# Plohe konstantne srednje zakrivljenosti

**Kokanović, Karlo**

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

**Karlo Kokanović**

# Plohe konstantne srednje zakrivljenosti

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

**Karlo Kokanović**

# Plohe konstantne srednje zakrivljenosti

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Zdenka Kolar-Begović
Komentor: dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2020.

Plohe konstantne srednje zakrivljenosti


## Sažetak

U ovome radu ćemo razmatrati pojam ploha konstantne srednje zakrivljenosti te navesti brojne primjere takvih ploha. Osim u diferencijalnoj geometriji, plohe konstantne srednje zakrivljenosti poznate su i u teoriji optimizacije, budući da predstavljaju rješenja izoperimetrijskog problema. U radu su također navedene osnovne definicije i teoremi lokalne teorije ploha koje ćemo primjenjivati. Nadalje, bavit ćemo se i specijalnim slučajem ploha konstantne srednje zakrivljenosti, tzv. minimalnim plohama i navesti njihovu vezu s određenim pojavama u prirodi. Na kraju ćemo analizirati neke primjere minimalnih ploha za specijalne klase ploha kao što su: rotacijske plohe, translacijske plohe i pravčaste plohe.

Za sve primjere ploha koje navodimo u radu prikazat ćemo i njihovu sliku koja je izrađena u programu Mathematica.



**Ključne riječi:** Lokalna teorija ploha, ploha konstantne srednje zakrivljenosti, minimalne plohe, rotacijske plohe, translacijske plohe, pravčaste plohe


Surfaces of constant mean curvature


## Summary

In this work, we will introduce the concept of a surface of constant mean curvature and present various examples of such surfaces. Beside differential geometry, surfaces of constant mean curvature are well-known in optimization theory since they represent solutions of the isoperimetric problem. In the work we also give basic definitions and theorems which will be applied. Furthermore, we will deal with special class of surfaces of constant mean curvature, the so-called minimal surfaces and show their connection with certain nature phenomena. Finally, we will analyze some examples of minimum surfaces for special classes of surfaces such as: rotational surfaces, translation surfaces, and ruled surfaces.

For all the examples of surfaces that we list in the work, we will also show their image created by software Mathematica.



**Keywords:** Local theory of surfaces, surfaces of constant mean curvature, minimal surfaces, rotational surfaces, translation surfaces, ruled surfaces

# Sadržaj

# Uvod

Svrha ovog rada je proučiti plohe konstantne srednje zakrivljenosti te navesti neke primjere takvih ploha. Rad se sastoji od tri poglavlja kroz koja ćemo se upoznati s plohama konstantne srednje zakrivljenosti i njihovim primjerima. Rad je organiziran na sljedeći način.
U prvom poglavlju navodimo definicije i teoreme koje ćemo primjenjivati u radu. U drugom poglavlju definiramo pojam ploha konstantne srednje zakrivljenosti te navodimo dva primjera takvih ploha, ravninu i sferu. Nadalje, definiramo specijalnu klasu ploha konstantne srednje zakrivljenosti, tzv. minimalne plohe i objašnjavamo njihovu vezu s određenim pojavama u prirodi. U trećem poglavlju navodimo primjere minimalnih ploha za tri specijalne klase ploha: rotacijske plohe, pravčaste plohe i translacijske plohe.

# 1. Osnovni pojmovi lokalne teorije ploha

U ovom poglavlju ukratko ćemo navesti potrebne definicije i teoreme iz lokalne teorije ploha, [3].

**Definicija 1.1.** *Podskup $S \subset \mathbf{R}^3$ je* **ploha** *ako za svaku točku $p \in S$ postoji otvorena okolina $V \subset \mathbf{R}^3$ i preslikavanje $\mathbf{x} : U \to V \cap S$ s otvorenog skupa $U \subset \mathbf{R}^2$ koje je glatki homeomorfizam otvorenih skupova.*

Preslikavanje $\mathbf{x} : U \to V \cap S$ nazivamo **kartom** ili **parametrizacijom plohe S**. Pišemo

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Uvjet injektivnosti diferencijala preslikavanja $\mathbf{x}$ ekvivalentan je uvjetu linearne nezavisnosti vektora $\mathbf{x}_u := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$, $\quad \mathbf{x}_v := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$, [3]. Ploha $S$ je regularna ako je preslikavanje $\mathbf{x}$ regularno, odnosno ako je diferencijal preslikavanja injektivan.

Ako je za neku kartu $\mathbf{x} : U \to S$, $c(I) \subset \mathbf{x}(U)$, preslikavanje $\mathbf{x} \circ c : I \to U$ glatko, kažemo da je $c : I \to S$ glatko preslikavanje.

**Definicija 1.2.** *Svako glatko preslikavanje $c : I \to S$, $I \subset \mathbb{R}$ nazivamo* **krivuljom na plohi**.

**Definicija 1.3.** *Neka je $S$ regularna ploha, $\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3$ karta plohe $S$ i $p \in \mathbf{x}(U)$.* **Tangencijalni vektor** *karte $\mathbf{x}$ u točki $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ je vektor $v_p \in \mathbf{R}^3_p$ za koji postoji krivulja $c : I \to S$, $c(I) \subset \mathbf{x}(U)$ za koju vrijedi*

$$c(0) = p, \quad c'(0) = v_p.$$

Skup svih tangencijalnih vektora u $p$ označavamo s $T_pS$.

