Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Dominik Mihalčić

Slučajni procesi definirani integralom u odnosu na slučajnu mjeru

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Dominik Mihalčić

Slučajni procesi definirani integralom u odnosu na slučajnu mjeru

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Danijel Grahovac

Osijek, 2022.

Sadržaj

1 Uvod

Pojam slučajne mjere prisutan je već nekoliko desetljeća i osnova je za modernu teoriju vjerojatnosti. Slučajnu mjeru možemo shvatiti kao svojevrsni oblik slučajnog procesa koji više nije indeksiran brojevima, već skupovima σ-algebre. Ona ima slična svojstva kao i mjera u klasičnom smislu, ali njezine vrijednosti više nisu brojevi, nego slučajne varijable. Prema toj analogiji, integral neke funkcije po slučajnoj mjeri je slučajna varijabla. Ako podintegralna funkcija f ovisi i o nekom parametru t iz parametarskog prostora T, integralom u odnosu na slučajnu mjeru Λ

$$\int_S f(t,s)\Lambda(ds), \quad t \in T,$$

definiran je slučajni proces $(X(t),\ t \in T)$. Procesi definirani integralom u odnosu na slučajnu mjeru nisu ni u kojem smislu zasebna vrsta procesa. Naprotiv, velika većina poznatih procesa ima integralnu reprezentaciju među kojima kap u moru čine Lévyjevi procesi. Takav zapis procesa ponekad je prikladniji za korištenje, nego, primjerice, pomoću karakteristične funkcije.

Doduše, nećemo promatrati bilo kakve slučajne mjere, nego ćemo se fokusirati na beskonačno djeljive slučajne mjere među kojima najpoznatiju klasu čine stabilne. U poglavlju 2 najprije ćemo uvesti pojam beskonačne djeljivosti za slučajne varijable, vektore i procese te potom za slučajne mjere. Glavna karakteristika beskonačno djeljivih objekata jest specijalan oblik njihove karakteristične funkcije koji ćemo stalno koristiti kroz rad.

Glavna ideja iza integrala u odnosu na slučajnu mjeru bit će razjašnjena u poglavlju 3 kada ćemo dati nužne i dovoljne uvjete za podintegralnu funkciju da bi integral bio dobro definiran. Vidjet ćemo da se u konkretnim slučajevima ti uvjeti svode na poznate uvjete integrabilnosti.

Zadnje poglavlje rada posvećeno je primjerima procesa definiranih integralom. Upoznat ćemo se s nekim osnovnim primjerima kao što su $S\alpha S$ Lévyjevo gibanje i frakcionalno Brownovo gibanje, ali i s nekim naprednijim primjerima iz ovog stoljeća.

2 Beskonačna djeljivost

U ovom dijelu uvodimo pojam beskonačno djeljivih slučajnih varijabli, vektora i procesa. Kao specijalan oblik beskonačno djeljivih procesa, definirat ćemo slučajne mjere te ćemo navesti neke od najvažnijih primjera slučajnih mjera.

2.1 Beskonačno djeljive slučajne varijable i vektori

Definicija 2.1.1. *Za slučajnu varijablu X kažemo da je* ***beskonačno djeljiva*** *ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli $X_i^{(n)}$, $i = 1, \dots, n$ takav da je*

$$X \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i^{(n)}.$$

Često ćemo reći i da je distribucija slučajne varijable X beskonačno djeljiva. Engleski naziv je *infinitely divisible* pa ćemo umjesto "beskonačno djeljiva" ponekad kraće pisati ID. Sa μ_X označavat ćemo distribuciju, a sa $\phi_X(\theta) = Ee^{i\theta X}, \theta \in \mathbb{R}$ karakterističnu funkciju slučajne varijable X. Beskonačnu djeljivost možemo ekvivalentno iskazati na sljedeći način:

Propozicija 2.1.1. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) X je ID,

(ii) za svaki $n \in \mathbb{N}$, postoji vjerojatnosna mjera (distribucija) $\mu_X^{(n)}$ takva da je

$$\mu_X = \underbrace{\mu_X^{(n)} * \cdots * \mu_X^{(n)}}_{n\ puta},$$

gdje $*$ označava konvolucijski produkt,

(iii) za svaki $n \in \mathbb{N}$, postoji karakteristična funkcija $\phi_X^{(n)}$ takva da je

$$\phi_X(\theta) = \left(\phi_X^{(n)}(\theta)\right)^n, \ \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Dokaz se može pronaći u [1].
Najpoznatiji primjeri ID slučajnih varijabli su normalna (Gaussovska) i složena Poissonova što pokazujemo u sljedećem primjeru.

Primjer 2.1.1. *Ako je $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, onda je $\phi_X(\theta) = e^{i\theta\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$ pa je*

$$\phi_X^{(n)}(\theta) = \sqrt[n]{\phi_X(\theta)} = e^{i\theta\frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}\theta^2}, \ \theta \in \mathbb{R},$$

što je karakteristična funkcija $\mathcal{N}\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ distribucije. Dakle, X je ID.
Za Poissonovu slučajnu varijablu N s intenzitetom $\lambda > 0$ i za n.j.d niz $\{Y_n\}$ s karakterističnom funkcijom ϕ_Y nezavisan od N definiramo složenu Poissonovu varijablu

$$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i.$$

Njezina karakteristična funkcija je $\phi_X(\theta) = e^{\lambda(\phi_Y(\theta)-1)}$ *iz čega slijedi da je*

$$\phi_X^{(n)}(\theta) = \sqrt[n]{\phi_X(\theta)} = e^{\frac{\lambda}{n}(\phi_Y(\theta)-1)}$$

karakteristična funkcija neke složene Poissonove slučajne varijable. Prema prethodnoj propoziciji X *je ID.*

Ostali primjeri uključuju Poissonovu, Cauchyjevu, eksponencijalnu, gama, geometrijsku i druge distribucije. Uniformna i binomna slučajna varijabla nisu ID [9].
Glavni alat za proučavanje ID slučajnih varijabli je njihova karakteristična funkcija koja se može zapisati u posebnom obliku koji se naziva *Lévy-Khintchineova formula*. Prije nego što ju iskažemo, moramo uvesti pojam Lévyjeve mjere.

Definicija 2.1.2. *Za Borelovu mjeru* μ *na* $\mathbb{R}$ *kažemo da je* ***Lévyjeva*** *ako zadovoljava* $\mu(\{0\}) = 0$ *i* $\int_{\mathbb{R}} \min\{1, x^2\}\mu(dx) < \infty$.

Neki od primjera Lévyjevih mjera su *inverzna Gaussovska*

$$\mu(dx) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 x} x^{-3/2} dx, \quad \delta, \gamma > 0, x > 0$$

i *gama Lévyjeva mjera*

$$\mu(dx) = \nu x^{-1} e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha, \nu > 0, x > 0.$$

Za $x \in \mathbb{R}$ definiramo tzv. *centrirajuću funkciju* τ (eng. *centering function, truncation*) pravilom pridruživanja

$$\tau(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 1, \\ -1, & x < -1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Uočimo da je $\tau(x)^2 = \min\{1, x^2\}$. U literaturi se pojavljuju i drugi načini definiranja centrirajuće funkcije. Neki od najčešćih su $\tau(x) = x\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, $\tau(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ili $\tau(x) = \sin x$.

Teorem 2.1.1 (Lévy-Khintchineova formula)**.** *Neka je* X *ID slučajna varijabla. Tada postoji jedinstvena trojka* (b, σ^2, μ) *takva da je*

$$\phi_X(\theta) = Ee^{i\theta X} = \exp\left\{ i\theta b - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x) \right) \mu(dx) \right\}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

gdje je $b \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \ge 0$ *i* μ *Lévyjeva mjera na* $\mathbb{R}$.

Dokaz ove tvrdnje može se pronaći primjerice u [9]. Trojku (b, σ^2, μ) zovemo *karakteristična trojka* beskonačno djeljive slučajne varijable X i pišemo $X \sim ID(b, \sigma^2, \mu)$. Parametar b interpretira se kao parametar pomaka od X iako to nije u potpunosti točno jer stvarni pomak ovisi i o funkciji τ. Parametar σ^2 predstavlja varijancu Gaussovske komponente od X, a mjera μ opisuje poissonovsku komponentu. Ako je $\sigma^2 = 0$, X je Poissonovog tipa, a ukoliko je $\mu = 0$, X je normalno distribuirana s očekivanjem b i varijancom σ^2. Vrijedi i obrat prethodne tvrdnje, u smislu da za danu trojku (b, σ^2, μ) i τ postoji slučajna varijabla X čija je karakteristična funkcija dana s (2.1).

Prethodna formula lako se može poopćiti i na beskonačno djeljive slučajne vektore. Neka je $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ beskonačno djeljiv slučajni vektor s vrijednostima u $\mathbb{R}^d$. Njegova karakteristična funkcija je u potpunosti određena trojkom $(\mathbf{b}, \Sigma, \mu)$ i ima oblik

$$\phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}) = Ee^{i(\boldsymbol{\theta},\mathbf{X})} = \exp\left\{ i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{b}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T\Sigma\boldsymbol{\theta} + \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i(\boldsymbol{\theta},\mathbf{x})} - 1 - i(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}))\right) \mu(d\mathbf{x}) \right\}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d,$$

gdje je $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$, Σ pozitivno semidefinitna matrica dimenzije $d \times d$ i μ Lévyjeva mjera na $\mathbb{R}^d$, tj. $\mu(\{\mathbf{0}\}) = 0$ i $\int_{\mathbb{R}^d} \min\{1, ||\mathbf{x}||^2\}\mu(d\mathbf{x}) < \infty$. Centrirajuća funkcija $\boldsymbol{\tau}$ definirana je po komponentama za $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = (\tau(x_1), \ldots, \tau(x_d)).$$

Interpretacija parametara slična je kao i u jednodimenzionalnom slučaju: $\mathbf{b}$ shvaćamo kao pomak, matrica Σ je matrica kovarijanci Gaussovske komponente, a μ ponovo opisuje poissonovsku komponentu ID vektora $\mathbf{X}$.

2.2 Beskonačno djeljivi slučajni procesi

Generalizacija Lévy-Khintchineove formule na beskonačno djeljive slučajne procese nije tako direktna jer elementi karakteristične trojke sada postaju realne funkcije. Započinjemo s definicijom ID procesa koja sama po sebi ne govori puno.

Definicija 2.2.1. *Za slučajni proces $\mathbf{X} = (X(t),\ t \in T)$ kažemo da je beskonačno djeljiv ako su mu sve konačnodimenzionalne distribucije beskonačno djeljive.*

Parametarski prostor T najčešće je podskup skupa realnih brojeva, no može biti i podskup od $\mathbb{R}^d$ ili općenitiji skup s nekom određenom strukturom. Sa $\mathbb{R}^T$ označit ćemo prostor svih realnih funkcija definiranih na T. Za $\mathbf{x} = (x(t), t \in T) \in \mathbb{R}^T$ definiramo funkciju $\boldsymbol{\tau}$ po komponentama

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}(x(t), t \in T) = (\tau(x(t)),\ t \in T).$$

Definicija 2.2.2. *Ako je T prebrojiv, za mjeru μ na $\mathbb{R}^T$ kažemo da je Lévyjeva ako zadovoljava uvjete*

(1) $\int_{\mathbb{R}^T} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})^2(t)\mu(d\mathbf{x}) < \infty$,

(P2) $\mu\left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^T : x(t) = 0, \forall t \in T\right) = 0$.

Ako je T neprebrojiv, μ je Lévyjeva mjera na $\mathbb{R}^T$ ako zadovoljava uvjet (1) *i*

(N2) za svaki prebrojiv podskup T_1 od T takav da je

$$\mu\left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^T : x(t) = 0, \forall t \in T_1\right) > 0,$$

postoji $t_0 \in T_1^c$ takav da je

$$\mu\left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^T : x(t) = 0, \forall t \in T_1, x(t_0) \neq 0\right) > 0.$$

Uvjet (1) analogan je uvjetu iz definicije Lévyjeve mjere jer je $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})^2 = \min\{1, ||\mathbf{x}||^2\}$. Kada je $T = \mathbb{N}_0$, što najčešće i je u praksi, uvjet (P2) govori da mjera skupa koji sadrži niz čije su sve komponente 0 mora biti jednaka 0. To je u skladu s ranijim zahtjevom $\mu(\{\mathbf{0}\}) = 0$. Mjera μ koja zadovoljava samo uvjet (1), ali ne (P2) ili (N2) zove se *slaba Lévyjeva mjera*.
Prije nego što iskažemo karakterizaciju ID slučajnih procesa, moramo još samo uvesti jednu oznaku iz tehničkih razloga:

$$\mathbb{R}^{(T)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^T : x(t) \neq 0 \textit{ samo za konačno mnogo } t \in T\}.$$

Očito je za $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{(T)}$ i $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^T$ skalarni produkt $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{t\in T} x(t)y(t)$ konačan. Isto vrijedi i za kvadratnu formu $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \sum_{t\in T}\sum_{s\in T} A(s,t)x(s)x(t)$, za $A \in \mathbb{R}^{T\times T}$.

Teorem 2.2.1. *Slučajni proces $\mathbf{X} = (X(t), t \in T)$ je beskonačno djeljiv ako i samo ako postoji jedinstvena trojka $(\mathbf{b}, \Sigma, \mu)$ takva da za svaki $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{(T)}$ vrijedi*

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}) &= E\exp\left\{i\sum_{t\in T}\theta(t)X(t)\right\}\\ &= \exp\left\{i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{b}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T\Sigma\boldsymbol{\theta} + \int_{\mathbb{R}^T}\left(e^{i(\boldsymbol{\theta},\mathbf{x})} - 1 - i(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}))\right)\mu(d\mathbf{x})\right\},\end{aligned}$$

gdje je $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^T$, $\Sigma = (\Sigma(s,t),\ s,t \in T)$ pozitivno semidefinitna funkcija na $T \times T$ i μ Lévyjeva mjera na $\mathbb{R}^T$.

Dokaz se može pronaći u [5].
Lako se može vidjeti da ako karakteristična funkcija procesa $\mathbf{X} = (X(t), t \in T)$ zadovoljava prethodnu jednadžbu za neku trojku $(\mathbf{b}, \Sigma, \mu)$, onda je on ID. Neka je $T_d = \{t_1, \ldots, t_d\}$ podskup od T. Tada slučajni vektor $(X(t_1), \ldots, X(t_d))$ ima karakterističnu funkciju

$$\exp\left\{i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{b}_d) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T\Sigma_d\boldsymbol{\theta} + \int_{\mathbb{R}^{T_d}}\left(e^{i(\boldsymbol{\theta},\mathbf{x})} - 1 - i(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}))\right)\mu_d(d\mathbf{x})\right\},\quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d,$$

gdje je

- $\mathbf{b}_d$ restrikcija od $\mathbf{b}$ na T_d,
- Σ_d restrikcija od Σ na $T_d \times T_d$ i
- μ_d mjera na $\mathbb{R}^{T_d}$ definirana s

$$\mu_d(B) = \mu\left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^T : (x(t_1), \ldots, x(t_d)) \in B\backslash\{0\}\right).$$

Prema tome, slučajni vektor $(X(t_1), \ldots, X(t_d))$ je ID pa i proces $\mathbf{X} = (X(t), t \in T)$.

Najpoznatiji primjer beskonačno djeljivih procesa svakako su Lévyjevi procesi koje ćemo u nastavku često koristiti.

