Teorem srednje vrijednosti za realne funkcije više realnih varijabli

Posavac, Boris

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij Matematika

Boris Posavac

Teorem srednje vrijednosti za realne funkcije više realnih varijabli

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij Matematika

Boris Posavac

Teorem srednje vrijednosti za realne funkcije više realnih varijabli

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Soldo

Osijek, 2022.

Sažetak

U ovome završnom radu obradit ćemo važan rezultat matematičke analize, teorem srednje vrijednosti, te njegove primjene i posljedice. U prvome poglavlju ovoga završnoga rada navest ćemo najbitnije definicije i teoretske rezultate matematičke analize bitne za razumijevanje teme rada, teorema srednje vrijednosti za realne funkcije više realnih varijabli čime ćemo se baviti u drugome poglavlju. U trećem poglavlju ćemo se dotaknuti povezanosti diferencijabilnosti funkcije s teoremom srednje vrijednosti, dok ćemo u četvrtom poglavlju pogledati kakav utjecaj teorem srednje vrijednosti ima na implicitno zadane funkcije. U posljednjem poglavlju obradit ćemo utjecaj teorema srednje vrijednosti na rješavanje sustava jednadžbi.

Ključne riječi

Otvoreni skup, neprekidnost, parcijalna derivacija, diferencijabilnost, Lagrangeov teorem srednje vrijednosti, implicitno zadana funkcija, sustav jednadžbi.

The mean value theorem for real-valued multivariable functions of real variables

Summary

In this paper, we consider an important result of mathematical analysis, the mean value theorem, and its applications and consequences. The first chapter lists the most important definitions and theoretical results of mathematical analysis essential for understanding the topic of the paper, the mean value theorem for real-valued multivariable functions of real variables, which the second chapter deals with. The third chapter covers the connection between the differentiability of a function and the mean value theorem, while the fourth chapter looks at the influence of the mean value theorem on implicit functions. The final chapter focuses on the influence of the mean value theorem on the solving of the system of equations.

Keywords

Open set, continuity, partial derivative, differentiability, Lagrange mean value theorem, implicit function, system of equations.

Sadržaj

Uvod

Matematička analiza je grana matematika koja se bavi diferencijalnim i integralnim računom koji se koriste za rješavanje određenih geometrijskih problema, poput problema tangente na krivulju i površine ispod grafa krivulje, te problema iz područja mehanike poput odnosa brzine i prijeđenog puta čestice.

Matematička analiza formalno je zasnovana u 17. stoljeću razvojem analitičke geometrije dvaju francuskih matematičara Pierrea de Fermata i Renea Descartesa, ali kao zasnivači diferencijalnog i integralnog računa smatraju se engleski matematičar i fizičar Isaac Newton i njemački matematičar Gottfried Wilhelm von Leibniz. Razlog tome je što su Newton i Leibniz, otprilike u isto vrijeme, neovisno jedan o drugome razvili infinitezimalni račun koji se dijeli na diferencijalni i integralni račun, a proučava i opisuje neprekidnost i svojstva funkcije, njezin limes te zakonitosti deriviranja i integriranja. Infinitezimalni račun ima široku primjenu u diferencijalnim jednadžbama, varijacijskom računu te u Fourierivoj analizi zbog čega se primjenjivao i u 18. stoljeću.

Francuski matematičar Joseph-Louis Lagrange otkrio je jedan od najbitnijih teorijskih rezultata matematičke analize koji je njemu u čast nazvan Lagrangeov teorem srednje vrijednosti na kojemu se temelji teorem srednje vrijednosti koji je tema ovoga završnog rada. Taj teorem omogućuje pronalaženje veze između diferencijalnog i integralnog računa, a jedna od najbitnijih posljedica Lagrangeovog teorema je postupak određivanja lokalnih ekstrema i intervala monotonosti funkcije pomoću derivacije funkcije.

1 Bitni pojmovi

U ovome ćemo poglavlju navesti osnovne definicije i rezultate matematičke analize pri čemu su definicije i teoremi preuzeti iz [2], [3] i [5].

Definicija 1. *Skup* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ *je* **otvoren skup** *ako za svaku točku* $P_0 \in \Omega$ *postoji realan broj* $r > 0$ *takav da* Ω *sadrži kuglu oko* P_0 *radijusa* r.

Pojam otvorenog skupa nam je potreban kako bi smo definirali neprekidnost funkcije u točki.

Definicija 2. *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ *otvoren skup. Funkcija* $f : \Omega \to \mathbf{R}$ *je* **neprekidna** *u točki* $P_0 \in \Omega$, *ako za svaki realan broj* $\epsilon > 0$ *postoji realan broj* $\delta > 0$ *takav da*

$$\forall P \in \Omega \qquad d(P, P_0) < \delta \Rightarrow |f(P) - f(P_0)| < \epsilon.$$

Za funkciju f *kažemo da je neprekidna na čitavom skupu* $S \subseteq \Omega$ *ukoliko je neprekidna u svakoj točki skupa* S.

Pogledajmo kako koristimo definiciju neprekidnosti funkcije projekcije na prvu koordinatnu os Π_1.

Primjer 1. *Ispitajte neprekidnost funkcije* $\Pi_1(x, y) := x$.

Rješenje:
Promatrajmo neprekidnost funkcije Π_1 u proizvoljnoj točki $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$.
Promotrimo li izraz za neprekidnost koji mora vrijediti $\forall P = (x, y) \in \mathbf{R}^2$

$$d(P, P_0) < \delta \Rightarrow |f(P) - f(P_0)| < \epsilon, \tag{1}$$

uočavamo kako je naš polazni prostor $\mathbf{R}^2$ na kojemu je standardna udaljenost d definirana kao norma $||\cdot||$.
Naš zadatak je za nekakav fiksan $\epsilon > 0$ pronaći broj $\delta > 0$ tako da uvjet neprekidnosti (1) bude ispunjen. Kako je

$$|\Pi_1(P) - \Pi_1(P_0)| = |x - x_0|,$$

postavimo taj izraz manjim od nekog zadanog ϵ, tj. $|x - x_0| < \epsilon$.
Kako je

$$d(P, P_0) = ||P - P_0|| = \sqrt{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2},$$

dani izraz ćemo postaviti manjim od δ, tj. $\sqrt{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2} < \delta$.

Uočimo kako vrijedi

$$|x - x_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$$

pa možemo uzeti $\delta = \epsilon$ jer će tada vrijediti

$$\sqrt{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2} < \epsilon,$$

ali je i

$$|x - x_0| < \epsilon.$$

Stoga za odabir $\delta = \epsilon$ uvjet (1) je ispunjen iz čega zaključujemo kako funkcija Π_1 nema prekida u proizvoljnoj točki $P_0 \in \mathbf{R}^2$, odnosno neprekidna je na čitavom skupu $\mathbf{R}^2$.

Kako bismo definirali pojam parcijalnih derivacija u točki, potrebno je prvo definirati derivaciju funkcije u točki.

Definicija 3. *Pretpostavimo da je $I \subseteq R$. Funkcija $f : I \to R$* **derivabilna** *je u točki $x_0 \in I$, ukoliko postoji*

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{2}$$

Tada se broj (2) naziva **derivacija** *funkcije f u točki x_0 i označava se sa $f'(x_0)$.*
Ako je funkcija derivabilna u svakoj točki danog intervala I, onda je derivabilna na čitavom intervalu I.

