

# Interpolacija

---

**Martić, Kristina**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:541526>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-10-15**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science](#)



Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Kristina Martić**

**Interpolacija**

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Kristina Martić**

**Interpolacija**

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2021.

## Sažetak

Tema ovog rada je interpolacija. U uvodnom dijelu upoznat ćemo se s problemom interpolacije te definirati važne pojmove koje vežemo uz interpolaciju. Također ćemo proučiti vrste interpolacijskih polinoma, a nakon toga ćemo pokazati primjerima kako ih odrediti.

## Ključne riječi

Interpolacija, čvorovi interpolacije, interpolacijski polinom, Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma, Newtonov oblik interpolacijskog polinoma, ocjena pogreške, aproksimacija, nultočke Čebiševljevih polinoma.

# Interpolation

## Summary

The topic of this bachelor's thesis is interpolation. In the introductory part, we will get acquainted with the problem of interpolation and define important terms that we associate with interpolation. We will also study the types of interpolation polynomials, and then show examples of how to determine them.

## Key words

Interpolation, interpolation nodes, interpolation polynomial, Lagrange form of interpolation polynomial, Newton's form of interpolation polynomial, error estimation, approximation, zero points of Chebyshev polynomials.

# Sadržaj

|   |           |
|---|-----------|
| Uvod  | i         |
| <b>1 Interpolacija</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1 Interpolacija polinomima . . . . .                                  | 2         |
| 1.2 Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma . . . . .                | 4         |
| 1.3 Newtonov oblik interpolacijskog polinoma . . . . .                  | 7         |
| 1.4 Ocjena pogreške interpolacijskog polinoma . . . . .                 | 10        |
| 1.5 Nultočke Čebiševljevih polinoma kao čvorovi interpolacije . . . . . | 12        |
| <b>Literatura</b>   | <b>15</b> |

## Uvod

Ponekad nam je na skupu točaka  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  poznata vrijednost funkcije  $f(x)$ , ali nemamo analitički izraz pomoću kojega bismo izračunali vrijednost funkcije u bilo kojoj točki. Stoga u intervalu  $[x_0, x_n]$  pokušamo pronaći neku jednostavniju, poznatu funkciju  $g(x)$  koja će biti aproksimacija funkcije  $f(x)$ . Također, neka za  $g(x)$  vrijedi

$$g(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n.$$

Problem pronalazjenja funkcije  $g(x)$  nazivamo problem interpolacije. Upravo zbog zahtjeva da funkcija  $g(x)$  bude što jednostavnija, najčešće ćemo ju birati u klasi polinoma. Određivanjem funkcije  $g(x)$  dobivamo procjenu vrijednosti funkcije  $f(x)$  u nekoj točki  $x$  i pišemo  $f(x) \approx g(x)$ ,  $x \neq x_i$ .

Drugim riječima, ukoliko želimo da nam se funkcijske vrijednosti podudaraju, dovoljno nam je koristiti informaciju o vrijednosti funkcije  $f$  na skupu od  $(n + 1)$  točaka, tj. koristimo podatke oblika  $(x_i, f_i)$ , gdje je  $f_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

# 1 Interpolacija

Na segmentu  $[a, b]$  zadano je  $n + 1$  točaka  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , zvat ćemo ih čvorovi interpolacije. Također, na segmentu imamo zadane i vrijednosti neke funkcije  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  koja je neprekidna, odnosno za

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b, \quad (1.1)$$

vrijedi

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n).$$

Naša je zadaća pronaći procjenu vrijednosti funkcije  $f(x)$  na temelju podataka  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tj. pronaći pomoćnu funkciju  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  za koju će vrijediti interpolacijsko svojstvo  $g(x_i) = y_i$ .

Kako je ovdje riječ o aproksimaciji, u obzir moramo uzeti i moguće pogreške. Prije uvođenja pojma pogreške aproksimacije, prisjetimo se kako definiramo normu vektora.