Definicija 2.2.3. *Slučajni proces* $\mathbf{L} = (L(t), t \geq 0)$ *je* ***Lévyjev proces*** *ako za njega vrijedi:*

(i) $L(0) = 0$ *g.s.,*

(ii) $\mathbf{L}$ *ima nezavisne priraste, tj. za svaki* $n \geq 2$ *i* $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ *prirasti* $L(t_2) - L(t_1), \ldots, L(t_n) - L(t_{n-1})$ *su nezavisni,*

(iii) $\mathbf{L}$ *ima stacionarne priraste, tj. za* $0 \leq s < t$ *vrijedi* $L(t) - L(s) \stackrel{d}{=} L(t-s)$,

(iv) $\mathbf{L}$ *je neprekidan u vjerojatnosti, tj.* $\lim_{s \to t} P(|X_t - X_s)| > \varepsilon) = 0$,

(v) $\mathbf{L}$ *ima zdesna neprekidne trajektorije koje imaju lijeve limese (**càdlàg**[1] trajektorije).*

Zbog stacionarnosti i nezavisnosti prirasta, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $t \geq 0$ imamo

$$L(t) = Y_1^{(n)}(t) + \cdots + Y_n^{(n)}(t),$$

gdje je $Y_k^{(n)}(t) = L\left(\frac{kt}{n}\right) - L\left(\frac{(k-1)t}{n}\right)$, pa je $L(t)$ ID slučajna varijabla.
Kako je i $L(1)$ ID, postoji ID slučajna varijabla Y takva da je $L(1) \stackrel{d}{=} Y_1 + \cdots + Y_n$, gdje su $Y_1, \ldots, Y_n$ n.j.d. kopije od Y. Neka je $(Y(t), t \geq 0)$ Lévyjev proces takav da je $Y(1) \stackrel{d}{=} Y$ i neka su $(Y_j(t), t \geq 0), j = 1, \ldots, n$ n.j.d. kopije tog procesa. Tada je očito i proces $\left(\sum_{j=1}^n Y_j(t), t \geq 0\right)$ Lévyjev proces. Uočimo da je

$$\sum_{j=1}^{n} Y_j(1) \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{n} Y_j \stackrel{d}{=} L(1),$$

pa zaključujemo da je $(L(t), t \geq 0) \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j=1}^n Y_j(t), t \geq 0\right)$ što povlači činjenicu da je Lévyjev proces beskonačno djeljiv proces.
U nastavku, nakon što uvedemo pojam slučajne mjere, ćemo pokazati da ako je $L(1) \sim ID(b, \sigma^2, \mu)$, da je tada $L(t) \sim ID(tb, t\sigma^2, t\mu)$, za svaki $t \geq 0$.

Primjer 2.2.1.

- *Lévyjev proces* $(B(t), t \geq 0)$ *za koji je* $B(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ *zove se standardno Brownovo gibanje. Ovdje je* $\mu = 0$ *pa je* $B_t \sim ID(0, t\sigma^2, 0)$.
- *Poissonov proces s intenzitetom* $\lambda > 0$ *je Lévyjev proces* $(N(t), t \geq 0)$ *za koji je* $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda)$. *Vrijedi* $N(t) \sim ID(t\lambda, 0, t\lambda\delta_1)$, *gdje je* δ_1 *Diracova* δ*-mjera koncentrirana u 1.*
- *Složeni Poissonov proces je Lévyjev proces* $(X(t), t \geq 0) = \left(\sum_{i=1}^{N(t)} Z(i), t \geq 0\right)$, *gdje je* $(N(t), t \geq 0)$ *Poissonov proces s intenzitetom* $\lambda > 0$ *i* $(Z(i), i \in \mathbb{N})$ *n.j.d. niz. Karakteristična trojka od* $X(t)$ *je* $(tb, 0, t\mu)$, *gdje je* μ *konačna mjera i* b *ovisi o* μ.

[1] francuski akronim za *continue à droite, limite à gauche*

2.3 Beskonačno djeljive slučajne mjere

Definicija 2.3.1. *Neka je $(S, \mathcal{S})$ izmjeriv prostor.* ***Slučajna mjera*** *na $(S, \mathcal{S})$ je svaka familija slučajnih varijabli $\Lambda = (\Lambda(A),\ A \in \mathcal{S})$ na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ koja zadovoljava*

(i) $\Lambda(\emptyset) = 0$ *g.s.,*

(ii) za svaki niz $\{A_n\}$ u $\mathcal{S}$ takav da je $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$ vrijedi

$$\Lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(A_n) \ \ g.s.$$

Za slučajnu mjeru Λ kažemo da je

- ***nezavisno raspršena*** *ako za sve disjunktne skupove $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$ vrijedi da su $\Lambda(A_1), \dots, \Lambda(A_n)$ nezavisne slučajne varijable,*
- ***beskonačno djeljiva*** *ako je $\Lambda(A)$ beskonačno djeljiva slučajna varijabla, za svaki $A \in \mathcal{S}$.*

Za fiksan $A \in \mathcal{S}$, $\Lambda(A) = \Lambda(A, \cdot)$ je slučajna varijabla, no za fiksan $\omega \in \Omega$ preslikavanje $\Lambda(\cdot, \omega)$ nije nužno mjera na S. Slučajna mjera poseban je oblik slučajnog procesa kod kojega prostor parametara ima strukturu σ-algebre. To znači da beskonačno djeljive slučajne mjere možemo okarakterizirati pomoću karakterističnih trojki.
U nastavku ćemo izvesti karakterističnu trojku $(\mathbf{b}, \Sigma, \mu)$ beskonačno djeljivog slučajnog procesa $\Lambda = (\Lambda(A),\ A \in \mathcal{S})$, gdje je $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$, $\Sigma = (\Sigma(A_1, A_2),\ A_1, A_2 \in \mathcal{S})$ pozitivno semidefinitna funkcija na $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ i μ Lévyjeva mjera na $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$. Za to će nam trebati sljedeće tri mjere:

- σ-konačna realna mjera β na S,
- σ-konačna mjera γ na S i
- mjera ν na $S \times \mathbb{R}\backslash\{0\}$ takva da je mjera

  $$m_1(A) = \int_{A \times \mathbb{R}\backslash\{0\}} \tau(y)^2 \nu(ds, dy), \ \ A \in \mathcal{S},$$

  σ-konačna.

Pomoću njih definiramo novu mjeru m na S

$$m(A) = |\beta(A)| + \gamma(A) + m_1(A), \ \ A \in \mathcal{S}$$

i zovemo ju **kontrolna mjera** od Λ. Pretpostavit ćemo da je $m(A) < \infty$ za sve $A \in \mathcal{S}$.
Najprije definiramo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ direktno pomoću mjere β:

$$b(A) = \beta(A), \ \ A \in \mathcal{S}.$$

Mjeru β zovemo **mjera pomaka**.
Pomoću mjere γ definiramo funkciju Σ:

$$\Sigma(A_1, A_2) = \gamma(A_1 \cap A_2), \quad A_1, A_2 \in \mathcal{S}.$$

Da bismo se uvjerili da je Σ pozitivno semidefinitna funkcija, uzmimo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ i skupove $A_1, \ldots, A_d \in \mathcal{S}$ te promotrimo kvadratnu formu

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T \Sigma x &= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} x_i x_j \Sigma(A_i, A_j) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} x_i x_j \gamma(A_i \cap A_j) = \int_S \left(\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} x_i x_j \mathbf{1}_{A_i}(s) \mathbf{1}_{A_j}(s) \right) \gamma(ds) \\ &= \int_S \left(\sum_{i=1}^{d} x_i \mathbf{1}_{A_i}(s) \right)^2 \gamma(ds) \geq 0.\end{aligned}$$

Mjeru γ zovemo **mjera Gaussovske varijance**.
Da bismo došli do Lévyjeve mjere μ, najprije definiramo preslikavanje $\Phi : S \times \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ pravilom pridruživanja

$$\Phi(s, y)(A) = y \mathbf{1}_A(s) = \begin{cases} y, & s \in A, \\ 0, & s \notin A, \end{cases}, \quad s \in S, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, A \in \mathcal{S}.$$

Uočimo da je za $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ takav da za neki $A \in \mathcal{S}$ vrijedi $x(A) = 0$

$$\Phi^{-1}(x(A)) = \{(s, y) : s \notin A, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}.$$

Kompozicija $\mu = \nu \circ \Phi^{-1}$ je tada dobro definirana Lévyjeva mjera na $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$. Da bismo to pokazali, dovoljno je provjeriti uvjete (1) i (P2), odnosno (N2) iz definicije 2.2.2. Za $A \in \mathcal{S}$ vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathcal{S}}} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})^2(A) \mu(d\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathcal{S}}} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})^2(A) \left(\nu \circ \Phi^{-1}\right)(d\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathcal{S}}} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})^2(A) \nu \left(\Phi^{-1}(d\mathbf{x})\right).$$

Formalnim uvođenjem supstitucije $\Phi^{-1}(d\mathbf{x}) = (ds, dy)$ slijedi $d\mathbf{x} = \Phi(ds, dy)$ pa je i $\mathbf{x} = \Phi(s, y)$. Područje integracije postaje $S \times \mathbb{R}\backslash\{0\}$, a podintegralna funkcija je

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})^2(A) = \tau(x(A))^2 = \tau(\Phi(s, y)(A))^2 = \tau(y \mathbf{1}_A(s))^2$$

što je različito od 0 samo za $y \in A$ pa je dovoljno integrirati po $A \times \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Početni integral sada postaje

$$\int_{A \times \mathbb{R}\backslash\{0\}} \tau(y)^2 \nu(ds, dy),$$

a on je konačan prema definiciji mjere ν.
Ako je $\mathcal{S}$ prebrojiv, onda vrijedi

$$\begin{aligned}\mu\left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}} : x(A) = 0, \ \forall A \in \mathcal{S}\right) &= \nu\left(\Phi^{-1}(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}} : x(A) = 0, \ \forall A \in \mathcal{S})\right) \\ &= \nu\left((s, y) : s \notin \cup_{A \in \mathcal{S}} A\right) = \nu(\emptyset) = 0\end{aligned}$$

jer je mjera m σ-konačna, tj. $S = \cup_{A\in\mathcal{S}} A$.
Ako je $\mathcal{S}$ neprebrojiv, tada treba provjeriti uvjet (N2). Neka je $\mathcal{S}_1$ prebrojiv podskup od $\mathcal{S}$ takav da je

$$\mu\left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}} : x(A) = 0, \forall A \in \mathcal{S}_1\right) = \nu\left((s,y) : s \notin \cup_{A\in\mathcal{S}_1} A\right) > 0.$$

Iz toga slijedi da je

$$m_1\left((\cup_{A\in\mathcal{S}_1} A)^c\right) > 0,$$

a kako je mjera m_1 σ-konačna, postoji skup $A_0 \in \mathcal{S}$ takav da je $A_0 \subset (\cup_{A\in\mathcal{S}_1} A)^c$ i $m_1(A) > 0$. Tada je

$$\nu\left((s,y) : s \notin \cup_{A\in\mathcal{S}_1} A, s \in A_0\right) = \mu\left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}} : x(A) = 0, \forall A \in \mathcal{S}_1, x(A_0) > 0\right) > 0,$$

što u konačnici pokazuje da je μ Lévyjeva mjera na $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$.
Pokazuje se da je ovako definiran proces $\Lambda = (\Lambda(A),\ A \in \mathcal{S})$ beskonačno djeljiva i nezavisno raspršena slučajna mjera na $(S, \mathcal{S})$ [7].
Očito je za $A \in \mathcal{S}$, $\Lambda(A)$ ID slučajna varijabla s parametrom pomaka

$$b(A) = \beta(A),$$

varijancom Gaussovske komponente

$$\Sigma(A,A) = \gamma(A)$$

i Lévyjevom mjerom

$$\begin{aligned}\mu(x(A))(B) &= \nu\left(\Phi^{-1}(x(A))(B)\right) = \nu\left(\{(s,y) : s \in A,\ y \in B\}\right)\\ &= \nu(A \times B) = \nu_A(B),\ \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\}),\end{aligned}$$

odnosno $\Lambda(A) \sim ID(\beta(A), \gamma(A), \nu_A)$.
Karakteristična funkcija od $\Lambda(A)$ je oblika

$$\phi_{\Lambda(A)}(\theta) = Ee^{i\theta\Lambda(A)} = \exp\left\{i\theta\beta(A) - \frac{1}{2}\gamma(A)\theta^2 + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x)\right)\nu_A(dx)\right\}, \tag{2.2}$$

no češće se koristi parametrizacija pomoću tzv. *lokalnih karakteristika*. Za to će nam koristiti sljedeća propozicija:

Propozicija 2.3.1. *Postoji funkcija $\rho : S \times \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \to [0,\infty]$ takva da je*

(i) $\rho(s,\cdot)$ *Lévyjeva mjera na* $\mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$,

(ii) $\rho(\cdot, B)$ *Borel izmjeriva funkcija za svaki* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$,

(iii)
$$\int_{S\times\mathbb{R}\backslash\{0\}} h(s,x)\nu(ds,dx) = \int_S\left(\int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} h(s,x)\rho(s,dx)\right)m(ds),$$
za svaku $\mathcal{S} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$*-izmjerivu funkciju funkciju* $h : S \times \mathbb{R}\backslash\{0\} \to [0,\infty]$.

Dokaz se oslanja na činjenicu iz teorije mjere koja govori da se svaka funkcija dvije varijable koja je σ-aditivna u svakoj varijabli posebno (eng. *bimeasure*), uz određene pretpostavke može prikazati kao mjera na produktnom prostoru, a nalazi se u [5]. Ako uzmemo da je $h \equiv 1$, $A \in S$ te $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, slijedi nam

$$\nu_A(B) = \nu(A \times B) = \int_{A\times B} \nu(ds, dx) = \int_A \left(\int_B \rho(s, dx) \right) m(ds) = \int_A \rho(s, B) m(ds). \tag{2.3}$$

Kako je za $A \in \mathcal{S}$

$$m(A) = |\beta(A)| + \gamma(A) + \int_A \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} \tau(y)^2 \nu(ds, dy),$$

iz $m(A) = 0$ slijedi $\beta(A) = 0$ i $\gamma(A) = 0$, tj. mjere β i γ su apsolutno neprekidne u odnosu na mjeru m. Prema tome, postoji izmjeriva funkcija b takva da je

$$\beta(A) = \int_A b(s) m(ds) \tag{2.4}$$

te izmjeriva funkcija σ^2 takva da je

$$\gamma(A) = \int_A \sigma^2(s) m(ds), \tag{2.5}$$

za svaki $A \in \mathcal{S}$.
Uvrštavanjem (2.3), (2.4) i (2.5) u jednadžbu (2.2) dobivamo

$$\phi_{\Lambda(A)}(\theta) = \exp\left\{ \int_A \left[i\theta b(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x) \right) \rho(s, dx) \right] m(ds) \right\} \tag{2.6}$$

Za ID slučajnu mjeru Λ na $(S, \mathcal{S})$ ćemo tada reći da ima

- *kontrolnu mjeru* m,
- *lokalne pomake* $(b(s),\ s \in S)$,
- *lokalne Gaussovske varijance* $(\sigma^2(s),\ s \in S)$ i
- *lokalne Lévjeve mjere* $(\rho(s, \cdot),\ s \in S)$.

Ponekad se koristi oznaka

$$K(\theta, s) = i\theta b(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x) \right) \rho(s, dx) \tag{2.7}$$

pa time (2.6) poprima kompaktniji oblik

$$\phi_{\Lambda(A)}(\theta) = \exp\left\{ \int_A K(\theta, s) m(ds) \right\}.$$

2.4 Primjeri

U ovom dijelu navest ćemo neke od najvažnijih primjera ID slučajnih mjera. Ove primjere ćemo koristiti i u nastavku kada budemo definirali integral u odnosu na slučajnu mjeru.