Neka je sada funkcija $f : \Omega \to R$ definirana na $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$, pri čemu je Ω otvoren skup. Tada se uz svaku točku $(x_0, y_0) \in \Omega$ vežu dvije funkcije jedne varijable:

$$\forall (x, y_0) \in \Omega, \qquad x \mapsto f(x, y_0)$$
$$\forall (x_0, y) \in \Omega, \qquad y \mapsto f(x_0, y).$$

Funkcija f u točki (x_0, y_0) ima **parcijalnu derivaciju** po prvoj varijabli ako postoji broj

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0 - y_0)}{x - x_0}$$

koji zovemo **parcijalna derivacija** funkcije f po prvoj varijabli u točki (x_0, y_0) i označavamo ga sa:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) \qquad ili \qquad \delta_1 f(x_0, y_0) \qquad ili \qquad D_1 f(x_0, y_0).$$

Na isti način definiramo parcijalnu derivaciju funkcije f po drugoj varijabli koju označavamo:

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0) \qquad \textit{ili} \qquad \delta_2 f(x_0, y_0) \qquad \textit{ili} \qquad D_2 f(x_0, y_0).$$

Općenito, za funkciju $f : \Omega \to \mathbf{R}$, pri čemu je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, parcijalnu derivaciju po i-toj varijabli definiramo na način:

$$\frac{\delta f}{\delta x_i} = \lim_{x_i \to x_i^0} \frac{f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{x_i - x_i^0}.$$

Sama ideja parcijalnih derivacija je da fiksiramo varijablu po kojoj želimo derivirati, a sve ostale varijable promatramo kao konstante što ćemo upravo pokazati na idućem primjeru.

Primjer 2. *Pronađite parcijalne derivacije funkcije* $f = 4x^3z^2 + 2xy^4 - xyz^{13}$.

Rješenje:
Uočimo kako je funkcija definirana na $\mathbf{R}^3$, stoga ćemo imati parcijalne derivacije po varijablama x, y i z. Shvatimo li varijable y i z kao konstante i funkciju f deriviramo po varijabli x, dobijemo parcijalnu derivaciju funkcije f po varijabli x

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 12x^2z^2 + 2y^4 - yz^{13}.$$

Analognim postupkom dobiju se preostale parcijalne derivacije po varijabli y, odnosno po varijabli z:

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 8xy^3 - xz^{13}$$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = 8x^3z - 13xyz^{12}.$$

Kako bismo razmotrili posljedice teorema srednje vrijednosti funkcija više varijabli, potrebno je još definirati pojam diferencijabilnosti.

Definicija 4. *Neka je* Ω *otvoren skup u* $\mathbf{R}^2$. *Funkcija* $f : \Omega \to \mathbf{R}$ *je* **diferencijabilna** *u točki* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *ukoliko postoji polinom*

$$(t, s) \mapsto At + Bs \qquad (A, B \in \mathbf{R})$$

takav da je

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Lema 1 (vidjeti [3, str. 75]). *Pretpostavimo da je funkcija f diferencijabilna u točki $(x_0, y_0) \in \Omega$. Tada u toj točki postoje parcijalne derivacije $D_1 f$ i $D_2 f$ i vrijedi:*

$$A = D_1 f(x_0, y_0), \qquad B = D_2 f(x_0, y_0)$$

Dokaz:
Dokaz ove leme nećemo provoditi jer nije bitan za samu temu ovoga rada, a može se pronaći u [3, str. 75]. □

Pretpostavimo da je funkcija $f : \Omega \to \mathbf{R}$ diferencijabilna u točki $P_0 = (x_0, y_0)$ otvorenog skupa $\Omega \in \mathbf{R}^2$.
Polinom

$$(h, k) \mapsto D_1 f(P_0) \cdot h + D_2 f(P_0) \cdot k$$

nazivamo **diferencijal** funkcije f u točki P_0 i označvamo ga sa $Df(P_0)$.

Na isti se način definira diferencijal funkcije od n varijabli u točki P_0 otvorenog skupa $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, to je polinom

$$(t_1, t_2, , t_{n-1}, t_n) \mapsto D_1 f(P_0) \cdot t_1 + D_2 f(P_0) \cdot t_2 + +D_{n-1} f(P_0) \cdot t_{n-1} + D_n f(P_0) \cdot t_n.$$

Definicija 5. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$. Funkcija $f : \Omega \to \mathbf{R}$ je klase C^1 na Ω ukoliko je neprekidna na Ω i ako njene sve parcijalne derivacije postoje na Ω i neprekidne su funkcije na Ω.*

Navest ćemo još jedan teorijski rezultat koji će nam biti od velikog značaja prilikom dokaza teorema srednje vrijednosti za funkcije više varijabli.

Teorem 1 (vidjeti [3, Teorem 6]). *Neka je Ω otvoren skup u $\mathbf{R}^2$ i $f : \Omega \to \mathbf{R}$ funkcija koja na Ω ima neprekidne derivacije $D_1 f$ i $D_2 f$. Neka je I otvoreni interval u $\mathbf{R}$, te $u, v : I \to \mathbf{R}$ funkcije klase C^1 na I takve da je $(u(s), v(s)) \in \Omega$ za svaki $s \in I$, tako da je kompozicija*

$$F(s) = f(u(s), v(s)), \qquad s \in I$$

definirana na I.
Tada je funkija F klase C^1 na I i za $s_0 \in I$ vrijedi:

$$F'(s_0) = \frac{\delta f}{\delta u}(u(s_0), v(s_0)) \cdot u'(s_0) + \frac{\delta f}{\delta v}(u(s_0), v(s_0)) \cdot v'(s_0).$$

Dokaz:
Dokaz ovog teorema provodi se pomoću Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti, a može se pronaći u [3, str. 65]. □

Za funkcije jedne varijable vrijedi Lagrangeov teorem srednje vrijednosti koji govori da za funkciju neprekidnu na segmentu $[a, b]$ i derivabilnu na intervalu $\langle a, b\rangle$, postoji neka točka $x_0 \in \langle a, b\rangle$ takva da je koeficijent smjera tangente u točki $(x_0, f(x_0))$ jednak koeficijentu smjera sekante kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Zapišimo formalno Lagrangeov teorem.

Teorem 2 (Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti, vidjeti [2, Teorem 6.8])**.** *Pretpostavimo da je funkcija $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i derivabilna na $\langle a, b\rangle$, tada postoji barem jedna točka $x_0 \in \langle a, b\rangle$ za koju je*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dokaz:
Dokaz nećemo provoditi, a može se pronaći u [2, str. 167]. □

U idućem poglavlju ćemo pokazati da vrijedi analogon Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti ali za funkcije više varijabli.

2 Teorem srednje vrijednosti za realne funkcije više realnih varijabli

U prošlom smo poglavlju definirali i naveli najbitnije pojmove i rezultate kako bismo proučili temu ovoga završnoga rada, teorem srednje vrijednosti za realne funkcije više varijabli, koji ćemo sada iskazati i dokazati.

