Modeliranje polinoma, racionalnim i iracionalnim funkcijama

Kraljević, Ana

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ana Kraljević

Modeliranje polinomima, racionalnim i iracionalnim funkcijama

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ana Kraljević

Modeliranje polinomima, racionalnim i iracionalnim funkcijama

Diplomski rad

Mentorica: prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2022.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu bavit ćemo se modeliranjem polinomima, racionalnim i iracionalnim funkcijama u nastavi matematike. S pojmom funkcija učenici se susreću u sedmom razredu osnovne škole kao prošireni sadržaj prilikom obrade linearne ovisnosti. No, s njezinom definicijom se susreću tek u drugom razredu srednje škole. Postepeno se uvode definicije i svojstva elementarnih funkcija, a poznato je kako učenici bolje razumiju matematiku ukoliko vide njezinu primjenu na konkretnim primjerima iz stvarnoga života. Promatrajući kurikulum predmeta *Matematika* i udžbenike za srednje škole možemo uočiti kako se na nastavi obrađuje primjena koja se odnosi na linearnu, kvadratnu, eksponencijalnu, logaritamsku i trigonometrijsku funkciju. Učenici se s polinomima stupnja većeg od dva, racionalnim i iracionalnim funkcijama susreću u drugom i četvrtom razredu srednje škole, no u svojem srednjoškolskom obrazovanju se ne susreću s njihovim primjenama. Kako su i učenici i nastavnici već pretrpani ostalim gradivom, bilo bi korisno učenicima pokazati primjenu ovih funkcija matematičkim modeliranjem. To bi se moglo provesti na nastavi, bez vrednovanja ili na dodatnoj nastavi. Tako bi učenici dobili viziju primjene spomenutih funkcija i odgovor na pitanje: *"Zašto ovo učimo?"*.

Matematičko modeliranje je složen proces koji opisuje put od realne situacije do matematičkog modela i natrag. U prvom poglavlju navest ćemo definiciju matematičkog modela i njegove oblike te definiciju matematičkog modeliranja i njegova četiri pristupa.

Nadalje, kako bi se učenici mogli baviti matematičkim modeliranjem navedenim funkcijama, potrebno je poznavanje općih pojmova o tim funkcijama. Stoga ćemo u idućem poglavlju navesti one pojmove koji će se koristiti kasnije u primjerima modeliranja.

Treće poglavlje će na početku prikazivati teoriju vezanu uz polinome koja će se koristiti u zadacima primjene. Zatim ćemo u nastavku pokazati po jedan primjer primjene linearne i kvadratne funkcije te još tri složenija primjera modeliranja polinomima.

Nakon toga, u četvrtom poglavlju, ukratko ćemo pokazati teorijski dio vezan uz racionalnu funkciju, tj. onu teoriju s kojom se učenici susreću i koja je potrebna za nadolazeća tri zadatka primjene ovom funkcijom.

U zadnjem, petom poglavlju, također ćemo prikazati teorijski dio o iracionalnoj funkciji, odnosno definirat ćemo ju kao specijalan slučaj opće potencije te prikazati njezinu domenu i kodomenu. Na kraju rada pokazat ćemo tri primjera modeliranja iracionalnom funkcijom.

1 Matematičko modeliranje

U ovom poglavlju navest ćemo što je to matematičko modeliranje općenito kako bismo kasnije lakše mogli modelirati polinomima, racionalnim i iracionalnim funkcijama. Zatim ćemo pojasniti što je matematički model, njegove vrste te pristupe matematičkog modeliranja. Definicije prethodno spomenutog te detaljnija objašnjenja mogu se pronaći u [4].

Matematičko modeliranje je, prema [4], proces predstavljanja ili opisivanja problema iz svakodnevnog života matematičkim izrazima kako bi se pronašlo rješenje problema ili postiglo što bolje njegovo razumijevanje. Odnosno, matematičkim modeliranjem započinjemo rješavati problem iz stvarnog života te pomoću matematičkih termina želimo doći do rješenja koje će također biti iz stvarnog života. Rezultat matematičkog modeliranja je *matematički model* koji pomaže u rješavanju problema. Model može biti u obliku jednadžbe ili formule, diferencijalne ili integralne jednadžbe, grafikona, algoritma ili u nekim slučajevima i računalni programi. Ono što je učenicima napristupačnije i čime ćemo se mi baviti u radu jesu matematički modeli u obliku formula ili jednadžbi. Osim toga, matematički modeli se dijele i u sljedeće kategorije:

1. linearni i nelinearni,
2. deterministički i stohastički,
3. statički i dinamički,
4. diskretni i kontinuirani,
5. deduktivni, induktivni i plivajući.

Detaljniji opis prethodno navedenih modela može se vidjeti u [5]. Od pristupa matematičkom modeliranju navest ćemo i ukratko pojasniti sljedeće pristupe: empirijski, simulacijski, deterministički i stohastički.

Empirijski pristup kao glavnu značajku ima upotrebu podataka, a ključna ideja je konstruirati vezu u obliku formule koja najbolje odgovara danim podacima.

Simulacijski pristup često uključuje korištenje računalnog programa. Obično se računalne simulacije koriste kada je nemoguće ili nepraktično izvršiti prave pokuse u stvarnom životu kao što je npr. simulacija dizajna za telekomunikacijsku mrežu. Ukoliko bi se ovakav sustav stvarno izgradio, to bi bilo preskupo za testiranje dizajna i bilo bi nemoguće ispitati sve mrežne mogućnosti.

Deterministički pristup uključuje korištenje jednadžbe ili više njih za opisivanje ili modeliranje odnosa između različitih komponenti kao što je npr. Newtonov zakon gibanja. Ako loptu bacimo okomito prema gore, ovim pristupom je moguće odrediti gdje će se lopta nalaziti kasnije.

Stohastički pristup, kao i deterministički, uključuje korištenje jednadžbi, ali uzima u obzir i vjerojatnost da će se neki događaj ostvariti.

2 Opći pojmovi o funkcijama

Kako bismo mogli modelirati određenim vrstama funkcija, u ovom slučaju polinomima, racionalnim i iracionalnim funkcijama, potrebno je poznavati opće pojmove vezane uz funkcije koje su navedene u nastavku, a preuzete su iz [3], [6] i [7]. Pojmovi koji slijede koriste se u primjerima modeliranja sa spomenutim funkcijama u ovome radu.

Definicija 2.1. *Neka su D i K bilo koja dva neprazna skupa. Postupak f koji svakom elementu $x \in D$ pridružuje točno jedan element $y \in K$ zovemo* ***funkcija*** *ili* ***preslikavanje*** *sa D u K i pišemo $f : D \to K$.*

Za skup D kažemo da je **domena** ili **područje definicije** funkcije f i označavamo ga s D_f, a skup K zovemo **kodomena** funkcije f i označavamo ga s K_f. Nadalje, x zovemo **nezavisna varijabla** ili **argument** funkcije f, a $y = f(x)$ nazivamo **zavisna varijabla** funkcije f.
Za svaku konkretnu vrijednost x_0 nezavisne varijable pripadajuća **funkcijska vrijednost** je $f(x_0)$. Ako je funkcija f zadana formulom, vrijednost funkcije $f(x_0)$ može se izračunati uvrštavanjem vrijednosti argumenta x_0 u formulu za pravilo pridruživanja.

Definicija 2.2. ***Slika funkcije*** *je skup svih funkcijskih vrijednosti $f(x)$ za sve x iz domene funkcije f. Označavamo ju s $\mathrm{Im}f$ i pišemo $\mathrm{Im}f = \{f(x) : x \in D\}$.*

Definicija 2.3. ***Grafom*** *funkcije $f : D \to K$ nazivamo skup svih uređenih parova $(x, f(x))$, gdje je $x \in D$ i pišemo $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in D\}$.*

Definicija 2.4. ***Nultočka*** *funkcije $f : D \to K$ je vrijednost $x_0 \in D$ za koju je $f(x_0) = 0$.*

Napomena 2.1. *Realne nultočke funkcije su presjeci grafa funkcije i osi x.*

3 Matematičko modeliranje polinomima

U svojem srednjoškolskom obrazovanju učenici se s pojmom funkcija susreću u prvom razredu i to obrađujući linearnu funkciju. U drugom razredu nadograđuju svoje znanje učeći o kvadratnoj funkciji. No, što je s funkcijama čiji je najveći eksponent potencije od nepoznanice veći od 2? Takve funkcije, nama poznate kao *polinomi*, neki udžbenici uključuju u svoje stranice u drugom razredu srednje škole tijekom obrade primjerice funkcijske vrijednosti. Na taj način učenici mogu uvidjeti kako izgledaju polinomi stupnja većeg ili jednakog od 3. Isto tako, učenici se s tim oblicima funkcija susreću i prilikom obrade algebarskih izraza u prvom razredu. Tek u četvrtom razredu srednje škole učenici obrađuju pojam polinoma u okviru odgojno - obrazovnog ishoda *Učenik računa s polinomima primjenjujući poučke* i to u onim srednjim školama s 192 ili 224 nastavna sata matematike tijekom školske godine.
U nastavku ćemo definirati polinom te navesti njegova osnovna svojstva, a navedene tvrdnje se mogu pronaći u [6] i [7].

3.1 Definicija i osnovna svojstva polinoma

Definicija 3.1. *Funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu formulom*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ realni brojevi, $a_n \neq 0$ i $n \in \mathrm{N}_0$, zovemo ***polinom n-tog stupnja****.*

Broj n zovemo **stupanj polinoma** i označavamo ga sa st f. Realne brojeve $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ nazivamo **koeficijenti polinoma**, pri čemu za koeficijent a_n kažemo da je **vodeći koeficijent**, a a_0 **slobodni član** polinoma f.

Učenici nakon što vide ovu definiciju mogu zaključiti kako je najveći eksponent potencije od x kod linearne funkcije jednak 1, a kod kvadratne funkcije 2, pa zbog toga linearnu funkciju nazivamo još i polinom prvog stupnja, a kvadratnu funkciju polinom drugog stupnja.
Zatim učenici određuju stupanj polinoma te vodeće i slobodne koeficijente, a prije nego navedemo operacije s polinomima, prikazat ćemo par tvrdnji koje se ne moraju nužno obraditi s učenicima, ali mogu biti korisne prilikom rješavanja zadataka. Kompleksniji dokazi sljedeća dva teorema se mogu pronaći u [1], a mi ćemo demonstrirati dokaze koji su pristupačniji učenicima i mogu se vidjeti u [7].

