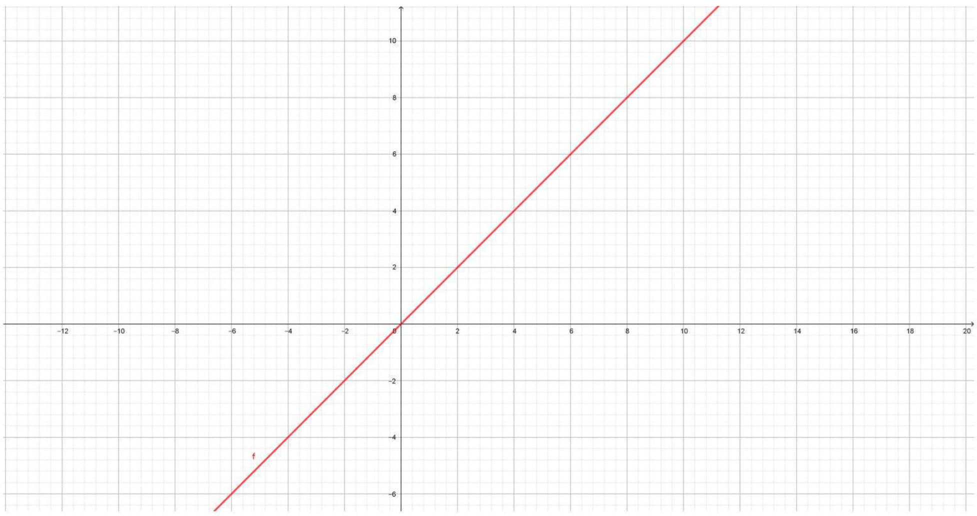
zovemo slika funkcije f.

Definicija 1.3. *Graf Γ_f funkcije $f : D \to K$ je skup svih uređenih parova $(x, f(x))$, $x \in D$ tj.*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq D \times K.$$

Napomena 1.1. *Funkcija $f : D \to K$ može biti zadana na razne načine: grafički (pomoću grafa ili dijagrama), tablicom, formulom itd.*

Primjer 1.3. *Na Slici 3 može se vidjeti graf linearne funkcije koja je zadana formulom $f(x) = x$. Također, ispod Slike 3 moguće je vidjeti kako je ista ta funkcija zadana tablicom.*



Slika 3: Graf funkcije $f(x) = x$.

x	-1	0	1	2	3
y	-1	0	1	2	3

Nadalje, definirat ćemo inverznu funkciju. Kako bismo mogli definirati inverz funkcije, moramo prvo definirati pojmove injekcije, surjekcije, odnosno bijekcije.

Definicija 1.4. *Kažemo da je funkcija $f : D \to K$ injekcija ako*

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)\ , \forall x_1, x_2 \in D.$$

Definicija 1.5. *Kažemo da je funkcija $f : D \to K$ surjekcija ako je $\mathcal{R}(f) = K$.*

Definicija 1.6. *Kažemo da je funkcija $f : D \to K$ bijekcija ako je ona i injekcija i surjekcija.*

Sada, nakon što smo definirali kada je funkcija bijekcija, možemo definirati inverz funkcije f.

Definicija 1.7. *Neka je $f : D \to K$ bijekcija. Tada postoji funkcija $f^{-1} : K \to D$ definirana formulom $f^{-1}(y) := x$, gdje je $x \in D$ jedinstveni element takav da je $f(x) = y$. Funkciju f^{-1} zovemo inverzna funkcija funkcije f.*

Primjedba 1.3. *Dakle, da bi funkcija imala inverz, ona prvenstveno mora biti bijekcija. Primjer funkcije koja ima inverz je funkcija $f(x) = 2x+1$. Lako je uočiti da je ova funkcija bijekcija pa smo sigurni da će ona imati inverz. Inverz funkcije f je*

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}.$$

Primjer funkcije koja nema inverz jest funkcija $g(x) = x^2$. Promotrimo li funkciju g možemo primijetiti kako ona nije injekcija budući da parovima različitih elemenata iz domene pridružuje jednak element iz kodomene, primjerice $g(-1) = 1$ i $g(1) = 1$. Dakle, funkcija nije injekcija pa nije niti bijekcija, a u tom slučaju ne postoji njen inverz.

Definirajmo sada kompoziciju dviju funkcija f i g.

Definicija 1.8. *Neka su $f : A \to B$ i $g : C \to D$ dvije funkcije takve da je $\mathcal{R}(f) \subseteq C$. Tada funkciju $h : A \to D$ definiranu formulom*

$$h(x) = g(f(x)),\ x \in A$$

označavamo s $g \circ f$ i zovemo kompozicija funkcija f i g.

2. Poučavanje nastavnog predmeta matematika

Shulman (1986, 1987) navodi sedam osnovnih područja znanja koja imaju utjecaja u poučavanju. To su: poznavanje sadržaja, poznavanje pedagoških koncepata, poznavanje kurikuluma, poznavanje učenika i njihovih osobina, poznavanje obrazovnog konteksta, poznavanje obrazovnih ishoda, svrhe te vrijednosti i na kraju poznavanje pedagoških sadržaja. Poznavanje pedagoških sadržaja je upravo ono znanje koje je nastavniku potrebno kako bi znanje matematičkih sadržaja prenio na svoje učenike na one načine koji će učenicima biti jasni i razumljivi.

2.1. Poznavanje pedagoških sadržaja

Kada u pitanje dovodimo poučavanje matematike, poznavanje pedagoških sadržaja uključuje sljedeće četiri komponente:

1. Poznavanje kurikuluma predmeta matematika
2. Poznavanje procjene učenikovog znanja
3. Poznavanje nastavnih strategija koje će se koristiti
4. Učenikovo poznavanje matematičkih sadržaja.

Navedene četiri komponente usko su povezane s načinima na koje nastavnik poučava određeni matematički sadržaj. Kao što je poznato, vrlo je bitno na koji način će nastavnik strukturirati nastavni sat, kako će organizirati vrijeme te tijek tog nastavnog sata, Shulman (1986) navodi kako je puno važnije ono što će biti poučavano na tom satu te načini poučavanja na koje će taj sadržaj biti poučavan. Iz tog razloga nastavnici u svakodnevnoj nastavi donose pet suštinskih odluka:

1. Koja objašnjenja ponuditi svojim učenicima, odnosno koja ne
2. Koje matematičke prikaze koristiti u poučavanju određenog gradiva
3. Koje vrste pitanja postavljati svojim učenicima
4. Koje moguće odgovore očekivati od svojih učenika kada im se postave pitanja
5. Kako se pravilno nositi s učeničkim miskoncepcijama kada do njih dođe.

Svaki nastavnik ima svoj način poučavanja te je način na koji će predavati određeni nastavni sadržaj svojim učenicima jedinstven. To, naravno, ovisi i o radnom iskustvu koje nastavnik ima u učionici. Pogledaju li se sada ponovno ovih pet područja odluka koje nastavnik mora donositi svakodnevno u svojoj učionici koje su navedene, može se uočiti da svako od tih područja podrazumijeva znanje matematičkih sadržaja, ali je isto tako usko vezano uz pedagogiju. Uzme li se za primjer upoznavanje učenika s pojmom funkcije, primjeri koje nastavnici koriste zahtijevaju učenikovo poznavanje koordinatnog sustava, jednadžbi i način na koji učenici tumače veze između zavisnih i nezavisnih varijabli. Nastavnikovo znanje o funkcijama može doprinijeti kreiranju zadataka te smišljanju pitanja koja će postaviti učenicima kako bi oni uočili povezanost funkcija s algebrom i geometrijom.
Vrlo dobar primjer motivacije učenika za određeni sadržaj jest zadavanje zadatka na početku sata koji bi učenike potaknuo na razmišljanje o sadržajima koji slijede. Dakle, kreiranje

zadatka koji će potaknuti učenike na razmišljanje jest, moglo bi se reći, jezgra matemičkog učenja i poučavanja. Uvedemo li učenike u novo gradivo na način da im postavimo zadatak na početku sata koji bi učenici pokušali riješiti kroz nastavni sat, a koji se bazira na već njihovom stečenom znanju te ga povezuje s novim sadržajem, dobivamo dinamično okružje te učenike koji više nisu pasivni, već aktivno sudjeluju u nastavnom procesu. Takvo dinamično okružje potiče učenike da prikažu svoje sposobnosti i znanje prethodno usvojenog sadržaja u cijelosti, dok istovremeno usvajaju nove sadržaje.

2.2. Karakteristike postavljenog zadatka

U ovom odlomku vidjet ćes e na koji način zadaci koji su postavljeni pred učenika rezultiraju na to kako će taj isti učenik usvojiti određeno gradivo. Kao što je već poznato, tip zadatka kojeg postavimo svojim učenicima u učionici tijekom nastavnog procesa je jako bitan. Nastavnik bi trebao birati zadatke koji se neće oslanjati samo na proceduralno znanje učenika, već i na konceptualno znanje.
Zadaci koji se oslanjaju samo na proceduralno znanje, odnosno na provedbu određenih algoritama (niz koraka potrebnih za rješavanje problema) kako bi se riješio dani problem su najčešće zadaci koje nazivamo šablonskim zadacima. Stavljanje pred učenike samo takve tipove zadataka može biti problematično budući da takvi zadaci od učenika traže samo površno znanje, odnosno ne zahtijevaju dublje razumijevanje određenih sadržaja. Učenici kojima su postavljeni samo takvi zadaci najčešće lako zaboravljaju sadržaje koji su im prezentirani kroz zadatke koji se oslanjaju na proceduralno znanje, moraju ponovno proučiti te iste sadržaje kako bi ih se podsjetili te potencijalno imaju manje šanse za uspješnost povezivanja prethodnog sadržaja sa sadržajem koji slijedi u budućnosti.
S druge strane, zadaci koji se oslanjaju na konceptualno znanje pomažu učenicima razumijeti koncepte koji će se pojavljivati u budućim nastavnim sadržajima te odnose između dvaju nastavnih sadržaja. Kreiranje te predstavljanje takvih zadataka u nastavnom procesu ima ulogu u stvaranju dubljeg razumijevanja matematičkih sadržaja. Učenici promišljanjem o njima te rješavanjem takvih zadataka usvajaju ideje koje će im pomoći u uspostavljanju veza između dvaju ili više sadržaja.
Visoko-kvalitetni zadaci koje bi nastavnik trebao predstavljati u svojoj učionici imaju neke od sljedećih karakteristika:

- Potiču na korištenje više od jednog matematičkog prikaza
- Omogućuju učenicima da razvijaju matematičko razmišljanje
- Omogućuju svim učenicima da započnu zadatak, ali isto tako imaju dijelove koji zahtijevaju bolje matematičko znanje
- Povezuju prethodno znanje s novim sadržajem
- Omogućuju rješavanje na više načina te korištenjem različitih strategija
- Uključuju učenicima zanimljiv te važan kontekst
- Istraživačkog su pristupa
- Zahtijevaju od učenika objašjenje rješenja.

2.3. Vrste pitanja

Još jedan od čimbenika koji igra vrlo veliku ulogu u poučavanju su adekvatna pitanja koja će nastavnik postaviti svojim učenicima kako bi ih potaknuo na razmišljanje. Takva pitanja ne trebaju učenika samo natjerati na razmišljanje, već bi ona trebala razmišljanje i poticati. Kada je u pitanju matematika, razmišljanje se potiče raznim zadacima.
Također, treba znati odabrati pravi zadatak za pravu uzrast učenika. Postavimo li isto pitanje učenicima različitih uzrasta, možemo shvatiti da ono uistinu ovisi o njihovu uzrastu. Tako na primjer, ukoliko postavimo pitanje "Je li veći broj osam ili devet?" učenicima prvih razreda osnovne škole i učenicima sedmih razreda osnovne škole, vidjet ćemo da je to pitanje potaknulo razmišljanje kod učenika prvih razreda osnovne škole, dok ono nije potaknulo razmišljanje kod druge skupine učenika. Dakle, to pitanje je dobro za razmišljanje ukoliko ga postavimo adekvatnoj dobnoj skupini.
Pitanja kojima nastavnik može potaknuti svoje učenike na razmišljanje te prikupljanje ideja možemo svrstati u tri skupine. Ta pitanja karakterizira mogućnost da potaknu učenikovu reverzibilnost, fleksibilnost te generalizaciju u razmišljanju. Sve tri vrste pitanja zahtijevaju rješenje koje će se sastojati od više od jedne riječi, odnosno više od jednog broja.
Pitanja koja potiču reverzibilnost su ona pitanja koja imaju mogućnost da promijene učenikov način razmišljanja. Najčešće su to pitanja u kojima je učeniku dano rješenje, a učenik na temelju tog rješenja treba postaviti nekakav problem čije bi rješenje bilo upravo to rješenje koje je učenik dobio na početku zadatka.
Pitanja koja potiču fleksibilnost mogu se podijeliti na dvije različite vrste: od učenika se može tražiti da riješe problem na više od jednog načina ili se od učenika može tražiti da usporede dva ili više problema.
Na kraju, pitanja koja potiču generalizaciju također dolaze u dvije vrste: učenici trebaju pronaći uzorke na temelju više različitih primjera ili se učenicima zadaje zadatak da osmisle specifičan primjer nekog pravila ili uzorka.
U sljedećem primjeru mogu se vidjeti pitanja koja se mogu postaviti učenicima kako bi se potaknula reverzibilnost, fleksibilnost te generalizacija u razmišljanju.