Teorem 3 (vidjeti [3, Teorem 7]). *Pretpostavimo da je Ω otvoren i neprazan skup u $\mathbf{R}^2$, te neka funkcija $f : \Omega \to \mathbf{R}$ ima neprekidne prve parcijalne derivacije. Neka su $A = (x_0, y_0)$ i $B = (x_0 + h, y_0 + k)$ točke iz Ω takve da njihova spojnica L leži u Ω. Tada vrijedi*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot h + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot k \tag{3}$$

gdje parcijalne derivacije treba uzeti u nekoj točki

$$C = (x_0 + \lambda h, y_0 + \lambda k) \qquad (0 < \lambda < 1)$$

spojnice L.

Dokaz:
Označimo sa $P_0 = (x_0, y_0)$, a sa $H = (h, k)$. Tada točke A i B možemo zapisati kao $A = P_0$ i $B = P_0 + H$, pa formula (3) prelazi u

$$f(P_0 + H) - f(P_0) = Df(P_0 + \lambda H) \cdot H.$$

Definirajmo funkciju $\omega : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$ izrazom

$$\omega(t) = P_0 + tH.$$

Tada je

$$\omega(1) = P_0 + H \qquad i \qquad \omega(0) = P_0.$$

te je

$$f(P_0 + H) = f(\omega(1)) = f \circ \omega(1) \qquad i \qquad f(P_0) = f(\omega(0)) = f \circ \omega(0).$$

Označimo kompoziciju funkcija f i ω sa ψ, tj. $\psi(t) = f \circ \omega(t)$ i primjetimo kako je ω na segmentu $[0, 1]$ neprekidna, a na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ derivabilna. Kako, po pretpostavci teorema, postoje parcijalne derivacije funkcije f i one su neprekidne funkcije, tada na funkciju ψ možemo primjeniti Teorem 1.
Stoga vrijedi

$$\psi'(t) = D_1 f(\omega(t)) \cdot h + D_2 f(\omega(t)) \cdot k = Df(\omega(t)) \cdot H. \tag{4}$$

S druge strane, na ψ možemo primjeniti Lagrangeov teorem, tada postoji realan broj $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\lambda) \cdot (1 - 0). \tag{5}$$

Uvrštavanjem dobivenog rezultata iz (4) u izraz (5) slijedi

$$\psi(1) - \psi(0) = Df(\omega(\lambda)) \cdot H.$$

Pogledamo li kako je funkcija ψ definirana, gornji izraz je zapravo oblika

$$f \circ \omega(1) - f \circ \omega(0) = Df(\omega(\lambda)) \cdot H,$$

odnosno

$$f(P_0 + H) - f(P_0) = Df(P_0 + \lambda H) \cdot H,$$

što je upravo i trebalo pokazati. $\square$

Označimo li sa $x = x_0 + h$ i $y = y_0 + k$, tada formulu (3) još možemo zapisati

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0) \cdot \frac{\delta f}{\delta x} + (y - y_0) \cdot \frac{\delta f}{\delta y}. \tag{6}$$

Ukoliko je točka $P_1 = (x, y)$ jako blizu točke $P_2 = (x_0, y_0)$, zbog neprekidnosti funkcija $\frac{\delta f}{\delta x}$ i $\frac{\delta f}{\delta y}$, vrijednost tih funkcija u točkama spojnice točaka P_1 i P_2 možemo zamijeniti njihovim vrijednostima u točki P_2. Na taj način iz (6) dobijemo aproksimaciju

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + (x - x_0) \cdot \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \cdot \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0). \tag{7}$$

Važnost ovakve aproksimacije funkcije detaljnije ćemo obraditi u poglavlju o implicitno zadanoj funkciji, a sada ćemo na primjeru provjeriti metodu pronalaska aproksimacije funkcije u nekoj zadanoj točki.

Primjer 3. *Pomoću prve derivacije, aproksimirajte funkciju $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^2$ u točki $P_0 = (1, 3)$. Pronađite grešku aproksimacije funkcije u točki $P_1 = (1.3, 3.1)$.*

Rješenje:
$f(P_0) = f(1, 3) = 1.$
Parcijalnom derivacijom funkcije f po varijablama x i y dobijemo:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 4x - 4y \qquad i \qquad \frac{\delta f}{\delta y} = -4x + 2y.$$

Tada parcijalne derivacije u točki P_0 iznose

$$\frac{\delta f}{\delta x}(1, 3) = -8 \qquad i \qquad \frac{\delta f}{\delta y}(1, 3) = 2.$$

Aproksimacija funkcije f je oblika:

$$f(x, y) \approx 1 - 8 \cdot (x - x_0) + 2 \cdot (y - y_0).$$

Sada je

$$f(P_1) \approx 1 - 8 \cdot (1.3 - 1) + 2 \cdot (3.1 - 3) = -1.2.$$

Prava vrijednost funkcije f u točki P_1 je $f(P_1) = -3.13$. Usporedimo li u točki P_1 pravu vrijednost funkcije i vrijednost aproksimacije funkcije, dolazimo do pogreške od -1.93.

Teorem 3 možemo poopćiti tako da vrijedi i za funkcije od n varijabli:

Teorem 4 (vidjeti [3, Teorem 7']). *Pretpostavimo da je Ω otvoren i neprazan skup u $\mathbf{R}^n$, te $f : \Omega \to \mathbf{R}$ funkcija čije sve prve parcijalne derivacije postoje i neprekidne su na Ω. Neka su $A = (a_1, \ldots, a_n)$ i $B = (b_1, \ldots, b_n)$ točke iz Ω takve da njihova spojnica L leži u Ω. Tada je*

$$f(b_1, \ldots, b_n) - f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_k}(b_k - ak),$$

gdje parcijalne derivacije treba uzeti u nekoj točki spojnice L.

Dokaz:
Dokaz teorema provodimo na isti način kao i dokaz Teorema 3, pri čemu za A i B uzimamo $A = (a_1, \ldots, a_n)$ i $B = (a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n)$. □

Sada ćemo navesti neke direktne posljedice Teorema 3 u obliku korolara, ali prije samih korolara definirajmo pojmove konveksnog i povezanog skupa.

Definicija 6. *Skup $S \subseteq \mathbf{R}^n$ je* **konveksan** *ukoliko je spojnica bilo kojih dviju točaka $A, B \in \Omega$ također sadržana u skupu Ω.*

Definicija 7. *Otvoreni skup $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ je* **povezan** *ukoliko za bilo koje dvije točke $A, B \in \Omega$ postoji konačno mnogo točaka $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \Omega$ takvih da su spojnice $[A, P_1]$,$[P_1, P_2]$,$\ldots$,$[P_{n-1}, P_n]$,$[P_n, B]$ sadržane u Ω.*

Korolar 1 (vidjeti [3, Korolar 7]). *Pretpostavimo da je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ konveksan i otvoren skup. Ako funkcija $f : \Omega \to \mathbf{R}$ na Ω ima neprekidne parcijalne derivacije $D_i f$, $i = 1, \ldots, n$, i ukoliko postoji realan broj $M > 0$ takav da je*

$$|D_i f(P)| \leq M, \qquad i = 1, \ldots, n \qquad \forall P \in \Omega. \tag{8}$$

Tada je

$$|f(P) - f(Q)| \leq \sqrt{n} M d(P, Q), \qquad P, Q \in \Omega.$$

Dokaz:
Korolar ćemo dokazati za $n = 2$, a slično se dokaže i za $n > 2$ koristeći Teorem 4.
Neka su $P = (x_1, y_1)$ i $Q = (x_0, y_0)$ proizvoljne točke skupa Ω. Primjenimo li na točke P, Q i funkciju f Teorem 3, dobijemo