Definicija 3.2. *Dva polinoma f i g su* ***jednaka*** *ako $\forall x \in \mathbb{R}$ vrijedi da je $f(x) = g(x)$.*

Definicija 3.3. *Polinom f sa svojstvom da je $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ nazivamo* ***nulpolinom****.*

Teorem 3.1 (O nulpolinomu). *Polinom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ je nulpolinom ako i samo ako su svi koeficijenti $a_i = 0$, $\forall i = 0, 1, 2, \ldots, n$.*

Dokaz.

- $\Leftarrow$ Ako su $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, tada $\forall x \in \mathbb{R}$ je očito $f(x) = 0$, odnosno f je nulpolinom.

- $\Rightarrow$ Neka je f nulpolinom. Trebamo pokazati da su svi koeficijenti tog polinoma jednaki 0. Radi jednostavnijeg dokazivanja odaberimo polinom drugog stupnja, odnosno kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Izračunajmo funkcijske vrijednosti za $x = 0, 1, -1$ te odredimo vrijednost koeficijenata a, b i c.

$$f(0) = c = 0, \quad f(1) = a + b = 0, \quad f(-1) = a - b = 0$$

Slijedi da je $a = b = c = 0$, odnosno svi koeficijenti polinoma f moraju biti 0 i time smo dokazali ovu tvrdnju.
Tvrdnja se na analogan način može dokazati i za polinom stupnja većeg od 2.

□

Teorem 3.2 (**O jednakosti polinoma**). *Dva su polinoma jednaka ako i samo ako su istog stupnja i ako su im odgovarajući koeficijenti jednaki.*

Dokaz.
Uzmimo dva polinoma f i g za koje vrijedi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ te neka su oni sljedećih oblika:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,\ b_m \neq 0.$$

Pokažimo da vrijede oba smjera.

$\Leftarrow$ Ako je $m = n$ i $a_i = b_i$, $\forall i = 0, 1, 2, \ldots, n$, onda je očito i $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Pretpostavimo da su polinomi f i g jednaki. Trebamo pokazati da je $m = n$ i $a_i = bi$, $\forall i = 0, 1, 2, \ldots, n$.
Pretpostavimo suprotno, tj. $n > m$. Tada $\forall x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \end{aligned}$$

pa iz jednakosti slijedi

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{m+1}x^{m+1} + (a_m - b_m)x^m + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0.$$

Prema Teoremu 3.1 vrijedi $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{m+1} = 0$ i $a_m = b_m, a_{m-1} = b_{m-1}, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$ što je u kontradikciji s $a_n \neq 0$.
Analogno se može pokazati i za $n < m$. Slijedi da je $m = n$ i $a_i = b_i$, $\forall i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

□

Nakon iskazanih i dokazanih tvrdnji, učenici su spremni za računanje s polinomima. Kako proučavamo polinome na cijelom skupu $\mathbb{R}$, tako je intuitivno učenicima lako zbrojiti, oduzeti i pomnožiti polinome, koristeći se pritom svojstvima računskih operacija iz spomenutog skupa realnih brojeva. U nastavku ćemo prikazati pravila za prethodno navedene operacije, a detaljniji raspis može se pronaći u [8].

Za polinome $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijede sljedeće operacije zbrajanja, oduzimanja i množenja redom:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Možemo reći kako polinome zbrajamo (oduzimamo) tako da zbrojimo (oduzmemo) njihove članove istog stupnja, a množimo tako da svaki član jednoga polinoma pomnožimo sa svakim članom drugoga polinoma te dobivene produkte zbrojimo.

Nakon što smo učenicima prikazali kako zbrajati, oduzimati i množiti polinome, preostaje još pokazati kada su polinomi djeljivi, postupak dijeljenja te zapis rezultata dijeljenja polinoma s ostatkom.

Definicija 3.4. *Za polinom f_1 kažemo da je* ***djeljiv*** *polinomom f_2, $f_2 \neq 0$, ako postoji polinom q takav da je $f_1 = q \cdot f_2$, tj. ako je $f_1(x) = q(x) \cdot f_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$.*

Postupak dijeljenja polinoma je sličan postupku dijeljenja cijelih brojeva, pa se on učenicima prikazuje na konkretnim primjerima. Ukoliko pri tom postupku dijeljenja dobijemo ostatak zaključujemo kako polinomi nisu djeljivi te smo s učenicima proveli postupak dijeljenja s ostatkom. Taj postupak možemo poopćiti sljedećim teoremom.

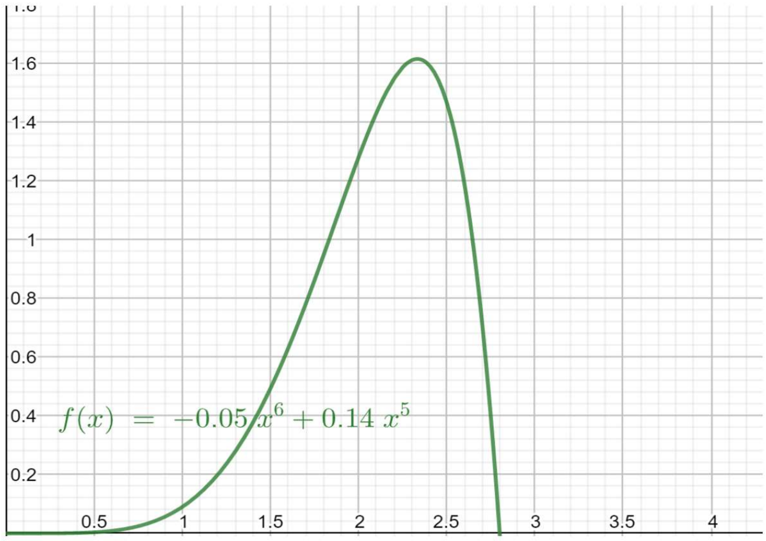
Teorem 3.3 (**O dijeljenju polinoma s ostatkom**). *Za svaka dva polinoma f_1 i f_2, $f_1 \neq 0$, postoje jedinstveni polinomi q i r takvi da je $f_1 = q \cdot f_2 + r$, pri čemu je $r = 0$ ili $0 \leq \mathrm{st}\ r \leq \mathrm{st}\ q$.*

Ako u iskazu Teorema 3.3 vrijedi da je $r \neq 0$, onda je $\mathrm{st}\ r < \mathrm{st}\ q$ te polinom q zovemo **nepotpuni kvocijent** pri dijeljenju polinoma f_1 s f_2, a polinom r **ostatak** pri dijeljenju polinoma f_1 s f_2. Za polinom q vrijedi $\mathrm{st}\ q = \mathrm{st}\ f_1 - \mathrm{st}\ f_2$.
Dokaz Teorema 3.3 se ne provodi s učenicima zbog njegove složenosti, a može se vidjeti u [1]. Ono što se od učenika na vrlo dobroj razini očekuje jeste njegova primjena prilikom dijeljenja polinoma.
Rezultat ovakvog dijeljenja možemo zapisati i na sljedeći način

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{f_2(x)}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

3.2 Polinomi u svakodnevnom životu

Iako mnogi od nas toga nismo niti svjesni, polinomima se, osim matematičara, služe i građevinari, meteorolozi, ekonomisti, fizičari i drugi. Polinomi se pojavljuju u velikom broju matematičkih područja, ali i u području znanosti. Jedan od primjera korištenja polinoma u stvarnome svijetu je crtanje krivulja tobogana i mostova. Primjerice, jedna od najpoznatijih funkcija za modeliranje krivulje tobogana jeste $f(x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + hx + g$. Ako uzmemo da je $a = -0.05$, $b = 0.14$ te $c = d = e = h = g = 0$, dobit ćemo krivulju koja modelira oblik jednog tobogana kao što je prikazano na Slici 3.1.



Slika 3.1: Krivulja tobogana

Već spomenuti ekonomisti polinome koriste za analizu troškova ili za modeliranje tržišta kako bi vidjeli kako će podizanje cijene nekog proizvoda utjecati na njegovu prodaju. Također, polinomi se mogu koristiti u izračunima vezanima uz kredite. Fizičari polinomima opisuju putanju projektila, dok ih kemičari koriste u jednadžbama plina. Polinomi svoju primjenu pronalaze i u medicini. Primjerice, za određivanje koncentracije određenog lijeka u krvi nakon t sati, liječnici se mogu koristiti sljedećim polinomom drugog stupnja $C(t) = -0.05x^2+2t+2$. Još jedan zanimljiv primjer primjene polinoma u medicini jeste određivanje težine w nekog pacijenta. Tako se ovaj problem može modelirati funkcijom $w(n) = 0.1n^3 - 0.6n^2 + 110$, gdje n predstavlja broj tjedana otkada se pacijent razbolio.

Ovo su samo neki od primjera polinoma u svakodnevnom životu. Više njih se može vidjeti u [10], a mi ćemo u nastavku prikazati pet primjera modeliranja polinomima koji se mogu prikazati učenicima. U prva dva primjera ćemo prikazati primjenu polinoma prvog stupnja, poznatog kao linearna funkcija te polinoma drugog stupnja, poznatog kao kvadratna funkcija. Pogledajmo Primjer 3.1 u kojemu je prikazana primjena polinoma prvog stupnja.

Primjer 3.1. *Optimalan broj otkucaja srca pri tjelesnoj aktivnosti osobe stare x godina možemo prikazati funkcijom*

$$O(x) = 0.6(220 - x). \tag{3.1}$$

1. *Koliki je optimalan broj otkucaja srca dječaka koji ima 15 godina?*
2. *Koliko godina ima osoba kojoj je broj otkucaja jednak 120?*
3. *Koliko godina imaju osobe kojima je broj otkucaja srca između 90 i 96?*

U nastavku ćemo prikazati rješenja Primjera 3.1. S ovakvim primjerima se učenici susreću u prvom razredu srednje škole.

1. Kako x predstavlja broj godina neke osobe, učenici bi trebali zaključiti kako u ovom podzadatku treba pronaći funkcijsku vrijednost za $x = 15$. Uvrštavajući u (3.1) slijedi

$$\begin{aligned} O(15) &= 0.6(220 - 15) \\ &= 0.6 \cdot 205 \\ &= 123. \end{aligned}$$

To znači kako je dječaku od 15 godina optimalan broj otkucaja srca 123.