Uzmimo vektor  $x$  iz  $\mathbb{R}^n$ . Tada je on oblika  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ , gdje su  $x_i$  njegove komponente za  $i = 1, \dots, n$ . Najčešće koristimo sljedeće tri norme:

1. 1-norma ili  $\ell_1$  norma, poznata kao "Manhattan" norma

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

2. 2 -norma ili  $\ell_2$  norma

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2},$$

3.  $\infty$  -norma ili  $\ell_\infty$  norma

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

Pogrešku aproksimacije uglavnom izražavamo u  $\ell_\infty$ -normi

$$\|f - g\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

ili u  $\ell_2$ -normi

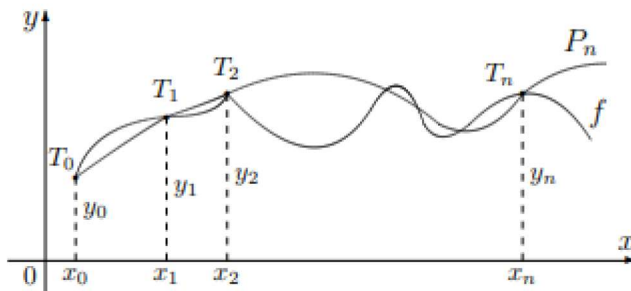
$$\|f - g\|_2 = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}.$$



## 1.1 Interpolacija polinomima

Rješenje interpolacijskog problema svodi se na pronalazak polinoma  $P_n$  stupnja  $n$  čiji graf prolazi zadanim točkama  $T_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ , odnosno vrijedi (vidi Slika 1):

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= y_0 \\ P_n(x_1) &= y_1 \\ &\vdots \\ P_n(x_n) &= y_n. \end{aligned}$$



Slika 1: Interpolacija funkcije

Polinom  $P_n$  zovemo interpolacijski polinom i oblika je

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Pomoću uvjeta  $P_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$ , možemo dobiti sustav od  $n + 1$  jednadžbi s  $(n + 1)$ -nom nepoznanicom

$$\begin{aligned} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 &= y_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 &= y_1 \\ &\vdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 &= y_n \end{aligned} \tag{1.2}$$

čijim rješavanjem možemo dobiti koeficijente polinoma  $P_n$ .

Ovaj sustav možemo zapisati i pomoću izraza  $Va = y$ , odnosno

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ & & \dots & \dots & & & \\ 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 & \dots & x_i^{n-1} & x_i^n \\ & & \dots & \dots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix}}_V \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix}}_a = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}}_y$$

Determinanta matrice ovog sustava naziva se Vandermondova determinanta

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

za koju vrijedi

$$D_n = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

Za međusobno različite  $x_i$ , odnosno  $x_i \neq x_j$  za  $i \neq j$ , vrijednost determinante  $D_n$  je različita od nule. Slijedi da je matrica regularna pa postoji jedinstveno rješenje sustava linearnih jednažbi, tj. postoji jedinstveni interpolacijski polinom  $P_n$ .

Ukoliko tražimo polinom čiji je stupanj manji od  $n$ , rješenje ne mora postojati. Nadalje, za polinom stupnja većeg od  $n$ , interpolacijski polinom nije nužno jedinstven. Ako imamo veliki broj čvorova interpolacije  $n$  i međusobno bliske čvorove interpolacije, rješavanje sustava (1.2) može nas dovesti do ozbiljnog numeričkog problema.

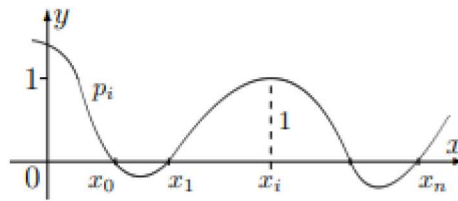
Ovaj problem možemo riješiti raznim metodama, a nama će biti korisne numeričke metode za interpolaciju funkcija poput Lagrangeove i Newtonove metode.

## 1.2 Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Ne moramo nužno rješavati linearni sustav da bismo pronašli koeficijente interpolacijskog polinoma. To često nije jednostavno pa želimo pronaći neku bolju metodu. Pogledajmo najprije jedan općeniti slučaj: pronađimo polinom  $p_i$  stupnja  $n$  za koji vrijedi

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (1.3)$$

Možemo primjetiti da graf polinoma  $p_i$  siječe os  $x$  u točkama  $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ , dok u točki  $x_i$  poprima vrijednost 1 (Vidi Slika 2).