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = D_1 f(R)(x_1 - x_0) + D_2 f(R)(y_1 - y_0),$$

pri čemu je R točka koja leži na spojnici točaka P i Q, čiju egzistenciju jamči konveksnost skupa Ω.
Na taj izraz sada djelujmo apsolutnom vrijednošću:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)| = |D_1 f(R)(x_1 - x_0) + D_2 f(R)(y_1 - y_0)|.$$

Primjenimo li nejednakost trokuta i svojstva apsolutne vrijednosti slijedi:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)| \leq |D_1 f(R)||x_1 - x_0| + |D_2 f(R)||y_1 - y_0|.$$

Sada, uz pretpostavku (8), gornji izraz prelazi u izraz:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)| \leq M(|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|). \tag{9}$$

Primjenom Cauchyjeve nejednakosti:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

na izraz (9) dobijemo

$$|f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)| \leq \sqrt{2} M \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Čime je tvrdnja korolara dokazana. $\square$

Korolar 2 (vidjeti [3, Korolar 8]). *Neka je Ω otvoren i povezan skup u $\mathbf{R}^n$. Pretpostavimo da funkcija $f : \Omega \to \mathbf{R}$ ima sve prve parcijalne derivacije i one iščezavaju na Ω, tj. $D_i f(P) = 0$ za $i = 1, \ldots, n$ i $\forall P \in \Omega$. Tada je f konstanta na Ω.*

Dokaz:
Ponovno ćemo dokaz provesti za $n = 2$, ali se slično dokazuje za $n > 2$. Neka su $A, B \in \Omega$ proizvoljne točke i neka su $T_1, \ldots, T_r$ točke iz Ω takve da poligonalna linija $A, T_1, \ldots, T_r, B$ leži u Ω. Neka je sada $A = (x_0, y_0)$, a $T_1 = (x_0 + h, y_0 + k)$. Tada se primjenom Teorema 3 na funkciju f u točkama A i T_1 dobije

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot h + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot k$$

pri čemu se parcijalne derivacije računaju u nekoj spojnici točaka A i T_1. Iskoristimo li pretpostavku korolara:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(P) = \frac{\delta f}{\delta y}(P) = 0 \qquad \forall P \in \Omega,$$

slijedi

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = 0,$$

odnosno

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0),$$

točnije $f(A) = f(T_1)$.
Nastavkom postupka, dobija se $f(T_1) = f(T_2) = \ldots = f(T_r) = f(B)$, odnosno $f(A) = f(B)$ čime smo pokazali da je f konstantna. $\square$

Sljedeći korolar nam govori nešto više o odnosu parcijalnih derivacija funkcije i neprekidnosti funkcije.

Korolar 3 (vidjeti [3, Korolar 9]). *Ukoliko funkcija $f : \Omega \to \mathbf{R}$ ima parcijalne derivacije $D_i f$, $i = 1, \dots, n$, i one su neprekidne na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, onda je funkcija f neprekidna na Ω.*

Dokaz:
Treba dokazati neprekidnost funkcije f u proizvoljnoj točki $P \in \Omega$. Označimo sa f_i parcijalne derivacije funkcije f, odnosno $f_i = D_i f$ pri čemu je $i = 1, \dots, n$.
Funkcija f_i neprekidna je u svakoj točki skupa Ω, pa je neprekidna i u točki P. Stoga, po definiciji neprekidnosti postoje brojevi $\delta > 0$ i $\epsilon > 0$ takvi da je

$$d(P,T) < \delta \Rightarrow |f_i(P) - f_i(T)| < \epsilon \qquad \forall T \in \Omega. \tag{10}$$

Uočimo, dodamo li i oduzmemo istu vrijednost izrazu $|f_i(P)|$, te primjenimo li nejednakost trokuta slijedi:

$$|f_i(P)| = |f_i(P) + f_i(T) - f_i(T)| \leq |f_i(P) + f_i(T)| + |f_i(T)|. \tag{11}$$

Za $\epsilon = 1$, iz (10) slijedi:

$$|f_i(P) - f_i(T)| < 1.$$

Tada, iz (11) slijedi:

$$|f_i(P)| < 1 + |f_i(T)|.$$

Neka nam je $M = 1 + |f_i(T)|$, tj. $|f_i(P)| < M \ \forall i = 1, \dots, n$. Kako funkcija f ima neprekidne parcijalne derivacije i postoji broj $M > 0$ takav da $|f_i(P)| < M \ \forall i = 1, \dots, n$, možemo primjeniti Korolar 1 iz kojega slijedi

$$|f(T) - f(P)| \leq \sqrt{n} M d(P,T).$$

Sada je

$$\lim_{T \to P} |f(T) - f(P)| = 0$$

i funkcija f je neprekidna u točki P. □

Prethodni korolar nam kaže da ako postoje sve parcijalne derivacije funkcije f na nekom skupu Ω i one su neprekidne funkcije na Ω, tada je i funkcija f neprekidna na Ω, no međutim obrat ne vrijedi. Ukoliko je funkcija f neprekidna na nekom otvorenom skupu Ω, ne moraju nužno postojati neprekidne parcijalne derivacije što ćemo potkrijepiti idućim primjerom.
Pogledajmo funkciju

$$f(x,y) = |x| + |y|.$$

Ta funkcija je neprekidna u svakoj točki u $\mathbf{R}^2$, ali u točki $(0,0)$ ne postoje niti $D_1 f$ niti $D_2 f$.

Još jedna bitna posljedica Teorema 3 odnosi se na derivaciju kompozicije, o čemu nešto više govori sljedeći teorem.

Teorem 5 (vidjeti [1, Teorem 5.8]). *Pretpostavimo da je Ω otvoren skup u $\mathbf{R}^n$, te $f : \Omega \to \mathbf{R}$ funkcija čije parcijalne derivacije postoje i neprekidne su na Ω. Nadalje neka je $\tau : I \subseteq \mathbf{R} \to \Omega$ derivabilna funkcija. Kompozicija $f \circ \tau : I \to$ je diferencijabilna funkcija i vrijedi*

$$\frac{\delta}{\delta s} f(\tau(s)) = Df(\tau(s)) \cdot \tau'(s).$$

Dokaz:

Neka je $\tau : I \to \Omega$ derivabilna funkcija i neka su $A = \tau(s)$ i $B = \tau(s+h)$ dvije točke iz Ω čija spojnica leži u Ω, tada prema Teoremu 3 postoji točka $C = \tau(s + \lambda h)$, za $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$, koja leži na spojnici točaka A i B takva da je

$$f(B) - f(A) = Df(C)(B - A)$$

odnosno

$$f(\tau(s+h)) - f(\tau(s)) = Df(\tau(s + \lambda h)) \cdot (\tau(s+h) - \tau(s)).$$

Podijelimo li gornji izraz sa h i neka $h \to 0$, dobijemo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\tau(s+h)) - f(\tau(s))}{h} = \lim_{h \to 0} \left(Df(\tau(s + \lambda h)) \left(\frac{\tau(s+h) - \tau(s)}{h} \right) \right).$$

Primjetimo kako je

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\tau(s+h)) - f(\tau(s))}{h} = \frac{\delta}{\delta s} f(\tau(s))$$

te je

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\tau(s+h) - \tau(s))}{h} = \tau'(s)$$

a kada $h \to 0$, tada

$$Df(\tau(s + \lambda h) \to Df(\tau(s)).$$

Čime je tvrdnja teorema dokazana. $\square$

Pogledajmo sada kako bismo primjenili prethodni teorem.