Primjer 2.1. *Za početak ćemo vidjeti primjer koji potiče reverzibilnost u učenikovu razmišljanju.*
Kao što je već spomenuto, reverzibilnost se potiče na način da se učeniku da rješenje, a učenik mora kreirati problem za kojeg ono predstavlja rješenje. Jedno takvo pitanje može biti da učenik treba napisati jednadžbu čiji graf sadrži točku $(3, 1)$. *Jasno je da za ovo pitanje postoji beskonačno mnogo rješenja, tako da učenik može dati više različitih rješenja. Na primjer, jedno rješenje ovog postavljenog problema može biti linearna funkcija definirana na sljedeći način* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$.
Sada je jasno da je

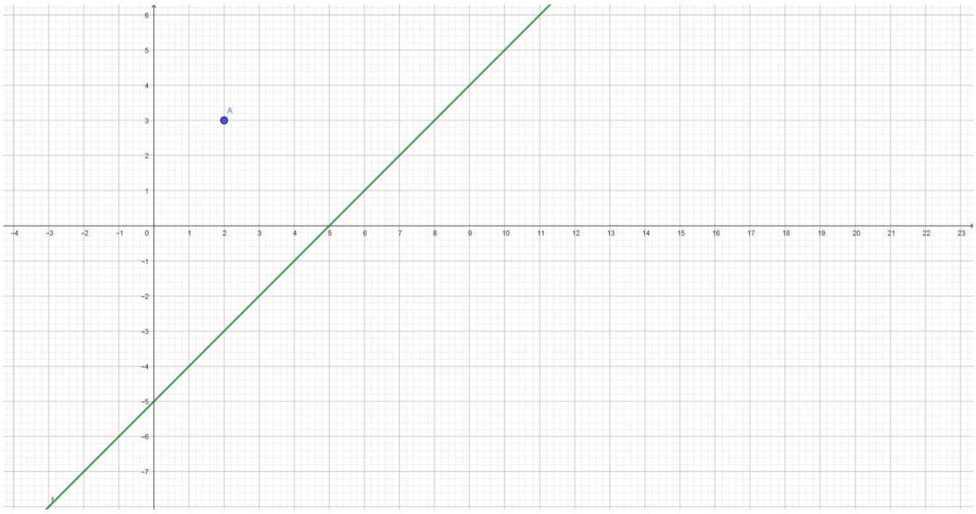
$$f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1,$$

odnosno točka $(3, 1)$ *pripada grafu te funkcije.*
Nadalje, pogledajmo sada primjer zadatka koji potiče fleksibilnost u razmišljanju učenika. Kao što je već ranije spomenuto, postoje dvije vrste takvih zadataka. Prvi tip zadatka su zadaci u kojima se od učenika traži da se određeni problem riješi na više od jednog načina. Primjer takvog zadatka može biti sljedeći: "Pripada li točka $(2, 3)$ *grafu funkcije* $f(x) = x - 5$*? Riješi zadatak na barem dva načina."*
Učenik se treba dosjetiti više načina na koje se ovaj zadatak može riješiti. Jedan od njih je uvrštavanjem $x = 2$ *u* $f(x) = x - 5$, *odnosno provjeriti je li* $f(2) = 3$. *Nakon što učenik to*

napravi, dobit će sljedeći račun:

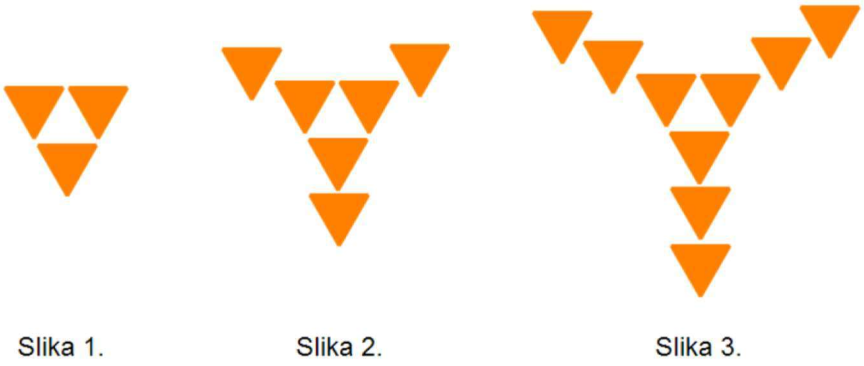
$$f(2) = 2 - 5 = -3,$$

odnosno $f(2) \neq 3$, *tj. točka* $(2,3)$ *ne leži na grafu funkcije* $f(x) = x - 5$. *Drugi način na koji učenik može riješiti ovaj zadatak može biti crtanjem grafa funkcije* f *u koordinatnom sustavu te ucrtavanjem točke* $(2,3)$ *u istom tom koordinatnom sustavu te nakon toga učenik provjerava leži li ta točka na grafu funkcije* f, *odnosno učenik zaključuje da ta točka ne leži na grafu dane funkcije. Na Slici 4 vidi se način rješavanja ovog problema grafički.*



Slika 4: Rješavanje problema grafički.

Druga vrsta zadataka koji potiču fleksibilnost su zadaci koji od učenika traže da od dva ili više dobivenih problema naprave njihovu usporedbu. Primjer takvog zadatka može biti: "Marija je nacrtala graf funkcije $2x = y - 3$, a Luka je nacrtao graf funkcije $y = 4x - 3$. Kako se Marijin graf funkcije može usporediti s Lukinim?"
Za kraj se može pogledati primjer pitanja koji potiče generalizaciju razmišljanja kod učenika. Prvi tip takvog pitanja su pitanja koja od učenika traže da pronađu uzorak na temelju nekog primjera. Pitanje može glasiti ovako: "Na Slici 5 dan je niz slika koje se sastoje od trokuta. Nastavimo li nizati slike prema istom pravilu, odredite broj trokuta na 10. te n-toj slici u nizu.



Slika 5: Pronalazak uzorka.

Učenik treba shvatiti uzorak sa slike te kreirati funkciju koja ga opisuje. Nakon što učenik prebroji da na prvoj slici ima 3 trokuta, na drugoj slici 6 trokuta te na trećoj slici 9 trokuta, tada može kreirati funkciju $f(x) = 3x$. Nakon toga je dovoljno samo uvrstiti $x = 10$ kako bi učenik dobio koliko trokuta će biti na desetoj slici u nizu, odnosno

$$f(10) = 3 \cdot 10 = 30.$$

Isto tako, kako bi izračunao koliko će trokuta biti na n-toj slici u nizu, učenik treba izračunati

$$f(n) = 3 \cdot n = 3n.$$

3. Osnovni koncept pojma funkcije

Na početku ovog poglavlja bavit ćemo se s time kako i na koji način učenicima objasniti koje relacije će predstavljati funkcije, odnosno koje relacije neće, koristeći matematičku definiciju funkcije. Na primjeru svakodnevnih situacija učenici najbolje mogu naučiti osnovne pojmove pa ćemo se time voditi i kod određivanja je li relacija funkcija ili nije.

3.1. Koje relacije će predstavljati funkcije

Kao što je već i na početku definirano, funkcija jest preslikavanje koje elementima iz jednog skupa (domene) pridružuje točno jedan element iz drugog skupa (kodomene). Dakle, vrlo je važno znati prepoznati koje preslikavanje jest funkcija, a koje nije. Učenici vrlo često imaju problem s određivanjem koja relacija jest, a koja nije funkcija. Kako bi učenici to shvatili te mogli primjenjivati u svom radu, potrebno je pronaći pravi način kako im to objasniti.
Za početak nastavnik učenicima može dati primjer stvarne situacije koja se može opisati funkcijom. Nakon toga, nastavnik s učenicima prokomentira zašto ta relacija jest funkcija. Također, nastavnik može prezentirati i protuprimjer svakodnevne situacije čije preslikavanje nije funkcija. Nakon što im objasni zašto ta relacija nije funkcija, nastavnik učenicima može zadati zadatak da samostalno smisle par primjera iz svakodnevnog života koji se mogu opisati funkcijom, odnosno par primjera čije preslikavanje neće biti funkcija.
Isto tako, nastavnik može učenicima dati već gotove primjere relacija, a na učenicima je onda da razmisle predstavlja li ta relacija funkciju ili ne.
Međutim, kako bi učenici prešli razinu površnog znanja te to znanje o funkcijama produbili, nije im dovoljno samo postaviti pitanje je li neka relacija funkcija ili nije, već od njih tražiti objašnjenje zašto ta relacije jest, odnosno zašto ono nije funkcija.
U sljedećem primjeru moguće je vidjeti par svakodnevnih situacija (relacija) koje jesu funkcije te par relacije koje to nisu te objašnjenja. Cilj tog primjera je razumijevanje definicije funkcije kod učenika.

Primjer 3.1. *Dane su četiri relacije. Odredite koje od ovih relacija predstavljaju funkciju, a koje ne te obrazložite svoj odgovor.*

a) input: temperatura u $^\circ C$
output: dan u mjesecu

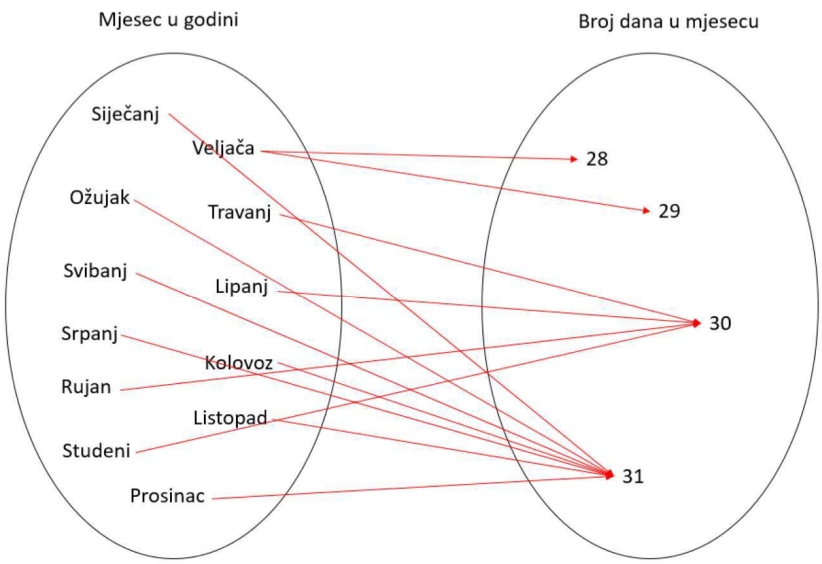
b) input: učenika u razredu
output: broj slova u imenu

c) input: mjesec u godini
output: broj dana u mjesecu

d) input: korisničko ime na Facebook-u
output: lozinka

Rješenje:
Dakle, učenici trebaju prepoznati koje od ovih relacija jesu funkcije, a koje nisu. Započnimo od relacije a).
Učenici bi trebali primijetiti da preslikavanje koje temperaturi u $^\circ C$ pridružuje dan u mjesecu ne predstavlja funkciju. Na primjer, ukoliko je temperatura trećeg dana u trećem mjesecu bila $17^\circ C$ te je također bila $17^\circ C$ i sedmog dana u trećem mjesecu, tada su jednom elementu iz domene pridruženi više od jednog elementa iz kodomene pa to preslikavanje ne predstavlja

funkciju.
Nadalje, preslikavanje pod b) koje svakom učeniku iz razreda pridružuje broj slova koje taj učenik ima u imenu jest funkcija. To je zbog toga što se učeniku broj slova u imenu ne mijenja, odnosno jedinstveno je pa je svakom elementu iz skupa učenika iz razreda pridružen točno jedan element iz skupa broja slova u imenu.
Pogledaju li relaciju pod c), učenici bi trebali zaključiti da ona nije funkcija, osim ako zanemarimo činjenicu da je svaka četvrta godina prijestupna godina. U godini koja nije prijestupna veljača ima 28 dana, a na prijestupnu godinu ima 29 dana. Dakle, ukoliko zanemarimo prijestupne godine, ova relacija predstavlja funkciju. U suprotnom, relacija c) nije funkcija budući da su mjesecu veljača pridruženi elementi 28 i 29. Na Slici 6 moguće je vidjeti preslikavanje relacije c).
Za kraj pogledajmo relaciju pod d). Znamo da korisnik Facebook-a može imati samo jednu lozinku u istom trenutku. Zato je preslikavanje koje korisniku Facebook-a pridružuje lozinku uistinu funkcija.



Slika 6: Prikaz relacije c).

Također, na jedno od prvih pitanja na koje bismo trebali odgovoriti učenicima pri uvođenju pojma funkcije po prvi puta jest u kojim granama matematike se ona pojavljuje te za što nam je potrebna funkcija, odnosno koje su uloge funkcije u svakodnevnom životu. Spomenuto je na početku da se pojam funkcije proteže kroz cijelo školovanje. Dakle, funkcija se pojavljuje u svim granama primijenjene matematike. Kao što je već pokazano kroz različite primjere, preslikavanja koja predstavljaju funkcije možemo pronaći svakodnevno oko nas. Zbog toga je vrlo važno za učenike da razumiju koje relacije će biti funkcije, a koje neće.

3.2. Kovarijacija

Nadalje, jedna od osnovnih ideja funkcija jest i kovarijacija. Kovarijacija, tj. promjenjivost prikazuje na koji način promjena jedne varijable utječe na promjenu druge varijable koja o njoj ovisi.

Jasno je da funkcijama možemo prikazati kako promjena u jednoj veličini utječe na drugu veličinu, odnosno kako druga veličina utječe na prvu veličinu. Na taj način može se razlučiti kojoj vrsti funkcija pripada pojedino preslikavanje. Također, kovarijacija je jedna od temeljnih osobina funkcije koja odlučuje o tome koje vrste problema iz svakodnevnog života se mogu opisati danim preslikavanjem. Vrlo je bitno za učenika da shvati na koji način su povezane dvije varijable kako bi mogao prepoznati vrstu funkcije koja će opisivati preslikavanje. Zbog toga je uloga nastavnika odabrati, te pred učenika postaviti, pitanja i zadatke koji će mu pomoći poboljšati razumijevanje kovarijacije kako bi učenik produbio to razumijevanje te dostigao konceptualnu, a ne samo proceduralnu razinu znanja.
Učenicima je potrebno dosta vremena kako bi uvidjeli svoj pomak u shvaćanju kovarijacije, a kako bi oni mogli taj pomak i ostvariti, potrebno im je predstaviti prave zadatke koji će im u tome pomoći. U sljedećih nekoliko primjera moguće je vidjeti na koji način nastavnik učenicima može predstaviti kovarijaciju te na koji način učenici mogu zaključiti o kojoj vrsti funkcija je riječ.