Slika 2: Polinom  $p_i$

Kako ćemo pronaći polinom  $p_i$  koji zadovoljava navedena svojstva iz (1.3)? Budući da su  $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  nultočke polinoma  $p_i$ , mora vrijediti

$$p_i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n). \quad (1.4)$$

Konstantu  $C_i$  određujemo koristeći uvjet  $p_i(x_i) = 1$ :

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}. \quad (1.5)$$

Uvrštavanjem konstante  $C_i$  u izraz (1.4), dobivamo izraz za traženi polinom  $p_i$

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)},$$

odnosno

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Sada se možemo vratiti interpolacijskom problemu te pomoću polinoma  $p_i$  pronaći interpolacijski polinom  $P_n$ . Polinom  $P_n$  za koji vrijedi  $P_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$ , uz uvjet (1.1), možemo prikazati kao linearnu kombinaciju polinoma  $p_i$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{i=0}^n y_i p_i(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \\ &= \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Jasno vidimo da vrijedi

$$P_n(x_j) = \sum_{i=0}^n y_i p_i(x_j) = y_j p_j(x_j) = y_j, \quad \forall j = 0, 1, \dots, n.$$

Oblik interpolacijskog polinoma (1.6) nazivamo Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma.

**Primjer 1.** *Odredite interpolacijski polinom čiji graf prolazi točkama  $T_0(1, 3)$ ,  $T_1(2, 1)$ ,  $T_2(3, 2)$ .*

*Rješenje:*

Uvrštavanjem u formulu za  $p_i(x)$  dobivamo

$$p_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(1 - 2)(1 - 3)} = \frac{x^2 - 5x + 6}{2}$$

$$p_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(2 - 1)(2 - 3)} = \frac{x^2 - 4x + 3}{-1} = -x^2 + 4x - 3$$

$$p_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(3 - 1)(3 - 2)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{2}$$

Uvrštavanjem u formulu (1.6) dobivamo

$$\begin{aligned} P_2(x) &= y_0 p_0(x) + y_1 p_1(x) + y_2 p_2(x) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 6) + 1(-x^2 + 4x - 3) + 2 \cdot \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2) \\ &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 8 \end{aligned}$$

**Primjer 2.** *Odredite interpolacijski polinom za funkciju  $f(x) = \cos(2\pi x)$  u čvorovima  $x \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$*

*Rješenje:*

$$\begin{aligned} y_i &= f(x_i) = \cos(2\pi x_i), \quad i = 0, 1, 2 \\ &\Rightarrow y_0 = 1, y_1 = -\frac{1}{2}, y_2 = -1 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u formulu za  $p_i(x)$  dobivamo

$$p_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})}{(0 - \frac{1}{3})(0 - \frac{1}{2})} = 6x^2 - 5x + 1$$

$$p_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{2})}{(\frac{1}{3} - 0)(\frac{1}{3} - \frac{1}{2})} = -18x^2 + 9x$$

$$p_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{3})}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})} = 12x^2 - 4x$$

Uvrštavanjem u formulu (1.6) dobivamo

$$\begin{aligned} P_2(x) &= y_0 p_0(x) + y_1 p_1(x) + y_2 p_2(x) \\ &= 1(6x^2 - 5x + 1) - \frac{1}{2}(-18x^2 + 9x) - 1(12x^2 - 4x) \\ &= 3x^2 - \frac{11}{2}x + 1 \approx f(x) = \cos(2\pi x) \end{aligned}$$



### 1.3 Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Ako želimo poboljšati aproksimaciju ili smanjiti grešku, onda možemo povećati stupanj interpolacijskog polinoma kako bismo to postigli. U tom slučaju nailazimo na problem jer Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma nije pogodan. Postoji oblik interpolacijskog polinoma kod kojega možemo dodavati točke interpolacije, odnosno povećavamo stupanj interpolacijskog polinoma.