Primjer 4. *Odredite derivaciju kompozicije $f \circ \tau$ ako su*

$$f(x, y, z) = x^3 + 2y^2 + 3z^2 \qquad i \qquad \tau(s) = (x(s), y(s), z(s)),$$

pri čemu su

$$x(s) = \sin s \qquad y(s) = s^2 \qquad z(s) = \ln s.$$

Rješenje:

Izračunajmo derivaciju kompozicije bez primjene Teorema 5

$$f \circ \tau(s) = \sin^3 s + 2s^4 + 3 \ln^2 s$$

$$(f \circ \tau(s))' = 3 \sin^2 s \cdot \cos s + 8s^3 + 6 \frac{\ln s}{s}.$$

No Teorem 5 govori
$$(f \circ \tau(s))' = Df(\tau(s)) \cdot \tau'(s)$$
odnosno
$$(f \circ \tau(s))' = \frac{\delta f}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{\delta f}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta s} + \frac{\delta f}{\delta z}\frac{\delta z}{\delta s}.$$
Tada je
$$(f \circ \tau(s))' = 3x^2 \cdot \cos s + 4y \cdot 2s + 6z \cdot \frac{1}{s},$$
a kada se uvrsti što su x, y i z dobije se:
$$(f \circ \tau(s))' = 3\sin^2 s \cdot \cos s + 8s^3 + 6\frac{\ln s}{ts}.$$
Možda se računanje derivacije kompozicije koristeći Teorem 5 čini kao složenija i dugotrajnija metoda, ali je vrlo efikasna jer olakšava derivacije jako složenih kompozicija funkcija.

3 Diferencijabilnost funkcije i teorem srednje vrijednosti

U ovome ćemo poglavlju razmotriti utjecaj diferencijabilnosti funkcije na Teorem 3. U obliku leme, navedimo jedan teorijski rezultat vezan za diferencijabilnost funkcije.

Lema 2 (vidjeti [3] str. 74)**.** *Ukoliko je funkcija f diferencijabilna funkcija u točki $P_0 = (x_0, y_0)$, tada je i neprekidna u toj točki.*

Dokaz:
Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ i funkcija $f : \Omega \to \mathbf{R}$ diferencijabilna u točki P_0.
Iz izraza u definiciji diferencijabilnosti funkcije:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

slijedi da za neki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$\sqrt{h^2+k^2} < \delta \Rightarrow |f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk| < \epsilon \cdot \sqrt{h^2+k^2},$$

tj.

$$\sqrt{h^2+k^2} < \delta \Rightarrow |f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk| < \epsilon \cdot \sqrt{h^2+k^2}.$$

Kako je

$$|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)| - |Ah+Bk| \leq |f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk| < \epsilon \cdot \sqrt{h^2+k^2},$$

slijedi:

$$|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)| < \epsilon \cdot \sqrt{h^2+k^2} + |Ah+Bk|. \tag{12}$$

Primjenimo li na (12) nejednakost trokuta i svojstvo apsolutne vrijednosti slijedi:

$$|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) \leq \epsilon\sqrt{h^2+k^2} + |A||h| + |B||k|.$$

No, kako su $|h| \leq \sqrt{h^2+k^2}$ i $|k| \leq \sqrt{h^2+k^2}$, tada je

$$|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)| \leq \epsilon \cdot \sqrt{h^2+k^2} + |A|\sqrt{h^2+k^2} + |B|\sqrt{h^2+k^2},$$

odnosno

$$|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)| \leq (\epsilon + |A| + |B|)\sqrt{h^2+k^2}.$$

Kako je $\sqrt{h^2+k^2} < \delta$ slijedi:

$$|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)| \leq (\epsilon + |A| + |B|) \cdot \delta,$$

tj.

$$|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)| \leq \epsilon \cdot \delta + (|A| + |B|) \cdot \delta.$$

Za odabir

$$\delta < \frac{1}{2} \qquad i \qquad \delta < \frac{\epsilon}{2(|A|+|B|)}$$

vrijedit će

$$|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)| \leq \epsilon \cdot \delta + (|A| + |B|) \cdot \delta < \epsilon,$$

čime je dokazana neprekidnost funkcije f u točki $P_0 = (x_0, y_0)$. □

Usporedimo li Korolar 3 i Lemu 2 primjećujemo kako su različite pretpostavke dovele do istoga zaključka. Preciznije, postojanje neprekidnih parcijalnih derivacija funkcije f na nekoj okolini točke P otvorenog skupa Ω ukazuje na neprekidnost funkcije u točki P, ali i diferencijabilnost funkcije f u istoj točki P ukazuje na neprekidnost u toj točki. Stoga se prirodno rađa pretpostavka kako postojanje neprekidnih parcijalnih derivacija funkcije rezultira diferencijabilnošću funkcije, što ćemo sljedećim teoremom i dokazati.

Teorem 6 (vidjeti [5, Teorem 9.1]). *Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ funkcija čije parcijalne derivacije postoje na Ω. Ukoliko su sve parcijalne derivacije $\delta_i f_j$ neprekidne u točki $P_0 \in \Omega$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, tada je funkcija f diferencijabilna u P_0.*

Dokaz:
Dovoljno je proučiti slučaj kada je $m = 1$. Radi jednostavnosti zapisa, dokaz teorema ćemo provoditi za $n = 3$, a za $n > 3$ teorem se dokazuje na isti način.
Neka su $P_0 = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ i $P = (x_1+k_1, x_2+k_2, x_3+k_3) \in \Omega$ takve da je njihova spojnica u skupu Ω. Definirajmo vektor $K = (k_1, k_2, k_3)$, tada je $P = P_0 + K$. Sada izrazu

$$f(P_0+K) - f(P_0) = f(x_1+k_1, x_2+k_2, x_3+k_3) - f(x_1, x_2, x_3)$$

s desne strane dodajmo i oduzmimo jednake vrijednosti, tj.

$$\begin{aligned} f(P_0+K) - f(P_0) = &(f(x_1+k_1, x_2+k_2, x_3+k_3) - f(x_1, x_2+k_2, x_3+k_3))+ \\ &(f(x_1, x_2+k_2, x_3+k_3) - f(x_1, x_2, x_3+k_3)) + (f(x_1, x_2, x_3+k_3) - f(x_1, x_2, x_3)). \end{aligned} \tag{13}$$

Uočimo kako na izraz

$$f(x_1+k_1, x_2+k_2, x_3+k_3) - f(x_1, x_2+k_2, x_3+k_3)$$

možemo primjeniti Lagrangeov teorem uz istu argumentaciju kao i u Teoremu 3. Stoga postoji broj $\lambda_1 \in \langle 0, 1 \rangle$ takav da je

$$f(x_1+k_1, x_2+k_2, x_3+k_3) - f(x_1, x_2+k_2, x_3+k_3) = \delta_1 f(x_1+\lambda_1 k_1, x_2+k_2, x_3+k_3) \cdot k_1.$$