Primjer 3.2. *Čuvar parka odlučio je mjeriti dubinu vode jezera na istom mjestu kroz nekoliko tjedana te podatke prikazati u sljedećoj tablici:*

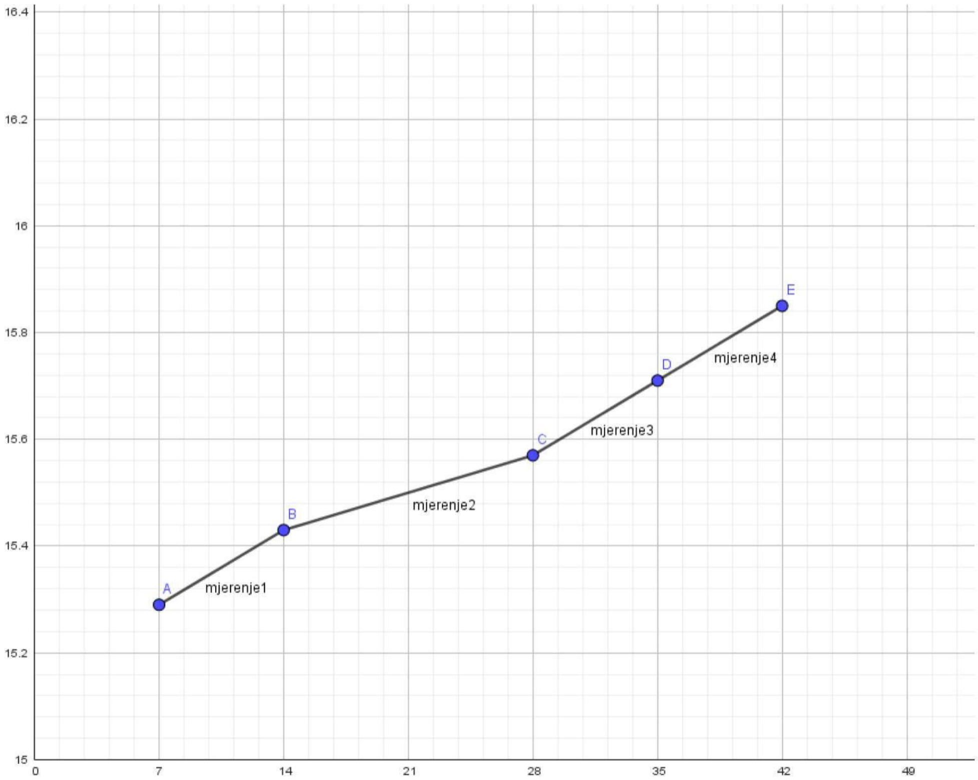
Broj dana od prethodnog mjerenja	*Dan*	*Dubina jezera*	*Promjena u dubini jezera*
	7	15.29	
7	14	15.43	0.14
14	28	15.57	0.14
7	35	15.71	0.14
7	42	15.85	0.14

Problem koji se može javiti u ovom primjeru jest taj ukoliko učenici promatraju samo promjenu u dubini jezera koja nakon svakog mjerenja iznosi 0.14 *te zaključe kako se dubina jezera mijenja konstantno.*
Naime, promjena u dubini jezera zaista iznosi 0.14 *nakon svakog mjerenja, ali treba uzeti u obzir da je u jednom trenutku broj dana koji je prošao od prethodnog mjerenja iznosio* 14*, dok je u svim ostalim mjerenjima on iznosio* 7.
Prikažemo li ovaj tablični prikaz grafički, dobit ćemo sljedeći graf:

Naime, pogledamo li sada graf na Slici 7 možemo vidjeti kako taj graf ne predstavlja linearnu funkciju, a to je upravo ono što većina učenika pomisli kada pogleda samo tablicu. Na grafu možemo vidjeti da promjena nastaje u drugom mjerenju kada je razlika u danima od prethodnog mjerenja bila 14 *dana, što je zapravo bilo i za očekivati.*
Kako bi nastavnik usmjerio učenike na pravi put razmišljanja vezano uz ovaj primjer, on treba znati postaviti prava pitanja. Jedno od tih pravih pitanja može biti: "Kako bi opisali promjenu dubine jezera tijekom vremena?" te na taj način potaknuti učenike da promotre broj dana koji je prošao od prethodnog mjerenja.

Sljedeći primjer opisuje trošak parkiranja na aerodromu tijekom vremenskog perioda u kojemu je auto parkiran. Ovaj primjer može se pokazati učenicima kako bi shvatili da ovisnost među varijablama ne mora biti uvijek linearna ili konstatna.

Primjer 3.3. *Na nekom aerodromu cijene parkinga određuju se ovisno o tome koliko vremena je auto proveo parkiran na njihovom parkingu. Cijena parkinga po satu za prvih* 12 *sati iznosi* 1 *euro, a nakon perioda dužeg od* 12 *sati, osoba plaća cijenu parkinga od* 10 *eura po danu. Zapišite funkciju koja opisuje cijenu parkinga na ovom aerodromu u ovisnosti o satima te nacrtajte graf te funkcije.*



Slika 7: Grafički prikaz Primjera 3.2.

Rješenje:
Pogledajmo prvo kako bi izgledao graf ove funkcije. Na Slici 8 može se vidjeti graf ove funkcije. Naime, može se vidjeti kako taj graf nije neprekidan. Učenici mogu lagano iščitati kolika je cijena parkinga nakon određenog broja sati.
Nastavnik učenicima može postaviti pitanje zbog čega su duljine linija na ovom grafu različite kako bi potaknuo razmišljanje o ovom primjeru. Također, nastavnik s učenicima treba prokomentirati iz kojeg razloga je cijena parkinga za 10 *sati jednaka cijeni parkinga u vremenskom intervalu od* 12 *do* 24 *sata.*
Nakon toga, nastavnik može postaviti pitanje kolika bi bila cijena parkinga kada bi auto bio parkiran 3 *dana,* 5 *dana, a kolika nakon* 4 *sata ili* 6 *sati. Svrha ovog pitanja bila bi kreiranje funkcije koja bi opisivala trošak iz primjera.*
Na kraju, nastavnik postavlja pitanje učenicima kolika je cijena parkinga nakon x sati te učenici dolaze do sljedeće funkcije:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 12 \\ 10 \cdot \lceil \frac{x}{24} \rceil, & x > 12 \end{cases} \tag{1}$$

Na taj način su učenici došli do funkcije koja opisuje trošak parkiranja tijekom vremenskog perioda u satima uz nastavnikovu pomoć.
Dakle, prikazan je odnos između vremena parkiranja (u satima) te cijene parkinga.
Također, učenici sa grafa bi trebali moći zaključiti koja je domena funkcije te njenu sliku. Nastavnik također može postaviti pitanje kao što je: "Kada će cijena biti -2 *eura?" te na taj način učenicima približiti sliku ove funkcije. Isto tako, pitanje koje nastavnik može postaviti kako bi učenicima pripomogao oko određivanja domene jest: "Koliko će osoba morati platiti ako ostaje parkirana* -6 *sati?" na što bi učenici odgovorili da osoba*

ne može biti parkirana negativan broj sati te na taj način shvatili koja je domena ove funkcije.

Slika 8: Grafički prikaz ovisnosti vremena parkiranja u satima i cijene parkinga.

U prethodnom primjeru može se vidjeti da funkcija ne mora biti linearna niti konstantna, nego može biti zadana po dijelovima.
Sljedeći primjer prikazuje situaciju iz stvarnog života koju modeliramo kvadratnom funkcijom.

Primjer 3.4. *Poljoprivrednik je odlučio ograditi svoje zemljište oblika pravokutnika. On na raspolaganju ima* 1000 *metara žice kojom treba ograditi svoje zemljište. Napišite funkciju koja modelira ovu situaciju. Kojih dimenzija treba biti ograda tako da površina zemljišta bude maksimalna? Nacrtajte graf ove funkcije.*

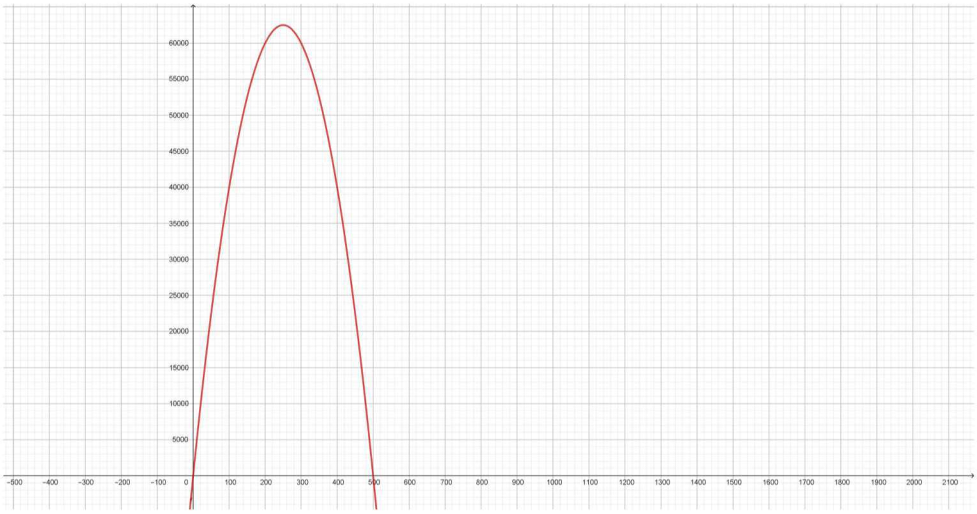
Rješenje:
Znamo da poljoprivrednik ima 1000 *metara žice na raspolaganju.*
Dakle, znamo da će opseg tog zemljišta biti jednak $O = 2x + 2y = 1000$.
Nadalje, znamo da je formula za površinu pravokutnika jednaka $P = x \cdot y$.
Ako iz formule za opseg izrazimo čemu je jednak y *i to uvrstimo u formulu za površinu, dobit ćemo našu traženu funkciju. Dakle,* $y = 500 - x$.
Sada je

$$P = x \cdot (500 - x) = 500x - x^2.$$

Uočimo kako ova funkcija ima maksimum, budući da je $a = -1 < 0$.
Sada je još potrebno izračunati koordinate tjemena ove funkcije kako bismo dobili točku u kojoj se postiže maksimum, a s time i traženu maksimalnu površinu zemljišta.
Znamo da su koordinate tjemena

$$T(x, y) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

Iz $x = -\frac{b}{2a}$ *slijedi da je* $x = -\frac{500}{-2}$, *odnosno* $x = 250$.
Sada možemo izračunati i y *uvrštavanjem* $x = 250$ *u* $y = 500 - x$ *te dobivamo* $y = 250$.
Tada je maksimalna površina jednaka $P = 250 \cdot 250 = 62500$ *metara kvadratnih.*
Na Slici 9 moguće je vidjeti graf funkcije $f(x) = -x^2 + 500x$.



Slika 9: Prikaz grafa iz prethodnog primjera.

Za kraj, u sljedećem primjeru može se vidjeti na koji način se može modelirati funkcija koja opisuje umiranje bakterija u jedinici vremena.

Primjer 3.5. *U Petrijevoj zdjelici nalazi se 900000 bakterija. U jedinici vremena umre* 17% *bakterija. Treba prikazati ovisnost umiranja bakterija o jedinici vremena te grafički prikazati graf te funkcije.*

Rješenje:

Na početku se u Petrijevoj zdjelici nalazi 900000 *bakterija (broj bakterija prije umiranja). Označimo to s* N_0*. Dakle,* $N_0 = N(t_0) = 900000$.