Primjer 2.4.1 (Lévyjev proces)**.** *Uzmimo slučajnu mjeru Λ takvu da je $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. Pretpostavimo da ona ima konstantne lokalne pomake $b(s) = b$, konstatne lokalne Gaussovske varijance $\sigma^2(s) = \sigma^2$ i konstantne lokalne Lévyjeve mjere $\rho(s, \cdot) = \rho(\cdot)$, za $s \in S$. Za takvu slučajnu mjeru kažemo da je* ***homogena****. Neka je kontrolna mjera Lebesgueova mjera λ. Definiramo proces $(X(t),\ t \geq 0)$ pomoću slučajne mjere Λ:*

$$X(t) = \Lambda\big((0, t]\big),\ \ t \geq 0.$$

Karakteristična funkcija od $X(t)$ je

$$\begin{aligned}\phi_{X(t)}(\theta) = \phi_{\Lambda\left((0,t]\right)}(\theta) &= \exp\left\{\int_{(0,t]}\left(i\theta b - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x)\right)\rho(dx)\right)\lambda(ds)\right\} \\ &= \exp\left\{i\theta t b - \frac{1}{2}t\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x)\right)(t\rho)(dx)\right\},\end{aligned}$$

tj. $X(t) \sim ID(tb, t\sigma^2, t\rho)$, za $t \geq 0$. Uočimo da je $X(1) \sim ID(b, \sigma^2, \rho)$. Pokažimo još da je ovako definiran proces Lévyjev proces. Za $t = 0$, karakteristična funkcija od $X(0)$ je konstanta pa je $X(0) = 0$ $g.s.$ Zbog svojstva σ-aditivnosti mjere Λ, za $s < t$ vrijedi

$$\begin{aligned}X(t) &= \Lambda\big((0, t]\big) = \Lambda\big((0, s] \cup (s, t]\big) = \Lambda\big((0, s]\big) + \Lambda\big((s, t]\big) \\ &= X(s) + \Lambda\big((s, t]\big)\ g.s.,\end{aligned}$$

odakle je

$$X(t) - X(s) = \Lambda\big((s, t]\big)\ g.s.,\ \ s < t.$$

Uz malu korekciju oznaka, lako se vidi da je $\Lambda\big((s, t]\big) \sim ID\big((t-s)b, (t-s)\sigma^2, (t-s)\rho\big)$ pa je

$$X(t) - X(s) \overset{d}{=} X(t - s),\ \ s < t,$$

Svojstvo nezavisnosti prirasta slijedi zbog nezavisne raspršenosti mjere Λ. Neprekidnost u vjerojatnosti je očita jer je

$$\lim_{s \to t} P\left(|X(t) - X(s)| > \varepsilon\right) = \lim_{s \to t} P\left(\left|\Lambda\big((s, t]\big)\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Napomena 2.4.1. *Svojstvo càdlàg trajektorija nismo posebno komentirali jer se pokazuje (primjerice [9]) da svaki proces koji zadovoljava svojstva $(i) - (iv)$ iz definicije 2.2.3 ima modifikaciju koja je Lévyjev proces.*

Napomena 2.4.2. *Lévyjev proces $(L(t), t \geq 0)$ može se proširiti na dvostrani Lévyjev proces na sljedeći način*

$$L(t) = \begin{cases} L_1(t), & t \geq 0, \\ -L_2(-t-), & t < 0. \end{cases}$$

Procesi $(L_1(t),\ t \geq 0)$ i $(L_2(t),\ t \geq 0)$ nezavisne su kopije Lévyjevog procesa $(L(t),\ t \geq 0)$ modificirane tako da imaju càdlàg trajektorije.

Primjer 2.4.2 (Gaussovska slučajna mjera). *Neka je $(S, \mathcal{S})$ izmjeriv prostor i neka su lokalne Lévyjeve mjere $\rho(s, \cdot) = 0$, za sve $s \in S$. Tada za slučajnu mjeru $\Lambda = (\Lambda(A),\ A \in \mathcal{S})$ kažemo da je Gaussovska. Karakteristična funkcija od $\Lambda(A)$ je*

$$\phi_{\Lambda(A)}(\theta) = \exp\left\{\int_A \left(i\theta b(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\theta^2\right) m(ds).\right\}$$

Ako, kao u prethodnom primjeru, uzmemo konstantne lokalne pomake i Gaussovske varijance te Lebesgueovu kontrolnu mjeru, dobili bismo $\Lambda(A) \sim ID(\lambda(A)b, \lambda(A)\sigma^2, 0)$. Ako je dodatno $\lambda(A) = 1$, onda je $\Lambda(A) \sim \mathcal{N}(b, \sigma^2)$.
*Za Gaussovsku slučajnu mjeru kažemo da je **centrirana** ako je $b(s) = 0$, za sve $s \in S$. U tom slučaju se kontrolna mjera m podudara s mjerom Gaussovske varijance γ.*

Primjer 2.4.3 (Poissonova slučajna mjera). *Poissonovu slučajnu mjeru određuju jedinični lokalni pomaci $b(s) = 1$, lokalne Gaussovske varijance $\sigma^2(s) = 0$ i lokalne Lévyjeve mjere $\rho(s, \cdot) = \delta_1(\cdot)$, za sve $s \in S$. Za $A \in \mathcal{S}$, karakteristična funkcija od $\Lambda(A)$ ima poznati oblik*

$$\begin{aligned}
\phi_{\Lambda(A)}(\theta) &= \exp\left\{\int_A \left(i\theta + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x)\right)\delta_1(dx)\right) m(ds)\right\} \\
&= \exp\left\{\int_A \left(i\theta + e^{i\theta} - 1 - i\theta\right) m(ds)\right\} \\
&= \exp\left\{m(A)\left(e^{i\theta} - 1\right)\right\},
\end{aligned}$$

*iz čega slijedi da je $\Lambda(A) \sim \mathcal{P}\big(m(A)\big)$. Kako je u ovom slučaju $m(A)$ očekivanje od $\Lambda(A)$, mjera m naziva se i **mjerom očekivanja**.*

Primjer 2.4.4 (Gama slučajna mjera). *Slučajna mjera Λ određena konstantnim lokalnim pomacima $b = \int_0^\infty \tau(x)x^{-1}e^{-x}$, lokalnom Gaussovskom varijancom $\sigma^2 = 0$, konstantnim lokalnim Lévyjevim mjerama $\rho(dx) = x^{-1}e^{-x}dx$ te kontrolnom mjerom m zove se Gama slučajna mjera. Pokazuje se da za $A \in \mathcal{S}$, $\Lambda(A)$ ima karakterističnu funkciju*

$$\begin{aligned}
\phi_{\Lambda(A)}(\theta) &= \exp\left\{\int_A \left(i\theta b + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x)\right) x^{-1}e^{-x}dx\right) m(ds)\right\} \\
&= \exp\left\{m(A)\left(-\frac{1}{2}\log(1+\theta^2) + i\arctan(\theta)\right)\right\}.
\end{aligned}$$

*Mjera m se u ovom slučaju još naziva i **mjerom oblika**.*

Svakako jedan od najvažnijih primjera je *simetrična α-stabilna* slučajna mjera. Da bismo do nje došli, najprije trebamo uvesti pojam stabilne distribucije.

Definicija 2.4.1. *Za slučajnu varijablu X kažemo da ima **stabilnu distribuciju** ako za svaki $n \geq 2$ postoje $C_n > 0$ i $D_n \in \mathbb{R}$ takvi da je*

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n,$$

gdje su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne kopije od X.

Pokazuje se da je nužno $C_n = n^{1/\alpha}$, za neki $\alpha \in (0,2]$ koji zovemo **indeks stabilnosti** slučajne varijable X [8]. Kraće kažemo da je X α-stabilna. Stabilnost se ekvivalentno može iskazati i preko karakteristične funkcije.

Definicija 2.4.2. *Za slučajnu varijablu X kažemo da ima stabilnu distribuciju ako postoje parametri $\alpha \in (0,2]$, $\sigma > 0$, $\beta \in [-1,1]$ i $\mu \in \mathbb{R}$ takvi da ϕ_X ima sljedeći oblik:*

$$\phi_X(\theta) = \begin{cases} \exp\left\{ -\sigma^\alpha |\theta|^\alpha \left(1 - i\beta (\operatorname{sign}\theta) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\theta\mu \right\}, & \alpha \neq 1, \\ \\ \exp\left\{ -\sigma |\theta| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\operatorname{sign}\theta) \log|\theta|\right) + i\theta\mu \right\}, & \alpha = 1, \end{cases} \tag{2.8}$$

gdje je

$$\operatorname{sign}\theta = \begin{cases} 1, & \theta > 0, \\ 0, & \theta = 0, \\ -1, & \theta < 0. \end{cases}$$

*Činjenicu da je X α-stabilna s parametrima σ, β i μ kraće označavamo s $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. Parametre σ, β i μ zovemo redom **parametar skaliranja**, **parametar asimetričnosti** i **parametar pomaka**.*

Radi jednostavnosti ćemo pretpostaviti da je $\mu = 0$. Uočimo da je za $\alpha = 2$, X normalno distribuirana s očekivanjem 0 i varijancom $2\sigma^2$. Za $\alpha < 2$, karakteristična funkcija od X može se zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \phi_X(\theta) = \exp\bigg\{ w_+ \int_0^\infty \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x)\right) x^{-(1+\alpha)} dx + \\ w_- \int_{-\infty}^0 \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x)\right) |x|^{-(1+\alpha)} dx \bigg\}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

gdje su $w_+, w_- \geq 0$.
Stabilnu slučajnu varijablu $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ zovemo **simetrična α-stabilna** i kraće pišemo $X \sim S\alpha S$. Njezina karakteristična funkcija ima dosta jednostavan oblik

$$\phi_X(\theta) = \exp\left\{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha\right\},$$

što ju čini praktičnom za primjene. Može se pokazati da je to ekvivalentno obliku (2.9) za $w_+ = w_-$.
Sada možemo navesti primjer $S\alpha S$ slučajne mjere.

Primjer 2.4.5. *Neka je $\alpha \in (0,2)$. Uzmimo da su lokalni pomaci $b(s)$ i lokalne Gaussovske varijance $\sigma^2(s)$ jednake 0, za sve $s \in S$. Neka su lokalne Lévyjeve mjere definirane s*

$$\rho(s, dx) = \rho(dx) = \left(w_+ x^{-(1+\alpha)} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) + w_- |x|^{-(1+\alpha)} \mathbf{1}_{(-\infty,0)}\right) dx,$$

*gdje su $w_+, w_- \geq 0$. Za ID slučajnu mjeru $\Lambda = (\Lambda(A),\ A \in \mathcal{S})$ s navedenim lokalnim karakteristikama i kontrolnom mjerom m kažemo da je **α-stabilna**. Pretpostavit ćemo da je*

$w = w_+ = w_-$, što znači da je slučajna mjera Λ simetrična α-stabilna. Za $A \in \mathcal{S}$ karakteristična funkcija od $\Lambda(A)$ je

$$\begin{aligned}
\phi_{\Lambda(A)}(\theta) &= \exp\left\{\int_A \left(\int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x)\right)\rho(dx)\right) m(ds)\right\} \\
&= \exp\left\{\int_A \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x)\right)|x|^{-(1+\alpha)}dx\right) wm(ds)\right\} \\
&= \exp\left\{\int_A \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x)\right)\underbrace{\alpha C_\alpha |x|^{-(1+\alpha)}dx}_{\tilde{\rho}(dx)}\right)\underbrace{\frac{w}{\alpha C_\alpha} m(ds)}_{\tilde{m}(ds)}\right\} \\
&= \exp\left\{-\tilde{m}(A)|\theta|^\alpha\right\},
\end{aligned}$$

gdje je

$$C_\alpha = \begin{cases} \left(\Gamma(1-\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{-1}, & \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Mjera $\tilde{m}$ zove se ***modificirana kontrolna mjera****. Uočimo da $\tilde{m}(A)$ određuje parametar skaliranja $S\alpha S$ slučajne varijable $\Lambda(A)$. Detaljniji izvod karakteristične funkcije od $\Lambda(A)$ može se pronaći u [8]. Označimo s $L_0(\Omega)$ prostor svih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sljedeća definicija α-stabilne slučajne mjere daje bolji uvid u njezina distribucijska svojstva.*

Definicija 2.4.3. *Nezavisno raspršena σ-aditivna funkcija $\Lambda : \mathcal{S} \to L_0(\Omega)$ takva da je, za svaki $A \in \mathcal{S}$*

$$\Lambda(A) \sim S_\alpha\left((\tilde{m}(A))^{1/\alpha}, \frac{\int_A \beta(s)\tilde{m}(ds)}{\tilde{m}(A)}, 0\right)$$

zove se α-stabilna slučajna mjera na $(S, \mathcal{S})$ s kontrolnom mjerom $\tilde{m}$ i intenzitetom asimetričnosti β. Ako je $\beta = 0$, za Λ kažemo da je simetrična α-stabilna slučajna mjera na $(S, \mathcal{S})$.

3 Integral u odnosu na slučajnu mjeru

Prethodno definirane ID slučajne mjere nisu toliko važne same po sebi, ali integriranjem odgovarajućih funkcija u odnosu na takvu mjeru mogu se dobiti razni primjeri ID slučajnih procesa. Konkretnije, ID proces $(X(t),\ t \in T)$ možemo zapisati u obliku

$$X(t) = \int_S f(t,s)\Lambda(ds),$$

gdje je $(f(t,\cdot),\ t \in T)$ familija determinističkih izmjerivih funkcija i Λ ID slučajna mjera. Kao i u prethodnom dijelu, $(S, \mathcal{S})$ je izmjeriv prostor i $\Lambda = (\Lambda(A),\ A \in \mathcal{S})$ beskonačno djeljiva slučajna mjera na njemu s kontrolnom mjerom m, lokalnim pomacima $(b(s),\ s \in S)$, lokalnim Gaussovskim varijancama $(\sigma^2(s),\ s \in S)$ i lokalnim Lévyjevim mjerama $(\rho(s,\cdot),\ s \in S)$. Integral ćemo najprije definirati za jednostavne, a potom za općenite izmjerive funkcije. Izvest ćemo uvjete za funkciju f koji osiguravaju njezinu integrabilnost te ćemo pokazati da je integral funkcije po ID slučajnoj mjeri ID slučajna varijabla.

3.1 Definicija i egzistencija

Definicija 3.1.1. *Neka je $\Lambda = (\Lambda(A),\ A \in \mathcal{S})$ ID slučajna mjera i $f : S \to \mathbb{R}$ jednostavna funkcija oblika*

$$f(s) = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathbf{1}_{A_j}(s),\ \ s \in S,$$

gdje su $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ i $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{S}$ disjunktni skupovi. Za svaki $A \in \mathcal{S}$, definiramo integral funkcije f u odnosu na slučajnu mjeru Λ s

$$\int_A f(s)\Lambda(ds) = \sum_{j=1}^{k} a_j \Lambda(A \cap A_j).$$

Da bismo definiciju integrala mogli proširiti na općenite izmjerive funkcije, trebat ćemo uvesti nekoliko oznaka. Za slučajnu varijablu X na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definiramo normu na način

$$||X||_0 = E\big(\min\{1, |X|\}\big).$$

Pomoću te norme, za slučajne varijable X i Y definiramo metriku

$$d_0(X,Y) = ||X - Y||_0 = E\big(\min\{1, |X - Y|\}\big).$$

S $L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ označavat ćemo potpun metrički prostor svih slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ opskrbljen metrikom d_0. Konvergencija u tom prostoru ekvivalentna je konvergenciji po vjerojatnosti [5] .Za jednostavnu funkciju $f : S \to \mathbb{R}$ definiramo normu

$$||f||_\Lambda = \sup\left\{ \left\| \int_A g(s)\Lambda(ds) \right\|_0 :\ g \text{ jednostavna },\ |g(s)| \leq |f(s)|,\ \forall s \in S \right\}.$$

Definicija 3.1.2. *Za funkciju $f : S \to \mathbb{R}$ kažemo da je Λ-integrabilna ako postoji niz jednostavnih funkcija $\{f_n\}$ takav da*

(i) $f_n \to f$, *m-skoro svuda, za* $n \to \infty$,

(ii) $\lim_{k,n\to\infty} ||f_k - f_n||_\Lambda = 0$.