Uz istu argumentaciju postoje brojevi $\lambda_2, \lambda_3 \in \langle 0,1\rangle$ takvi da su:

$$f(x_1, x_2+k_2, x_3+k_3) - f(x_1, x_2, x_3+k_3) = \delta_2 f(x_1, x_2+\lambda_2 k_2, x_3+k_3)\cdot k_2$$

$$f(x_1, x_2, x_3+k_3) - f(x_1, x_2, x_3) = \delta_3 f(x_1, x_2, x_3+\lambda_3 k_3)\cdot k_3.$$

Sada je (13) oblika

$$f(P_0+K) - f(P_0) = \sum_{j=1}^{3} \delta_j f(x_1, x_2, x_3)\cdot k_j + \sum_{i=1}^{3} R_i(H)\cdot k_i, \tag{14}$$

pri čemu su

$$R_1 = \delta_1 f(x_1+\lambda_1 k_1, x_2+k_2, x_3+k_3) - \delta_1 f(x_1, x_2, x_3),$$
$$R_2 = \delta_2 f(x_1, x_2+\lambda_2 k_2, x_3+k_3) - \delta_2 f(x_1, x_2, x_3),$$
$$R_3 = \delta_3 f(x_1, x_2, x_3+\lambda_3 k_3) - \delta_3 f(x_1, x_2, x_3).$$

Kako bismo dokazali diferencijabilnost funkcije f moramo pokazati da je $\lim\limits_{K\to 0} \dfrac{R_i(K)\cdot k_i}{||K||} = 0$ jer je u (14) prva suma s desne strane upravo diferencijal funkcije f u točki P_0, što je i potrebno u definiciji diferencijabilnosti. $\dfrac{k_i}{||K||}$ je konstanta koja je manja ili jednaka broju 1, stoga je dovoljno pokazati da je $\lim\limits_{K\to 0} R_i = 0$. Pogledamo li kako su definirane funckije R_i i uzmemo li u obzir da su funkcije $\delta_i f$ neprekidne u točki P_0 slijedi $\lim\limits_{K\to 0} R_i = 0$ čime je ova tvrdnja dokazana. □

Pretpostavke Teorema 3 bile su postojanje neprekidnih parcijalnih derivacija funkcije f. Kako nam prethodni teorem govori da je, uz te pretpostavke, funkcija diferencijabilna, iskažimo Teorem 3 uz pretpostavku diferencijabilnosti.

Teorem 7 (vidjeti [5, Teorem 10.1]). *Pretpostavimo da je Ω otvoren skup sadržan u $\mathbf{R}^n$, te da je $[P_0, P]$ segment sadržan u Ω. Nadalje, pretpostavimo da je funkcija $f : \Omega \to \mathbf{R}$ diferencijabilna. Tada postoji relan broj $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ takav da vrijedi*

$$f(P_0+H) - f(P_0) = Df(P_0+\lambda H)(H).$$

Dokaz:
Definiramo istu funkciju kao u Teoremu 3, $\omega : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ izrazom

$$\omega(t) = P_0 + tH.$$

Označimo kompoziciju funkcija f i ω sa ψ, tj. $\psi(t) = f\circ\omega(t)$ i primjetimo da je ω na segmentu $[0,1]$ neprekidna i na intervalu $\langle 0,1\rangle$ derivabilna. Kako je, po pretpostavci teorema, funkcija f diferencijabilna, iz Teorema 5 slijedi da je i kompozicija ψ diferencijabilna te vrijedi

$$\psi'(t) = D_1 f(\omega(t))\cdot h + D_2 f(\omega(t))\cdot k = Df(\omega(t))\cdot H.$$

Ostatak dokaza idetičan je dokazu Teorema 3. □

4 Teorem o implicitno zadanoj funkciji

Neka je $F(x, y)$ funkcija dviju varijabli zadana u xy-ravnini. Pretpostavimo da za svaki $x \in \langle x_0 - \xi, x_0 + \xi \rangle$ postoji jedinstveni y za koji je $F(x, y) = 0$. U tome slučaju, pridruživanjem $x \mapsto y$ definirana je funkcija $y(x)$ koja je **implicitno zadana** jednadžbom $F(x, y) = 0$. Utjecaj Teorema 3 na implicitno zadane funkcije bit će tema ovoga poglavlja.

Za ravninski skup $G \subseteq \mathbf{R}^2$ kažemo da je **funkcijski** u odnosu na y-os ukoliko svaka paralela sa y-osi siječe skup G u jednoj točki. Tada je skup G graf neke funkcije
$f : G_x \to \mathbf{R}$, pri čemu je G_x skup svih x-koordinata točaka skupa G. Za nekakav $x \in G_x$, paralela sa y-osi koja prolazi točkom $(x, 0)$, u presjeku sa skupom G ima točno jednu zajedničku točku (x, y). Tim postupkom, svakome $x \in G_x$ pridružujemo točno jednu vrijednost y, stoga je sa $x \mapsto y$ dana funkcija f.
Na isti način definiramo pojam biti funkcijski u odnosu na y-os.

Općenito, skup $G \subseteq \mathbf{R}^2$ ne mora biti funkcijski u odnosu niti na jednu os. Tada se, za nekakvu točku $(x_0, y_0) \in G$, postavlja pitanje egzistencije pravokutnika

$$L = \langle x_o - a, x_0 + a \rangle \times \langle y_0 - b, y_0 + b \rangle$$

čije su stranice paralelne sa koordinatnim osima, ali je i skup $L \cap G$ funkcijski u odnosu na npr. x-os. Skup G često se dobiva kao skup nultočaka neke neprekidne funkcije $F(x, y)$, tada je jednadžba skupa G zadana jednadžbom $F(x, y) = 0$. Tražimo rješenja y te jednadžbe koja su blizu y_0 za $x \approx x_0$, ali pronalazak rješenja ovisi o položaju točke (x_0, y_0).
Primjetimo da za točku $(x_0, 0)$ takav pravokutnik ne postoji jer je tada $y \equiv 0$, a izbor različitih točaka (x_0, y_0) rezultira različitim veličinama pravokutnika. Kako se za izbor različitih točaka skupa razlikuje i sama veličina pravokutnika oko tih točaka, možemo pretpostaviti kako je teorija ovoga razmatranja lokalna.

Na isti se način za točku $(x_0, y_0, z_0) \in G \subseteq \mathbf{R}^3$ postavlja pitanje egzistencije kvadra:

$$L = \langle x_o - a, x_0 + a \rangle \times \langle y_0 - b, y_0 + b \rangle \times \langle z_0 - c, z_0 + c \rangle$$

takvog da je skup $L \cap G$ funkcijski u odnosu na npr. xy-ravninu.
Sa z označimo z-koordinatu točke u kojoj paralela sa z-osi koja prolazi točkom $(x, y, 0)$ i siječe skup $L \cap G$. Tada je sa $(x, y) \mapsto z$ dana funkcija $f : \langle x_o - a, x_0 + a \rangle \times \langle y_0 - b, y_0 + b \rangle \to \mathbf{R}$ za koju je $(x, y, f(x, y)) \in L \cap G$.
Kod funkcija triju varijabli nam je također od interesa promatrati skupove zadane jednadžbom $F(x, y, z) = 0$, ali zahtjevamo da je $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ jer pronalazimo rješenja z koja su blizu z_0 kada je $(x, y) \approx (x_0, y_0)$.
Pri rješavanju jednadžbe $F(x, y, z)$ po z ne očekuje se pronalazak rješenja z u obliku nekakve formule ili izraza, nego se teorijskim rezultatima želi utvrditi postojanje rješenja.