Nakon prve jedinice vremena u Petrijevoj zdjelici ostaje $N(t_1) = N_0 \cdot 0.83$ *bakterija. Pogledamo li koliko bakterija će ostati u Petrijevoj zdjelici nakon druge jedinice vremena, dobit ćemo*

$$N(t_2) = N(t_1) \cdot 0.83 = N_0 \cdot 0.83^2.$$

Nakon treće jedinice vremena ostaje

$$N(t_3) = N(t_2) \cdot 0.83 = N_0 \cdot 0.83^3.$$

Nastavnik već sada može postaviti učenicima pitanje koliko će bakterija preostati u Petrijevoj zdjelici nakon t *vremenskih jedinica, odnosno kako će modelirati funkciju koja prikazuje ovisnost umiranja bakterija o jedinici vremena.*

Jasno je da je to funkcija:

$$f(x) = N_0 \cdot 0.83^t.$$

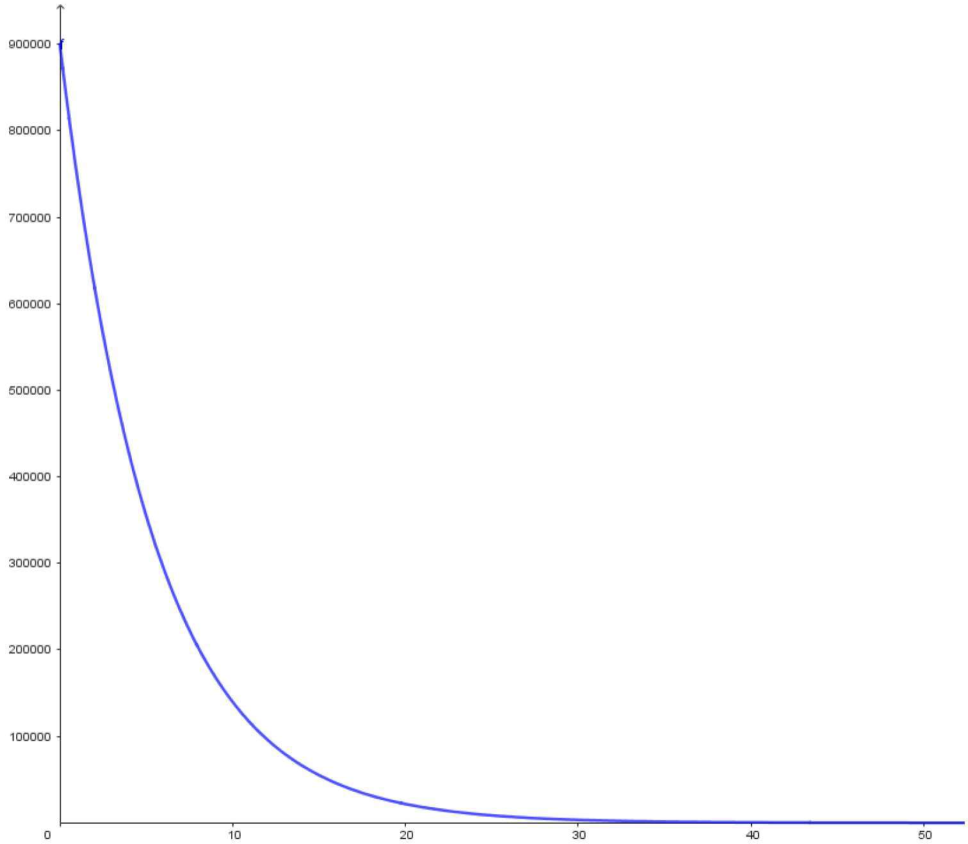
Preostaje još prikazati grafički funkciju $f(x) = N_0 \cdot 0.83^t$.

Na Slici 10 može se vidjeti prikaz funkcije $f(x) = N_0 \cdot 0.83^t$.

Nastavnik učenicima uz pomoć grafa funkcije može približiti domenu i sliku funkcije f.

Nadalje, postavi li nastavnik učenicima pitanje:"Kako se mijenja vrijednost funkcije u ovisnosti o varijabli t*?", učenici mogu zaključiti da se povećanjem varijable* t *vrijednost funkcije* f *smanjuje, odnosno da je funkcija padajuća, što je također vidljivo iz samog grafa. S tim pitanjem nastavnik potiče učenike an razmišljanje, što doprinosi razumijevanju kovarijacije.*

Dakle, kroz ovih par primjera može se uočiti kako promjena jedne varijable utječe na promjenu druge varijable te na koje načine sve nastavnik može predstaviti pojam



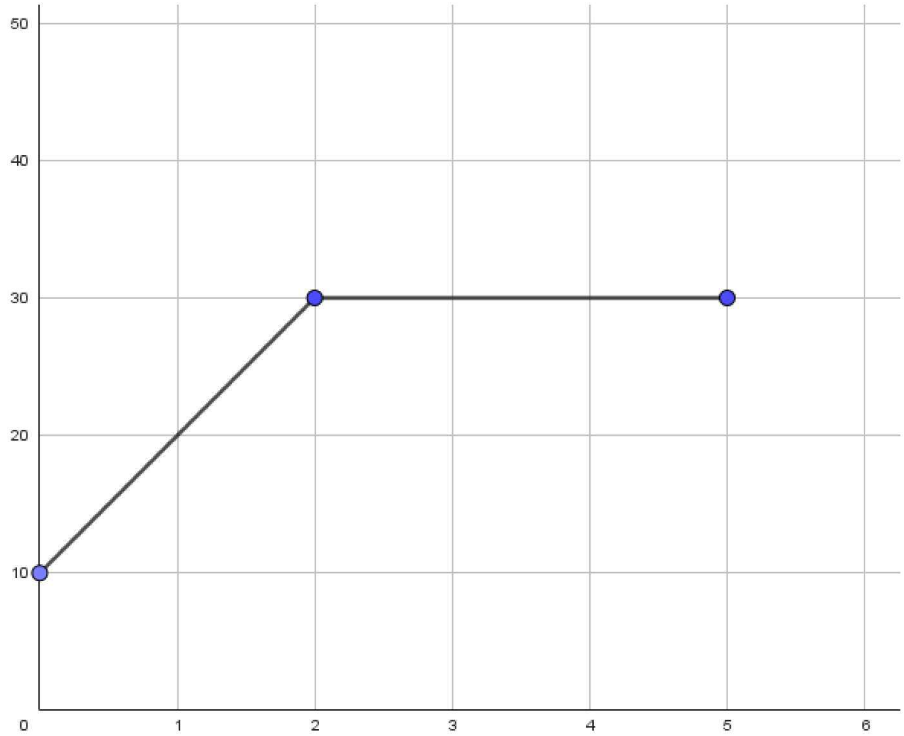
Slika 10: Prikaz grafa eksponencijalne funkcije iz Primjera 3.5.

kovarijacije. Također, u prethodnim primjerima mogu se pronaći i pitanja koja nastavnik može postaviti svojim učenicima kako bi ih potaknuo na razmišljanje međuovisnosti dviju varijabli. Važno je postavljati pitanja, a još važnije znati koje pitanje postaviti u kojem trenutku kako bi nastavnik učenike naveo na pravi put.

4. Prikaz funkcije uz pomoć grafova

Kao što je već na početku navedeno, funkcije se mogu prikazati na više različitih načina, a jedan od njih je i grafički prikaz. Različiti prikazi funkcija mogu dati jasne uvide u veze koje one modeliraju, a analiza tih veza je krucijalna u učenikovu razumijevanju prijelaza iz jednog u drugi prikaz.
Iako se učenicima može činiti da različiti prikazi iste funkcije izgledaju različito, jako je bitno da oni shvate da je kovarijacija između varijabli te funkcije uvijek konstantna.
Kroz nekoliko prethodnih primjera u ovom radu može se vidjeti na koji način grafovi predstavljaju pojedine funkcije. No, nije bitno samo znati nacrtati graf funkcije koja je, na primjer, zadana formulom, već je bitno razumjeti vezu između ta dva prikaza te znati pravilno interpretirati dobiveni graf funkcije.
U ovom poglavlju bit će prikazani grafovi raznih funkcija te će biti komentirana veza između njihovih različitih prikaza.
Pogledajmo za početak jedan primjer u kojem možemo povezati matematiku i fiziku.

Primjer 4.1. *Na Slici 11 nalazi se grafički prikaz funkcije koji je učenicima često vrlo problematičan za interpretaciju.*



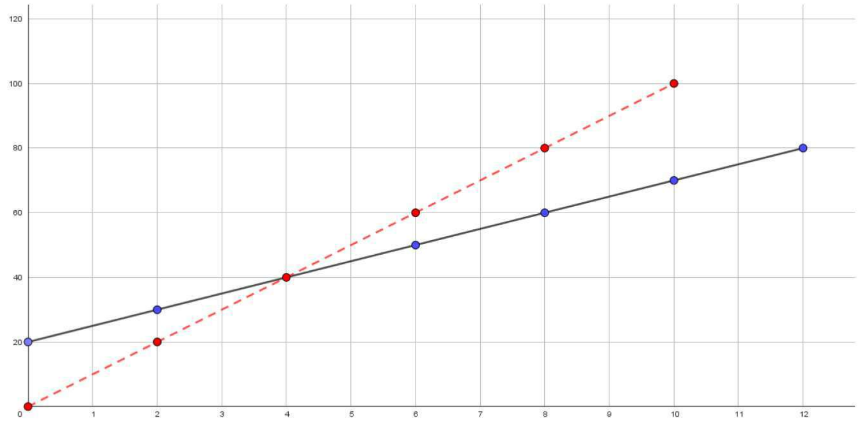
Slika 11: v-t graf brzine nekog automobila iz Primjera 4.1.

Naime, prikazan je $v - t$ graf nekog automobila, pri čemu je na x-osi prikazano vrijeme u minutama, a na y-osi brzina u miljama po satu (mph). Vrlo je lako moguće da će učenici krivo interpretirati ovaj graf.
Prva stvar koju bi učenici mogli primijetiti jest da od $t = 2$ vrijedi da je brzina stalna, odnosno $v = 30$.
Zbog toga bi mogli pomisliti kako je automobil stao, iako shvaćaju da je na slici $v - t$ graf. Iz

tog je razloga vrlo bitan način na koji će nastavnik učenicima interpretirati taj graf, odnosno pitanja koja će im nastavnik postaviti tijekom predstavljanja istog.
Prvenstveno, učenici trebaju shvatiti zašto je ovaj graf sastavljen od dvije razlomljene dužine, odnosno kako to interpretirati. Nastavnik ih može pitati: "Na što upućuje to da je ovaj graf sastavljen od dvije dužine, tj. da on nije pravac?" te učenici trebaju zaključiti da to upućuje da auto nije vozio konstantnom brzinom u danom vremenskom intervalu.
Ukoliko nastavnik postavi pitanje učenicima: "Što znači to da je početna točka ovog grafa $(0,10)$*?, učenici mogu shvatiti da automobil u trenutku* $t=0$ *ima već neku početnu brzinu od* 10 *milja po satu.*
Nadalje, nastavnik učenicima treba postaviti pitanje što se događa s automobilom u vremenskim intervalima $[0,2]$ *te* $[2,5]$*. Na taj način učenici trebaju shvatiti da automobil neće stati u trenutku* $t=2$*, već da će samo voziti konstantnom brzinom od* 30 *milja po satu sljedeće 3 minute.*
Ova pitanja zahtijevaju od učenika lokalni, ali isto tako i globalni pristup grafu te koordinatnom sustavu. Na taj način grafovi mogu poslužiti učeniku kao dinamično sredstvo prikaza koje pomaže učenicima shvaćanje kovarijacije između dvije veličine.
Jednom kada učenik počne interpretirati grafove lokalno i globalno, tada je u mogućnosti ponuditi ostale prikaze kao što je tablični.

U prethodnom se primjeru mogao vidjeti način na koji se interpretira $v-t$ graf jednog automobila.
U sljedećem primjeru prikazan je $s-t$ graf dva automobila te je dana njihova usporedba.

Primjer 4.2. *Na Slici 12 moguće je vidjeti* $s-t$ *graf dva automobila.*



Slika 12: s-t graf brzine dva automobila iz Primjera 4.2.

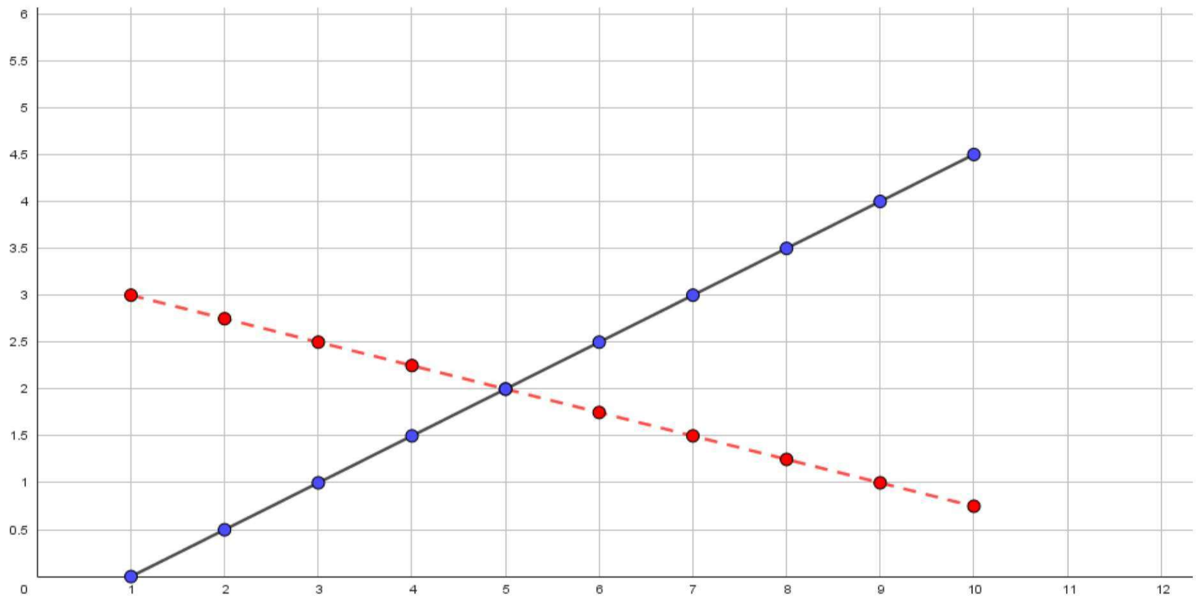
Na x-osi prikazano je vrijeme u sekundama, a na y-osi prikazana je udaljenost u metrima.
Crvena linija predstavlja jedan automobil, a plava drugi.
Najveći problem interpretacije ovog grafa učenicima stvara to što nisu sigurni što točno na grafu trebaju promatrati kako bi ponudili odgovor na postavljeno pitanje.
Razlika između grafa na Slici 12 i grafa iz prethodnog primjera je u tome što je na grafu u prethodnom primjeru bio prikazan samo jedan automobil, dok je na grafu iz ovog primjera prikazana usporedba između dva automobila. Učenicima se stvar dodatno komplicira kada u priču dodamo još jedan automobil te sada u istom koordinatnom sustavu moraju promatrati ne jedan, već dva grafa.
Nadalje, kao što je već napisano na početku ovog primjera, y-os više ne predstavlja brzinu automobila, već udaljenost na kojoj se taj automobil nalazi.
Međutim, grafovi oba auta su pravci te je učenicima na taj način razmišljanje olakšano u odnosu na prethodni primjer kada su imali dvije razlomljene dužine.
Kako bi uspješno interpretirali ovaj graf, nastavnik može učenicima postavljati pitanja vezana uz to što se događa u pojedinom trenutku kao i u prethodnom primjeru. No, pogledajmo koja ostala pitanja nastavnik može postaviti učenicima kako bi potakao njihovo dublje razumijevanje, a odnose se na usporedbu ova dva automobila.
Prvo pitanje koje nastavnik može postaviti jest: "Imaju li oba automobila ikada jednaku brzinu? Ako da, kada?" te na taj način od učenika očekuje da shvate da iz ovog $s-t$ grafa mogu iščitati brzinu oba automobila. Učenici nakon toga mogu shvatiti da ova dva automobila nikada neće ići jednakom brzinom jer im je nagib pravaca različit. Međutim, neki učenici mogu pomisliti da oba automobila imaju jednaku brzinu u $t=4$. Takvi učenici zapravo ne shvaćaju da vrijednost na y osi predstavlja udaljenost, a ne brzinu.
Nadalje, nastavnik može od učenika tražiti da mu objasne što se događa s automobilima u trenutku $t=0$. Naime, automobili ne kreću s iste pozicije, odnosno automobil kojeg predstavlja plavi pravac u koordinatnoj ravnini kreće s mjesta udaljenog 20 metara od automobila kojeg predstavlja crveni pravac. Sada nastavnik od učenika može tražiti da mu objasne koji automobil ima veću brzinu u $t=0$.
Nadalje, sljedeće pitanje koje nastavnik može postaviti svojim učenicima jest: "Hoće li se ova dva auta ikada susresti?" te učenici iz ovog grafa mogu iščitati da hoće i to za $t=4$. Međutim, postavi li im se pitanje: "U kojem trenutku će ta dva automobila prijeći istu udaljenost?", nastavnik treba pripaziti na odgovore budući da bi učenici opet mogli odgovoriti da će se to dogoditi za $t=4$, budući da za $t=4$ imaju istu vrijednost. Takvi učenici ne paze na to da jedan automobil kreće iz točke $(0,20)$, dok drugi kreće iz ishodišta koordinatnog sustava, odnosno u trenutku $t=4$ će automobil predstavljen plavim pravcem prijeći tek 20 metara, dok će automobil predstavljen crvenim pravcem prijeći već 40 metara. U tom slučaju nastavnik mora znati kako postupiti, odnosno učenike upozoriti na mjesta s kojih kreću oba automobila.