Ako su ti uvjeti zadovoljeni, za $A \in \mathcal{S}$ definiramo

$$\int_A f(s)\Lambda(ds) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(s)\Lambda(ds),$$

u smislu konvergencije po vjerojatnosti.

Uvjet (ii) osigurava da niz $\left\{\int_A f_n(s)\Lambda(ds)\right\}$ konvergira (po vjerojatnosti) u $L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$, što je potpun prostor, pa je i limes u njemu. U nastavku ćemo izvesti izraz za karakterističnu funkciju slučajne varijable $\int_S f(s)\Lambda(ds)$. Radi preglednosti, indeks karakteristične funkcije ćemo pisati kao argument: $\phi\left(\int_S f(s)\Lambda(ds)\right)(\theta)$.

Propozicija 3.1.1 (vidjeti [6], Proposition 2.6.). *Ako je f Λ-integrabilna funkcija, tada je $\int_S |K(\theta f(s), s)| m(ds) < \infty$ i vrijedi*

$$\phi\left(\int_S f(s)\Lambda(ds)\right)(\theta) = \exp\left\{\int_S K(\theta f(s), s) m(ds)\right\}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

gdje je $K(\theta, s)$ definiran s (2.7).

Dokaz. Tvrdnju najprije pokazujemo za jednostavnu funkciju $f(s) = \sum_{j=1}^k a_j \mathbf{1}_{A_j}(s)$, gdje su $A_j \in \mathcal{S}$ disjunktni i $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k$. Njezin integral je

$$\int_S f(s)\Lambda(ds) = \sum_{j=1}^k a_j \Lambda(A_j),$$

što je, zbog nezavisne raspršenosti mjere Λ, suma nezavisnih slučajnih varijabli. Iz svojstava karakteristične funkcije tada slijedi

$$\begin{aligned}
\phi\left(\int_S f(s)\Lambda(ds)\right)(\theta) &= \phi\left(\sum_{j=1}^k a_j \Lambda(A_j)\right)(\theta) = \prod_{j=1}^k \phi(\Lambda(A_j)(a_j\theta) \\
&= \prod_{j=1}^k \exp\left\{\int_{A_j} K(a_j\theta, s) m(ds)\right\} = \exp\left\{\sum_{j=1}^k \int_{A_j} K(a_j\theta, s) m(ds)\right\} \\
&= \exp\left\{\int_S K\left(\theta \sum_{j=1}^k a_j \mathbf{1}_{A_j}(s), s\right) m(ds)\right\} = \exp\left\{\int_S K(\theta f(s), s) m(ds)\right\}.
\end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da je $\{f_n\}$ niz jednostavnih funkcija kao u definiciji Λ-integrabilne funkcije. Za $n \geq 1$ i $\theta \in \mathbb{R}$ definiramo niz mjera $\{\mu_{\theta,n}\}$ s

$$\mu_{\theta,n}(A) = \log \phi \left(\int_A f_n(s)\Lambda(ds) \right)(\theta) = \int_A K(\theta f_n(s), s)m(ds), \quad A \in \mathcal{S}.$$

Uočimo da je

$$\mu_\theta(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_{\theta,n}(A) = \lim_{n\to\infty} \log \phi \left(\int_A f_n(s)\Lambda(ds) \right)(\theta) = \log \phi \left(\int_A f(s)\Lambda(ds) \right)(\theta)$$

jer $f_n \to f$ m-skoro svuda, za $n \to \infty$. Činjenica $m(A) = 0$ povlači da je $\mu_{\theta,n}(A) = 0$, za svaki $n \geq 1$ pa prelaskom na limes slijedi da je mjera μ_θ apsolutno neprekidna u odnosu na mjeru m. To znači da za svaki $\theta \in \mathbb{R}$ postoji izmjeriva funkcija h_θ takva da je

$$\mu_\theta(A) = \int_A h_\theta(s)m(ds), \quad A \in \mathcal{S}.$$

Preostalo je pokazati da je $h_\theta(s) = K(\theta f(s), s)$ m-s.s. za svaki $\theta \in \mathbb{R}$. Kako je funkcija K neprekidna u prvoj varijabli, slijedi

$$\lim_{n\to\infty} K(\theta f_n(s), s) = K(\theta f(s), s) \;\; m\text{-s.s.}$$

Može se pokazati da je $S = \cup_{j=0}^{\infty} A_j$, gdje je $m(A_0) = 0$ i $m(A_j) < \infty$, za $j \geq 1$ te da prethodna jednakost vrijedi uniformno za $s \in A_j$, $j \geq 1$. Prema tome, za $A \in \mathcal{S}$ i $j \geq 1$ je

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap A_j} h_\theta(s)m(ds) &= \mu_\theta(A \cap A_j) = \lim_{n\to\infty} \mu_{\theta,n}(A \cap A_j) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{A\cap A_j} K(\theta f_n(s), s)m(ds) \\
&= \int_{A\cap A_j} K(\theta f(s), s)m(ds),
\end{aligned}$$

što znači da je $h_\theta(s) = K(\theta f(s), s)$ m-s.s. na A_j, za svaki $j \geq 1$. Kako je A_0 skup mjere 0 u odnosu na mjeru m, slijedi da je $h_\theta(s) = K(\theta f(s), s)$ m-s.s. na cijelom S. □

Time smo pokazali da karakteristična funkcija od $\int_S f(s)\Lambda(ds)$ ima oblik

$$\exp\left\{ \int_S \left(i\theta f(s)b(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\theta^2 f(s)^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta f(s)x} - 1 - i\theta f(s)\tau(x) \right) \rho(s, dx) \right) m(ds) \right\} \tag{3.1}$$

iz čega ne vidimo da se radi o ID slučajnoj varijabli. Međutim, jednostavnom transformacijom ovog izraza, doći ćemo do oblika iz kojega će se jasno moći iščitati karakteristična trojka. To ćemo pokazati u sljedećoj tvrdnji koja daje eksplicitne izraze za karakterističnu trojku te nužne i dovoljne uvjete za postojanje integrala. Prije iskaza, uvodimo sljedeće oznake:

- $U(u,s) = ub(s) + \int_{\mathbb{R}} (\tau(xu) - u\tau(x))\, \rho(s, dx)$,
- $V(u,s) = \int_{\mathbb{R}} \min\{1, (xu)^2\} \rho(s, dx)$.

Teorem 3.1.1. *Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija i Λ ID slučajna mjera. Tada je funkcija f Λ-integrabilna ako i samo ako vrijedi*

(i) $\int_S |U(f(s), s)| m(ds) < \infty$,

(ii) $\int_S f(s)^2 \sigma^2(s) m(ds) < \infty$,

(iii) $\int_S V(f(s), s) m(ds) < \infty$.

Nadalje, ako je f Λ-integrabilna, karakteristična funkcija od $\int_S f(s)\Lambda(ds)$ može se zapisati u obliku

$$\phi\left(\int_S f(s)\Lambda(ds)\right)(\theta) = \exp\left\{i\theta b_f - \frac{1}{2}\sigma_f^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x)\right) \nu_f(dx)\right\}, \tag{3.2}$$

gdje karakterističnu trojku čine

$$\begin{aligned} b_f &= \int_S U(f(s), s) m(ds), \\ \sigma_f^2 &= \int_S f(s)^2 \sigma^2(s) m(ds), \\ \nu_f(B) &= \nu\left(\{(s,x) \in S \times \mathbb{R} :\ f(s)x \in B \backslash \{0\}\}\right), \ \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Dokaz. Dokazat ćemo tvrdnju u slučaju kada je f Λ-integrabilna funkcija. Kompletan dokaz može se pronaći u [5].
Prema prethodnoj propoziciji vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} &\left|\phi\left(\int_S f(s)\Lambda(ds)\right)(\theta)\right|^2 = \left|\exp\left\{\int_S K(\theta f(s), s) m(ds)\right\}\right|^2 = \exp\left\{2\int_S \operatorname{Re} K(\theta f(s), s) m(ds)\right\} \\ &= \exp\left\{2\int_S \left(-\frac{1}{2}\sigma^2(s) f(s)^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (\cos(\theta f(s)x) - 1)\, \rho(s, dx)\right) m(ds)\right\} \\ &= \exp\left\{-\sigma_f^2\theta^2 + 2\int_S \int_{\mathbb{R}} (\cos(\theta f(s)x) - 1)\, \rho(s, dx) m(ds)\right\} \\ &= \exp\left\{-\sigma_f^2\theta^2 + 2\int_{S\times\mathbb{R}} (\cos(\theta f(s)x) - 1)\, \nu(ds, dx)\right\} \end{aligned}$$

Podintegralna funkcija iščezava za parove (s, x) za koje je $f(s)x = 0$, što znači da je dovoljno integrirati po restrikciji Lévyjeve mjere ν

$$\nu_f(B) = \nu\left(\{(s,x) \in S \times \mathbb{R} :\ f(s)x \in B \backslash \{0\}\}\right), \ \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Zbog toga je u konačnici

$$\left|\phi\left(\int_S f(s)\Lambda(ds)\right)(\theta)\right|^2 = \exp\left\{-\sigma_f^2\theta^2 + 2\int_{\mathbb{R}} (cos(\theta x) - 1)\, \nu_f(dx)\right\} < \infty.$$

Kako je nužno $\sigma_f^2 < \infty$, automatski slijedi uvjet (ii). Uvjet (iii) je također zadovoljen jer je restrikcija Lévjeve mjere također Lévyjeva mjera:

$$\begin{aligned}
\int_S V(f(s), s)m(ds) &= \int_S \int_{\mathbb{R}} \min\{1, (xf(s))^2\}\rho(s, dx)m(ds) \\
&= \int_{S\times\mathbb{R}} \min\{1, (xf(s))^2\}\nu(ds, dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \min\{1, x^2\}\nu_f(dx) < \infty.
\end{aligned}$$

Za uvjet (i) koristimo činjenicu da je $|\tau(x) - \sin x| \leq 2\min\{1, x^2\}$ te imamo

$$\begin{aligned}
|U(u, s)| &= \left| ub(s) + \int_{\mathbb{R}} (\tau(xu) - u\tau(x) \pm \sin(xu))\, \rho(s, dx) \right| \\
&= \left| ub(s) + \int_{\mathbb{R}} (\sin(xu) - u\tau(x))\rho(s, dx) + \int_{\mathbb{R}} (\tau(xu) - \sin(xu))\rho(s, dx) \right| \\
&\leq \left| ub(s) + \int_{\mathbb{R}} (\sin(xu) - u\tau(x))\rho(s, dx) \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} (\tau(xu) - \sin(xu))\rho(s, dx) \right| \\
&\leq \operatorname{Im} K(u, s) + 2\left| \int_{\mathbb{R}} \min\{1, (xu)^2\}\rho(s, dx) \right| \\
&= \operatorname{Im} K(u, s) + 2|V(u, s)| < \infty
\end{aligned}$$

pa je prema tome i $\int_S |U(u, s)|m(ds) < \infty$.
Preostalo je još pokazati da vrijedi izraz (3.2). Iz (3.1) očito slijedi

$$\begin{aligned}
\log\left(\phi\left(\int_S f(s)\Lambda(ds)\right)\right)(\theta) = i\theta \int_S f(s)b(s)m(ds) - \frac{1}{2}\theta^2 \int_S f(s)^2\sigma^2(s)m(ds) + \\
\int_S \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta f(s)x} - 1 - i\theta f(s)\tau(x)\right) \rho(s, dx)m(ds)
\end{aligned}$$

Posljednji integral možemo zapisati na način

$$\begin{aligned}
&\int_{S\times\mathbb{R}} \left(e^{i\theta f(s)x} - 1 - i\theta\tau(f(s)x) + i\theta\tau(f(s)x) - i\theta f(s)\tau(x)\right) \nu(ds, dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x)\right) \nu_f(dx) + i\theta \int_S \int_{\mathbb{R}} (\tau(f(s)x) - f(s)\tau(x))\, \rho(s, dx)m(ds)
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem nazad dobivamo da je logaritam karakteristične funkcije jednak

$$\begin{aligned}
&i\theta \int_S \left(f(s)b(s) + \int_{\mathbb{R}} (\tau(f(s)x) - f(s)\tau(x))\, \rho(s, dx)\right) m(ds) \\
&- \frac{1}{2}\theta^2 \int_S f(s)^2\sigma^2(s)m(ds) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x)\right) \nu_f(dx),
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

□

Uočimo da se uvjeti za Λ-integrabilnost funkcije f zapravo svode na uvjete za integrabilnost u odnosu na kontrolnu mjeru m. Uvjet (ii) za Λ-integrabilnost funkcije f osigurava da je funkcija integrabilna u odnosu na Gaussovski dio slučajne mjere Λ, dok uvjet (iii) osigurava integrabilnost u odnosu na poissonovski dio. Prostor svih Λ-integrabilnih funkcija označavat ćemo s $L_0(\Lambda)$.

Napomena 3.1.1. *Logaritam karakteristične funkcije ID slučajne varijable X još se naziva i* ***funkcija kumulanata*** *i označava se s*

$$C\left\{\theta \ddagger X\right\} = \log\left(Ee^{i\theta X}\right).$$

3.2 Primjeri integrabilnosti

U konkretnim slučajevima, dosad apstraktni prostor $L_0(\Lambda)$ svodi se na neki oblik prostora funkcija integrabilnih u odnosu na kontrolnu mjeru m. Za funkciju $f \in L_0(\Lambda)$, njezin integral po mjeri Λ označavat ćemo s $I(f)$.

Primjer 3.2.1 (Integral u odnosu na Gaussovsku slučajnu mjeru)**.** *Neka je Λ centrirana Gaussovska slučajna mjera na $(S, \mathcal{S})$ s kontrolnom mjerom m i $f \in L_0(\Lambda)$. Prema propoziciji 3.1.1, funkcija kumulanata od $I(f)$ ima oblik*

$$C\{\theta \ddagger I(f)\} = \int_S \left(-\frac{1}{2} f(s)^2 \sigma(s)^2 \theta^2\right) m(ds) = -\frac{1}{2}\theta^2 \int_S f(s)^2 \sigma^2(s) m(ds),$$

što je konačno ako je f^2 integrabilna u odnosu na mjeru m, tj. $f \in L^2(m)$. U tom slučaju je $I(f)$ normalno distribuirana slučajna varijabla s očekivanjem 0 i varijancom $\int_S f(s)^2\sigma^2(s)m(ds)$.