S kakvim se problemima možemo susresti pogledajmo funkciju $F(x,y) = 2x^4 - x^2y^2 - y^4$. Rješavamo li jednadžbu $F(x,y) = 0$ po y možemo vidjeti da funkcija $y_1(x) = x$ zadovoljava jednadžbu, ali danu jednadžbu zadovoljavaju funkcije $y_2(x) = -x$ i $y_3(x) = |x|$, te mnoge druge. Uočimo da su sve tri funkcije neprekidne na čitavom $\mathbf{R}$, ali funkcija $y_3(x)$ nije diferencijabilna na čitavom $\mathbf{R}$. Kako bi funkcija imala jedinstveno rješenje, potrebne su neke dodatne pretpostavke.

U poglavlju 2, na osnovu Teorema 3 dobivena je aproksimacija funkcije (7) koja će se pokazati od velikog značaja.
Aproksimirajmo funkciju $F(x,y,z)$ po uzoru na (7):

$$F(x,y,z) \approx F(x_0,y_0,z_0) + (x-x_0)D_1F + (y-y_0)D_2F + (z-z_0)D_3F.$$

Iz uvjeta $F(x,y,z) = 0$ i $F(x_0,y_0,z_0) = 0$ slijedi

$$(x-x_0)D_1F(x_0,y_0,z_0) + (y-y_0)D_2F(x_0,y_0,z_0) + (z-z_0)D_3F(x_0,y_0,z_0) = 0.$$

Pretpostavimo li da je $D_3F(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, tada vrijedi

$$z \approx z_0 - \frac{1}{D_3F(x_0,y_0,z_0)}\big((x-x_0)D_1F(x_0,y_0,z_0) + (y-y_0)D_2F(x_0,y_0,z_0)\big).$$

Primjetimo kako je, uz dane uvjete $F(x,y,z) = 0$ i $F(x_0,y_0,z_0) = 0$, uvjet $D_3F(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ neophodan kako bi rezultat postojao o čemu nešto više govori sljedeći teorijski rezultat.

Teorem 8 (O implicitnoj funkciji, [3, Teorem 10.]). *Pretpostavimo da je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ otvoren skup i da je funkcija $F : \Omega \to \mathbf{R}$ klase C^1 na Ω. Neka je (x_0,y_0,z_0) točka iz Ω za koju vrijedi*

$$F(x_0,y_0,z_0) = 0 \qquad i \qquad \frac{\delta F}{\delta z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0.$$

Tada postoje otvoreni intervali $I \subseteq \mathbf{R}^2$ oko točke (x_0,y_0) i $I' \subseteq \mathbf{R}$ oko broja z_0 takvi da za svaki uređeni par $(x,y) \in I$ jednadžba $F(x,y,z) = 0$ ima jedinstveno rješenje z u intervalu I.
Funkcija $f : I \to \mathbf{R}$ koja uređenom paru $(x,y) \in I$ pridružuje jedinstveno rješenje z jednadžbe $F(x,y,z) = 0$ iz intervala I' je klase C^1 i

$$D_1f(x,y) = -\frac{D_1F(x,y,f(x,y))}{D_3F(x,y,f(x,y))},$$

$$D_2f(x,y) = -\frac{D_3F(x,y,f(x,y))}{D_3F(x,y,f(x,y))}, \qquad (x,y) \in I.$$

Dokaz:
Za dokaz ove tvrdnje ključna je primjena Teorema 3. Dokaz tvrdnje nećemo provoditi, a može se potražiti u [3, str. 89]. $\square$

Napomena 1. *Uvjet* $\frac{\delta F}{\delta z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ *osigurava rješavanje jednadžbe* $F(x, y, z) = 0$ *po* z. *Ukoliko bi umjesto danoga uvjeta imali uvjete* $\frac{\delta F}{\delta x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ *ili* $\frac{\delta F}{\delta y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, *tada bismo jednadžbu rješavali po* x, *odnosno po* y.

Primjer 5. *Odredite derivaciju funkcije* $y(x)$ *koja je zadana jednadžbom*

$$F(x, y) = 3x^2 + 4xy + 4y^3 - x.$$

Rješenje:

$$D_1F = 6x + 4y - 1, \qquad D_2F = 4x + 12y^2.$$

Koristeći teorem o implicitnoj funkciji slijedi

$$y' = -\frac{D_1F}{D_2F} = -\frac{6x + 4y - 1}{4x + 12y^2}.$$

Primjer 6. *Odredite parcijalne derivacije funckije* $F(x, y, z) = 2x^2 + y^3 + z^2 - xy^2 - yz$.

Rješenje:

$$D_1F = 4x - y^2, \qquad D_2F = 3y^2 - 2xy - z, \qquad D_3F = 2z - y.$$

Koristeći teorem o implicitnoj funkciji slijedi

$$z'_x = -\frac{D_1F}{D_3F} = -\frac{4x - y^2}{2z - y},$$

$$z'_y = -\frac{D_2F}{D_3F} = -\frac{3y^2 - 2xy - z}{2z - y}.$$

Teorem o implicitnoj funkciji iskazali smo za funkciju tri varijable, a sljedećim teoremom ćemo iskaz proširiti na proizvoljno mnogo varijabli.

Teorem 9 (vidjeti [5, Teorem 11.1]). *Pretpostavimo da je* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ *otvoren skup, a funkcija* $F : \Omega \to \mathbf{R}$ *klase* C^1 *na skupu* Ω. *Neka je točka* $Q_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_0) = (P_0, y_0) \in \Omega$ *takva da je* $F(P_0) = 0$ *i* $\delta_{n+1}F(Q_0) \neq 0$.

Tada oko točke P_0 *postoji okolina* $U \subseteq \mathbf{R}^n$, *te postoji funkcija* $f : U \to \mathbf{R}$ *koja je jedinstvena i neprekidna. Za funkciju* f *vrijedi da je* $f(P_0) = y_0$ *i* $F(P, f(P)) = 0$ *za sve* $P \in U$, *te je* f *diferencijabilna klase* C^1 *i vrijedi*

$$\delta_i f(P) = -\frac{\delta_i F(P, f(P))}{\delta_{n+1}F(P, f(P))}, \qquad P \in U, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Dokaz:

Dokaz ove tvrdnje nećemo provoditi, a može se pronaći u [5, str. 103]. □

5 Sustavi implicitno zadanih funkcija

U ovome poglavlju razmatramo utjecaj Teorema 8 na rješavanje sustava implicitno zadanih funkcija.
Pogledajmo sustav od dvije jednadžbe funkcija triju varijabli

$$F(x,y,z)=0 \qquad G(x,y,z)=0.$$

Neka funkcije F i G pripadaju klasi C^1, takve da $\delta_3 F \neq 0$ i da je (x_0,y_0,z_0) jedno rješenje sustava, tj vrijedi:

$$F(x_0,y_0,z_0)=0 \qquad i \qquad G(x_0,y_0,z_0)=0. \tag{15}$$

Tada po Teoremu 8 na okolini K točke (x_0,y_0) postoji funkcija h klase C^1 sa sljedećim svojstvom:

$$F(x,y,h(x,y))=0, \qquad (x,y)\in K.$$

Uočimo kako je varijabla z izražena kao funkcija preostalih dvaju varijabli, tj. $z=h(x,y)$ što mora zadovoljavati i

$$G(x,y,h(x,y))=0.$$

Neka je $U(x,y):=G(x,y,h(x,y))=0$, uočimo da tako definirana funkcija U pripada klasi C^1, te vrijedi

$$U(x_0,y_0)=G(x_0,y_0,h(x_0,y_0))=0.$$

Neka je $\delta_2 U \neq 0$, tada funkcija U zadovoljava pretpostavke Teorema 8 čija primjena na funkciju U govori da na otvorenoj okolini L točke x_0 postoji funkcija f klase C^1 takva da je

$$U(x,f(x))=0, \qquad x\in L.$$

Neka je sada $g(x):=U(x,y)$, uočimo:

$$f(x_0)=y_0 \qquad i \qquad g(x_0)=z_0.$$

Tada iz (15) slijedi:

$$F(x,y,z)=F(x,f(x),g(x))=0 \qquad i \qquad G(x,y,z)=G(x,f(x),g(x))=0. \tag{16}$$

Promotrimo li kako je definirana funkcija U i deriviramo li je po drugoj varijabli, dobijemo:

$$\delta_2 U(x_0,y_0)=\delta_2 G(x_0,y_0,z_0)+\delta_3 F(x_0,y_0,z_0)\cdot \delta_2 h(x_0,y_0).$$

Kako iz Teorema 8 slijedi $\delta_2 h(x_0,y_0)=-\dfrac{\delta_2 F(x_0,y_0,z_0)}{\delta_3 F(x_0,y_0,z_0)}$, tada je

$$\delta_2 U(x_0,y_0)=\delta_2 G(x_0,y_0,z_0)+\delta_3 F(x_0,y_0,z_0)\cdot \frac{\delta_2 F(x_0,y_0,z_0)}{\delta_3 F(x_0,y_0,z_0)},$$

odnosno

$$\delta_2 U(x_0,y_0)=-\frac{1}{\delta_3 F(x_0,y_0,z_0)}\cdot \begin{vmatrix} \delta_2 F(x_0,y_0,z_0) & \delta_3 F(x_0,y_0,z_0) \\ \delta_2 G(x_0,y_0,z_0) & \delta_3 G(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix}.$$

Promotrimo li gornji izraz, primjetimo:

$$\delta_2 U(x_0,y_0) = -\frac{1}{\delta_3 F(x_0,y_0,z_0)} \cdot det\frac{\delta(F,G)}{\delta(y,z)}(x_0,y_0,z_0). \tag{17}$$

Uočimo da iz zahtjeva $\delta_2 U \neq 0$ i (17) slijedi:

$$det\frac{\delta(F,G)}{\delta(y,z)}(x_0,y_0,z_0) \neq 0.$$

Derivacijom (15) koristeći pravilo o derivaciji kompozicije slijedi:

$$\delta_1 F(x_0,y_0,z_0) + \delta_2 F(x_0,y_0,z_0) \cdot f' + \delta_3 F(x_0,y_0,z_0) \cdot g' = 0,$$

$$\delta_1 F(x_0,y_0,z_0) + \delta_2 G(x_0,y_0,z_0) \cdot f' + \delta_3 G(x_0,y_0,z_0) \cdot g' = 0.$$

Uz dane zahtjeve, postoji jedinstveno rješenje za početni sustav jednadžbi, a rješenje je dano po funkcijama f' i g'.

Prethodno ćemo razmatranje formulirati u obliku teorema, čiji iskaz vrijedi za funkcije četiri varijable F i G, a rješenja su funkcije dviju varijabli f i g.

Teorem 10 (vidjeti [3, Teorem 11]). *Pretpostavimo da je Ω otvoren skup u $\mathbf{R}^4$, te su funkcije $F, G : \Omega \to \mathbf{R}$ klase C^1 na Ω, a $P_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0)$ dana točka iz Ω. Pretpostavimo da je*

$$F(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0 \qquad i \qquad G(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0;$$

$$\frac{\delta(F,G)}{\delta(u,v)}(x_0,y_0,z_0) \neq 0.$$

Tada postoje intervali $I \subseteq \mathbf{R}^2$ oko točke (x_0, y_0) i $I' \subseteq \mathbf{R}^2$ oko točke (u_0, v_0) takvi da za svaki $(x, y) \in I$ sustav

$$F(x,y,u,v) = 0, \qquad G(x,y,u,v) = 0,$$

ima jedinstveno rješenje $(u, v) \in I'$. Time su definirane funkcije

$$(x,y) \mapsto u = f(x,y) \qquad i \qquad (x,y) \mapsto v = g(x,y)$$

koje su klase C^1 na intevralu I.

Dokaz:
Dokaz ove tvrdnje nećemo provoditi, a može se pronaći u [3, str. 94].

Primjenimo prethodna razmatranja na sljedećem primjeru.

Primjer 7. *Dan je sljedeći sustav:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3,$$

$$2x - y + z = 2.$$

Pokažite da se y *i* z *na okolini točke* $(1, 1, 1)$ *mogu izraziti kao funkcije ovisne o varijabli* x.

Rješenje:
Definirajmo funkcije F i G na sljedeći način

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3,$$

$$G(x, y, z) = 2x - y + z - 2.$$

Primjetimo kako točka $(1, 1, 1)$ zadovoljava početni sustav jednadžbi, tj. točka $(1, 1, 1)$ je nultočka funkcija F i G.
Promotrimo sljedeću determinantu

$$det \frac{\delta(F, G)}{\delta(y, z)} = \begin{vmatrix} \delta_2 F & \delta_3 F \\ \delta_2 G & \delta_3 G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2y + 2z.$$

Kako je $det \dfrac{\delta(F, G)}{\delta(y, z)}(1, 1, 1) = 2 + 2 \neq 0$, te su $F(1, 1, 1) = 0$ i $G(1, 1, 1) = 0$, tada prema Teoremu (10) postoje funkcije $y(x)$ i $z(x)$ klase C^1 takve da sustav

$$F(x, y(x), z(x)) = 0, \qquad G(x, y(x), z(x)) = 0,$$

ima jedinstveno rješenje.
Koristeći pravilo o derivaciji kompozicije, derivacijom funkcija F i G po varijabli x u točki $(1, 1, 1)$ dobijemo

$$2 + 2y' + 2z' = 0 \qquad i \qquad 2 - y' + z' = 0.$$

Nakon što se dobiveni sustav dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice sredi množenjem i zbrajanjem tih dvaju jednadžbi dobijemo:

$$z' = -\frac{3}{2},$$

$$y' = \frac{1}{2}.$$

Uočimo kako nismo dobili nikakav izraz za funkcije $y(x)$ i $z(x)$, nego smo samo utvrdili njihovo postojanje.

Literatura

[1] P. Javor, *Matematička analiza 2*, Element, Zagreb, 2002.

[2] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika 1*, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2017.

[3] S. Kurepa, *Matematička analiza 3: Funkcije više varijabli*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1979.

[4] S. Kurepa, *Matematička analiza 2: Funkcije jedne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1980.

[5] Š. Ungar, *Matematička analiza 3*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2002.