2. U ovom dijelu zadatka učenici imaju zadanu funkcijsku vrijednost 120 te bi trebali pronaći x za koji to vijedi. Kako je $O(x) = 120$, izjednačavanjem izraza (3.1) sa 120 dobivamo sljedeće

$$\begin{aligned} 0.6(220 - x) &= 120 \\ 132 - 0.6x &= 120 \\ -0.6x &= -12 \\ x &= 20. \end{aligned}$$

Dakle, osoba s brojem otkucaja 120 ima 20 godina.

3. Učenici bi u ovom podzadatku trebali uvidjeti kako imaju zadane dvije funkcijske vrijednosti koje ćemo označiti s $O_1(x) = 90$ i $O_2(x) = 96$ te bi trebali pronaći koliko godina imaju osobe čiji je broj otkucaja srca između ta dva broja, odnosno naći x-eve za koje to vrijedi. To će dobiti rješavajući sljedeću nejednadžbu

$$
\begin{gathered}
O_1(x) \leq 0.6(220 - x) \leq O_2(x) \\
90 \leq 132 - 0.6x \leq 96 \\
-42 \leq -0.6x \leq -36 \\
70 \geq x \geq 60. \qquad (3.2)
\end{gathered}
$$

Iz nejednadžbe (3.2) učenici mogu zaključiti da osobe čiji su otkucaju između 90 i 96 imaju više od 60, a manje od 70 godina.

Ovime smo pokazali jedan jednostavan primjer modeliranja polinomom prvog stupnja, a u nastavku ćemo primjerom iz svakodnevnog života pokazati modeliranje polinomom drugog stupnja, odnosno kvadratnom funkcijom.

Primjer 3.2. *Agencija za putovanja izlet na Krk naplaćuje 398 kn za jednu osobu. Ako se za izlet prijave dvije osobe, cijena po osobi se smanjuje za 2 kn, ako se prijave tri osobe, cijena se smanjuje za 4 kn, itd. Za koliko će osoba agenciji ovaj izlet na Krk donijeti najveću zaradu i koliko će ona iznositi?*

Pogledajmo rješenje ovog zadatka. U njemu bi učenici trebali modelirati funkciju kojom će prikazati navedeni problem. To mogu učiniti zapisujući sljedeće uzorke

$$
\begin{aligned}
\text{jedna osoba}: & \quad && 398 \text{ kn} \\
\text{dvije osobe}: 2 \cdot 396 \text{ kn} & \quad = && 2(400 - 2 \cdot 2) \text{ kn} \\
\text{tri osobe}: 3 \cdot 394 \text{ kn} & \quad = && 3(400 - 3 \cdot 2) \text{ kn} \\
\text{četiri osobe}: 4 \cdot 392 \text{ kn} & \quad = && 4(400 - 4 \cdot 2) \text{ kn} \\
& \quad \vdots && \\
x \text{ osoba}: & \quad && x(400 - x \cdot 2) \text{ kn}.
\end{aligned}
$$

Ovim postupkom učenici bi dobili kvadratnu funkciju oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$ koja opisuje navedeni problem, a ona glasi

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x(400 - x \cdot 2) \\
f(x) &= -2x^2 + 400x. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

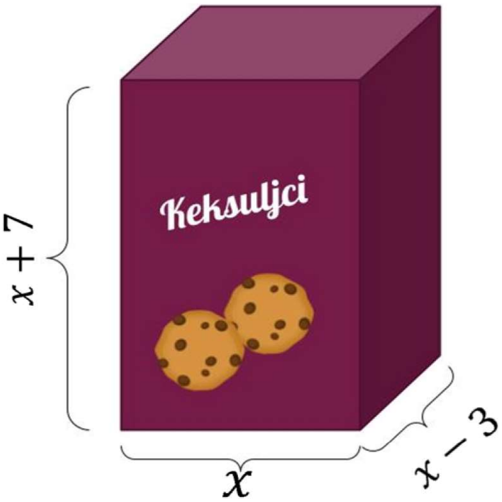
Sada još preostaje pronaći za koliko prijavljenih ljudi za odlazak na izlet će agencija najviše zaraditi te koliko će ta zarada iznositi, odnosno učenici bi trebali zaključiti kako će to dobiti traženjem maksimalne vrijednosti funkcije koju su prethodno pronašli. Kako se ovdje radi o polinomu drugog stupnja, tj. kvadratnoj funkciji s negativnim vodećim koeficijentom, njezina maksimalna vrijednost će se postići u tjemenu parabole te će za $x_0 = -\frac{b}{2a}$ iznositi $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$.
Promatrajući funkciju (3.3) učenici bi dobili sljedeće:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{-400}{-2 \cdot 2} = \frac{-400}{-4} = 100 \\
y_0 &= \frac{-400^2}{4 \cdot (-2)} = \frac{-160000}{-8} = 20000.
\end{aligned}
$$

Na ovaj način učenici bi dobili odgovor na postavljeno pitanje. Dakle, agencija bi najveću zaradu od izleta imala kada bi se prijavilo 100 osoba i ta bi zarada iznosila 20 000 kn.

U nastavku slijedi primjer primjene polinoma trećeg stupnja.

Primjer 3.3. *Proizvođač slatkiša odlučio je promijeniti izgled kutije za kekse. Marketinški odjel njegove tvrtke predstavio je novi dizajn kutije kojoj je širina manja za 3 cm, a visina veća za 7 cm od njezine duljine, kao što je prikazano na Slici 3.2. Koliki će biti volumen kutije ako je njezina duljina 10 cm?*



Slika 3.2: Dizajn kutije za kekse

Kako bi riješili ovaj zadatak učenici bi trebali napisati funkciju kojom bi modelirali volumen kutije. Neka je x duljina kutije izražena u cm. Onda je širina jednaka $(x-3)\ cm$, a visina $(x+7)\ cm$. Kako je volumen jednak umnošku duljine, širine i visine, tako slijedi da je volumen ove kutije jednak $x\cdot(x-3)\cdot(x+7)$. Stoga je funkcija koja modelira ovaj problem oblika

$$f(x) = x\cdot(x-3)\cdot(x+7),$$

gdje x predstavlja duljinu kutije izraženu u cm. Sređujući izraz dobivamo polinom trećeg stupnja

$$\begin{aligned} f(x) &= x\cdot(x-3)\cdot(x+7) \\ f(x) &= x^3+7x^2-3x^2-21x \\ f(x) &= x^3+4x^2-21x. \end{aligned} \tag{3.4}$$

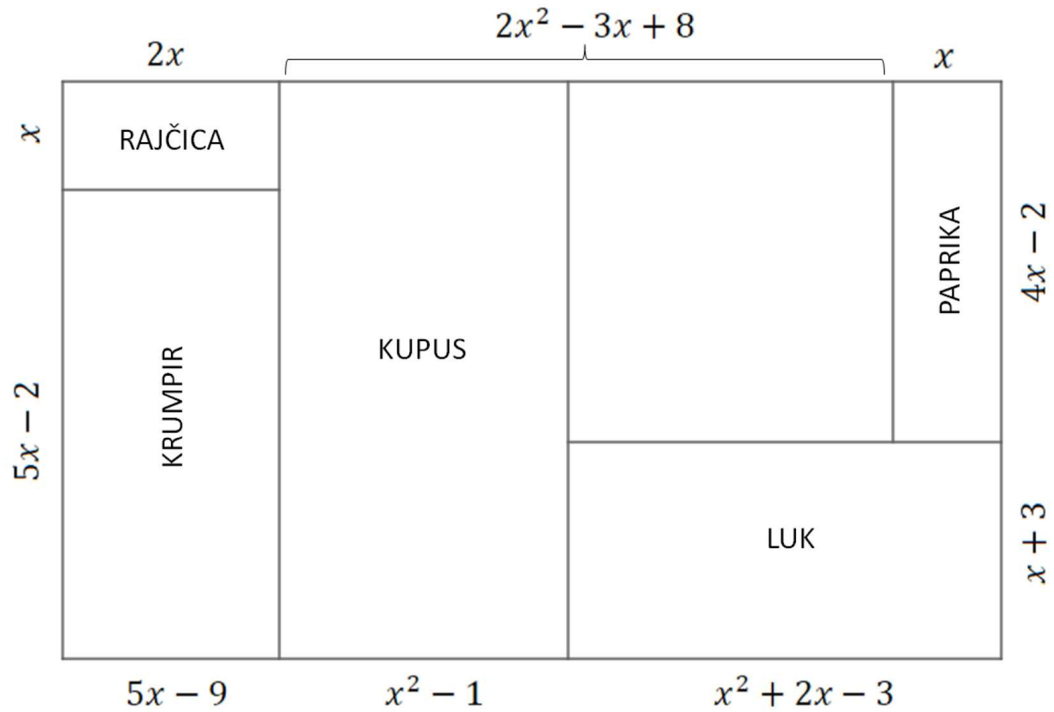
Ako je poznato da je duljina kutije jednaka 10 cm, odnosno $x = 10\ cm$, onda bi učenici ovaj zadatak riješili tako što bi odredili funkcijsku vrijednost modelirane funkcije (3.4). Iz toga slijedi

$$\begin{aligned} f(10) &= 10^3+4\cdot 10^2-21\cdot 10 \\ f(10) &= 1000+400-210 \\ f(10) &= 1190 \end{aligned}$$

te traženi volumen kutije kojoj je duljina jednaka 10 cm iznosi 1190 cm^3.

Do sada smo pokazali jednostavnije primjere modeliranja polinomima. U Primjeru 3.4 će biti pokazana primjena operacija polinoma, a u Primjeru 3.5 modeliranje polinomom trećeg stupnja koji se može dati učenicima nakon obrade gradiva vezanog uz funkcije i polinome. Oba primjera prikazuju probleme iz stvarnoga života, a učenici ih mogu rješavati u skupinama.