Primjer 3.2.2 (Integral u odnosu na Posissonovu slučajnu mjeru)**.** *Neka je Λ Poissonova slučajna mjera na $(S, \mathcal{S})$ s kontrolnom mjerom m. Sjetimo se da je u tom slučaju $b(s) = 1$, $\sigma^2(s) = 0$ i $\rho(s, \cdot) = \delta_1(\cdot)$, za sve $s \in S$. Za funkciju $f \in L_0(\Lambda)$, funkcija kumulanata slučajne varijable $I(f)$ dana je s*

$$\begin{aligned} C\{\theta \ddagger I(f)\} &= \int_S \left(i\theta f(s) + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta f(s)x} - 1 - i\theta f(s)\tau(x)\right) \delta_1(dx)\right) m(ds) \\ &= \int_S \left(i\theta f(s) + e^{i\theta f(s)} - 1 - i\theta f(s)\right) m(ds) \\ &= \int_S \left(e^{i\theta f(s)} - 1\right) m(ds). \end{aligned}$$

Uvjet (ii) iz teorema 3.1.1 trivijalno je zadovoljen, a uvjet (iii) svodi se na

$$\begin{aligned} \int_S V(f(s), s) m(ds) &= \int_S \int_{\mathbb{R}} \min\{1, (xf(s))^2\} \delta_1(dx) m(ds) \\ &= \int_S \min\{1, f(s)^2\} m(ds) \end{aligned}$$

pa zaključujemo da je $f \in L_0(\Lambda)$ ako i samo ako je posljednji integral konačan. Međutim, uvjet (i) daje nam jači zahtjev od toga:

$$\begin{aligned}\int_S |U(f(s),s)|m(ds) &= \int_S \left| f(s) + \int_{\mathbb{R}} (\tau(xf(s)) - f(s)\tau(x))\, \delta_1(dx) \right| m(ds)\\ &= \int_S |f(s) + \tau(f(s)) - f(s)|\, m(ds)\\ &= \int_S \min\{1, |f(s)|\} m(ds).\end{aligned}$$

Prema tome, da bi funkcija f bila integrabilna u odnosu na Poissonovu slučajnu mjeru Λ, dovoljno je da vrijedi $\int_S \min\{1, |f(s)|\} m(ds) < \infty$.

Primjer 3.2.3 (Integral u odnosu na $S\alpha S$ slučajnu mjeru)**.** *Neka je $\alpha \in (0,2)$ i Λ simetrična α-stabilna slučajna mjera na $(S, \mathcal{S})$ s kontrolnom mjerom m kao u primjeru 2.4.5. Za funkciju $f \in L_0(\Lambda)$, uvjet (iii) teorema 3.1.1 daje*

$$\begin{aligned}\int_S V(f(s),s)m(ds) &= \int_S \int_{\mathbb{R}} \min\{1, (xf(s))^2\} \rho(dx) m(ds)\\ &= \int_S \left(\int_{-\infty}^{\infty} \min\{1, (xf(s))^2\} |x|^{-(1+\alpha)} dx \right) w m(ds)\end{aligned}$$

Unutarnji integral potrebno je detaljnije raspisati. Najprije uočimo da je

$$\min\{1, (xf(s))^2\} = \begin{cases} x^2 f(s)^2, & |xf(s)| \le 1,\\ 1, & |xf(s)| > 1\end{cases} = \begin{cases} x^2 f(s)^2, & |x| \le \frac{1}{|f(s)|},\\ 1, & |x| > \frac{1}{|f(s)|}.\end{cases}$$

U prvom slučaju je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \min\{1, (xf(s))^2\} |x|^{-(1+\alpha)} dx = \int_{-1/|f(s)|}^{1/|f(s)|} x^2 f(s)^2 |x|^{-(1+\alpha)} dx$$
$$= 2f(s)^2 \int_0^{1/|f(s)|} x^{1-\alpha} dx = \frac{2}{2-\alpha} |f(s)|^{\alpha},$$

dok je u drugom slučaju

$$\int_{-\infty}^{\infty} \min\{1, (xf(s))^2\} |x|^{-(1+\alpha)} dx = 2 \int_{1/|f(s)|}^{\infty} |x|^{-(1+\alpha)} dx$$
$$= 2 \int_{1/|f(s)|}^{\infty} x^{-(1+\alpha)} dx = \frac{2}{\alpha} |f(s)|^{\alpha}.$$

Zbrajanjem slijedi da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \min\{1, (xf(s))^2\} |x|^{-(1+\alpha)} dx = \frac{4}{\alpha(2-\alpha)} |f(s)|^{\alpha}$$

pa uvrštavanjem u polaznu jednakost imamo

$$\int_S V(f(s),s)m(ds) = \frac{4}{\alpha(2-\alpha)} \int_S |f(s)|^{\alpha} w m(ds).$$

Dakle, f je Λ-integrabilna ako i samo ako je $|f(s)|^\alpha$ integrabilna u odnosu na mjeru $\tilde{m}$, tj. $f \in L^\alpha(\tilde{m})$.
Funkcija kumulanata od $I(f)$, za $f \in L^\alpha(\tilde{m})$, ima oblik

$$\begin{aligned}
C\{\theta \ddagger I(f)\} &= \int_S \left(\int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta f(s)x} - 1 - i\theta f(s)\tau(x) \right) \rho(s, dx) \right) m(ds) \\
&= \int_S \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\theta f(s)x} - 1 - i\theta f(s)\tau(x) \right) |x|^{-(1+\alpha)} dx \right) wm(ds) \\
&= -2 \int_S \int_0^{\infty} \left(1 - \cos(\theta f(s)x) x^{-(1+\alpha)} dx \right) wm(ds),
\end{aligned}$$

gdje posljednja jednakost slijedi zbog simetričnosti mjere ρ. Uvođenjem supstitucije $y = |\theta f(s)|x$, slijedi da je

$$x^{-(1+\alpha)} = y^{-(1+\alpha)} |\theta|^\alpha |f(s)|^\alpha |\theta f(s)|$$

pa dalje imamo

$$\begin{aligned}
C\{\theta \ddagger I(f)\} &= -2 \int_S \int_0^{\infty} \left(1 - \cos y) y^{-(1+\alpha)} |\theta|^\alpha |f(s)|^\alpha dy \right) wm(ds) \\
&= -2 \int_0^{\infty} \left(1 - \cos y) y^{-(1+\alpha)} dy \right) \cdot |\theta|^\alpha \int_S |f(s)|^\alpha wm(ds) \\
&= -|\theta|^\alpha \int_S |f(s)|^\alpha \tilde{m}(ds),
\end{aligned}$$

što znači da je $I(f)$ $S\alpha S$ slučajna varijabla.

3.3 Beskonačno djeljivi slučajni procesi i integral

Dosad smo integriranjem odgovarajućih funkcija u odnosu na ID slučajnu mjeru dobivali ID slučajne varijable. Ta ideja se može generalizirati i na ID slučajne procese. Naime, pokazuje se da je familija integrala $\left(\int_S f(t, s)\Lambda(ds),\ t \in T \right)$ ponovo ID slučajni proces s karakterističnom trojkom danom u sljedećem teoremu:

Teorem 3.3.1 (vidjeti [7], Theorem 3.3.10.)**.** *Neka je Λ ID slučajna mjera na $(S, \mathcal{S})$ i $(f(t, \cdot),\ t \in T)$ familija Λ-integrabilnih determinističkih funkcija na S. Tada je slučajni proces*

$$X(t) = \int_S f(t, s)\Lambda(ds),\ \ t \in T,$$

beskonačno djeljiv sa slabom karakterističnom trojkom $(\mathbf{b_X}, \Sigma_\mathbf{X}, \mu_\mathbf{X})$ danom s

$$\begin{aligned}
b_\mathbf{X}(t) &= \int_S \left(f(t, s)b(s) + \int_{\mathbb{R}} \left(\tau(f(t, s)x) - f(t, s)\tau(x) \right) \rho(s, dx) \right) m(ds),\ \ t \in T, \\
\Sigma_\mathbf{X}(t_1, t_2) &= \int_S f(t_1, s) f(t_2, s) \sigma^2(s) m(ds),\ \ t_1, t_2 \in T, \\
\mu_\mathbf{X} &= \nu \circ H^{-1},
\end{aligned}$$

gdje je ν Lévyjeva mjera od Λ i $H : S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^T$ definirana s $H(s, y) = (yf(t, s),\ t \in T)$, $s \in S$, $y \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Kako je po pretpostavci $f(t,\cdot) \in L_0(\Lambda)$, za svaki $t \in T$, funkcije $\mathbf{b}_\mathbf{X}$ i $\Sigma_\mathbf{X}$ su dobro definirane. U dokazu ćemo koristiti teorem 2.2.1. Neka su $t_1, \ldots, t_d \in T$ i $\theta_1, \ldots, \theta_d \in \mathbb{R}$. Zbog linearnosti integrala imamo

$$\sum_{j=1}^{d} \theta_j X(t_j) = \sum_{j=1}^{d} \theta_j \int_S f(t_j, s)\Lambda(ds) = \int_S \left(\sum_{j=1}^{d} \theta_j f(t_j, s) \right) \Lambda(ds).$$

Zatim, primjenjujemo izraz 3.1 na funkciju $f(s) = \sum_{j=1}^{d} \theta_j f(t_j, s)$ te teorem 3.1.1 da bismo došli do funkcije kumulanata od $\mathbf{X} = (X(t_1), \ldots, X(t_d))$:

$$\begin{aligned} C\{\boldsymbol{\theta} \ddagger \mathbf{X}\} &= i \int_S \sum_{j=1}^{d} \theta_j f(t_j, s) b(s) m(ds) - \frac{1}{2} \int_S \left(\sum_{j=1}^{d} \theta_j f(t_j, s) \right)^2 \sigma^2(s) m(ds) \\ &+ \int_S \int_\mathbb{R} \left(e^{i \sum_{j=1}^{d} \theta_j x f(t_j, s)} - 1 - i \sum_{j=1}^{d} \theta_j f(t_j, s) \tau(x) \right) \rho(s, dx) m(ds) \\ &= i \sum_{j=1}^{d} \theta_j b_\mathbf{X}(t_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \theta_j \theta_k \Sigma_\mathbf{X}(t_j, t_k) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^T} \left(e^{i \sum_{j=1}^{d} \theta_j x f(t_j, s)} - 1 - i \sum_{j=1}^{d} \theta_j f(t_j, s) \tau(x) \right) \mu_\mathbf{X}(d\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Još je preostalo pokazati da je $(\mathbf{b}_\mathbf{X}, \Sigma_\mathbf{X}, \mu_\mathbf{X})$ slaba Lévyjeva trojka, odnosno da je $\mu_\mathbf{X}$ slaba Lévyjeva mjera. Za svaki $t \in T$, imamo

$$\int_{\mathbb{R}^T} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})(t)^2 \mu_\mathbf{X}(d\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^T} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})(t)^2 \nu(H^{-1}(d\mathbf{x})).$$

Formalnim uvođenjem supstitucije $\mathbf{x} = H(s, y)$ slijedi $d\mathbf{x} = H(ds, dy)$ pa je $H^{-1}(d\mathbf{x}) = (ds, dy)$. Podintegralna funkcija sada postaje

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})(t)^2 = \tau(x(t))^2 = \tau(y f(t, s))^2,$$

a područje integracije je $S \times \mathbb{R}$. Prethodni integral se svodi na

$$\int_{S \times \mathbb{R}} \tau(y f(t, s))^2 \nu(ds, dy) = \int_\mathbb{R} \tau(y)^2 \nu_f(dy),$$

što je konačno. $\square$

Ponekad je prikladnije proučavati svojstva ID procesa koristeći integralnu reprezentaciju, nego karakterističnu funkciju opisanom Lévy-Khintchineovom formulom. Ispostavlja se da vrijedi i svojevrstan obrat prethodnog teorema, tj. da se svaki ID proces može zapisati kao integral u odnosu na ID slučajnu mjeru. Tu činjenicu smo naveli na početku ovog poglavlja, a sada ju iskazujemo nešto preciznije:

Teorem 3.3.2. *Neka je $(X(t),\ t \in T)$ beskonačno djeljiv slučajni proces sa σ-konačnom Lévyjevom mjerom. Tada postoje izmjeriv prostor $(S, \mathcal{S})$, beskonačno djeljiva slučajna mjera Λ na njemu s kontrolnom mjerom m te lokalnim karakteristikama $(b(s), \sigma^2(s), \rho(s, \cdot))$ i familija Λ-izmjerivih funkcija $(f(t, \cdot),\ t \in T)$ na S takvi da je*

$$(X(t),\ t \in T) \stackrel{d}{=} \left(\int_S f(t,s)\Lambda(ds) \right).$$

Dokaz se može pronaći u [7].

4 Primjeri procesa definiranih kao stohastički integral

Ovdje ćemo navesti najvažnije primjere slučajnih procesa definiranih kao integral u odnosu na ID slučajnu mjeru. Kao što smo vidjeli, takvih procesa ima mnogo jer praktički svaki ID proces ima takvu reprezentaciju. Najjednostavniji primjer je Lévyjev proces $(L(t),\ t \geq 0)$ za kojega smo pokazali da se može definirati kao homogena ID slučajna mjera Λ na $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ s kontrolnom Lebesgueovom mjerom λ na način

$$L(t) = \Lambda\left((0, t]\right),\ \ t \geq 0.$$

Taj proces očito ima integralnu reprezentaciju jer je prethodni zapis ekvivalentan s

$$L(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{(0,t]}(s)\Lambda(ds).$$

Dakle, Lévyjev proces možemo dobiti integriranjem familije funkcija $\left(\mathbf{1}_{(0,t]}(\cdot),\ \ t \geq 0\right)$ u odnosu na homogenu ID slučajnu mjeru.

4.1 $S\alpha S$ Lévyjevo gibanje

Iako nije previše informativna, ovaj dio ne bi imalo smisla započeti bez definicije stabilnog slučajnog procesa.

Definicija 4.1.1. *Za slučajni proces $(X(t),\ t \in T)$ kažemo da je* ***stabilan*** *ako su mu sve konačnodimenzionalne distribucije stabilne. Kažemo da je* ***simetričan stabilan*** *ako su mu sve konačnodimenzionalne distribucije simetrične stabilne.*

Ako su sve konačnodimenzionalne distribucije procesa stabilne, onda one moraju imati isti indeks stabilnosti $\alpha \in (0, 2]$. Reći ćemo da je proces (simetričan) α-stabilan kada želimo naglasiti o kojem indeksu stabilnosti se radi. Kao specijalan oblik, definiramo α-stabilno Lévyjevo gibanje. Taj proces ima sličnu ulogu među α-stabilnim procesima kakvu ima i Brownovo gibanje među Gaussovskim procesima. Štoviše, α-stabilno Lévyjevo gibanje možemo shvatiti kao generalizaciju Brownovog gibanja jer se za $\alpha = 2$ ti procesi podudaraju.

Definicija 4.1.2. *Slučajni proces $\mathbf{X} = (X(t),\ t \geq 0)$ zovemo (standardno) α-stabilno Lévyjevo gibanje ako*

(i) $X(0) = 0$ *g.s.,*

(ii) $\mathbf{X}$ *ima nezavisne priraste,*

(iii) $X(t) - X(s) \sim S_\alpha\left((t-s)^{1/\alpha}, \beta, 0\right)$, *za* $0 \leq s < t,\ \alpha \in (0, 2]$ *i* $\beta \in [-1, 1]$.