Pogledajmo neprekidnu funkciju  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i pretpostavimo da imamo zadane vrijednosti  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  u čvorovima  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ .

Izraz za interpolacijski polinom tražit ćemo u obliku

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}). \quad (1.7)$$

Kada pronađemo koeficijente  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , vrijednost polinoma  $P_n$  u nekoj točki  $x \neq x_i$  određuje se koristeći izraz

$$P_n(x) = (\dots((a_n(x - x_{n-1}) + a_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots + a_1)(x - x_0) + a_0. \quad (1.8)$$

Sada ćemo puno manje računati u odnosu na ono što smo imali kod Lagrangeovog oblika interpolacijskog polinoma.

Izračunajmo koeficijente  $a_i$  u izrazu (1.7). Interpolacijski polinom, čiji graf prolazi točkama  $T_0 = (x_0, y_0)$  i  $T_1 = (x_1, y_1)$ , bit će linearna funkcija ako je  $n = 1$ , odnosno

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Uvedemo li nove oznake  $f[x_0] := y_0$ ,  $f[x_0, x_1] := \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ , onda gornji izraz za  $P_1(x)$  možemo zapisati kao

$$P_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0).$$

Za  $n = 2$  dobivamo polinom  $P_2$ , čiji graf prolazi točkama  $T_0 = (x_0, y_0)$ ,  $T_1 = (x_1, y_1)$  i  $T_2 = (x_2, y_2)$ . On je oblika

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \lambda(x - x_0)(x - x_1) \quad (1.9)$$

Očito je  $P_2(x_0) = y_0$  i  $P_2(x_1) = y_1$ . Ako u (1.9) uvrstimo  $x = x_2$  tako da vrijedi  $P_2(x_2) = y_2$ , onda dobivamo  $\lambda$  koji je dan sljedećim izrazom

$$\lambda = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{1}{x_2 - x_0} \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right).$$

Ponovno uvodimo nove oznake

$$f[x_0, x_1] := \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad f[x_1, x_2] := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad f[x_0, x_1, x_2] := \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$

Iz ovoga slijedi da je  $\lambda$  upravo jednak izrazu za  $f[x_0, x_1, x_2]$ , stoga je polinom (1.9) oblika

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Na analogan način dobivamo polinom  $P_n(x)$  u točkama  $T_i = (x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n$ , koji je dan formulom

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}). \quad (1.10)$$

Izraz (1.10) nazivamo Newtonov oblik interpolacijskog polinoma  $n$ -tog reda. Brojeve iz gornjeg izraza

$$f[x_0, x_1, \dots, x_i] = \frac{f[x_1, \dots, x_i] - f[x_0, x_1, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}, \quad i = 1, \dots, n$$

zovemo podijeljene razlike.

Općenito podijeljene razlike možemo izračunati prema sljedećoj shemi koju zovemo tablica podijeljenih razlika:

| $x_k$     | $f[x_k]$     | $f[x_k, x_{k+1}]$     | $f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$ | $\dots$  | $f[x_0, \dots, x_n]$ |
|-----------|--------------|-----------------------|----------------------------|----------|----------------------|
| $x_0$     | $f[x_0]$     |                       |                            |          |                      |
| $x_1$     | $f[x_1]$     | $f[x_0, x_1]$         | $f[x_0, x_1, x_2]$         |          |                      |
| $\vdots$  | $\vdots$     | $f[x_1, x_2]$         |                            | $\ddots$ |                      |
| $x_{n-1}$ | $f[x_{n-1}]$ | $f[x_{n-2}, x_{n-1}]$ | $f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$ | $\ddots$ | $f[x_0, \dots, x_n]$ |
| $x_n$     | $f[x_n]$     | $f[x_{n-1}, x_n]$     |                            |          |                      |

Slika 3: Podijeljene razlike

**Primjer 3.** *Izračunajte Newtonov oblik interpolacijskog polinoma za točke  $T_0 = (1, 3)$ ,  $T_1 = (2, 1)$ ,  $T_2 = (3, 2)$ .*