Primjer 3.4. *Ovoga proljeća, kao i svake godine, farmer Mirko sadi svoj vrt, ali je ovoga puta odlučio posaditi drugo povrće. Odlučio je posaditi rajčicu, krumpir, papriku, kupus i luk. U nastavku je prikazan nacrt njegova vrta. Koristeći se njime odgovorite na postavljena pitanja i na taj način pomozite farmeru u sadnji povrća.*



Slika 3.3: Farmerov nacrt vrta

1. *Napišite, a zatim pojednostavite izraz koji predstavlja južnu stranu vrta.*
2. *Farmer želi ograditi dio vrta u kojem će posaditi krumpir. Koliko ograde mu je za to potrebno?*
3. *Kako bi znao koliko treba kupiti sadnica rajčice, farmer mora saznati površinu tog dijela vrta. Pomozite farmeru u izračunu!*
4. *Farmer želi da sadnice paprike narastu do visine koja odgovara izrazu $x + 3$. Koliki će biti volumen tog dijela vrta na kojem će rasti paprika?*
5. *U vrtu je farmer ostavio prostor u kojem će posaditi svoje omiljeno voće - jagode. No, on ne zna izračunati duljinu tog dijela vrta. Pomozite farmeru otkriti dimenzije tog dijela vrta namijenjenog za sadnju jagoda.*
6. *Farmerov unuk Fran u školi uči o polinomima. Zanima ga je li izraz koji predstavlja površinu vrta namijenjen za sadnju luka djeljiv s izrazom koji predstavlja površinu vrta namijenjenu za sadnju rajčice. Ukoliko polinomi nisu djeljivi, pokažite Franu kvocijent i ostatak dijeljenja ta dva polinoma.*

7. *Koliko iznosi nepoznanica x?*

U nastavku ćemo navesti rješenja podzadataka prethodnog primjera.

1. Južnu stranu vrta čine izrazi koji se nalaze na donjoj stranici pravokutnika koji predstavlja cijeli vrt što znači da učenici trebaju zaključiti kako će odgovor na ovo pitanje dobiti tako što će zbrojiti sljedeće polinome: $5x-9, x^2-1$ i x^2+2x-3. Stoga slijedi:

$$\begin{aligned}(5x-9)+(x^2-1)+(x^2+2x-3) &= 5x-9+x^2-1+x^2+2x-3\\ &= 2x^2+7x-13.\end{aligned}$$

2. Kako bi farmer ogradio dio vrta u kojem će posaditi krumpir, mora saznati koliko mu je ograde potrebno za to. Učenici u ovom podzadatku mogu primijetiti kako je za izračun potreban opseg tog dijela vrta te da će to dobiti zbrajajući izraze koji predstavljaju duljine stranica dijela vrta predviđenog za sadnju krumpira. Slično, kao i u prethodnom podzadatku, potrebno je zbrojiti sljedeće polinome:

$$\begin{aligned}(5x-2)+(5x-9)+(5x-2)+(5x-9) &= 5x-2+5x-9+5x-2+5x-9\\ &= 20x-22.\end{aligned}$$

3. U ovom dijelu zadatka učenici, tražeći površinu dijela vrta namijenjenog za sadnju rajčice, trebaju pomnožiti sljedeća dva polinoma:

$$x\cdot 2x = 2x^2.$$

4. Za izračun volumena dijela vrta namijenjenog za sadnju paprike učenici bi trebali znati kako trebaju pomnožiti izraze koji odgovaraju duljini, širini i visini tog dijela vrta. To znači da imamo sljedeći izračun:

$$\begin{aligned}x\cdot(4x-2)\cdot(x+3) &= (4x^2-2x)\cdot(x+3)\\ &= 4x^3+12^2-2x^2-6x\\ &= 4x^3+10^2-6x.\end{aligned}$$

5. Kako bi farmer saznao duljinu dijela vrta namijenjenog za sadnju jagoda, on mora od izraza $2x^2-3x+8$ oduzeti izraz koji predstavlja duljinu dijela vrta namijenjenog za sadnju kupusa x^2-1. Ovim dijelom zadatka učenici primjenjuju oduzimanje polinoma, pa imamo sljedeće:

$$\begin{aligned}(2x^2-3x+8)-(x^2-1) &= 2x^2-3x+8-x^2+1\\ &= x^2-3x+9.\end{aligned}$$

6. U ovom dijelu zadatka učenici prvo trebaju izračunati dvije površine, a zatim provjeriti djeljivost ta dva polinoma. Površina dijela vrta namijenjenog za sadnju luka iznosi

$$\begin{aligned}(x^2+2x-3)\cdot(x+3) &= x^3+3x^2+2x^2+6x-3x-9\\ &= x^3+5x^2+3x-9,\end{aligned}$$

a površina dijela vrta namijenjenog za sadnju rajčice je, kao što smo već izračunali, $2x^2$.

Označimo polinom koji predstavlja površinu dijela vrta namijenjenog za sadnju luka s p_1, a polinom koji predstavlja površinu dijela vrta namijenjenog za sadnju rajčice s p_2. Kako bismo pokazali da je polinom p_1 djeljiv polinomom p_2, trebamo pokazati da postoji polinom q takav da je $p_1 = q \cdot p_2$, tj. $p_1(x) = q(x) \cdot p_2(x)$, za svaki realan broj x.
Stupanj polinoma q određujemo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \text{st } p_1 &= \text{st } q + \text{st } p_2 \\ 3 &= 1 + 2, \end{aligned}$$

pa je očito njegov stupanj 1, odnosno polinom q je oblika $q(x) = Ax + B$.
Stoga imamo

$$x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = (Ax + B) \cdot 2x^2.$$

Da bi polinomi p_1 i p_2 bili djeljivi, prethodna jednakost mora vrijediti za svaki realan broj x. Očigledno ne vrijedi za $x = 0$, pa polinomi p_1 i p_2 nisu djeljivi.
Učenicima još u ovom dijelu zadatka preostaje podijeliti polinome p_1 i p_2 i prikazati Franu kvocijent i ostatak tog dijeljenja. Rezultat dijeljenja je sljedeći:

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 + 5x^2 + 3x - 9\big) : 2x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + \dfrac{3x-9}{2x^2} \\ \underline{-\,x^3} \\ \qquad\quad 5x^2 \\ \qquad \underline{-\,5x^2} \\ \qquad\qquad\quad 3x - 9 \end{array}$$

Prema Teoremu o dijeljenju polinoma s ostatkom slijedi da je traženi kvocijent $\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, a ostatak $3x - 9$.

7. Kako bi učenici riješili ovaj dio zadatka trebaju uočiti kako je vrt pravokutnog oblika te da treba vrijediti da je duljina istočne strane vrta jednaka duljini zapadne strane vrta i duljina južne strane vrta jednaka duljini sjeverne strane vrta. Izjednačavanjem duljine zapadne strane vrta s duljinom istočne strane vrta dobivamo sljedeće

$$\begin{aligned} (5x - 2) + x &= (x + 3) + (4x - 2) \\ 5x - 2 + x &= x + 3 + 4x - 2 \\ 5x + x - x - 4x &= -2 + 3 - 2 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Analogno se izračuna iznos nepoznanice x izjednačavanjem duljine sjeverne strane vrta s duljinom južne strane vrta.

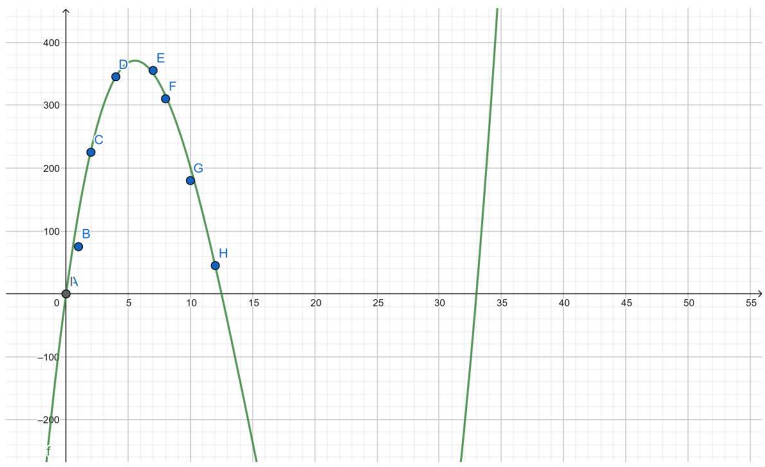
Prije nego pokažemo sljedeći primjer, možemo zaključiti kako podzatkom 6 iz prethodnog primjera možemo učenicima uvesti pojam *Racionalne funkcije*. Naime, vidjeli smo kako polinomi ne moraju uvijek biti djeljivi. Kvocijent takvih polinoma nazivamo racionalna funkcija, a ona nije polinom. Racionalna funkcija će biti definirana u Poglavlju 4.

Primjer 3.5. *Vlasnici zabavnog parka proučavaju vrijeme čekanja u redu za njihov popularni „Vlak smrti". Tablica prikazuje približan broj osoba u redu za čekanje za vlak smrti t sati nakon što se zabavni park otvorio.*

t	0	1	2	4	7	8	10	12
$P(t)$	0	75	225	345	355	310	180	45

Tablica 3.1: Broj ljudi u redu nakon t sati od otvaranja parka

Ivan je skicirao graf i smatra da će graf funkcije izgledati kao na Slici 3.4.



Slika 3.4: Ivanov graf funkcije

1. *Je li Ivan u pravu? Kako će se zvati tražena funkcija?*
2. *Koja informacija iščitana s Ivanovog grafa bi mogla najviše zanimati vlasnike parka? Zašto?*
3. *Procijenite vrijeme u kojem je red najduži te broj ljudi koji čekaju u tom trenutku.*
4. *Pomoću Ivanovog grafa odredite nultočke polinoma.*
5. *Odredite jednadžbu funkcije pomoću nultočaka i točke lokalnog maksimuma.*
6. *Pomoću dobivene funkcije odredite koliko osoba čeka u redu nakon 10 sati od otvaranja parka. Usporedite dobiveni rezultat s podacima iz tablice. Što zaključujete?*
7. *Ako je tražena funkcija oblika* $P_2(t) = 0.3746t^3 - 16.6078t^2 + 150.3037t - 21.2533$, *usporedite koji model funkcija je točniji za* $t = 2$ *i* $t = 10$.