Ako je $\beta = 0$, $\mathbf{X}$ zovemo $S\alpha S$ ***Lévyjevo gibanje****.*

Uočimo da se radi o procesu sa stacionarnim prirastima jer distribucija prirasta $X(t) - X(s)$ ovisi samo o razlici $t - s$, za $s < t$. Također, $S\alpha S$ Lévyjevo gibanje je $1/\alpha$-sebi sličan proces, tj. za svaki $c > 0$

$$(X(ct),\ t \geq 0) = \left(c^{1/\alpha} X(t),\ t \geq 0\right),$$

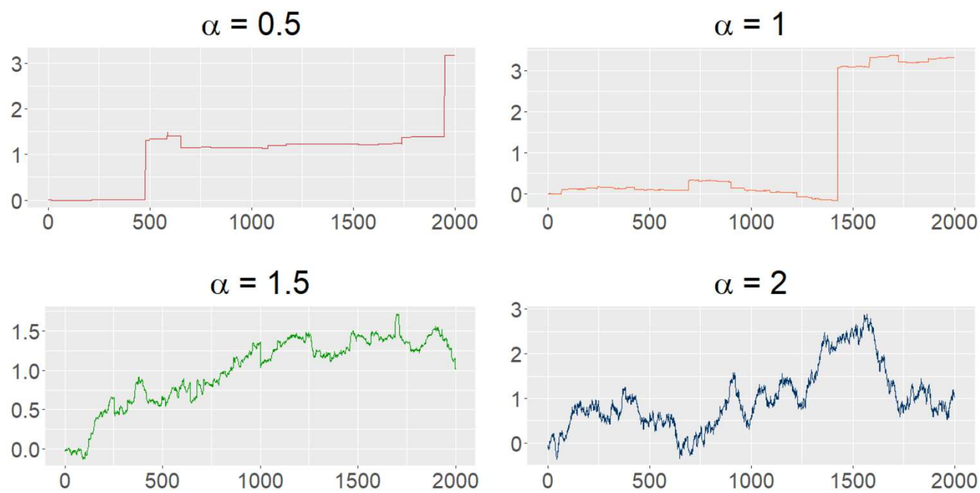
gdje jednakost shvaćamo u smislu konačnodimenzionalnih distribucija.
Uzmimo sada $S\alpha S$ slučajnu mjeru Λ na $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ s kontrolnom Lebesgueovom mjerom λ i definirajmo proces

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{(0,t]}(s) \Lambda(ds), \ \ t \geq 0.$$

Tada je $(X(t),\ t \geq 0)$ $S\alpha S$ Lévyjevo gibanje.
Očito je $X(0) = 0$ $g.s.$, a prema definiciji 2.4.3, za $t_1 < t_2$ vrijedi

$$X(t_2) - X(t_1) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{(t_1,t_2]}(s) \Lambda(ds) = \Lambda\left((t_1, t_2]\right) \sim S_\alpha\left((t_2 - t_1)^{1/\alpha}, 0, 0\right).$$

Za $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, prirasti $X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ su nezavisni zbog nezavisne raspršenosti mjere Λ. Na slici 1 prikazane su trajektorije $S\alpha S$ Lévyjevog gibanja za $\alpha = 0.5, 1, 1.5$ i 2. Najprije je simuliran jednostavni slučajni uzorak $(Z(j),\ j = 1, \ldots, N)$ veličine $N = 2000$ iz $S\alpha S$ distribucije, a potom je pomoću kumulativnih suma oblika $X(t) = \sum_{j=1}^{t} Z(j)$ aproksimirano $S\alpha S$ Lévyjevo gibanje.



Slika 1: $S\alpha S$ Lévyjevo gibanje za $\alpha = 0.5, 1, 1.5$ i 2

4.2 Linearno frakcionalno stabilno gibanje

Linearna frakcionalna stabilna gibanja čine široku familiju stabilnih procesa koji imaju integralnu reprezentaciju. Kraće ćemo pisati LFSG. Određeni su sa četiri parametra što daje zaista velik broj različitih procesa. Najprije ćemo definirati LFSG, a potom ćemo specificiranjem njegovih parametara svesti razmatranje na nešto poznatije procese.

Definicija 4.2.1. *Neka je $\alpha \in (0,2]$, $H \in (0,1)$ takav da $H \neq 1/\alpha$ i $a,b \in \mathbb{R}$ takvi da je $|a|+|b| > 0$. Nadalje, neka je Λ α-stabilna slučajna mjera na $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ s kontrolnom Lebesgueovom mjerom.* ***Linearno frakcionalno stabilno gibanje*** *je slučajni proces $(L_{\alpha,H}(a,b;t),\ t \geq 0)$ dan s*

$$L_{\alpha,H}(a,b;t) = \int_{\mathbb{R}_+} f_{\alpha,H}(a,b;t,s)\Lambda(ds), \tag{4.1}$$

gdje je

$$\begin{aligned} f_{\alpha,H}(a,b;t,s) = a &\left[(t-s)_+^{H-1/\alpha} - (-s)_+^{H-1/\alpha}\right] \\ + b &\left[(t-s)_-^{H-1/\alpha} - (-s)_-^{H-1/\alpha}\right]. \end{aligned}$$

Napomena 4.2.1. *U prethodnoj definiciji je $x_+ = \max\{x,0\}$ pozitivni dio, a $x_- = \max\{-x,0\}$ negativni dio od x.*

Za $H = 1$, LFSG nije definirano, stoga je uvjet $H \in (0,1)$ nužan za njegovo postojanje. Pokazuje se da je LFSG H-sebi sličan proces sa stacionarnim prirastima [8]. U slučaju kada je $H > 1/\alpha$, kažemo da prirasti imaju svojstvo *dugoročne zavisnosti*, a kada je $H < 1/\alpha$, imaju svojstvo *negativne zavisnosti*.
Ako u (4.1) uzmemo $a = b = 1$, podintegralna funkcija postaje

$$f_{\alpha,H}(1,1;t,s) = |t-s|^{H-1/\alpha} - |s|^{H-1/\alpha}$$

te LFSG dobiva epitet *dobro balansirano*. Ako je dodatno Λ simetrična α-stabilna slučajna mjera, kažemo da je dobro balansirano LFSG *simetrično*. U nastavku ćemo se fokusirati samo na *simetrično dobro balansirano LFSG* pa ćemo radi preglednosti njega označavati s LFSG. O distribucijskim svojstvima takvog procesa govori sljedeća vrlo korisna propozicija.

Propozicija 4.2.1 (vidjeti [8], Proposition 7.4.3). *Ako je $(X(t),\ t \geq 0)$ LFSG, onda je za svaki $t \geq 0$,*

$$X(t) \sim S_\alpha(\sigma_t, 0, 0),$$

gdje je $\sigma_t = K_{\alpha,H} t^H$ i

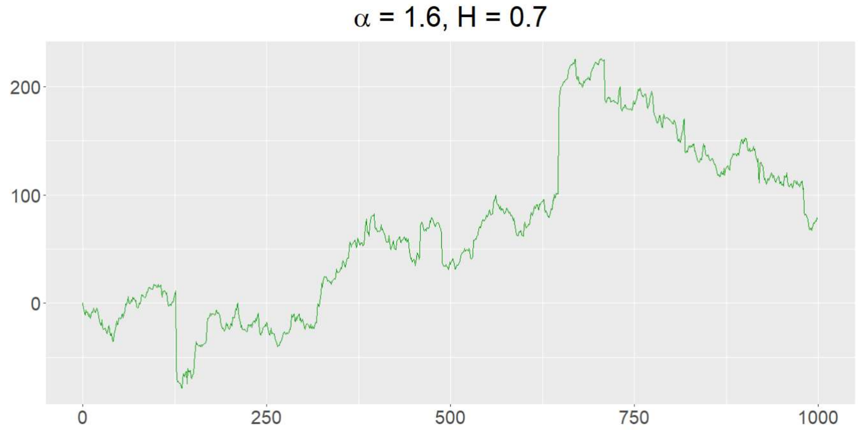
$$K_{\alpha,H}^\alpha = 2^\alpha \int_0^\infty \left((1+x)^{H-1/\alpha} - x^{H-1/\alpha}\right)^\alpha dx + \int_0^1 \left|(1-x)^{H-1/\alpha} - x^{H-1/\alpha}\right|^\alpha dx.$$

Napomena 4.2.2. *Slučajni proces*

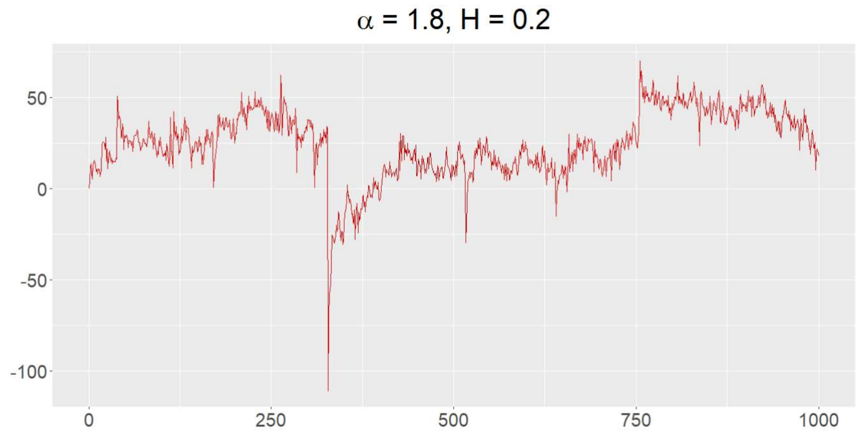
$$X(t) = \frac{1}{K_{\alpha,H}} L_{\alpha,H}(1,1;t), \ \ t \geq 0$$

zovemo ***standardno*** *LFSG. Parametar skaliranja od $X(1)$ je 1 te otuda i naziv.*

LFSG općenito ne mora imati nezavisne priraste pa samo poznavanje distribucijskih svojstava nije dovoljno za simuliranje trajektorija takvog procesa. Na sreću, u programskom jeziku R razvijen je paket `rlfsm` (Mazur i Otryakhin, 2022.) koji služi za simuliranje LFSG i statističko zaključivanje o njemu. Slika 2 prikazuje LFSG u slučaju kada je $H > 1/\alpha$, a Slika 3 obrnuti slučaj. U prvom slučaju prirasti imaju svojstvo dugoročne zavisnosti, a u drugom svojstvo negativne zavisnosti.



Slika 2: Trajektorija (simetričnog dobro balansiranog) LFSG za $\alpha = 1.6$ i $H = 0.7$



Slika 3: Trajektorija (simetričnog dobro balansiranog) LFSG za $\alpha = 1.8$ i $H = 0.2$

Već sada smo suzili priču na vrlo specifičan oblik linearnog frakcionalnog stabilnog gibanja kod kojega je $a = b = 1$. Kao proizvoljne parametre još imamo α i H koji nam i dalje daju velike mogućnosti. Za $\alpha = 2$, simetrična 2-stabilna slučajna mjera Λ je Brownovo gibanje što nas dovodi do poznate familije procesa.

4.3 Frakcionalno Brownovo gibanje

Za slučajni proces $\mathbf{X} = (X(t),\ t \in T)$ kažemo da je Gaussovski ako su mu sve konačnodimenzionalne distribucije normalne. Ranije smo vidjeli da u Lévy-Khintchineovoj reprezentaciji takvog procesa Lévyjeva mjera iščezava pa funkcija kumulanata takvog procesa ima oblik

$$C\{\boldsymbol{\theta} \ddagger \mathbf{X}\} = i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{b}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T \Sigma \boldsymbol{\theta},$$

gdje je $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^T$, $\mathbf{b} = (b(t),\ t \in T)$ realna funkcija na T i $\Sigma = (\Sigma(t_1, t_2),\ t_1, t_2 \in T)$ pozitivno semidefinitna funkcija na $T \times T$. Funkciju $\mathbf{b}$ zovemo *funkcija očekivanja*, a funkciju Σ *funkcija autokovarijanci* slučajnog procesa $\mathbf{X}$.
Vidimo da one jednoznačno određuju Gaussovski proces $\mathbf{X}$. Međutim, pokazuje se da vrijedi i svojevrstan obrat, tj. da za svaku realnu funkciju $\mathbf{b}$ i pozitivno semidefinitnu funkciju Σ postoji Gaussovski proces $\mathbf{X}$ kojemu su one funkcija očekivanja, odnosno funkcija autokovarijanci.
U nastavku ćemo se ograničiti na $T = \mathbb{R}_+$. Uzmimo da je $\mathbf{b} = 0$ te za $H \in (0, 1)$ i $\sigma^2 > 0$ definirajmo funkciju

$$\Sigma(t_1, t_2) = \frac{\sigma^2}{2}\left(t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}\right), \quad t_1, t_2 \geq 0. \tag{4.2}$$

Tada je Σ pozitivno semidefinitna funkcija pa postoji Gaussovski proces $\mathbf{X}$ s očekivanjem 0 i funkcijom autokovarijanci Σ. Specijalno je $\operatorname{Var} X(1) = \sigma^2$. Za tako definiran proces vrijedi $X(t) \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 t^{2H}\right),\ \ t \geq 0$. Za $s, t \geq 0$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X(t) - X(s)) &= \sigma^2 t^{2H} - 2\operatorname{Cov}(X(t), X(s)) + \sigma^2 s^{2H} \\
&= \sigma^2\left(t^{2H} + s^{2H} - t^{2H} - s^{2H} + |t - s|^{2H}\right) \\
&= \sigma^2 |t - s|^{2H}
\end{aligned}$$

pa je $X(t) - X(s) \sim \mathcal{N}\left(0, |t - s|^{2H}\right)$, što znači da tako definiran proces ima stacionarne priraste. Također, lako se vidi i da je H-sebi sličan. Za $c > 0$, s jedne strane je

$$C\{\theta \ddagger X(ct)\} = -\frac{1}{2}\theta^2 \frac{\sigma^2}{2}\left((ct)^{2H} + (ct)^{2H}\right) = -\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2(ct)^{2H},$$

dok je s druge strane

$$C\{\theta \ddagger c^H X(t)\} = -\frac{1}{2}\theta^2 \frac{\sigma^2}{2}\left(t^{2H} + t^{2H}\right)c^{2H} = -\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2(ct)^{2H}.$$

Zbog H-sebi sličnosti vrijedi

$$X(0) = X(c0) \stackrel{d}{=} c^H X(0)$$

pa je $X(0) = 0$ $g.s.$
Pokazuje se da je ovako definiran proces jedini Gaussovski proces koji je H-sebi sličan sa stacionarnim prirastima [8].

Propozicija 4.3.1. *Neka je za* $H \in (0,1)$, $(X(t),\ t \geq 0)$ *H-sebi sličan proces sa stacionarnim prirastima i konačnom varijancom. Tada je*

$$EX(t) = 0 \qquad i \qquad \operatorname{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = \Sigma(t_1, t_2),$$

gdje je Σ *definirana s* (4.2).

Dokaz. Zbog stacionarnosti prirasta i H-sebi sličnosti imamo

$$\begin{aligned} EX(1) &= E\left(X(2) - X(1)\right) = 2^H EX(1) - EX(1) \\ &= (2^H - 1)EX(1), \end{aligned}$$

odakle je $EX(1) = 0$. Prvi dio tvrdnje slijedi iz $X(t) = t^H X(1)$. Primjenjujući ista svojstva, za drugi dio imamo

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = E(X(t_1)X(t_2) &= \frac{1}{2}\left(EX^2(t_1) + EX^2(t_2) - E(X(t_1) - X(t_2))^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(t_1^{2H}EX(1) + t_2^{2H}EX(1) - EX^2(t_1 - t_2)\right) \\ &= \frac{EX^2(1)}{2}\left(t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}\right). \end{aligned}$$

□

Definicija 4.3.1. *Gaussovski H-sebi sličan proces sa stacionarnim prirastima zove se* ***frakcionalno Brownovo gibanje*** *(FBG) i označava s* $(B_H(t),\ t \geq 0)$. *Kažemo da je* ***standardno*** *ako je* Var $B_H(1) = 1$.

Sljedeći teorem objedinjuje prethodnu propoziciju i definiciju FBG.