Pitanja iz prethodnog primjera su pitanja koja će potaknuti učenika na razmišljanje o tome kako interpretirati dobiveni graf. Važno je za učenika da shvati da dobiveni graf predstavlja ovisnost puta o vremenu, a ne brzine o vremenu kada mu se postavi pitanje vezano uz brzinu te da se dosjeti na koji način tada može izračunati brzinu u trenutku t.
U sljedećem primjeru moguće je vidjeti na koji način je učenicima moguće predstaviti rastuće i padajuće funkcije koristeći situaciju iz stvarnog života.

Primjer 4.3. *Učenik A i učenik B nalaze se jedno pored drugog te kreću šetati u isto vrijeme paralelno jedno s drugim. Učenik A započinje hodati velikim koracima te svakim korakom kojeg napravi smanjuje duljinu koraka, dok učenik B započinje malim koracima te svakim korakom povećava duljinu koraka. U sljedećoj tablici vidljive su informacije o broju koraka te duljini koraka u pojedinom trenutku za učenika A i učenika B.*

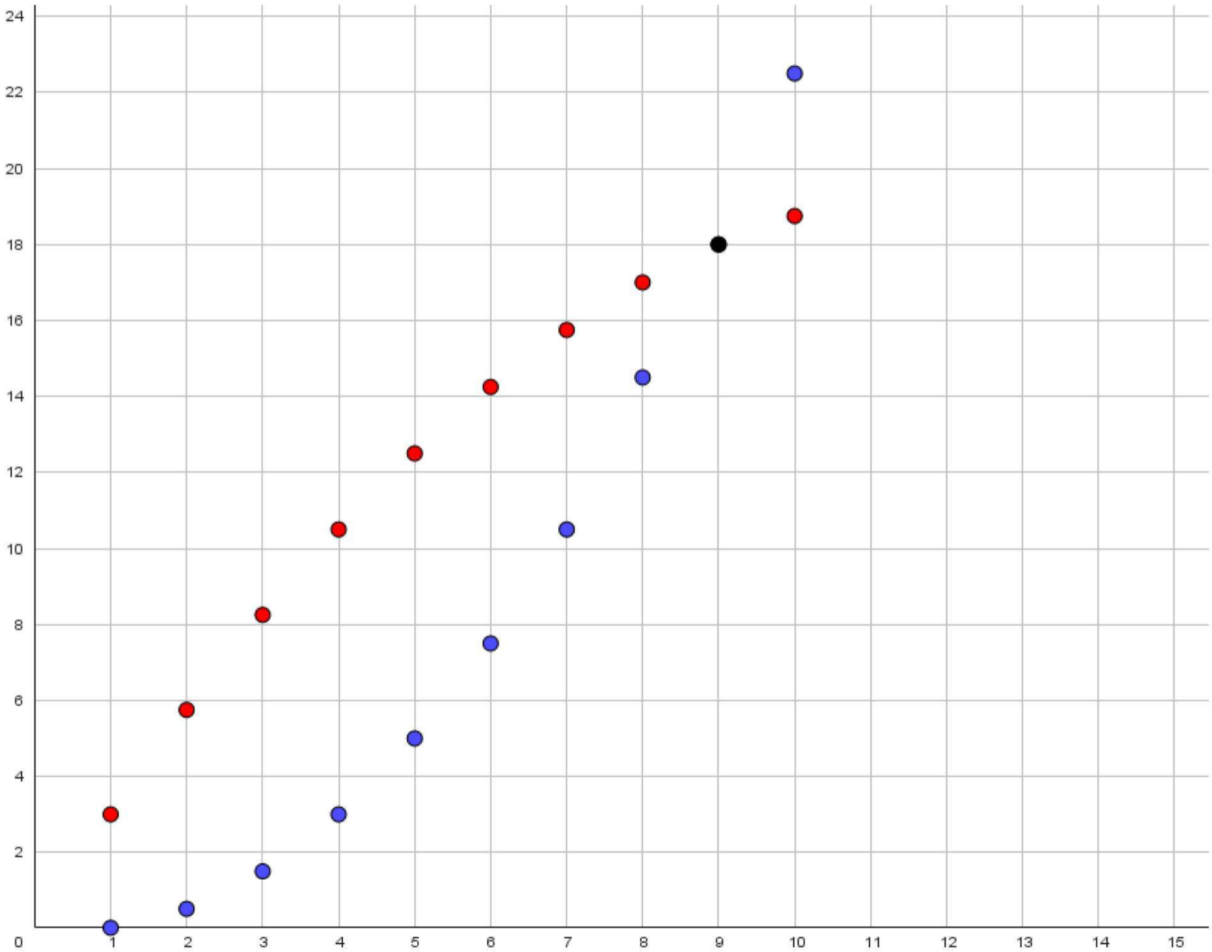
	Duljina koraka	
Broj koraka	*Učenik A*	*Učenik B*
1	3.00	0.0
2	2.75	0.5
3	2.50	1.0
4	2.25	1.5
5	2.00	2.0
6	1.75	2.5
7	1.50	3.0
8	1.25	3.5
9	1.00	4.0
10	0.75	4.5

Ovaj primjer sličan je prethodnom primjeru, međutim u ovom primjeru učenik A predstavljat će graf padajuće funkcije, a učenik B predstavljat će graf rastuće funkcije. Nastavnik također može pristupiti ovom problemu tako da provede ovaj eksperiment s učenicima.
Za početak bi najbolje bilo kako bi nastavnik s učenicima predočio grafički ono što je prikazano tablicom.
Dakle, na Slici 13 mogu se vidjeti grafovi učenika A i učenika B.



Slika 13: graf šetnje učenika A i učenika B.

Na osi x prikazan je broj koraka, a na osi y prikazana je duljina koraka.
Pravac prikazan crvenom bojom predstavlja učenika A, dok pravac prikazan plavom bojom predstavlja učenika B.
Učenicima se može postaviti pitanje na koji način su mogli vidjeti da će ovi grafovi biti pravci i prije nego su oni prikazani grafički. Naime, učenici iz tabličnog prikaza mogu iščitati duljine koraka te vidjeti da je promjena duljine koraka učenika A uvijek konstantna i iznosi -0.25*, dok je promjena duljine koraka učenika B također uvijek konstantna i iznosi* 0.5 *što ukazuje na linearnu funkciju.*
Nadalje, na isti način mogli su zaključiti da će graf učenika A biti padajući, a graf učenika B rastući jer je promjena duljine koraka kod učenika A negativna, a kod učenika B pozitivna.
Također, može se interpretirati što se dogodi u trenutku kada je broj koraka jednak 5. Učenici bi trebali primijetiti da je u tom trenutku duljina koraka učenika A jednaka duljini koraka učenika B što također mogu iščitati s grafa funkcije, ali i iz dobivene tablice.
Nadalje, zgodno je vidjeti tko je proputovao dalje u trenutku kada je broj koraka jednak 5. Učenici bi samo trebali zbrojiti sve vrijednosti do tada te shvatiti da je učenik A prešao veću udaljenost.
Može se postaviti pitanje koliko su udaljeni učenik A i učenik B u trenutku kada je broj koraka jednak 2, što se vrlo lako može izračunati, a učenike potiče na razmišljanje.
Pitanja poput: "Tko je prešao veću udaljenost" te "Tko je prešao veću udaljenost u trenutku kada je broj koraka jednak 7" mogu se postaviti učenicima da se provjeri način na koji razmišljaju. Ukoliko učenici odgovore da je osoba B prešla veću udaljenost, vrlo je važno tražiti i objašnjenje. Naime, neki učenici će intuitivno reći da je osoba B prešla veću udaljenost jer joj je vrijednost za $x = 10$ *veća nego osobi A. Iako je osoba B zaista prešla veću udaljenost, to nije točno obrazloženje.*
Također, učenicima se može prikazati i graf koji prikazuje ovisnost broja koraka o ukupnoj udaljenosti koju su učenik A i učenik B prešli kako bi se odgovorilo na pitanja: "Tko je prešao veću udaljenost u trenutku kada je broj koraka jednak 7" ili "Hoće li učenik B ikada dostići učenika A". Zbog toga, na Slici 14 se može vidjeti graf koji prikazuje ovisnost broja koraka o ukupnoj udaljenosti koju su prešli učenik A i učenik B.



Slika 14: graf ovisnosti broja koraka o ukupno prijeđenoj udaljenosti.

Točkasti graf crvene boje prikazuje ovisnost broja koraka o ukupnoj udaljenosti učenika A, dok točkasti graf plave boje prikazuje ovisnost broja koraka o ukupnoj udaljenosti učenika B.
Kao što je već bilo rečeno, s ovog grafa može se iščitati koji učenik je prešao veću ukupnu udaljenost na kraju puta. Jasno je vidljivo da je učenik B prešao veću udaljenost (jer je vrijednost u $x = 10$ *nešto veća od 22, dok je za učenika A ona manja od 20.*
Također, s ovog grafa se može iščitati u kojem su trenutku ova dva učenika prešla jednaku udaljenost (crna točka na grafu). To se dogodilo za $x = 9$.

Kroz ovih nekoliko primjera moguće je vidjeti zbog čega je važno učenike izlagati grafovima funkcija te zbog čega je važan prijelaz iz jednog prikaza u drugi. Grafovi su učenicima vrlo bitni budući da se iz njih mogu iščitati bitne informacije o funkciji kao što je vidljivo iz prethodnih primjera.

5. Operacije s funkcijama i kompozicija funkcija

Kao što možemo provoditi operacije s brojevima, tako možemo provoditi operacije i s funkcijama. Algebarske operacije koje se mogu provoditi su zbrajanje, oduzimanje, množenje te dijeljenje funkcija.
Međutim, kako bi se te operacije mogle provesti, važno je da funkcije imaju jednake domene te da im je kodomena skup realnih brojeva.
Nadalje, domena funkcije koju dobijemo kao produkt ili kvocijent dviju funkcija može se razlikovati od domena koje su te funkcije imale prije nego što je izvršena operacija množenja ili dijeljenja među njima. Na primjer, funkcije $f(x) = x + 1$ i $g(x) = x - 1$ za domenu imaju skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Međutim, kvocijent funkcija f i g je ponovno neka funkcija h oblika

$$h(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Pogleda li se sada domena ove funkcije, jasno je da je to skup realnih brojeva, ali bez jedinice (budući da se u nazivniku ne smije nalaziti nula).
Na taj način može se vidjeti kako se mijenja domena nove funkcije nastale dijeljenjem dviju dobivenih funkcija.
Isto tako, u ovom poglavlju će se vidjeti na koji način se može napraviti kompozicija dviju funkcija. Pogledom na Definiciju 1.8 u Poglavlju 1. može se vidjeti da je za kompoziciju $f \circ g$ dviju funkcija f i g nužno da je kodomena funkcije f podskup domene funkcije g. U toj situaciji možemo odrediti kompoziciju dviju funkcija.
Pogledajmo za početak na koji način se provode algebarske operacije s funkcijama.