1. Ivanov graf funkcije prolazi kroz većinu točaka koje odgovaraju zadanim podacima iz tablice, stoga je Ivan blizu rješenja. Učenici ovdje mogu zaključiti da će tražena funkcija biti polinom trećega stupnja.
2. Vlasnike bi trebalo zanimati kada je red najduži i koliko je ljudi u redu u tom trenutku. Kako bi saznali taj odgovor, trebaju pronaći model koji bi se koristio za predviđanje broja ljudi u bilo kojem trenutku tijekom dana. Tada će moći procijeniti točku maksimuma iz grafa.

3. Promatrajući Ivanov graf učenici mogu zaključiti da je vrijeme rada parka $0 \leq t \leq 12.5$, odnosno u trenutku $t = 0$ park se otvara, a u trenutku $t = 12.5$ se park zatvara. Promatramo funkciju na segmentu $t \in [0, 12.5]$ i na tom dijelu tražimo lokalni maksimum. Tada je red čekanja najduži. Procjenjujući iz Ivanovog grafa u trenutku $t = 5.5$ funkcija postiže lokalni maksimum koji iznosi 372. Slijedi da je točka lokalnog maksimuma $(5.5, 372)$.

4. Ivanov graf funkcije siječe $x - os$ otprilike u točkama 0,12.5 i 33, stoga su tražene nultočke: $(0, 0)$,$(12.5, 0)$ i $(33, 0)$.

5. Kako bi učenici odredili jednadžbu funkcije, prvo trebaju iskoristiti podatke o nultočkama funkcije. Iz toga slijedi da je jednadžba funkcije oblika

$$P_1(t) = at(t - 12.5)(t - 33). \tag{3.5}$$

Preostaje još pomoću točke lokalnog maksimuma odrediti konstantu a.
Kako je $P_1(5.5) = 372$, koristeći funkciju (3.5) slijedi

$$\begin{aligned} a \cdot 5.5(5.5 - 12.5)(5.5 - 33) &= 372 \\ a &\approx 0.35. \end{aligned}$$

Time smo dobili jednadžbu funkcije

$$P_1(t) = 0.35t(t - 12.5)(t - 33).$$

6. Za $t = 10$ dobivamo da je $P_1(t) = 201.25 \approx 201$. Rezultat se razlikuje za 21 od podatka iz tablice što znači da nije najprecizniji model, iako je vrlo blizu. Učenici mogu vidjeti kako dobivena funkcija precjenjuje broj ljudi koji čekaju u redu.

7. Za $t = 2$ vrijednost funkcija je:

$$P(2) = 225,$$

$$P_1(2) = 227.85 \approx 228,$$

$$P_2(2) = 215.9197 \approx 216$$

što znači da je funkcija P_1 preciznija.
Za $t = 10$ je vrijednost funkcija:

$$P(10) = 180,$$

$$P_1(10) = 201,$$

$$P_2(10) = 195.6037 \approx 196,$$

te je u ovom slučaju preciznija funkcija P_2.

4 Matematičko modeliranje racionalnim funkcijama

Kako bi uveli pojam *racionalne funkcije* u nastavi, nastavnici mogu taj pojam povezati s racionalnim brojevima oblika $\frac{a}{b}$ s kojima se učenici susreću ranije tijekom školovanja. Ako nastavnici učenike pitaju kako bi se zvala funkcija oblika $f(x) = \frac{1}{x}$, povezujući to s prethodno spomenutima racionalnim brojevima, učenici bi vrlo brzo zaključili da će se ta funkcija zvati racionalna funkcija. Ona se spominje u drugom razredu srednje škole u programima sa 140, 175 i 210 sati godišnje te u strukovnim školama u drugom razredu sa 105, 140 i 175 sati godišnje i u četvrtom razredu sa 64 sata godišnje. Prvo ćemo navesti potrebnu teoriju o racionalnoj funkciji s kojom se učenici susreću kako bismo mogli pokazati zadatke primjene. Iduća definicija se može pronaći u [6].

4.1 Definicija i osnovna svojstva racionalnih funkcija

Definicija 4.1. ***Racionalnu funkciju*** *definiramo formulom* $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ *gdje su* g *i* h *polinomi,* $h(x) \neq 0$.
Ako je stupanj polinoma u brojniku manji od stupnja brojnika u nazivniku, tada govorimo o ***pravoj racionalnoj funkciji****.*

Kao i kod drugih funkcija, tako i kod racionalne funkcije, osim pravila pridruživanja, moramo imati i dva skupa - domenu i kodomenu. Prilikom rješavanja zadataka, učenici mogu zaboraviti na uvjet koji zahtjeva racionalna funkcija, a to je da nazivnik mora biti različit od nule. Prema tome, domenu racionalne funkcije $f(x)$ čini skup realnih brojeva bez nultočaka polinoma $h(x)$, tj. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : h(x) \neq 0\}$.

Racionalna funkcija f može postići sve vrijednosti iz skupa realnih brojeva, stoga je njezina kodomena skup realnih brojeva, tj. $K_f = \mathbb{R}$.

U nekim zadacima modeliranja često se traže i nultočke racionalne funkcije. Pri određivanju nultočaka funkcije postavlja se pitanje za koji broj x_0 će zadana funkcija postići vrijednost jednaku nula, tj. u ovom slučaju se postavlja pitanje kada će racionalna funkcija $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ biti jednaka nuli. Možemo zaključiti da će se to postići kada je $g(x) = 0$. Dakle, nultočka racionalne funkcije f je broj x_0 za koji vrijedi $g(x_0) = 0$.

4.2 Racionalne funkcije u svakodnevnom životu

U primjenama u svakodnevnom životu pronašla je svoje mjesto i racionalna funkcija. Njome se koriste mnoge grane kao što su medicina, fizika, kemija, ekonomija i drugo. Primjerice, svoju primjenu ima i u elektrotehnici u poznatom nam Ohmovom zakonu koji definira odnos električne energije, napona i otpora. Zapisujemo ga matematičkom formulom $I = \frac{U}{R}$, gdje I označava električnu energiju, U električni napon, a R električni otpor. Ako sve tri fizikalne veličine ovise o vremenu t, tada prethodnu jednakost možemo zapisati i kao $I(t) = \frac{U(t)}{R(t)}$ te vidimo da je to upravo primjer jedne racionalne funkcije. U termodinamici svoju primjenu pronalazi u jednadžbi stanja plina $V = \frac{NkT}{p}$, gdje V označava volumen plina, N broj molekula u plinu, k Boltzmannovu konstantu, a p tlak. Na sličan način, kao i u prethodnom primjeru, volumen plina može biti funkcija koja ovisi o vremenu t, pa tako imamo sljedeću racionalnu funkciju $V(t) = \frac{NkT(t)}{p(t)}$. Kako je N broj, a k konstanta, oni ne mogu biti funkcije koje ovise o vremenu t. U ekonomiji se racionalne funkcije mogu koristiti za modeliranje funkcija prosječnog troška koje pomažu tvrtkama odrediti trošak proizvodnje određenog prozvoda. Na primjer, ako tvrtka s automobilima želi odrediti prosječnu cijenu proizvodnje automobila u nekom vremenu t može modelirati ovaj problem koristeći racionalnu funkciju.

Vidimo kako i racionalna funkcija ima široku primjenu u problemima iz svakodnevnog života. U nastavku ćemo navesti tri primjera modeliranja spomenutom funkcijom. Primjer 4.1 prikazuje modeliranje s populacijom određene jedinke, Primjer 4.2 prikazuje problem koji se može modelirati u kemiji, a Primjer 4.3 prikazuje primjenu racionalne funkcije u medicini. Više primjera primjene racionalne funkcije može se pronaći u [10].

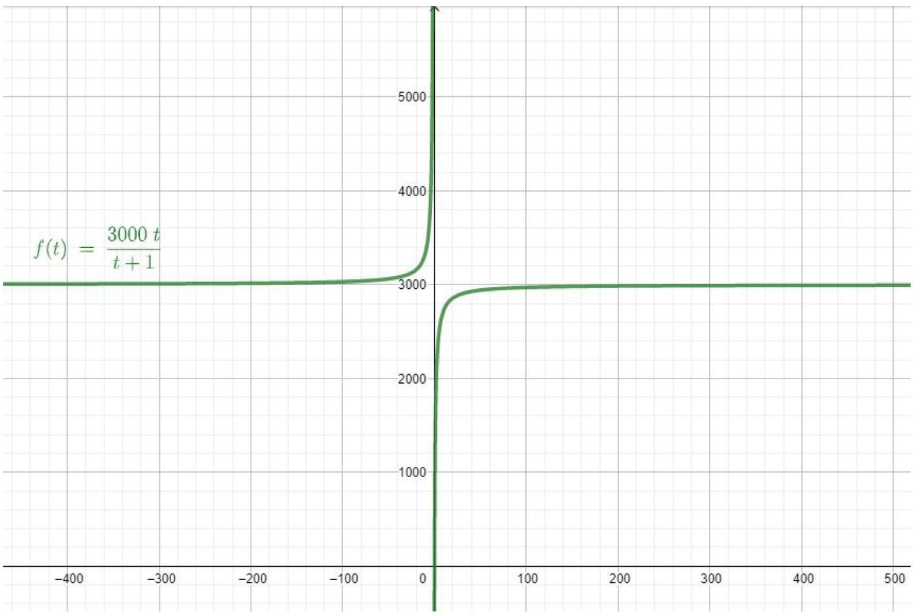
Primjer 4.1. *Populacija riba u jednom ribnjaku opisana je formulom*

$$f(t) = \frac{3000t}{t+1}, \tag{4.1}$$

gdje t predstavlja vrijeme u mjesecima od početka godine.

1. *Pomoću grafa zaključite što se događa s populacijom riba nakon t mjeseci?*
2. *Ribara Matu zanima hoće li više riba u ribnjaku biti nakon 5 mjeseci ili nakon 11 mjeseci?*
3. *Nakon koliko godina će populacija riba biti 2900?*

1. Na početku učenici trebaju zaključiti kako će promatrati funkciju za $t \geq 0$ jer se radi o mjesecima, pa t nikako ne može biti negativan broj. Zatim učenici preko alata *Geogebra* mogu prikazati zadanu funkciju te iz nje zaključiti kako je za $t \geq 0$ funkcija f rastuća. Promatrajući graf funkcije, što prikazuje Slika 4.1, vidimo kako je porast populacije riba u početku veći jer je graf funkcije f strmiji.