Teorem 4.3.1. *Neka je* $H \in (0,1)$. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) $(X(t),\ t \geq 0)$ *je Gaussovski H-sebi sličan sa stacionarnim prirastima,*

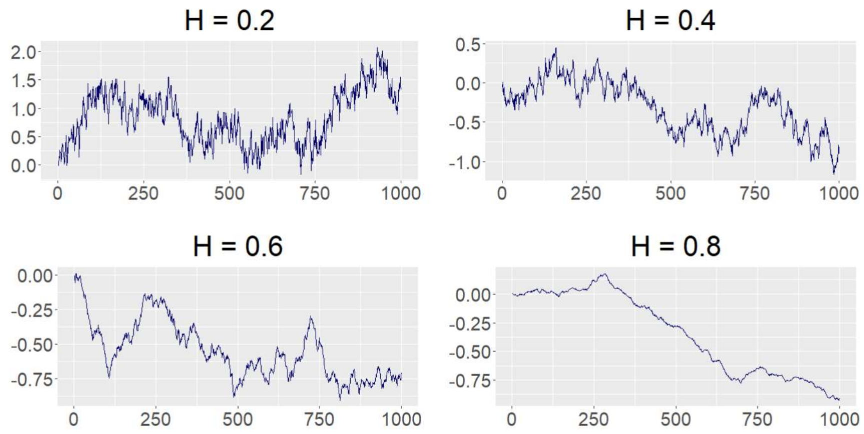
(ii) $(X(t),\ t \geq 0)$ *je FBG s indeksom sebi sličnosti H,*

(iii) $(X(t),\ t \geq 0)$ *je Gaussovski s očekivanjem* 0 *i funkcijom autokovarijanci* (4.2).

Frakcionalno Brownovo gibanje je specijalan slučaj prethodno opisanog LFSG te se prema tome može zapisati u integralnom obliku na sljedeći način

$$B_H(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(|t - s|^{H-1/2} - |s|^{H-1/2}\right) \Lambda(ds), \tag{4.3}$$

gdje je Λ simetrična 2-stabilna slučajna mjera, odnosno **Brownovo gibanje**. Uočimo da za $H = 1/2$ pridjev *frakcionalno* postaje suvišan. Na sljedećoj slici prikazane su trajektorije FBG za $H = 0.2,\ 0.4,\ 0.6$ i 0.8.



Slika 4: FBG za različite izbore H

Prema definiciji, frakcionalno Brownovo gibanje je proces sa stacionarnim prirastima što znači da njegovi prirasti

$$\Delta B_H(j) = B_H(j+1) - B_H(j), \quad j = 0, 1, \dots$$

čine stacionaran niz. Proces $(\Delta B_H(j),\ j \in \mathbb{N}_0)$ zovemo **frakcionalni Gaussovski (FG) šum**. Kažemo da je *standardni* ako je $\operatorname{Var} B_H(1) = 1$. Prema (4.3), $\Delta B_H(j)$ ima sljedeću integralnu reprezentaciju

$$\begin{aligned}\Delta B_H(j) &= \int_{\mathbb{R}_+} \left(|j+1-s|^{H-1/2} - |s|^{H-1/2} - |j-s|^{H-1/2} + |s|^{H-1/2} \right) \Lambda(ds) \\ &= \int_{(0,j+1)} \left((j+1-s)^{H-1/2} - |j-s|^{H-1/2} \right) \Lambda(ds).\end{aligned}$$

Zbog stacionarnosti i H-sebi sličnosti je očito $E(\Delta B_H(j)) = 0$ i $\operatorname{Var}(\Delta B_H(j)) = EB_H^2(1)$, za svaki $j \in \mathbb{N}_0$. Označimo s r funkciju autokovarijanci FG šuma. Korištenjem propozicije 4.3.1, jednostavno se dobije njezin eksplicitni oblik:

$$r(j) = E\Big(\Delta B_H(0)\, \Delta B_H(j)\Big) = \frac{EB_H^2(1)}{2} \left((j+1)^{2H} - 2j^{2H} + (j-1)^{2H} \right), \quad j = 1, 2, \dots$$

U nastavku ćemo koristiti oznaku $a_j \sim b_j$ kada je $\lim_{j\to\infty} a_j/b_j = 1$. Da bismo mogli zaključiti o asimptotskom ponašanju od $r(j)$, zapisat ćemo ju u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} r(j) &= \frac{EB_H^2(1)}{2} j^{2H} \left(\left(1 + \frac{1}{j}\right)^{2H} - 2 + \left(1 - \frac{1}{j}\right)^{2H} \right) \\ &= \frac{EB_H^2(1)}{2} j^{2H-2} \left[j^2 \left(\left(1 + \frac{1}{j}\right)^{2H} - 2 + \left(1 - \frac{1}{j}\right)^{2H} \right) \right]. \end{aligned}$$

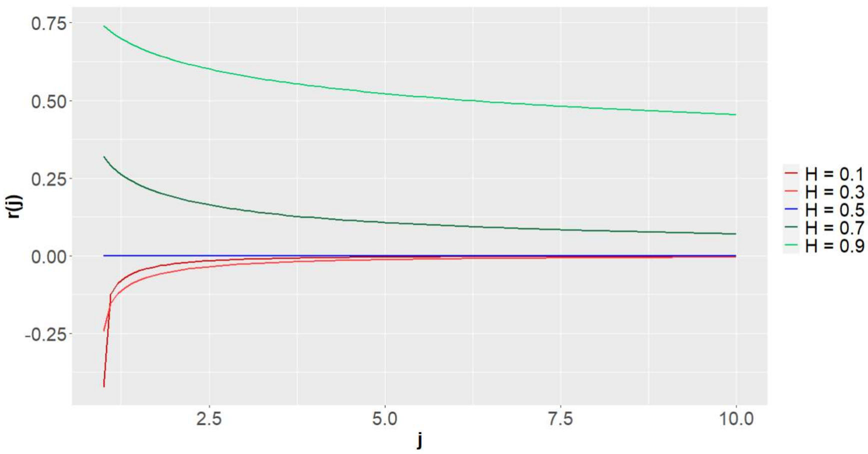
Dvostrukom primjenom L'Hôpitalovog pravila, izraz u uglatim zagradama postaje

$$H(2H-1) \left(\left(1 + \frac{1}{j}\right)^{2H-2} + \left(1 - \frac{1}{j}\right)^{2H-2} \right),$$

što konvergira prema $2H(2H-1)$, za $j \to \infty$. Dakle,

$$r(j) \sim EB_H^2(1)\, H(2H-1)j^{2H-2}, \;\text{ za } j \to \infty.$$

Za bilo koji $H \in (0,1)$, $r(j)$ konvergira u 0 kao potencija od j, za $j \to \infty$. Međutim, konvergencija je puno sporija kada je $H \in (1/2,1)$ jer u tom slučaju suma $\sum_{j=1}^{\infty} r(j)$ divergira [8]. Tada kažemo da FG šum ima svojstvo dugoročne zavisnosti.
Za $H = 1/2$, FG šum čine prirasti Brownovog gibanja koji su nezavisni pa je u tom slučaju $r(j) = 0$, za svaki j. Drugim riječima, FG šum je n.j.d. niz za $H = 1/2$.
Koeficijent $H(2H-1)$ je negativan za $H \in (0,1/2)$ pa je, za velike j, i $r(j)$ negativan. Za takav FG šum kažemo da ima svojstvo negativne zavisnosti.



Slika 5: Autokorelacijska funkcija od ΔB_H za različite H

Frakcionalni Gaussovski šum ne zadovoljava pretpostavke klasičnog centralnog graničnog teorema za $H \neq 1/2$. Naime, $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} \Delta B_H(j)$ ne konvergira po distribuciji prema netrivijalnoj slučajnoj varijabli, no uzmemo li za normirajuću konstantu n^H, slijedi

$$\frac{1}{n^H}\sum_{j=1}^{n} \Delta B_H(j) = \frac{1}{n^H}(B_H(n+1) - B_H(0)) \stackrel{d}{=} \frac{(n+1)^H}{n^H} B_H(1) \xrightarrow{d} B_H(1), \;\text{ za } n \to \infty.$$

4.4 Proces Ornstein-Uhlenbeckovog tipa

U ovom potpoglavlju ćemo radi preglednosti integral funkcije f u odnosu na slučajnu mjeru Λ pisati u formi Riemannovog integrala: $\int_a^b f(s)\, d\Lambda(s)$. Naime, slučajna mjera Λ će biti generirana Lévjevim procesom $(L(t),\ t \in \mathbb{R})$ (primjer 2.4.1) pa će nam ponekad biti prikladnije pisati $dL(s)$ umjesto $L(ds)$. Treba imati na umu da je to samo oznaka za prethodno definirani $\int_{[a,b]} f(s)\Lambda(ds)$.

Definicija 4.4.1. *Neka je $\lambda > 0$ i $(L(t),\ t \in \mathbb{R})$ dvostrani Lévyjev proces koji zadovoljava uvjet $E \log\big(1 + L(1)\big) < \infty$.* ***Proces Ornstein-Uhlenbeckovog (OU) tipa*** *je proces $(X(t),\ t \in \mathbb{R})$ definiran s*

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(t-s)} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t-s)\, dL(\lambda s) = e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda s}\, dL(\lambda s). \tag{4.4}$$

Napomena 4.4.1. *Proces OU tipa razlikuje se od "klasičnog" Ornstein-Uhlenbeckovog procesa koji je stacionarno rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe*

$$dX(t) = \lambda(\mu - X(t)) + \sigma dB(t),$$

gdje su $\lambda, \sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ i $(B(t),\ t \in \mathbb{R})$ Brownovo gibanje. U našem slučaju je $\mu = 0,\ \sigma = 1$, ali pogonski proces je općeniti Lévyjev pa odgovarajuća stohastička diferencijalna jednadžba ima oblik

$$dX(t) = -\lambda X(t) + dL(\lambda t).$$

Uočimo da se integrira po *skaliranim trenutcima* oblika λs što nam malo komplicira situaciju. Takvo skaliranje vremena osigurava da marginalne distribucije procesa OU tipa ne ovise o parametru λ. Jednostavnim uvođenjem supstitucije $s = \lambda s$ dolazimo do ekvivalentnog zapisa:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t + s}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(\lambda t - s)dL(s),\ \ t \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Koristeći propoziciju 3.1.1, slijedi da je funkcija kumulanata procesa OU tipa dana s

$$C\{\theta \ddagger X(t)\} = \int_{\mathbb{R}} K\Big(\theta e^{-\lambda t + s}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(\lambda t - s)\Big)ds,$$

gdje je funkcija K definirana s (2.7). Uočimo da je u ovom slučaju K funkcija jedne varijable jer je Lévyjev proces homogena slučajna mjera. Za proizvoljni $h > 0$ tada vrijedi

$$\begin{aligned} C\{\theta \ddagger X(t+h)\} &= \int_{\mathbb{R}} K\Big(\theta e^{-\lambda t - \lambda h + s}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(\lambda t + \lambda h - s)\Big)ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} K\Big(\theta e^{-\lambda t + u}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(\lambda t - u)\Big)ds \\ &= C\{\theta \ddagger X(t)\}. \end{aligned}$$

Time smo pokazali da je $X(t+h) \overset{d}{=} X(t)$, za svaki $t \in \mathbb{R}$. Slično se pokazuje da su i konačnodimenzionalne distribucije procesa OU tipa $(X(t),\ t \in \mathbb{R})$ invarijantne na vremenske pomake, što znači da se radi o *strogo stacionarnom* procesu. Osim stacionarnosti, on ima još jedno vrlo važno svojstvo.

Definicija 4.4.2. *Za ID slučajnu varijablu X ćemo reći da je* ***self-decomposable (SD)*** *ako njezina karakteristična funkcija ϕ ima svojstvo da za svaki $c \in (0,1)$, postoji karakteristična funkcija ϕ_c neke slučajne varijable takva da je*

$$\phi(\theta) = \phi(c\theta)\phi_c(\theta),\ \ \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

Zbog svojstava karakteristične funkcije, to zapravo znači da postoji slučajna varijabla Z_c nezavisna od X s karakterističnom funkcijom ϕ_c takva da je $X \overset{d}{=} cX + Z_c$. SD slučajna varijabla X može se reprezentirati u obliku

$$X \overset{d}{=} \int_0^{\infty} e^{-s}dL(s).$$

Ovdje je $(L(t),\ t \geq 0)$ Lévyjev proces čija je distribucija jedinstveno određena distribucijom od X, a zove se *pogonski Lévyjev proces*. Engleski naziv je *background driving Lévy process* pa ćemo kraće pisati *BDLP*. Da bismo pokazali da je proces OU tipa SD, zapišimo ga pomoću (4.4) u sljedećem obliku:

$$
\begin{aligned}
X(t) &= e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda \cdot 0} \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda s} dL(\lambda s) + e^{-\lambda t} \int_{0}^{t} e^{\lambda s} dL(\lambda s) \\
&\overset{d}{=} e^{-\lambda t} X(0) + e^{-\lambda t} \int_{0}^{t} e^{\lambda s} dL(\lambda s).
\end{aligned}
$$

Slučajne varijable $X(0)$ i $e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} dL(\lambda s)$ su nezavisne zbog nezavisne raspršenosti slučajne mjere L, a ulogu konstante c ima $e^{-\lambda t}$.
Za slučajni proces $(X(t),\ t \in \mathbb{R})$ kažemo da je *proces pomičnih prosjeka* ako ima integralnu reprezentaciju

$$
X(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s) \Lambda(ds),
$$

za Λ-integrabilnu funkciju f. Ako stavimo $f(s) = e^{-\lambda s} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(s)$, slijedi da proces OU tipa ima to svojstvo.
Ako je proces OU tipa $(X(t),\ t \in \mathbb{R})$ kvadratno integrabilan s očekivanjem 0, tada je njegova autokorelacijska funkcija r dana s (vidjeti [2])

$$
r(u) = e^{-\lambda u}, \quad u \geq 0.
$$

Iako općenito čine široku klasu stacionarnih procesa, ovo svojstvo ih ponekad čini ograničavajućim za primjene. Zato navodimo primjer procesa s nešto fleksibilnijom strukturom zavisnosti.