5.1. Zbrajanje funkcija

Neka su f i g dvije funkcije realne varijable. Postavljamo si pitanje kada bi u nastavi bilo potrebno za nastavnika da uvede zbrajanje dviju funkcija.
Razmislimo o sljedećem primjeru:

Primjer 5.1. *Osoba A i osoba B odlučile su ubacivati novce u kasicu kako bi uštedjeli za putovanje. Osoba A svakoga dana ubaci* 1.5 *euro, dok osoba B svakoga dana ubaci* 1.75 *eura. Odlučili su da će novce ubacivati u istu kasicu. Ako im je za izlet potrebno sveukupno* 200 *eura, za koliko dana će te dvije osobe skupiti novce?*

Rješenje:
Funkcija kojom se može modelirati iznos novca koju je osoba A uštedjela za x dana je $f(x) = 1.5x$, dok je funkcija kojom se modelira iznos novca koju je osoba B uštedjela za x dana dana s $g(x) = 1.75x$.
Budući da osobe A i B skupljaju zajedno novac te ga stavljaju u istu kasicu, može se promatrati zbroj ove dvije funkcije, odnosno

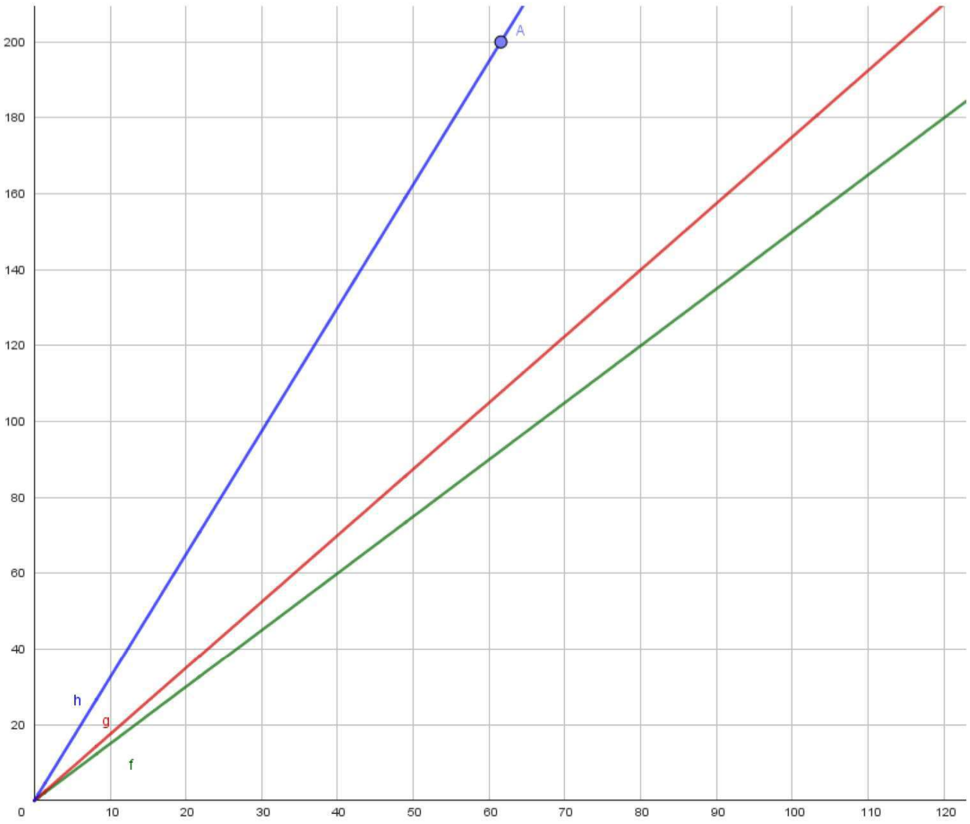
$$h(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x) = 1.5x + 1.75x = 3.25x.$$

Dakle, funkcijom h modeliran je iznos kojeg su osoba A i B uštedjele za izlet za x dana.
Sada je preostalo još pronaći koliko iznosi x, odnosno za koliko dana će osoba A i B skupiti 200 *eura, odnosno $h(x) = 200$.*
Iz toga slijedi da je

$$3.25x = 200 \implies x = 61.54,$$

odnosno osoba A i B će uštedjeti novce za izlet za 62 dana.
Na Slici 15 moguće je vidjeti grafove funkcija f, g te h.

Prikažu li se sve tri funkcije grafički u istom koordinatnom sustavu, vrlo je uočiti za koliko dana će se skupiti 200 eura promatranjem grafa funkcije h, dok se promatranjem grafova funkcija f i g to ne može iščitati tako lako.
To je još jedna prednost zbrajanja funkcija. U koordinatnom sustavu prikazana je točka A koja prikazuje sjecište grafa funkcije h s pravcem $y = 200$.



Slika 15: Prikaz funkcija f, g i h u istom koordinatnom sustavu iz Primjera 5.1.

5.2. Oduzimanje funkcija

Nadalje, postavlja se pitanje kada uvesti oduzimanje funkcija u nastavu.
Stvarna situacija koja nastavniku može pomoći pri uvođenju oduzimanja dviju funkcija jest profit neke firme. Profit jest čista zarada firme, odnosno razlika između prihoda i troškova. Na sljedećem primjeru moguće je vidjeti na koji način se može modelirati funkcija profita neke firme kao razlika funkcije prihoda te funkcije troškova.

Primjer 5.2. *Firma "Stolice" bavi se izradom drvenih stolica. Šefa te firme zanima koliki je profit po stolici koju ta firma izradi i proda. Neka je f funkcija prihoda nakon prodaje x stolica u eurima, a funkcija g funkcija trošak izrade x stolica u eurima. Funkcije f i g definirane su na sljedeći način:*

$$f(x) = \frac{5}{2}x + 3,$$

$$g(x) = \frac{3}{7}x + 2.$$

Definirajte funkciju h koja će modelirati funkciju profita u eurima ove firme pri izradi x stolica. Koliki će biti profit firme "Stolice" pri izradi 24 stolice, a koliki pri izradi 147 stolica?

Rješenje:

Kao što je već objašnjeno, profit je razlika prihoda i troškova.
Zbog toga, funkcija profita h može se definirati kao razlika funkcije prihoda f i funkcije troškova g, odnosno

$$h(x) = f(x) - g(x) = (f - g)(x) = \frac{5}{2}x + 3 - \left(\frac{3}{7}x + 2\right) = \frac{29}{14}x + 1.$$

Na ovaj način je dobivena funkcija h kojom je modeliran profit ove firme pri izradi x stolica. Potrebno je još izračunati profit te firme pri izradi 24, odnosno 147 stolica.
Dakle,

$$h(24) = \frac{29}{14} \cdot 24 + 1 = 50.71,$$
$$h(147) = \frac{29}{14} \cdot 147 + 1 = 305.50,$$

odnosno profit firme "Stolice" pri izradi 24 stolice iznosi 50.71 euro, a pri izradi 147 stolica iznosi 305.50 eura. Također, funkcije f, g i h trebale bi se učenicima prezentirati i grafički budući da se sa grafa može iščitati puno informacija.
Na Slici 16 može se vidjeti prikaz grafova funkcija f, g i h u istom koordinatnom sustavu. Lagano se primijeti da se s grafa funkcije h može iščitati koliki će biti profit za izradu nekog broja stolica. Međutim, također se može iščitati koliko stolica mora biti proizvedeno kako bi profit bio neki određeni iznos. Točka A je uređeni par $(24, 50.71)$ čija x koordinata predstavlja broj izrađenih stolica, a y koordinata profit firme pri izradi 24 stolice.
Dakle, $h(24) = 50.71$. Na taj način može se vidjeti da se različitim prikazima funkcije može doći do traženih informacija, samo je potrebno znati iskoristiti i interpretirati pojedini prikaz.

U prethodna dva primjera može se vidjeti na koji način nastavnik može uvesti zbrajanje, odnosno oduzimanje dviju funkcija.
Postavlja se pitanje na kakvom primjeru nastavnik može uvesti množenje i dijeljenje dviju funkcija. Za početak će se uvesti množenje.

5.3. Množenje funkcija

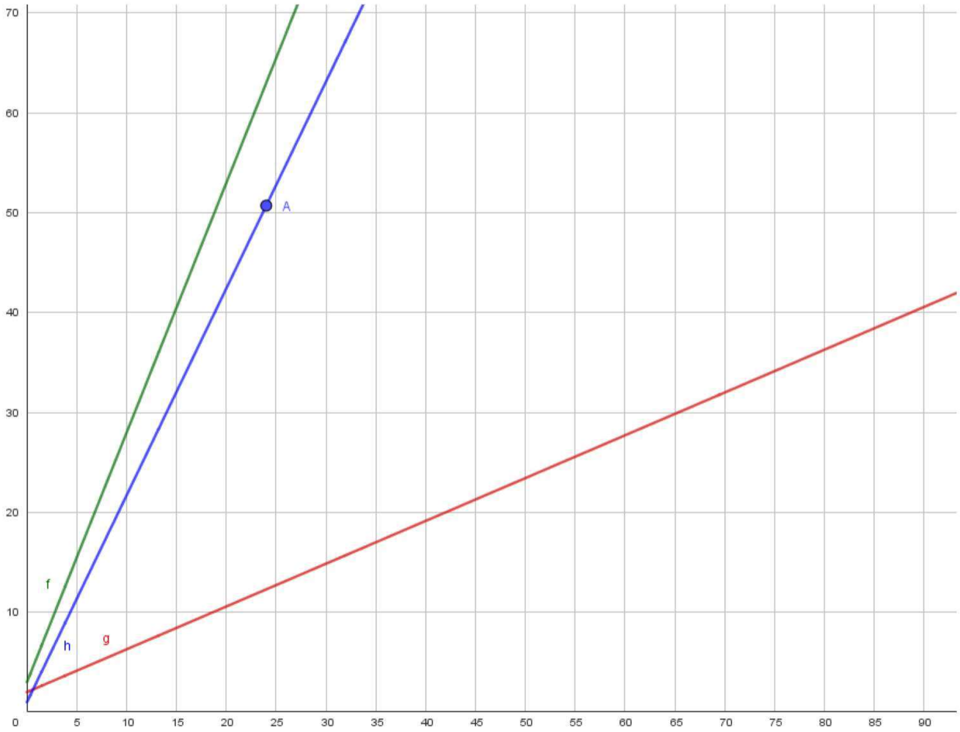
Množenje dviju funkcija učenicima ne dolazi intuitivno kao njihovo zbrajanje ili oduzimanje. Zbog toga, nastavnik mora zadati primjer koji će učenicima biti jasan i koji neće biti prekompliciran. Pogledajmo sljedeći primjer:

Primjer 5.3. *Radnici su odlučili raskrčiti neku šumu pravokutnog oblika. Na početku je dio šume već bio raskrčen i to 3 metra u dužinu te 1 metar u širinu. Svake godine radnici raskrče tu šumu 1.5 metar u dužinu te 1 metar u širinu. Na koji način se može odrediti površina raskrčenog dijela šume za x godina?*

Rješenje:

Dakle, poznato je da je na početku šuma bila raskrčena 3 metra u dužinu te se zna da se svake sljedeće godine ona raskrči u dužinu za 1.5 metar.
Zbog toga se funkcijom f modelira broj metara za kojih će šuma biti raskrčena u dužinu za x godina na sljedeći način:

$$f(x) = 1.5x + 3.$$



Slika 16: Prikaz funkcija f, g i h u istom koordinatnom sustavu iz Primjera 5.2.

Analogno, može se definirati funkcija koja će modelirati broj metara za kojih će šuma biti raskrčena u širinu za x godina na sljedeći način:

$$g(x) = x + 1.$$

Od učenika se zahtijeva da zaključe na koji način se može izračunati površina raskrčenog dijela šume za x godina.
Budući da su definirane dvije funkcije f i g koje modeliraju duljinu, odnosno širinu raskrčenog dijela šume za x godina, a površina pravokutnika jest umnožak njegove duljine i širine, možemo definirati funkciju h koja predstavlja umnožak funkcija f i g, odnosno duljine i širine raskrčenog dijela šume te na taj način dobiti funkciju koja modelira površinu raskrčenog dijela šume.
Dakle,

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x) = (1.5x + 3) \cdot (x + 1) = 1.5x^2 + 4.5x + 3.$$

Na ovaj način definirana je funkcija h kojom je modelirana površina raskrčenog dijela šume pravokutnog oblika za x godina.

Vrlo je bitno da učenicima novi pojmovi budu uvedeni na jasan način. Učenici su se s formulom za površinu pravokutnika susreli u nižim razredima te ne bi trebali imati problema sa shvaćanjem ovog primjera.

5.4. Dijeljenje funkcija

U kojim situacijama će se dvije funkcije dijeliti shvatit će se ukoliko se vratimo na Primjer 5.2 i na već poznatu funkciju profita.