Slika 4.1: Graf funkcije f

2. U ovom podzadatku učenici bi trebali pronaći vrijednosti funkcije (4.1) za $t = 5$ i $t = 11$ te usporediti te dvije dobivene vrijednosti. Stoga za $t = 5$ slijedi

$$\begin{aligned} f(5) &= \frac{3000 \cdot 5}{5+1} \\ f(5) &= \frac{15000}{6} \\ f(5) &= 2500, \end{aligned}$$

   a za $t = 11$

$$\begin{aligned} f(11) &= \frac{3000 \cdot 11}{11+1} \\ f(11) &= \frac{33000}{12} \\ f(11) &= 2750. \end{aligned}$$

   Vidimo kako je $2750 > 2500$, tj. $f(11) > f(5)$, pa će populacija riba biti veća nakon 11 mjeseci.

3. Učenici bi prvo trebali pronaći za koliko će mjeseci populacija riba iznositi 2900. To će dobiti ako funkciju (4.1) izjednače s 2900 i na taj način pronađu broj mjeseci t. Dakle, imamo

$$\begin{aligned} \frac{3000t}{t+1} &= 2900 \\ 3000t &= 2900(t+1) \\ 100t &= 2900 \\ t &= 29. \end{aligned}$$

   To znači da će nakon 29 mjeseci, odnosno 2 godine i 5 mjeseci populacija riba biti 2900.

Primjer 4.2. *Marija je dobila zadatak za domaću zadaću iz kemije. U posudi prvo ima 20 l vode i umiješa 1 kg soli. Zatim treba dodavati vodu brzinom 2 l/min i u isto vrijeme sol brzinom 0.2 kg/min.*
Ako Marija zadatak odrađuje na opisani način, kolika će biti koncentracija u posudi nakon 10 minuta ako ona predstavlja omjer kilograma soli i litara vode?

Kako bi riješili ovaj problem, učenici bi prvo trebali modelirati funkcije koje će predstavljati količinu vode u jedinici vremena i količinu soli u jedinici vremena. Na početku Marija ima 20 l vode u posudi, a zatim dodaje još vode brzinom 2 l/m. Stoga je funkcija koja opisuje količinu vode u jedinici vremena oblika

$$v(t) = 20 + 2t,$$

gdje je t vrijeme izraženo u minutama. Na sličan način modeliramo funkciju koja opisuje količinu soli u jedinici vremena. Kako na početku Marija u posudi ima 1 kg soli i dodaje još soli brzinom 0.2 kg/min slijedi da je količina soli u posudi opisana sljedećim matematičkim izrazom

$$s(t) = 1 + 0.2t,$$

gdje je t vrijeme izraženo u minutama. Vidimo kako su ove dvije dobivene funkcije linearne funkcije, a njihovim dijeljenjem dobivamo racionalnu funkciju. Kako se iz teksta zadatka koncentracija definira kao omjer količine soli i vode slijedi

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{s(t)}{v(t)} \\ c(t) &= \frac{1+0.2t}{20+2t}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Kako bi odredili koncentraciju u posudi nakon 10 minuta potrebno je još odrediti funkcijsku vrijednost od (4.2) za $t = 10$. Stoga imamo

$$\begin{aligned} c(10) &= \frac{1+0.2\cdot 10}{20+2\cdot 10} \\ c(10) &= \frac{3}{40}\ kg/l. \end{aligned}$$

Ovime smo riješili zadani problem, odnosno to znači da će koncentracija u posudi nakon 10 minuta biti 3 kilograma soli na 40 litara vode.

U idućem primjeru, koji se nalazi u [10], zadana funkcija u nazivniku sadrži polinom drugog stupnja, što je i maksimalni stupanj koji se dopušta u preporukama za ostvarivanje odgojno - obrazovnih ishoda kurikuluma za drugi razred srednje škole.

Primjer 4.3. *Zadana je funkcija za određivanje koncentracije određene vrste lijeka u krvi u nekom vremenu t koje kreće od trenutka $t = 0$:*

$$C(t) = \frac{4t}{t^2+2}.$$

1. *Izračunajte koncentraciju lijeka u krvi u mg/l 6 i 21 sati nakon konzumiranja lijeka.*
2. *Odredite domenu funkcije.*
3. *Nacrtajte graf funkcije i komentirajte rast/pad funkcije. Odredite sliku funkcije. Koliko iznosi najveća koncentracija lijeka u krvi pacijenta?*
4. *Ako koncentracija lijeka u krvi pri manjem operacijskom zahvatu treba iznositi 2%, u kojem će vremenu biti ostvarena ta vrijednost?*

1. Kako je zadana funkcija za određivanje koncentracije lijeka u krvi C ovisna o vremenu t, dovoljno je odrediti funkcijsku vrijednost za $t = 6$ i $t = 21$. Stoga za $t = 6$ slijedi

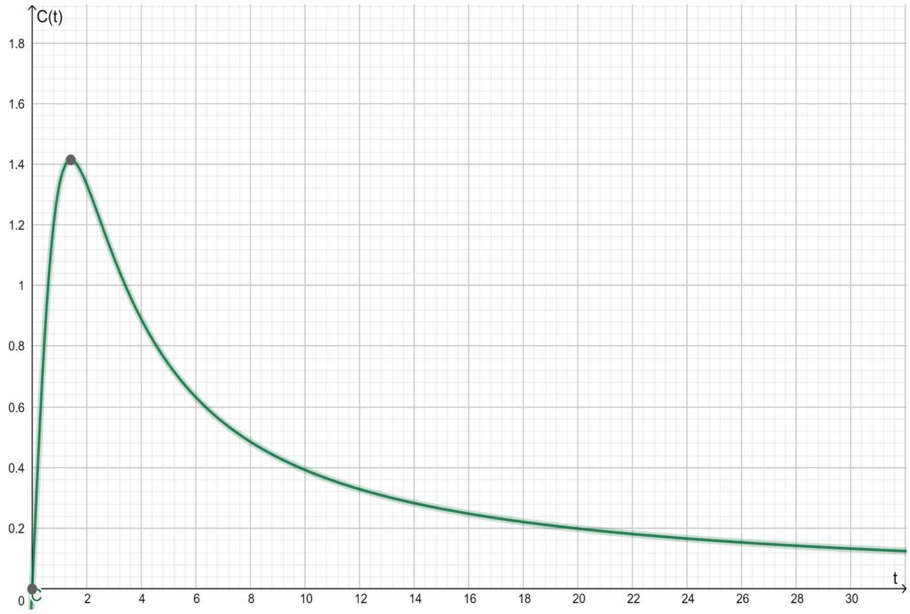
   $$C(6) = \frac{4\cdot 6}{6^2+2} = \frac{12}{19} mg/l.$$

   Za $t = 21$ vrijedi:

   $$C(21) = \frac{4\cdot 21}{21^2+2} = \frac{84}{443} mg/l.$$

2. Zadana funkcija je racionalna funkcija, pa za odeđivanje domene je potrebno odrediti nultočke nazivnika, odnosno treba vrijediti $t^2 + 2 \neq 0$. No, kako je vrijeme t realan broj, domena zadane funkcije je $\mathbb{R}$. Ipak valja zaključiti kako za vrijeme vrijedi $t \geq 0$, pa ima smisla promatrati funkciju kojoj je domena $\mathbb{R}_0^+$.

3. Pomoću alata *Geogebra* prikažimo graf funkcije C.



Slika 4.2: Graf funkcije C

Vidimo kako funkcija C raste na intervalu $[0, 1.5]$, a zatim počinje padati na intervalu $[1.5, +\infty\rangle$. Sliku funkcije nije uvijek lagano odrediti, ali ako gledamo graf funkcije C možemo vidjeti kako ona može poprimiti sve vrijednosti pozitivnih realnih brojeva. Stoga je slika funkcije C jednaka $\mathbb{R}^+$. Za određivanje najveće koncentracije lijeka u krvi pacijenta učenici bi trebali uvidjeti koja je maksimalna vrijednost funkcije. Promatrajući graf mogu vidjeti kako je to otprilike 1.4 mg/l.

4. Zapišemo li postotak 2% kao decimalni broj 0.02, preostaje matematički riješiti sljedeću jednadžbu:
$$\frac{4t}{t^2+2} = 0.02.$$
Sređivanjem prethodnog izraza dobivamo kvadratnu jednadžbu oblika $0.02t^2 - 4t + 0.04 = 0$ čija su rješenja $t_1 = 199.98$ i $t_2 = 0.1$. Time smo riješili traženi problem. Dakle, u vremenu $t_1 = 199.98$ i $t_2 = 0.1$ će koncentracija lijeka u krvi pri manjem operacijskom zahvatu iznositi 2%.

5 Matematičko modeliranje iracionalnim funkcijama

Nakon što učenici u drugom razredu srednje škole obrade racionalnu funkciju slijedi obrada pojma *iracionalne funkcije*. Kao i racionalne funkcije, nastavnici ovaj pojam mogu uvesti povezivajući ga s iracionalnim brojevima. Učenici znaju kako je $\sqrt{2}$ iracionalan broj jer ga ne možemo zapisati u obliku razlomka. Zamijenjujući prirodan broj 2 s varijablom x dobivamo $\sqrt{x}$. Učenici sada intuitivno mogu zaključiti kako se radi o iracionalnoj funkciji. Oni se s njom susreću, kao što je već i spomenuto, u drugom razredu srednje škole u okviru odgojno - obrazovnog ishoda *Učenik analizira funkciju.* Obrađuje se u svim programima kao i racionalna funkcija, ali udžbenici za nju nemaju općenitu definiciju. Navode ju kao funkciju koja pod korijenom ima neki polinom, a u preporukama kurikuluma predmeta Matematika stoji kako iracionalna funkcija pod korijenom ima polinom maksimalno drugog stupnja.

Iracionalna funkcija je specijalan slučaj opće potencije čija definicija slijedi u nastavku, a preuzeta je iz [3].