4.5 SupOU proces

Neka su $(X^{(k)}(t),\ t \in \mathbb{R})$ nezavisni procesi OU tipa s parametrima $\lambda_k,\ k = 1, \ldots, m$. Za težine $w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{R}$ definiramo njihovu konačnu superpoziciju $(X_m(t),\ t \in \mathbb{R})$ na način

$$
X_m(t) = \sum_{k=1}^{m} w_k X^{(k)}(t).
$$

Njezina autokorelacijska funkcija je

$$
r(u) = \sum_{k=1}^{m} w_k e^{-\lambda_k |u|}, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{4.6}
$$

Promotrimo li beskonačnu superpoziciju, pokazuje se da njezina autokorelacijska funkcija može opadati u 0 sporije nego eksponencijalna funkcija. Beskonačna superpozicija može se dobiti i randomiziranjem parametra λ pomoću vjerojatnosne mjere π s nosačem na $\mathbb{R}_+$ te se tada može formalno zapisati u integralnom obliku:

$$
X(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi t + s} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(\xi t - s) L(ds) \pi(d\xi).
$$

Da bismo mogli dati smisao prethodnom integralu, uzmimo najprije izmjeriv prostor $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}))$ i Lévyjev proces $(L(t),\ t \in \mathbb{R})$ s karakterističnom trojkom (b, σ^2, μ) takva da je

$$\int_{|x|>1} \log|x| \mu(dx) < \infty.$$

Neka je π vjerojatnosna mjera na $\mathbb{R}_+$ takva da je

$$\int_{\mathbb{R}_+} \xi \pi(d\xi) < \infty.$$

Pretpostavimo da je Λ homogena beskonačno djeljiva nezavisno raspršena slučajna mjera na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ s kontrolnom mjerom $m = \pi \times \text{Leb}$, gdje je Leb oznaka za Lebesgueovu mjeru na $\mathbb{R}$. Uređenu četvorku (b, σ^2, μ, π) zovemo *generirajuća četvorka*, a slučajnu mjeru Λ *Lévyjeva baza*. Neka su dane funkcije $f_t : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$, pravilom pridruživanja

$$f_t(\xi, s) = e^{-\xi t + s} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(\xi t - s).$$

Definicija 4.5.1. *Beskonačno djeljiv slučajni proces $(X(t),\ t \in \mathbb{R})$ definiran s*

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} f_t(\xi, s) \Lambda(d\xi, ds) \tag{4.7}$$

zove se ***supOU*** *proces.*

U [2] je pokazano da je proces (4.7) dobro definiran i strogo stacionaran. Ako uvedemo oznaku

$$K_L(\theta) = C\{\theta \ddagger L(1)\}, \tag{4.8}$$

može se pokazati da je funkcija kumulanata supOU procesa dana s

$$C\{\theta \ddagger X(t)\} = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} K_L\big(\theta e^{-\xi t + s} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(\xi t - s)\big) ds \pi(d\xi), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Uz pretpostavku egzistencije drugog momenta, autokorelacijska funkcija supOU procesa ima oblik

$$r(u) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u\xi} \pi(d\xi), \quad u \geq 0.$$

Očito odabir distribucije π utječe na strukturu zavisnosti procesa. Uočimo da je r zapravo Laplaceova transformacija od π.

Primjer 4.5.1. *Ako je mjera π degenerativna, tj. takva da je $\pi(\{\lambda\}) = 1$, za $\lambda > 0$, tada funkcija kumulanata ima oblik*

$$C\{\theta \ddagger X(t)\} = \int_{\mathbb{R}} K_L\big(\theta e^{-\lambda t + s} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(\lambda t - s)\big) ds,$$

što je zapravo funkcija kumulanata procesa OU tipa iz prethodnog potpoglavlja.

Primjer 4.5.2. *Neka je π diskretna vjerojatnosna mjera takva da je $\pi(\{\lambda_k\}) = p_k,\ k \in \mathbb{N},\ \lambda_k > 0$. Tada je funkcija kumulanata supOU procesa dana s*

$$C\{\theta \ddagger X(t)\} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} p_k K_L\big(\theta e^{-\lambda_k t+s} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(\lambda_k t - s)\big) ds.$$

U ovom slučaju, supOU proces ima istu distribuciju kao i beskonačna diskretna superpozicija $\left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k X^{(k)}(t),\ \ t \in \mathbb{R}\right)$ s početka ovog dijela. Autokorelacijska funkcija je dana s (4.6) *za $m = \infty$ i $w_k = p_k$.*

U nastavku ćemo navesti propoziciju koja govori kako odabrati mjeru π da bismo dobili određenu strukturu zavisnosti. Za to će nam najprije trebati definicija sporo varirajuće funkcije u beskonačnosti.

Definicija 4.5.2. *Za funkciju ℓ kažemo da je **sporo varirajuća** u beskonačnosti ako je za svaki $a > 0$*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ell(ax)}{\ell(x)} = 1.$$

Najpoznatiji primjeri sporo varirajućih funkcija u beskonačnosti su konstanta i logaritamska funkcija.

Propozicija 4.5.1. *Neka je $(X(t),\ t \in \mathbb{R})$ kvadratno integrabilan supOU proces s autokorelacijskom funkcijom r, ℓ sporo varirajuća funkcija u beskonačnosti i $\alpha > 0$. Tada je*

$$\pi((0,x]) \sim \ell(x^{-1})x^{\alpha}, \quad \text{za } x \to 0$$

ako i samo ako

$$r(u) \sim \Gamma(1+\alpha)\ell(u)u^{-\alpha}, \quad \text{za } u \to \infty.$$

Drugim riječima, što je veća *masa* mjere π oko 0, to će autokorelacijska funkcija sporije opadati, za $u \to \infty$. Za $\alpha < 1$, supOU proces ima svojstvo dugoročne, a za $\alpha \geq 1$ svojstvo kratkoročne zavisnosti. Sljedeći primjer praktički se nameće u samom iskazu propozicije.

Primjer 4.5.3. *Neka je $(X(t),\ t \in \mathbb{R})$ supOU proces takav da je π Gama distribucija s gustoćom*

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x), \quad \alpha > 0.$$

Tada je π dana s

$$\pi((0,x]) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-y} dy, \quad x > 0.$$

Može se pokazati da vrijedi

$$\pi((0,x]) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha}, \quad \text{za } x \to 0.$$

U terminima prethodne propozicije, sporo varirajuća funkcija ℓ je konstanta $\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$ pa slijedi da autokorelacijska funkcija ima svojstvo

$$r(u) \sim u^{-\alpha}, \quad \text{za } u \to \infty.$$

Štoviše, autokorelacijsku funkciju možemo i eksplicitno izračunati:

$$r(u) = \int_0^{\infty} e^{-ux} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = (1+u)^{-\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = (1+u)^{-\alpha}.$$

4.6 Trawl proces

U primjeru $S\alpha S$ Lévyjevog gibanja, slučajnu mjere Λ integrirali smo po skupovima oblika $(0, t]$ da bismo indeksirali proces. Naravno da je moguće proces indeksirati pomoću apstraktnijih skupova od toga. Najpoznatiji primjer je svakako *trawl* proces koji je po konstrukciji sličan supOU procesu, ali je znatno jednostavniji.
Uzmimo Lévyjevu bazu Λ na $\mathbb{R}^2$ s generirajućom četvorkom $(b, \sigma^2, \mu, \lambda)$, gdje je λ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^2$. Uzmimo $A \subset \mathbb{R} \times (-\infty, 0]$ takav da je $\lambda(A) < \infty$ i stavimo

$$A_t = A + (0, t).$$

Uočimo da se zapravo radi o skupu A translatiranom po drugoj koordinati za t.

Definicija 4.6.1. *Slučajni proces*

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_A(\xi, s - t)\Lambda(d\xi, ds) = \Lambda(A_t), \quad t \in \mathbb{R},$$

*zove se **trawl** proces s Lévyjevom bazom Λ i **trawlom** A.*

Općenito, trawl proces se može definirati i na $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, tako da uzmemo Lévyjevu bazu Λ na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ i $A \subset \mathbb{R}^d \times (-\infty, 0]$. U tom slučaju, takav proces možemo interpretirati kao *slučajnu mjeru geometrijskog tijela u pokretu u d-dimenzionalnom prostoru.* Iz definicije je očito da se radi o procesu pomičnih prosjeka.

Primjer 4.6.1. *Neka je trawl dan s*

$$A_t = \left\{(x, s) : s \leq t,\ 0 \leq x \leq e^{-0.9(t-s)}\right\}$$

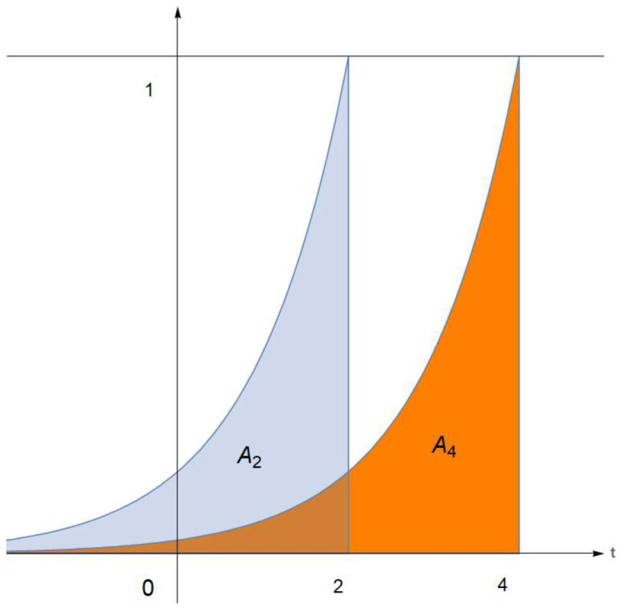
te neka je Λ Lévyjeva baza s karakterističnom četvorkom $(0, \sigma^2, 0, \lambda)$. Tada je $X(t) = \Lambda(A_t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2\lambda(A))$ jer se radi o Gaussovskoj slučajnoj mjeri. Jednostavnim integriranjem slijedi da je $\lambda(A) = \frac{10}{9}$. Na slici 6 prikazan je trawl za $t = 2$ i 4. Uočimo da se oblik trawla ne mijenja kroz vrijeme što je u skladu s činjenicom da želimo konstruirati stacionaran proces.

Propozicija 4.6.1. *Trawl proces je stacionaran beskonačno djeljiv proces s funkcijom kumulanata*

$$C\{\theta \ddagger X(t)\} = \lambda(A)K_L(\theta), \tag{4.10}$$

gdje je $K_L(\theta)$ dan s (4.8).

Dokaz ove tvrdnje može se pronaći u [3].



Slika 6: Trawl područja

Momenti trawl procesa mogu se dobiti pomoću svojevrsnih derivacija funkcije kumulanata.

Definicija 4.6.2. *Neka je $K_X(\theta) = C\{\theta \ddagger X\}$ funkcija kumulanata slučajne varijable X. Za $m \in \mathbb{N}$, m-ti kumulant od X je definiran s*

$$K_X^{(m)} = (-1)^m \frac{d^m}{d\theta^m} K_X(\theta)\,|_{\theta=0}\ .$$

Pokazuje se da vrijedi

$$\begin{aligned} EX(t) &= \lambda(A) K_L^{(1)}, \\ \operatorname{Var} X(t) &= \lambda(A) K_L^{(2)}. \end{aligned}$$

Uzmimo sada $s < t$ i pogledajmo prirast trawl procesa

$$X(t) - X(s) = \Lambda(A_t) - \Lambda(A_s).$$

Ako skup A_t zapišemo u obliku $A_t = (A_t \backslash A_s) \cup (A_s \cap A_t)$ i slično skup A_s, te iskoristimo svojstvo σ-aditivnosti od Λ, slijedi da je

$$X(t) - X(s) = \Lambda(A_t \backslash A_s) - \Lambda(A_s \backslash A_t), \ \ g.s.$$

Skupovi $A_t \backslash A_s$ i $A_s \backslash A_t$ su disjunktni pa je prirast zapisan kao razlika dvije nezavisne slučajne varijable. Prema tome, funkcija kumulanata prirasta je dana s

$$\begin{aligned} C\{\theta \ddagger X(t) - X(s)\} &= C\{\theta \ddagger \Lambda(A_t \backslash A_s)\} + C\{-\theta \ddagger \Lambda(A_s \backslash A_t)\} \\ &\overset{(4.10)}{=} \lambda(A_t \backslash A_s) K_L(\theta) + \lambda(A_s \backslash A_t) K_L(-\theta) \\ &= \lambda(A_{t-s} \backslash A) K_L(\theta) + \lambda(A \backslash A_{t-s}) K_L(\theta). \end{aligned}$$

Uočimo da su prirasti stacionarni jer funkcija kumulanata ovisi samo o razlici $t - s$. Osim toga, to je i posljedica stacionarnosti trawl procesa.

Literatura

[1] D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge University Press, 2009.

[2] O. E. Barndorf-Nielsen, *Superposition of Ornstein-Uhlenbeck type processes*, Theory of Probability & Its Applications, 45(2): 175-194, 2001.

[3] O. E. Barndorff-Nielsen, F.E. Benth, A.E.D. Veraart, *Ambit Stochastics*, Springer, 2018.

[4] D. Grahovac, N.N. Leonenko, A. Sikorskii, M. Taqqu, *The unusual properties of aggregated superpositions of Ornstein-Uhlenbeck type processes*, Bernoulli 25/3, 2029-2050, 2019.

[5] B. S. Rajput, J. Rosinski, *Spectral representations of infinitely divisible processes*, Probability Theory and Related Fields, 1989.

[6] J. Rosiński, Infinitely Divisible Processes - prezentacija, *http://web.abo.fi/fak/mnf/mate/gradschool/summer_school/tammerfors2011/slides_rosinski.pdf*

[7] G. Samorodnitsky, *Stochastic Processes and Long Range Dependence*, Springer, 2016.

[8] G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*, CRC press, 1994.

[9] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

Sažetak

U ovom radu najprije je objašnjen pojam beskonačne djeljivosti za slučajne varijable, vektore i procese. Kao poseban oblik slučajnog procesa, definirana je slučajna mjera. Izvedeni su različiti oblici njezine karakteristične funkcije te su dani najvažniji primjeri slučajnih mjera.

Integral u odnosu na slučajnu mjeru najprije je definiran za jednostavne, a potom za općenite funkcije. Navedeni su nužni i dovoljni uvjeti na podintegralnu funkciju koji osiguravaju da je integral dobro definiran. Izvedeni su eksplicitni izrazi za karakterističnu trojku beskonačno djeljive slučajne varijable definirane integralom. Pokazano je da je familija integrala u odnosu na beskonačno djeljivu slučajnu mjeru beskonačno djeljiv slučajni proces.

Navedeni su primjeri procesa definiranih integralom i njihova najvažnija svojstva. Diskutirani su stacionarni i sebi slični procesi te je komentirana struktura njihove zavisnosti.

Ključne riječi: beskonačna djeljivost, slučajna mjera, Lévy-Khintchineova formula, karakteristična trojka, integralna reprezentacija, funkcija kumulanata

Stochastic processes defined by the integral with respect to a random measure

Abstract

This paper firstly explains the concept of infinite divisibility for random variables, vectors and processes. As a special case of random process, a random measure is defined. Different forms of its characteristic function were derived and the most important examples of random measures were given.

Integral with respect to a random measure is defined first for simple and then for general functions. The necessary and sufficient conditions for the integrand are specified which ensure that the integral is well defined. Explicit expressions were derived for the characteristic triple of an infinitely divisible random variable defined by the integral. It has been shown that the family of integrals with respect to an infinitely divisible random measure is an infinitely divisible random process.

Examples of processes defined by integral are given with their most important properties. Stationary and self-similar processes were discussed and the structure of their dependency was commented on.

Keywords: infinite divisibility, random measure, Lévy-Khintchine formula, characteristic triple, integral representation, cumulant function

Životopis

Rođen sam 21. listopada 1998. u Našicama. Osnovnu školu završio sam u Đurđenovcu. 2013. godine upisujem opću gimnaziju u SŠ I. Kršnjavoga u Našicama. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja dva puta sam sudjelovao na državnom natjecanju iz matematike. Po završetku srednje škole, 2017. upisujem preddiplomski studij Matematika na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom akademske godine 2018./19. bio sam demonstrator iz kolegija Linearna algebra I i Linearna algebra II. U jesen 2020. završavam preddiplomski studij uz pohvalu (*summa cum laude*). Tema završnog rada mi je bila *Laplaceova transformacija* pod mentorstvom prof. dr. sc. Krešimira Burazina. Diplomski studij Financijska matematika i statistika upisujem 2020. godine. U akademskoj godini 2021./22. držao sam demonstrature iz kolegija Uvod u vjerojatnost i statistiku. Tijekom cjelokupnog studiranja, dodijeljene su mi tri pohvale za uspješnost u studiranju po akademskim godinama studija, dvije Pročelnikove nagrade i Rektorova nagrada za seminarski rad iz kolegija Multivarijatna analiza.