*Rješenje:*

Trebamo pronaći polinom  $P_2(x)$  koristeći izraz

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Iz danih točaka dobivamo

$$x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$$

$$y_0 = 3, y_1 = 1, y_2 = 2$$

Prvo računamo podijeljene razlike:

$$f[x_0] = y_0 = 3$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 3}{2 - 1} = -2$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 1}{3 - 2} = 1$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1 + 2}{3 - 1} = \frac{3}{2}$$

Sada dobivamo

$$P_2(x) = 3 - 2(x - 1) + \frac{3}{2}(x - 1)(x - 2) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 8$$



## 1.4 Ocjena pogreške interpolacijskog polinoma

Do sada smo vidjeli da se vrijednosti funkcije  $f$  i pripadnog interpolacijskog polinoma podudaraju u čvorovima interpolacije, ali to ne znači da se podudaraju i na ostatku domene. Kako je taj polinom aproksimacija funkcije  $f$ , zanima nas koliko je odstupanje između njihovih vrijednosti u točkama koje su različite od čvorova interpolacije. Ako znamo da je funkcija  $f$  dovoljno glatka, onda možemo napraviti i ocjenu pogreške interpolacijskog polinoma. Ta ocjena dana je sljedećim teoremom koji je preuzet iz [1].

**Teorem 1.** *Neka je  $f \in C^{n+1}[a, b]$  funkcija čije vrijednosti su poznate u  $n + 1$  točaka  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,*

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

*i neka je  $P_n$  odgovarajući interpolacijski polinom.*

*Tada za svaki  $\bar{x} \in [a, b]$  postoji  $\xi \in (a, b)$ , tako da je*

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(\bar{x}), \quad \omega(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0) \cdots (\bar{x} - x_n). \quad (1.11)$$

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [1].

Stavimo li  $M_{n+1} := \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$ , onda iz (1.11) slijedi

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|. \quad (1.12)$$

U dobivenom izrazu ne možemo utjecati na faktore  $(n+1)!$  i  $M_{n+1}$ . Iz ovoga vidimo da pogreška aproksimacije ovisi o ponašanju funkcije  $\omega$  koju zovemo polinom čvorova. Možemo zaključiti da će pogreška biti minimalna kada  $\omega$  poprimi najmanju moguću vrijednost.

**Primjer 4.** Procijenite pogrešku interpolacije za funkciju  $f(x) = \cos(2\pi x)$  interpolacijskim polinomom kroz čvorove  $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$  na intervalu  $[0, \frac{1}{2}]$ . Pogrešku ocijenite u točki  $\bar{x} = \frac{5}{12}$ .

*Rješenje:*

Kako je  $n = 2$ , slijedi  $M_3 = \max_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |f'''(x)| = ?$

Prvo izačunamo

$$\begin{aligned} y_i &= f(x_i) = \cos(2\pi x_i), \quad i = 0, 1, 2 \\ \Rightarrow y_0 &= 1, y_1 = -\frac{1}{2}, y_2 = -1. \end{aligned}$$

U Primjeru 2 pokazali smo da je pripadni interpolacijski polinom oblika

$$P_2 = 3x^2 - \frac{11}{2}x + 1.$$

Dalje računamo derivacije od  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos(2\pi x))' = -2\pi \sin(2\pi x), \\ f''(x) &= -4\pi^2 \cos(2\pi x), \\ f'''(x) &= 8\pi^3 \sin(2\pi x). \end{aligned}$$

Dobivamo

$$M_3 = \max_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |8\pi^3 \sin(2\pi x)| = 8\pi^3.$$

Zanima nas ocjena pogreške u točki  $\bar{x} = \frac{5}{12}$ , stoga moramo izračunati vrijednost polinoma čvorova  $\omega$  u toj točki