U tom primjeru definirana je funkcija h kao funkcija profita firme "Stolice" pri izradi x stolica. Šefa te firme zanima koliki je prosječni profit pri izradi x stolica.
Pogledajmo sljedeći primjer:

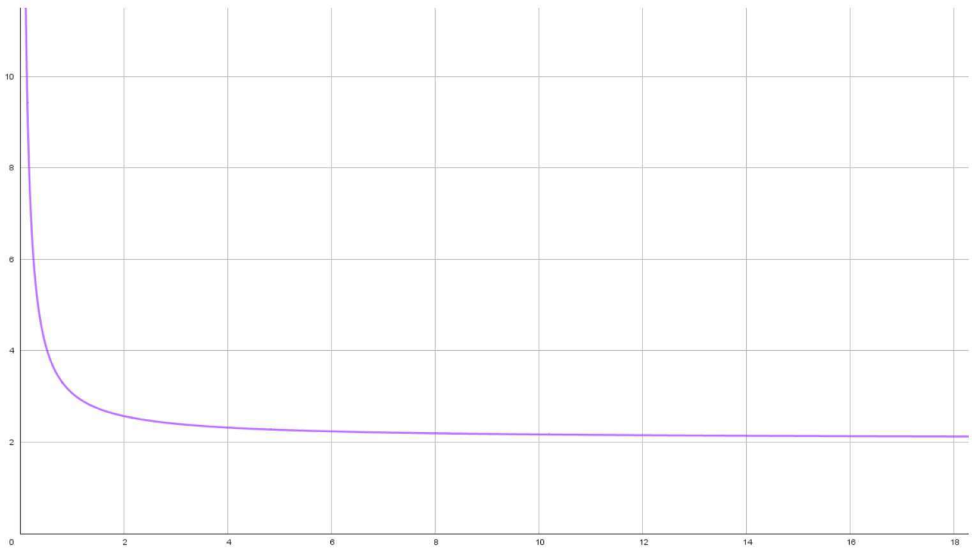
Primjer 5.4. *Neka su funkcije f i g funkcije definirane kao u Primjeru 5.2 te neka one predstavljaju funkciju zarade, odnosno troška firme "Stolice" pri izradi x stolica.*
Kao što je već rečeno, razlika tih dviju funkcija jest nova funkcija h koja predstavlja profit pri izradi x stolica. Ta funkcija je definirana također u Primjeru 5.2 na sljedeći način

$$h(x) = \frac{29}{14}x + 1.$$

Zna se da je prosječni profit jednak profitu pri izradi x proizvoda podijeljen s brojem proizvoda.
Zbog toga se definira nova funkcija a na sljedeći način

$$a(x) = \frac{h(x)}{x} = \frac{\frac{29}{14}x + 1}{x}.$$

Promotrimo sada domene funkcija.
Kao što je već na početku ovog poglavlja bilo rečeno, domene funkcija dobivenih algebarskim operacijama se mogu mijenjati. Promotri li se funkcija profita h, može se lako vidjeti da je njena domena skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Međutim, funkcija a koja je nastala dijeljenjem dviju funkcija kao svoju domenu ima skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ jer nazivnik mora biti različit od nule. Na Slici 17 može se vidjeti grafički prikaz funkcije a.



Slika 17: Prikaz funkcije prosječnog profita a iz Primjera 5.4.

5.5. Kompozicija funkcija

Potreba za uvođenjem pojma kompozicije funkcija javlja se već u drugom razredu srednje škole kada se uvodi kvadratna funkcija.
Naime, kvadratna funkcija $f(x) = x^2$ osnova je za kvadratne funkcije oblika

$$f(x) = ax^2,$$

$$f(x) = a(x - x_0)^2,$$
$$f(x) = ax^2 + y_0,$$
$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0,$$

pri čemu su $a, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.
Ukoliko se malo bolje pogleda funkcija oblika

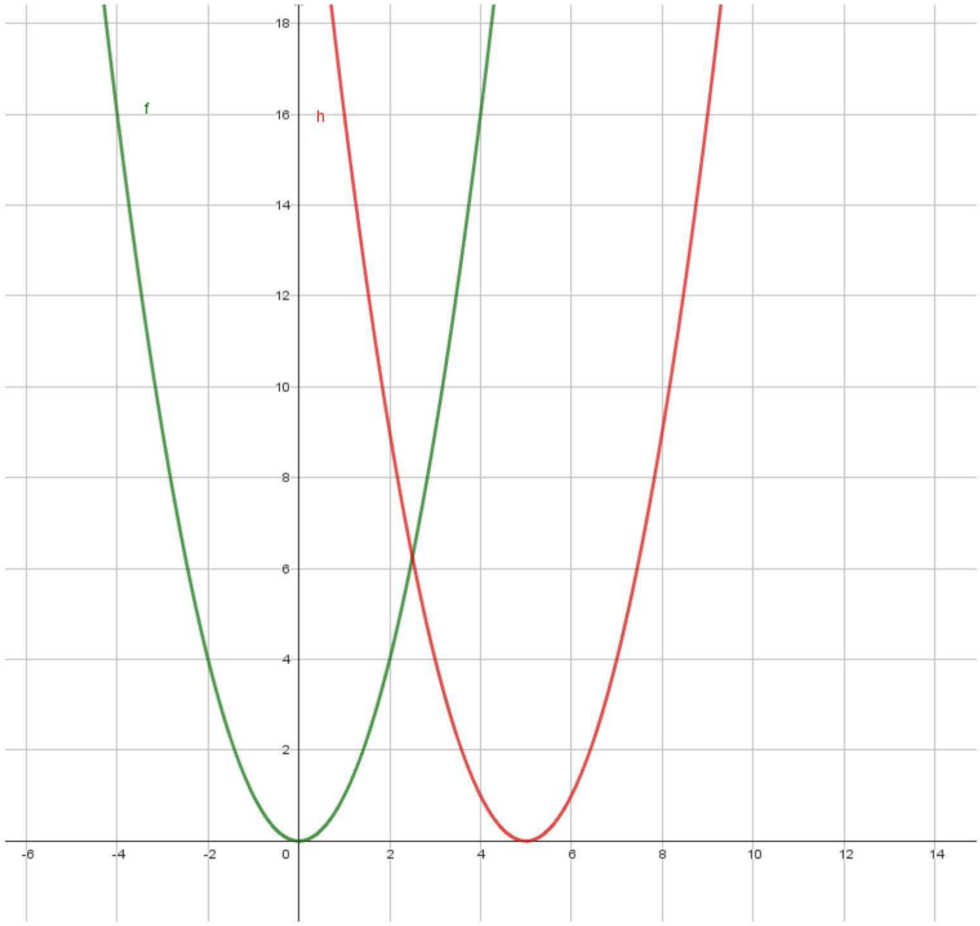
$$f(x) = a(x - x_0)^2,$$

može se primijetiti da je ona zapravo kompozicija dviju funkcija.
U sljedećim primjerima može se vidjeti na koji način nastaju navedeni oblici kvadratne funkcije.
Pogledajmo za početak kako nastaje kvadratna funkcija oblika $f(x) = a(x - x_0)^2$.

Primjer 5.5. *Neka je $f(x) = x^2$ te $g(x) = x - 5$. Odredimo kompoziciju funkcija f i g.*
Rješenje:
Uočimo da je kompoziciju moguće odrediti budući da su ovo obje realne funkcije realne varijable. Odredimo kompoziciju $f \circ g$.
Dakle,
$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x - 5)^2.$$
Pogleda li se sada, to je upravo kvadratna funkcija oblika

$$f(x) = a(x - x_0)^2,$$

odnosno kompozicijom dviju funkcija f i g dobiva se nova funkcija traženog oblika. U ovom slučaju je $a = 1$ te $x_0 = 5$.
Pogledom na Sliku 18 može se vidjeti kako izgleda graf kvadratne funkcije tog oblika.
Naime, funkcija h je nastala translacijom funkcije f po $x-$ osi za 5.
Tjeme kvadratne funkcije oblika $f(x) = a(x - x_0)^2$ je točka $T = (x_0, 0)$.



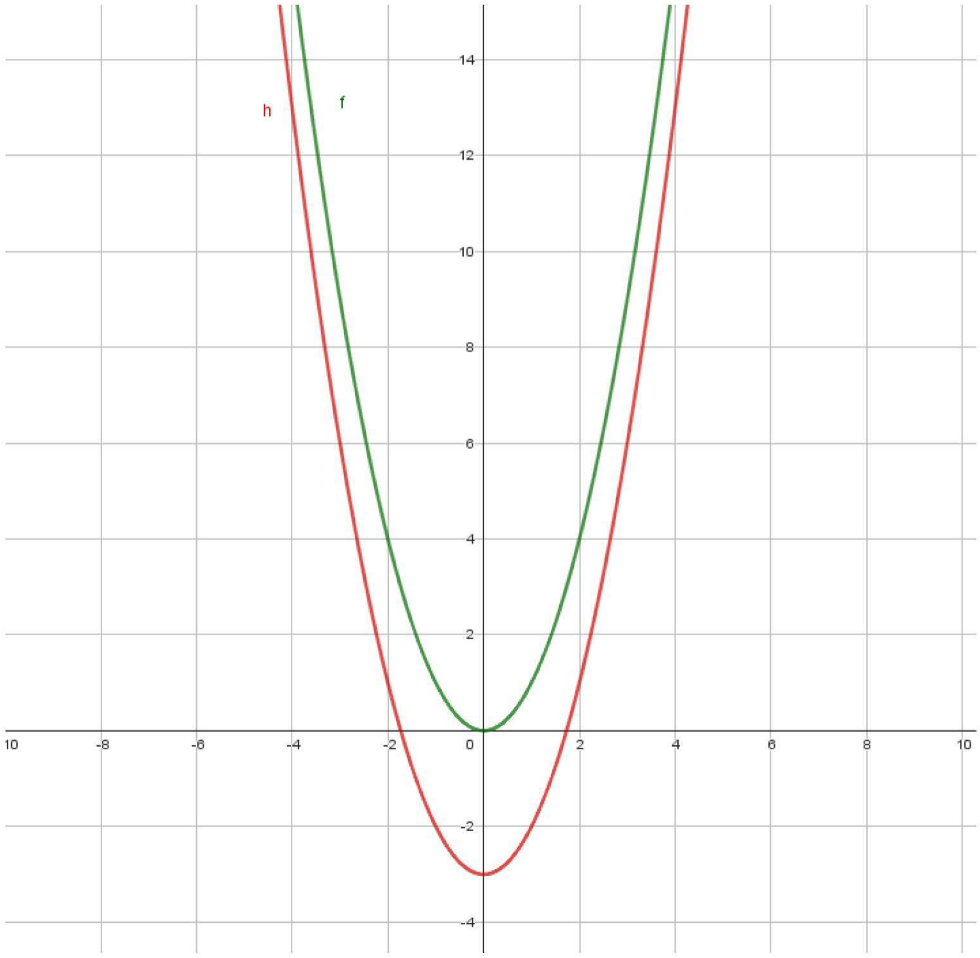
Slika 18: Prikaz kvadratne funkcije $f(x) = x^2$ te $h(x) = (x-5)^2$ u istom koordinatnom sustavu.

Nadalje, pogledajmo kako kompozicijom dviju funkcija nastaje kvadratna funkcija oblika $f(x) = ax^2 + y_0$.

Primjer 5.6. *Neka je* $f(x) = x^2$, *a* $g(x) = x - 3$. *Kvadratna funkcija oblika* $f(x) = ax^2 + y_0$ *dobit će se kompozicijom* $g \circ f$, *odnosno*

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^2 - 3.$$

U tom je slučaju $a = 1$, *a* $y_0 = -3$.
Pogledajmo što to znači za graf te kvadratne funkcije.
Na Slici 19 mogu se vidjeti grafovi funkcija $f(x) = x^2$ *te* $h(x) = x^2 - 3$ *u istom koordinatnom sustavu. Jasno je vidljivo kako je funkcija* h *nastala od funkcije* f *translacijom po* $y-$ *osi za* -3.
Tjeme kvadratne funkcije oblika $f(x) = ax^2 + y_0$ *je točka* $T = (0, y_0)$.



Slika 19: Prikaz kvadratne funkcije $f(x) = x^2$ te $h(x) = x^2 - 3$ u istom koordinatnom sustavu.

Dakle, na ove načine se učenicima mogu prezentirati kompozicije dviju funkcija. Učenicima u drugom razredu srednje škole najčešće ne bude jasno kako je nastao oblik tih kvadratnih funkcija te ukoliko nastavnik na ovaj način objasni učenicima zbog čega je to tako, tada učenici mogu lakše shvatiti različite oblike kvadratnih funkcija te njihove grafove, a isto tako se onda gradivo kvadratne funkcije može povezati s kompozicijom funkcije.

6. Miskoncepcije učenika

Učenici vrlo često imaju pogrešne ideje o funkcijama, a koje su to pogrešne ideje s kojima oni već dolaze od ranije saznat će se u ovom poglavlju. Da bi mogli znati s kojim to miskoncepcijama o funkcijama učenici dolaze na nastavu potrebno je prvo znati što je to miskoncepcija.
Dakle, miskoncepcije nastaju kada učenik nije razvio odgovarajuće osnovne ideje ili nije proširio već postojeće. Miskoncepcijama nazivamo ideje koje predstavljaju matematičke sadržaje na učeniku razumljiv način, ali nisu temeljene na točnim matematičkim činjenicama. Nastavnik treba biti spreman na učeničke miskoncepcije te ih na vrijeme treba uočiti i ispravljati kako učenici ne bi imali problema u usvajanju nadolazećih sadržaja. Ukoliko se miskoncepcije ne uspiju razriješiti na vrijeme, učenik nastavlja razvijati krivu sliku o nekom matematičkom pojmu.
Dakle, o nastavniku veliki dio ovisi hoće li se učenik uspjeti suočiti s pogrešnim idejama ili će ih nastaviti razvijati. Međutim, postavlja se pitanje na koji način nastavnik može priskočiti tom problemu. Naravno, nastavnik učenicima može predstavljati različite primjere i protuprimjere kako bi se spriječilo stvaranje miskoncepcija, odnosno kako bi se ispravljale miskoncepcije koje su do tog trenutka već nastale.