5.1 Definicija i osnovna svojstva iracionalnih funkcija

Definicija 5.1. ***Općom potencijom*** *zovemo funkciju* $x \mapsto x^{\alpha}$, $x > 0$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$.
U nekim slučajevima domena opće potencije može se proširiti na čitav skup $\mathbb{R}$. *Specijalno, ako je*

- $\alpha \in \mathbb{N}$, *opća potencija može se proširiti na čitav skup* $\mathbb{R}$,
- $\alpha \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, *opća potencija može se proširiti na skup* $\mathbb{R} \backslash \{0\}$,
- $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, *prirodno područje definicije ovisi o tome jesu li* p, q *parni ili neparni.*

Posebno, funkciju $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *zovemo* ***iracionalna funkcija****.*

I kod iracionalne funkcije važno je, osim pravila pridruživanja, navesti pripadnu domenu i kodomenu. Domena iracionalne funkcije ovisi o svakoj pojedinoj funkciji, odnosno o parnosti korijena. Iracionalna funkcija s kvadratnim korijenom, $f(x) = \sqrt{x}$, definirana je za sve realne brojeve x za koje je izraz pod korijenom pozitivan ili jednak nuli. Upravo se s ovakvim iracionalnim funkcijama učenici najviše susreću tijekom svog školovanja. Stoga, domena ove iracionalne funkcije je $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = \mathrm{R}_0^+$.

Iracionalna funkcija f s kvadratnim korijenom može postići sve vrijednosti iz skupa pozitivnih realnih brojeva, stoga je njezina kodomena skup pozitivnih realnih brojeva, tj. $K_f = \mathbb{R}_0^+$.

5.2 Iracionalne funkcije u svakodnevnom životu

Iako su manje zastupljene u kurikulumu u odnosu na ostale funkcije, iracionalne funkcije također imaju svoju primjenu u svakodnevnom životu. Arhitekti ih koriste za postizanje što preciznijih nacrta. U ekonomiji služe za pronalaženje kamata ili za izračun inflacije cijene nekretnine kojoj vrijednost raste. Iracionalnom funkcijom kvadratnog korijena se može izračunati vrijednost te nekretnine nakon određenog vremena. Koriste ih i astronomi za određivanje vremena potrebnog nebeskom tijelu za obilazak oko Sunca. U elektrotehnici svoju primjenu pronalaze pri određivanju napona koristeći se formulom $U = \sqrt{PR}$, gdje U predstavlja napon, P snagu, a R otpor. Osim ovakvih primjera, učenicima se mogu pokazati i primjeri iz područja koja su njima bliža, npr. sport. Tako možemo imati zadatak u kojem funkcija $s(h) = 11\sqrt{h}$ predstavlja brzinu kojom je skakač u dalj trčao, a h maksimalnu visinu koju je postigao. Vidimo kako je ovaj problem modeliran jednostavnom iracionalnom funkcijom.

U nastavku ćemo detaljnije razraditi tri primjera modeliranja iracionalnom funkcijom kvadratnog korijena. Primjer 5.1, kao i mnoštvo drugih primjera primjene iracionalne funkcije, može se pronaći u [2].

Primjer 5.1. *Brzina zvuka blizu Zemljine površine određena je sljedećom formulom*

$$V = 20\sqrt{t + 273}, \tag{5.1}$$

gdje je t temperatura Zemljine površine izražena u Celzijevim stupnjevima.

1. *Brzina zvuka na Zemljinoj površini često iznosi 340 m/s. Koliko tada iznosi temperatura površine?*

2. *Kolika je brzina zvuka pri temperaturi površine od 0 $°C$?*

Pokažimo rješenje prethodno navedenog primjera.

1. U ovom dijelu zadatka zadana je brzina $V = 356\ m/s$, a potrebno je preko formule (5.1) pronaći koliko iznosi temperatura t. Stoga imamo

$$356 = 20\sqrt{t + 273}.$$

Kvadriranjem i sređivanjem prethodnog izraza dobivamo sljedeće

$$\begin{aligned} 126736 &= 400 \cdot (t + 273) \\ 126736 &= 400t + 109200 \\ 400t &= 17536 \\ t &= 43.84. \end{aligned}$$

Dakle, pripadna temperatura površine Zemlje iznosi 43.84 $°C$.

2. Kako je iz teksta zadatka poznata temperatura $t = 0\ °C$, učenicima preostaje još, koristeći se formulom (5.1), izračunati traženu brzinu V, pa slijedi

$$\begin{aligned} V &= 20\sqrt{0 + 273} \\ V &= 20\sqrt{273} \\ V &\approx 330.45. \end{aligned}$$

To znači da pri temperaturi površine od 0 $°C$ brzina zvuka iznosi približno 330.45 m/s.

U idućem primjeru pokazana je primjena iracionalne funkcije u svakodnevnom životu iz područja medicine računajući površinu djeteta koristeći se formulom poznatijom kao *Mostellereva formula*. U njemu su korištene i formule za određivanje djetetove mase i visine u dobi do 14. godine života u ovisnosti o vremenu t. Formule su preuzete iz [9].

Primjer 5.2. *Prije pripreme infuzije doktor mora izračunati površinu tijela djeteta koristeći se Mostellerovom formulom*

$$PT = \sqrt{\frac{h \cdot m}{3600}}, \tag{5.2}$$

gdje je PT površina tijela izražena u m^2, h visina djeteta izražena u cm, a m masa djeteta izražena u kg.

1. *Kolika je visina djeteta čija je masa tijela 14 kg, a površina tijela* $\frac{7\sqrt{7}}{30}$ m^2*?*
2. *Odredite točnu dozu infuzije za dijete čija je masa 6 kg, a visina 62 cm koristeći se formulom*
$$doza = PT \cdot 70 \; mg/m^2. \tag{5.3}$$
3. *Izvedite model za površinu tijela djeteta tijekom godina* t*,* $0 \leq t \leq 14$*, ako funkcija* $m(t) = t + 11$ *predstavlja masu djeteta tijekom godina* t*, a funkcija* $h(t) = \frac{5}{2}t + 30$ *visinu djeteta tijekom godina* t*.*
Dobiveni model prikažite grafički te komentirajte kako se djetetova površina tijela mijenja do njegove 14. godine života.

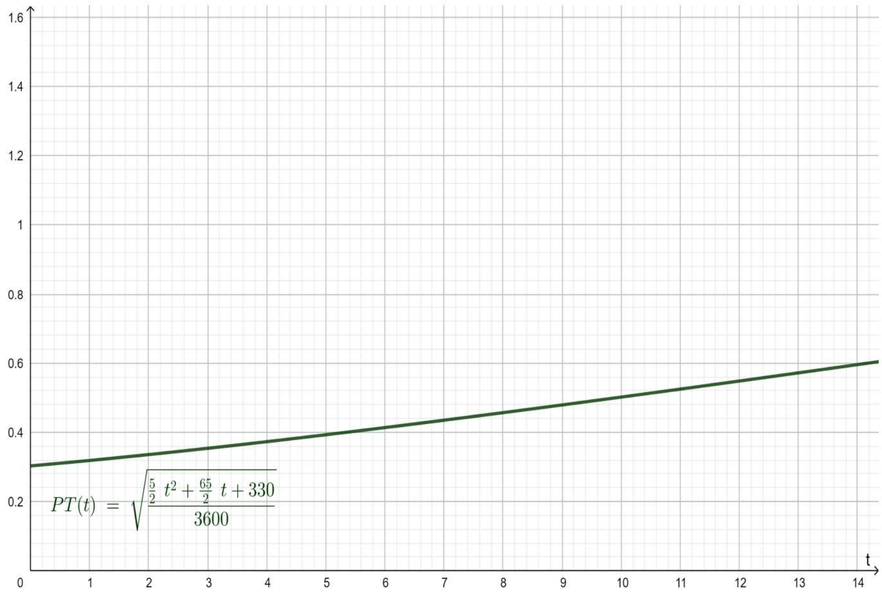
Pogledajmo rješenje prethodno navedenog primjera.

1. Kako je zadana masa djeteta i njegova površina, preostaje iz formule (5.2) pronaći djetetovu visinu, stoga imamo sljedeće
$$\frac{7\sqrt{7}}{30} = \sqrt{\frac{h \cdot 14}{3600}}.$$
Kvadriranjem i sređivanjem izraza slijedi
$$\begin{aligned} \frac{343}{900} &= \frac{14h}{3600} \\ 14h &= 1372 \\ h &= 98. \end{aligned}$$
Dakle, tražena djetetova visina je 98 cm.
2. U ovom dijelu zadatka učenici prvo trebaju pronaći površinu djetetova tijela koristeći se zadanom formulom (5.2). Kako je iz zadatka poznato da je $m = 6\; kg$, a $h = 62\; cm$, slijedi
$$\begin{aligned} PT &= \sqrt{\frac{62 \cdot 6}{3600}} \\ PT &= \frac{\sqrt{92}}{30}. \end{aligned}$$
Iz ovoga smo dobili djetetovu površinu tijela koja iznosi $PT = \frac{\sqrt{92}}{30}\; m^2$ te još preostaje pronaći točnu dozu infuzije služeći se formulom (5.3). Na ovaj način učenici mogu pronaći traženi podatak te imamo
$$\begin{aligned} doza &= \frac{\sqrt{92}}{30} \cdot 70 \\ doza &= \frac{7\sqrt{93}}{3} \\ doza &\approx 22.5, \end{aligned}$$
tj. točna doza djetetove infuzije je 22.5 mg.

3. Kako sve tri funkcije, PT, m i h, ovise o nezavisnoj varijabli t ,$0 \leq t \leq 14$, traženi model je oblika

$$\begin{aligned} PT(t) &= \sqrt{\frac{h(t) \cdot m(t)}{3600}} \\ PT(t) &= \sqrt{\frac{(\frac{5}{2}t + 30) \cdot (t + 11)}{3600}} \\ PT(t) &= \sqrt{\frac{\frac{5}{2}t^2 + \frac{65}{2}t + 330}{3600}}. \end{aligned}$$

Preostaje još grafički prikazati putem alata *Geogebra* dobiveni model.



Slika 5.1: Graf funkcije PT

Promatrajući graf funkcije PT učenici mogu zaključiti kako se, s obzirom da graf ne počinje u ishodištu koordinatnog sustava, dijete rađa s nekom površinom svoga tijela, što i ima smisla. Tijekom odrastanja u 14 godina svog života površina mu se blago povećava u m^2, ali nikada ne prijeđe 1 m^2.