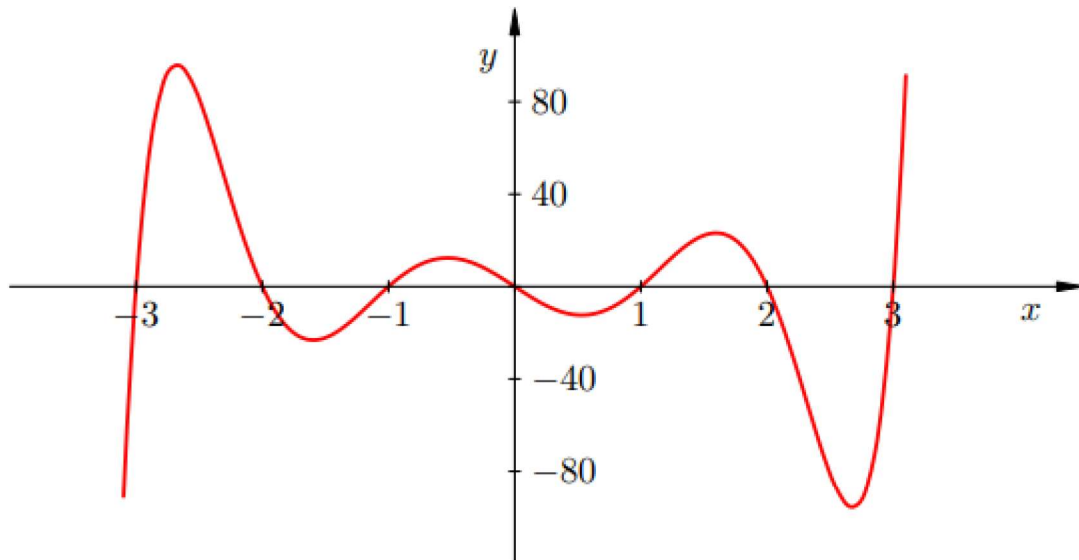
$$\omega(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2) = \left(\frac{5}{12} - 0\right) \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{1728}.$$

Uvrstimo sve dobiveno u (1.12) i dobivamo

$$|f(\bar{x}) - P_2(\bar{x})| \leq \frac{8\pi^3}{3!} \left| -\frac{5}{1728} \right| \approx 0.119623.$$

## 1.5 Nultočke Čebiševljevih polinoma kao čvorovi interpolacije

Sada smo se upoznali s pogreškama kod interpolacijskog polinoma i vidimo kako one ovise o funkciji  $\omega$ . Kod jednoliko raspoređenih čvorova i većeg  $n$ , funkcija  $\omega$  na rubovima područja interpolacije ima jake oscilacije (Slika 4). To znači da ćemo imati veliku pogrešku kod interpolacije.



Slika 4: Polinom  $\omega(x)$  na  $[-3, 3]$  za  $n = 7$ , ekvidistantna mreža

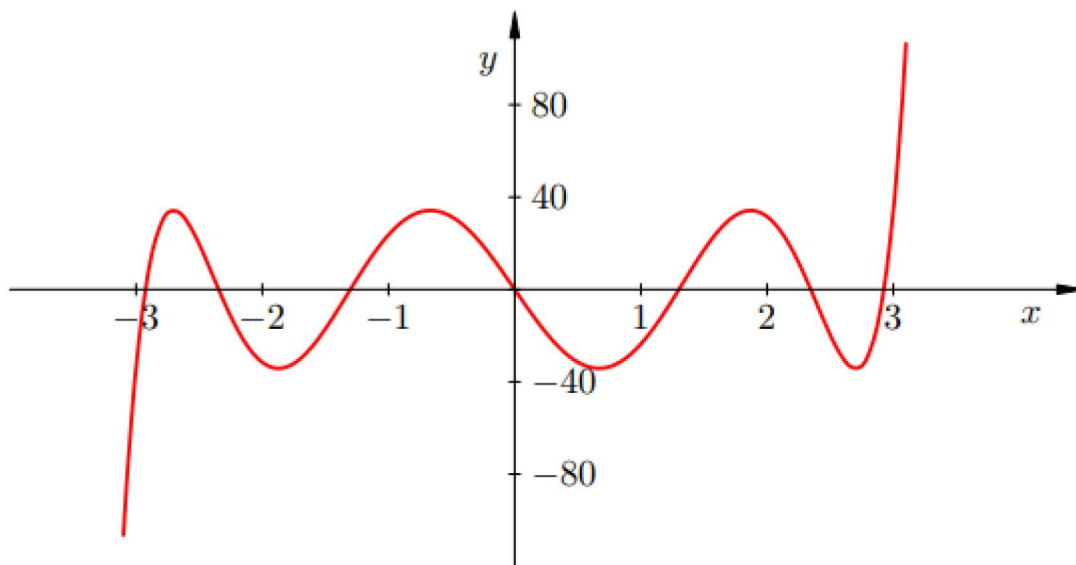
Stoga je naš cilj pokušati izabrati čvorove interpolacije  $x_0, x_1, \dots, x_n$  tako da minimiziramo maksimalnu pogrešku polinoma čvorova