6.1. Miskoncepcije vezane uz pojam funkcije

Navest ćemo neke od najčešćih učeničkih miskoncepcija koje se javljaju uz pojam funkcije te par primjera na koji način nastavnik može uvesti razriješiti pojedinu miskoncepciju. Najčešće miskoncepcije učenika vezane uz pojam funkcije su:

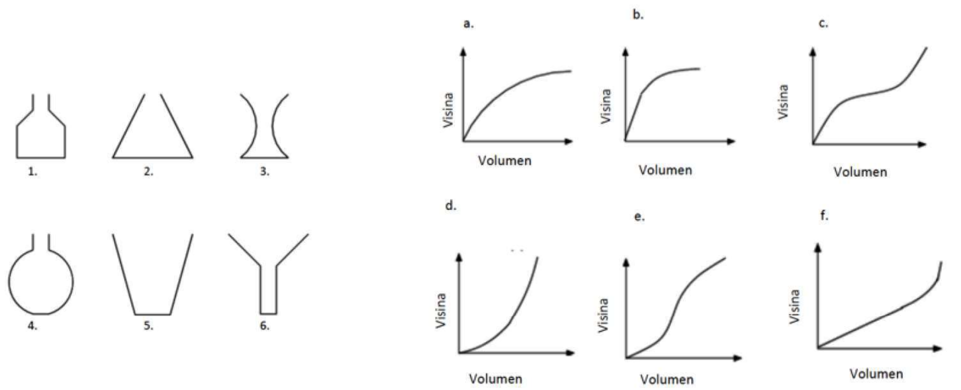
1. Funkcije moraju biti zadane formulom
2. Potreba za grafom funkcije
3. Zabluda slika-graf
4. Graf funkcije mora biti neprekidan
5. Ako je y funkcija, onda se u formuli mora pojaviti x
6. Nedostatak ideje o jednoznačnosti preslikavanja
7. Linearnost kao preferirani tip odnosa
8. Pravac paralelan s osi y jest graf funkcije.

Zbog čega su nastale ove miskoncepcije te načini na koji se može doskočiti njihovom ispravljanju biti će opisani u ostatku ovog poglavlja.

6.2. Razrješavanje miskoncepcija

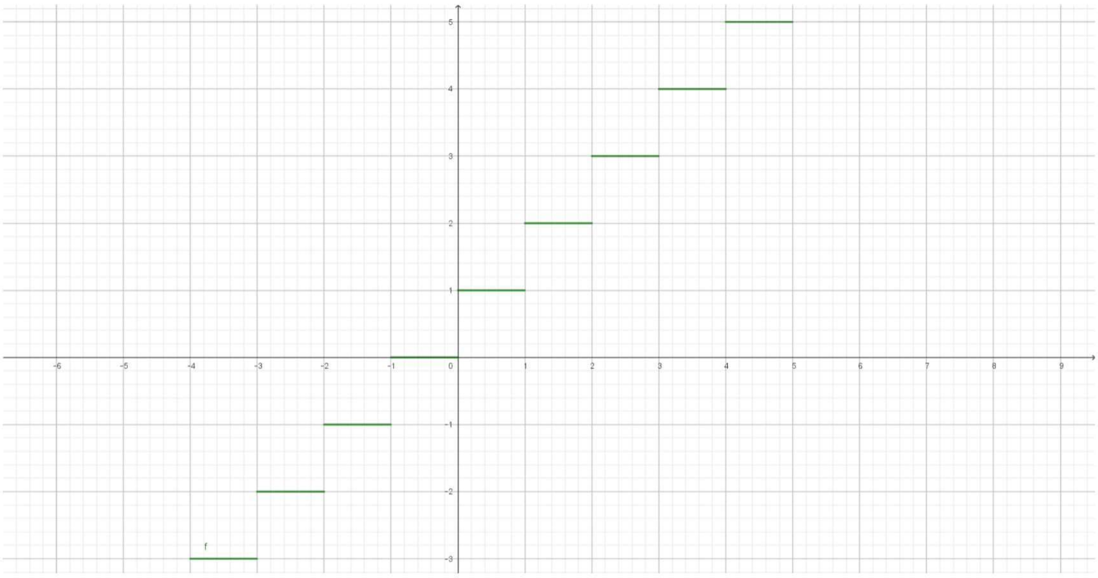
Naime, prva miskoncepcija, odnosno miskoncepcija da funkcija mora biti zadana formulom je zapravo miskoncepcija koja je proizašla iz toga da su u udžbenicima funkcije najčešće zadane formulom. Način na koji se može ispraviti ova miskoncepcija je taj da nastavnik koristi različite prikaze funkcija u svojoj nastavi te ih koristi podjednako.
Druga miskoncepcija, tj. potreba za grafom funkcije javlja se budući da se najčešće u

udžbenicima u zadatku kao dio zadatka pojavljuje da se nacrta graf funkcije. Zbog toga učenici misle da svaki puta treba crtati graf funkcije, iako ih to zadatak ne traži. Kao što se može vidjeti u Primjeru 2.1, zadatak se mogao riješiti i bez potrebe za crtanjem grafa te učenici ne bi morali crtati graf ukoliko im nije drugačije napisano.
Treća miskoncepcija jest zabluda slika-graf. Naime, učenici smatraju da oblik grafa mora pratiti sliku. Zbog toga, ukoliko se učenicima zada zadatak da spoje sliku s grafom, najčešće pogriješe. Na Slici 20 može se vidjeti primjer takvog zadatka u kojem se od učenika traži da povežu spremnike s odgovarajućim grafom. Na slici su prikazani šest spremnika koji se stalno pune vodom te šest grafova koji predstavljaju visinu vode kao funkciju volumena vode u spremniku. Budući da učenici povezuju oblik spremnika s grafom, najčešće povezuju spremnik 6. s grafom f. budući da je sličnog izgleda. Način na koji se ta miskoncepcija može ispraviti jest da nastavnik učenicima češće daje ovakve zadatke kako bi usvojili način na koji trebaju razmišljati.



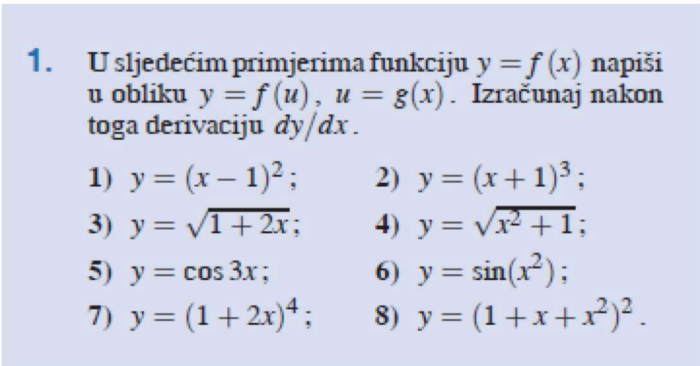
Slika 20: Zabluda slika-graf.

Miskoncepcija pod brojem četiri, odnosno da graf funkcije mora biti neprekidan proizlazi iz toga da je većina funkcija koje učenici sreću tijekom svog školovanja neprekidna. Među te funkcije spadaju linearna funkcija, kvadratna funkcija, eksponencijalna funkcija itd. Nastavnik može dati učenicima više grafova koji će predstavljati funkcije, ali neće biti neprekidne. Jedan od takvih primjera je graf na Slici 21. Taj graf jest graf funkcije, iako ta funkcija nije neprekidna.



Slika 21: Primjer funkcije koja nije neprekidna.

Nadalje, peta miskoncepcija nastala je zbog toga što su u udžbenicima najčešće varijable koje se pojavljuju kod funkcija x i y. Naime, kako bi se spriječila ova miskoncepcija, trebali bi se zadavati zadaci s različitim varijablama kako bi učenici shvatili da x i y ne moraju dolaziti u paru. Na Slici 22 može se vidjeti primjer iz udžbenika u kojemu x i y dolaze u paru.

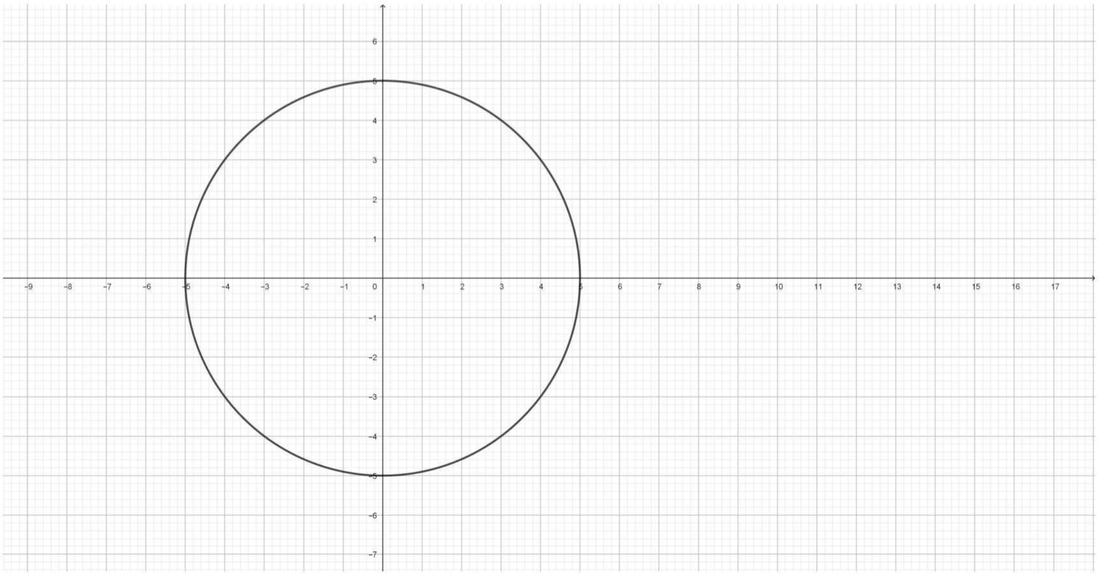


1. **U sljedećim primjerima funkciju $y = f(x)$ napiši u obliku $y = f(u)$, $u = g(x)$. Izračunaj nakon toga derivaciju dy/dx.**

1) $y = (x-1)^2$; **2)** $y = (x+1)^3$;
3) $y = \sqrt{1+2x}$; **4)** $y = \sqrt{x^2+1}$;
5) $y = \cos 3x$; **6)** $y = \sin(x^2)$;
7) $y = (1+2x)^4$; **8)** $y = (1+x+x^2)^2$.

Slika 22: Primjer zadatka iz udžbenika koji potiče stvaranje miskoncenpcije pod brojem 5.

Šesta miskoncepcija, odnosno ona o nedostatku ideje o jednoznačnosti preslikavanja je miskoncepcija koja nastaje zbog nedovoljnog razumijevanja definicije funkcije. Učenici smatraju da je bilo koji graf funkcija, iako iz njega možemo iščitati da to preslikavanje pridružuje elementu iz domene dva ili više elemenata iz kodomene što po definiciji funkcije nije funkcija. Način na koji se može riješiti ova miskoncepcija je nastavnikova uporaba vertikalnog testa u održavanju nastave. Na Slici 23 može se vidjeti primjer grafa za koje učenici misle da je funkcija jer je neprekidan i jer je prikazan graf. Primjenom vertikalnog testa može se vidjeti da pravac okomit na x os siječe graf u dvije točke te da dani graf nije graf funkcije.



Slika 23: Primjer miskoncepcije pod brojem 6.

Dakle, može se primijetiti da učenici na nastavu dolaze s puno postojećih miskoncepcija, a cilj svakog nastavnika je te miskoncepcije prepoznati na vrijeme te ih na vrijeme i ukloniti kako bi učenici mogli nadograđivati svoje postojeće znanje na pravi način.

Literatura

[1] T. Crities, D. Meyer, R. N. Ronau, *Putting Essential Understanding of Functions into Practice, 9-12*, NCTM, USA, 2014.

[2] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije, 2. dio*, Element d.o.o., Zagreb, 2013.

[3] G. Hine, R.Reaburn, J. Anderson, L. Galligan,C. Carmichael, M. Cavanagh, B. Ngu, B. White , *Teaching Secondary Mathematics*, Cambridge University Press, Australia, 2016.

[4] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Gradska tiskara, Osijek, 1998.

[5] P. Liljedahl, *Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K-12*, Corwin, California, 2021.

Sažetak

U ovome radu bavilo se razumijevanjem funkcija kroz primjere. Mogu se pronaći razni primjeri koje nastavnici mogu uklopiti u nastavu matematike kako bi produbili učenikovo razumijevanje samog pojma funkcija, ali i ostalih pojmova usko vezanih uz pojam funkcije kao što su bijekcija, kovarijacija, domena funkcije itd. Također, u radu se mogu pronaći i razne miskoncepcije vezane uz pojam funkcije koje učenici stvaraju tijekom svojega obrazovanja kao i neki od načina na koji se te miskoncepcije mogu razriješiti.

Ključne riječi: Funkcija, kovarijacija, operacije s funkcijama, miskoncepcije, graf funkcije, kompozicija funkcija

Title: Understanding of functions through examples

Abstract

This paper deals with the understanding of functions through examples. Various examples can be found that teachers can incorporate into the teaching of mathematics in order to deepen the student's understanding of the concept of function itself, but also of other concepts closely related to the concept of function, such as bijection, covariance, domain of a function, etc. Also, there are a lot of various examples of misconceptions that can be found in the paper related to the concept of function that students create during their education, as well as some of the ways in which these misconceptions can be resolved.

Keywords: Function, covariance, combining functions, misconceptions, graph, composing functions

Životopis

Rođen sam 10.9.1998. godine u Osijeku. Pohađao sam Osnovnu školu Višnjevac koju završavam 2013. godine. Nakon toga upisujem Prvu gimnaziju Osijek koju završavam 2017. godine te iste te godine upisujem Sveučilišni preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Sveučilišni preddiplomski studij završavam 2021. godine pod mentorstvom doc. dr. sc. Ivana Papića završnim radom na temu "Funkcije izvodnice vjerojantosti". 2021. godine upisujem Diplomski nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Kroz sve godine studiranja bavim se raznim poslovima, ali najviše držanjem instrukcija iz matematike i informatike. Na zadnjoj godini diplomskog studija odrađujem stručnu praksu u raznim srednjim i osnovnim školama u Osijeku kao nastavnik matematike te informatike. Također, odrađujem zamjenu u Elektrotehničkoj i prometnoj školi Osijek kao nastavnik matematike.