Idući primjer prikazuje primjenu iracionalne funkcije u ekonomiji, a može se pronaći i u [10]. Učenici u njemu imaju gotovi model za izračun potrebnih podataka, ali trebaju i sami napraviti svoje modele funkcija i na taj način se rješavanje zadatka malo otežava.

Primjer 5.3. *Tvornica pametnih telefona za svoju proizvodnju treba naručivati materijal. Tijekom nabave materijala u svom skladištu stvara zalihu koja predstavlja trošak. Tvornica želi da trošak bude što manji. Isto se događa i s trgovinama koje naručuju robu od tvornica. Zalihe predstavljaju trošak, ali one moraju postojati kako bi se brzo zadovoljila potražnja kupaca. Formula koja određuje najbolju moguću količinu narudžbe zaliha u jednakim vremenskim intervalima je*

$$Q = \sqrt{\frac{2DS}{H}}, \tag{5.4}$$

gdje je Q najbolja moguća količina narudžbe, D godišnja potražnja za proizvodom, S fiksni trošak narudžbe, a H jedinični trošak držanja zaliha materijala.

1. *Izvedite model za najbolju moguću količinu narudžbe u ovisnosti o godišnjoj potražnji jedne trgovine uz pretpostavku da je trošak jedne narudžbe 200, a jedinični trošak držanja zaliha 10.*

2. *Ako je godišnja potražnja pametnih telefona* 1000*, koliko treba naručiti u svakoj pošiljci? Koliko će puta u roku od godine dana trgovina naručiti pametne telefone?*

3. *Ako se trošak držanja zaliha poveća za* 15%*, izvedite model za najbolju moguću količinu narudžbe u ovisnosti o godišnjoj potražnji za pametnim telefonima u jednoj trgovini.*

4. *Prikažite grafički oba dobivena modela za najbolju moguću količinu narudžbe u ovisnosti o godišnjoj potražnji i usporedite slučajeve.*

U nastavku slijedi rješenje primjera.

1. Uz definirane oznake iz teksta zadatka slijedi da je $S = 200$ i $H = 10$. Uvrstimo podatke u formulu (5.4) i imamo sljedeće

$$
\begin{aligned}
Q &= \sqrt{\frac{2DS}{H}} \\
Q &= \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot 200}{10}} \\
Q &= \sqrt{\frac{400D}{H}} = \sqrt{40D}.
\end{aligned}
$$

   Ovime smo dobili formulu za najbolju moguću količinu narudžbe u ovisnosti o godišnjoj potražnji koja glasi $Q(D) = \sqrt{40D}$.

2. Kako je godišnja potražnja pametnih telefona jednaka 1000, koristeći se prethodno dobivenim modelom imamo sljedeće

$$
\begin{aligned}
Q(1000) &= \sqrt{40 \cdot 1000} \\
Q(1000) &= \sqrt{40000} \\
Q(1000) &= 200.
\end{aligned}
$$

   Dakle, u svakoj pošiljci treba naručiti 200 pametnih telefona.
   Kako bi učenici odgovorili na drugi dio pitanja, trebali bi podijeliti godišnju potražnju za proizvodom s količinom svake pošiljke.

$$
\frac{D}{Q(D)} = \frac{1000}{200} = 5.
$$

   To znači da će trgovina u godini dana naručivati 5 puta pametne telefone.

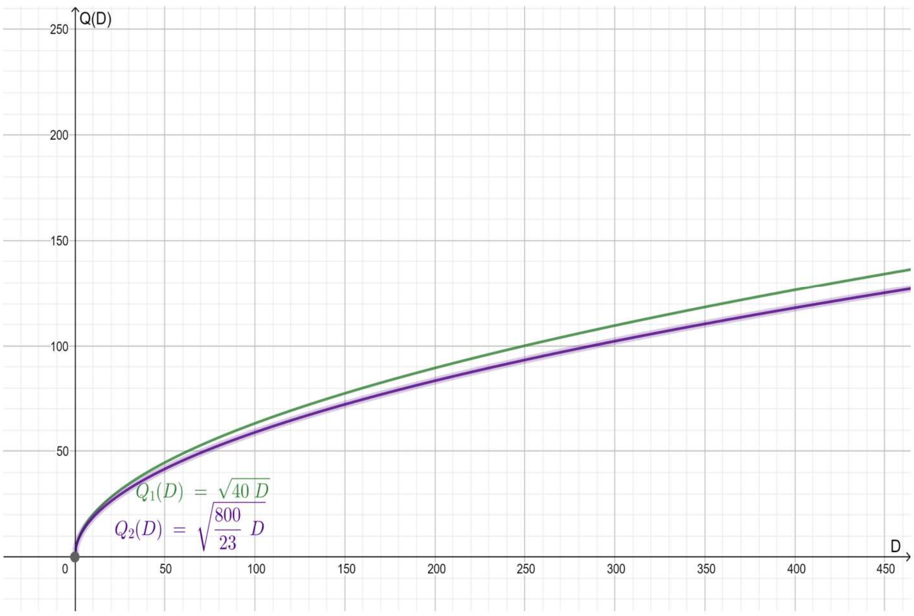
3. Povećanjem troška držanja zaliha $H = 10$ za 15% dobivamo sljedeće

$$
10 + 115\% = 10 + \frac{115}{100} = 10 + 1.15 = 11.5
$$

te je $H = 11.5$. Učenicima još preostaje, na temelju ovog podatka, napraviti novi model za najbolju moguću količinu narudžbe u ovisnosti o godišnjoj potražnji. Stoga imamo

$$\begin{aligned} Q(D) &= \sqrt{\frac{2DS}{H}} \\ Q(D) &= \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot 200}{11.5}} \\ Q(D) &= \sqrt{\frac{800}{23} \cdot D}. \end{aligned}$$

4. Prikažimo oba modela putem alata *Geogebra.*



Slika 5.2: Grafovi modela

Promatrajući grafove oba dobivena modela učenici mogu zaključiti da ukoliko je godišnja potražnja niska, najbolja moguća količina narudžbe je otprilike jednaka za oba modela. To vidimo jer su na početku krivulje jako blizu jedna drugoj. Za velike godišnje potražnje, krivulje su sve udaljenije jedna od druge, pa model u kojem su troškovi držanja zaliha veći prikazuje sve manju količinu narudžbe.

Literatura

[1] Z. Bujanović, B. Muha, *Elementarna matematika 1*, Sveučilište u Zagrebu, PMF - MO, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2017.

[2] B. Holliday, G. Cuevas, B. Moore-Harris, J. A. Carter, D. Marks, R. M. Casey, R. Day, L. M. Hayek, *Algebra 1*, McGraw-Hill/Glencoe, USA, 2005.

[3] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Gradska tiskara, Osijek, 1998.

[4] A. Keng Cheng, *Mathematical Modelling for Teachers*, Routledge, New York, 2019.

[5] D. Magdić, *Uvod u matematičko modeliranje*, Prehrambeno - tehnološki fakultet u Osijeku, Osijek, 2011.

[6] I. Matić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, R. Gortan, V. Vujasin Ilić, Ž. Dijanić, *Matematika 2, udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje, 1.dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[7] I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, T. Srnec, M. Šujansky, T. Vukas, Ž. Dijanić, *Matematika 4, udžbenik matematike u četvrtom razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje, 1.dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[8] I. Purgar, *Polinomi*, PMF - MO, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, Diplomski rad, 2018.

[9] A. A. Weech, *Signposts on the highway of growth*, A.M.A. American Journal Of Diseases Of Children, 4(1954), 452-457.

[10] V. Županović, K. Šorić, *Primijenjena matematika podržana računalom*, Diozit, Slavonski Brod, 2016.

Sažetak

Funkcije su važan dio matematike pa su samim time one važne i u nastavi. Pokazivanjem njihovih primjena u stvarnome životu učenicima olakšavamo njihovo shvaćanje i otkrivamo im njihovu važnost. Iako je matematičko modeliranje ponekad kompleksan proces ono ipak približava učenicima nastavno gradivo. U ovom radu definirano je matematičko modeliranje i matematički model te su navedeni opći pojmovi o funkcijama koje učenici trebaju savladati kako bi se mogli baviti modeliranjem. Također su definirane tri elementarne funkcije na način na koji se učenici s njima susreću u srednjoj školi, a to su polinomi, racionalne i iracionalne funkcije. Učenici se u redovnoj nastavi susreću s primjenama linearne i kvadratne funkcije. Iako primjena polinoma stupnja većeg ili jednakog od 3 nije zastupljena u kurikulumu matematike i udžbenicima za srednje škole, u ovom radu su pomoću matematičkog modeliranja prikazani primjeri iz stvarnog života navedenih funkcija. Oni se mogu učenicima pokazati na dodatnoj nastavi matematike.

Ključne riječi: *matematičko modeliranje, polinom, racionalna funkcija, iracionalna funkcija*

Modeling with polynomials, rational and irrational functions

Summary

Functions are an important part of mathematics. So they are also important in class. By showing their applications in real life, we make it easier for students to understand them and reveal their importance. Although mathematical modeling is sometimes complex, it still approaches students as teaching material. Mathematical modeling and mathematical model are defined in this paper. And the general concepts of functions that students need to master and how they can be able to engage in modeling are listed. Three elementary functions define the way students encounter them in high school. They are polynomials, rational and irrational functions. In class, students encounter with applications of linear and quadratic functions. Although the application of polynomials of degree greater or equal to 3 is not represented in the mathematics curriculum and textbooks for secondary schools, in this paper, using mathematical modeling, examples from the real life of the mentioned functions are given. They can be shown to students in additional mathematics classes.

Keywords: *mathematical modeling, polynomial, rational function, irrational function*

Životopis

Zovem se Ana Kraljević, a rođena sam 28. svibnja 1995. godine u Vinkovcima. Pohađala sam Osnovnu školu August Cesarec u Ivankovu. Nakon završene osnovne škole, 2010. godine, upisujem Gimnaziju Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima. Maturirala sam 2014. godine i iste godine upisujem preddiplomski studij Matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J.Strossmayera u Osijeku. Nakon završenog preddiplomskog studija 2020. godine nastavljam svoje obrazovanje na diplomskom Nastavničkom studiju matematike i informatike. Tijekom studiranja dvije godine sam radila kao asistent u nastavi, a od 5. rujna 2022. godine sam zaposlena u Osnovnoj školi Antuna Bauera u Vukovaru.