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k),$$

odnosno želimo

$$\max_{a \leq x \leq b} |\omega(x)| \longrightarrow \min. \quad (1.13)$$

Ako uzmemo Čebiševljeve čvorove, greška polinoma čvorova približno je jednaka na svakom podintervalu između čvorova (Slika 5).



Slika 5: Polinom  $\omega(x)$  na  $[-3, 3]$  za  $n = 7$ , Čebiševljeva mreža

Pokažimo sada da Čebiševljevi čvorovi minimiziraju maksimalnu vrijednost polinoma čvorova, tj. da minimiziraju

$$\max_{a \leq x \leq b} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|.$$

Dokaz ćemo provesti na intervalu  $[-1, 1]$ . U slučaju da je funkcija  $f$  zadana na nekom drugom intervalu, onda je linearnom transformacijom  $y = cx + d$  svedemo na interval  $[-1, 1]$ .

Općenito, Čebiševljevi polinomi definiraju se relacijom

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1] \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Iz ovoga slijedi formula za  $(n + 1)$ -vi Čebiševljev polinom  $T_{n+1}$  koja je oblika

$$T_{n+1}(x) = \cos((n + 1) \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

$T_{n+1}$  ima  $(n + 1)$  različitih nultočaka na intervalu  $[-1, 1]$  i dane su sa

$$(n + 1) \arccos x = \frac{\pi}{2}(2k + 1), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

$$x_k = \cos \frac{2k + 1}{n + 1} \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Vratimo se sada našem problemu. Želimo izabrati točke interpolacije  $x_i \in [-1, 1]$  tako da minimiziraju

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|.$$

Minimum će se postići ako stavimo

$$(x - x_0) \cdots (x - x_n) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x),$$

a minimalna će vrijednost biti  $\frac{1}{2^n}$  (Vidi Teorem 5.2., str. 141, Numerička matematika, Rudolf Scitovski).

Definirajmo sada linearnu transformaciju  $u(x)$  za funkciju  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Neka je  $u : [-1, 1] \rightarrow [a, b]$ ,  $u(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x$ .

Sada smo problem prebacili na segment  $[a, b]$  te rješavajući jednačbu  $T_{n+1}(u^{-1})(x) = 0$ , dobivamo formulu za interpolacijske čvorove  $u_k, k = 0, 1, \dots, n$ , tj.

$$(n+1) \arccos \left( \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a} \right) = \frac{\pi}{2}(2k+1), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

$$u_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{2k+1}{n+1} \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Pronašli smo optimalan izbor čvorova interpolacije  $u_0, u_1, \dots, u_n$  na intervalu  $[a, b]$  te su oni gušće raspoređeni pri rubovima intervala. Sada interpolacijski polinom  $P_n$  ima najmanju moguću pogrešku i prema (1.12) dobivamo

$$\|f - P_n\|_\infty = \min_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \min_{x \in [a, b]} |\omega(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}.$$

## Literatura

- [1] R. SCITOVSKI, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2015.
- [2] I. IVANŠIĆ, *Numerička matematika*, Element, Zagreb, 2002.
- [3] M. ROGINA, S. SINGER, S. SINGER, *Numerička analiza*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2003.
- [4] N. UJEVIĆ, *Uvod u numeričku matematiku*, Fakultet prirodoslovno matematičkih znanosti i odgojnih područja, Sveučilište u Splitu, 2004.