**Teorem 1.1.** *Skup $T_pS$ je potprostor prostora $T_p\mathbf{R}^3$ dimenzije 2.*

*Dokaz:* Vidjeti [3, str. 55]. □

Potprostor $T_pS$ se naziva **tangencijalna ravnina** plohe $S$ u točki $p$. Za točku plohe kažemo da je regularna ako u njoj postoji jedinstvena tangencijalna ravnina. Za regularnu točku $p \in S$ tangencijalna ravnina sadrži tangente s diralištem u $p$ svih onih krivulja koje leže na plohi $S$ i prolaze točkom $p$. Točke plohe u kojima takve tangente ne formiraju ravninu, odnosno tangencijalni vektori su linearno zavisni, nazivaju se **singularnim** točkama plohe $S$.

Neka je $S$ regularna ploha i $\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3$ karta koja pokriva područje $\mathbf{x}(U)$ plohe $S$. Kako je tangencijalna ravnina $T_pS$ plohe $S$ u točki $p$ ravnina razapeta vektorima $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ tada je jedinični vektor normale te ravnine vektor

$$n = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}.$$

Taj vektor naziva se **standardni jedinični vektor normale** karte $\mathbf{x}$.

**Definicija 1.4.** *Preslikavanje $S_p : T_pS \to T_p\mathbf{R}^3$ definirano s*

$$S_p(v_p) = -D_{v_p}n(p)$$

*nazivamo* **operatorom oblika plohe** *$S$ u točki $p$.*

Operator iz prethodne definicije se još naziva i Weingartenovo preslikavanje.

**Definicija 1.5. Srednja zakrivljenost** *plohe $S$ u točki $p$ je funkcija $H : S \to \mathbf{R}$ definirana s*

$$H(p) = \frac{1}{2}trS_p$$

*pri čemu je $S_p : T_pS \to T_pS$ operator oblika plohe $S$, a $tr$ oznaka za trag matrice operatora $S_p$.*

S obzirom da je $S_p$ simetričan operator, postoji ortonormirana baza od $T_pS$ u kojoj je njegov matrični prikaz dijagonalna matrica

$$S_p = \begin{bmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{bmatrix}.$$

**Definicija 1.6.** *Svojstvene vrijednosti $k_1(p), k_2(p)$ operatora $S_p$ nazivamo* **glavnim zakrivljenostima** *plohe $S$ u točki $p$.*

Srednja zakrivljenost plohe u njenoj točki $p$ definirana je pomoću glavnih zakrivljenosti plohe $k_1$ i $k_2$ formulom

$$H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)).$$

Budući da u singularnim točkama plohe nemamo definiran vektor normale plohe, u takvim točkama srednja zakrivljenost nije definirana.

Ploha je u prostoru jednoznačno određena lokalnim invarijantnim veličinama koje se zovu prva i druga fundamentalna forma. Prva fundamentalna forma služi za mjerenja na plohi kao što su duljina luka, kut između dviju krivulja plohe, površina omeđenog dijela plohe i slično.

**Definicija 1.7. Prva fundamentalna forma** *plohe $S$ u točki $p \in S$ je simetričan, bilineaaran funkcional $I : T_pS \times T_pS \to \mathbf{R}$ definiran sljedećom formulom*

$$I(v_p, w_p) = v_p \cdot w_p = v \cdot w.$$

Pridruženu kvadratnu formu $I : T_p \to \mathbf{R}$, $I(v_p) = v_p \cdot v_p$, također nazivamo prva fundamentalna forma.

Prvu fundamentalnu formu plohe možemo zapisati i preko karte $\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3$. Za $v_p \in T_pS$ postoji krivulja $c : I \to S$ takva da je $c(0) = p$, $c'(0) = v_p$. Neka je $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ i prikažimo krivulju $c$ u karti, odnosno $c(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$. Tada vrijedi

$$v_p = c'(0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0)u'(0) + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)v'(0).$$

Slijedi,

$$I(v_p) = v_p \cdot v_p = \mathbf{x}_u^2(u_0, v_0)(u'(0))^2 + 2\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + \mathbf{x}_v^2(u_0, v_0)(v'(0))^2.$$

Funkcije $E, F, G : U \to \mathbf{R}$ definirane s

$$E = \mathbf{x}_u^2, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v^2.$$

nazivamo **fundamentalne veličine prvog reda**(koeficijenti prve fundamentalne forme) plohe S u karti $\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3$. Pomoću njih možemo kraće zapisati definiciju prve fundamentalne forme na sljedeći način:

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Druga fundamentalna forma može nam dati odgovor na pitanje kakvog je oblika ploha u okolini neke točke na njenoj površini proučavanjem svojstava krivulja na plohi koje prolaze tom točkom.

**Definicija 1.8. Druga fundamentalna forma** *plohe $S$ u točki $p \in S$ je simetričan, bilinearan funkcional $II : T_pS \times T_pS \to \mathbf{R}$ definiran sljedećom formulom*

$$II(v_p, w_p) = S_p(v_p) \cdot w_p.$$

Pridruženu kvadratnu formu $II : T_pS \to \mathbf{R}$, $II(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p$, također nazivamo druga fundamentalna forma.

Drugu fundamentalnu formu plohe možemo zapisati i preko karte $\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3$. Za $v_p \in T_pS$ postoji krivulja $c : I \to S$ takva da je $c(0) = p$, $c'(0) = v_p$. Neka je sada $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ i prikažimo krivulju $c$ u karti, odnosno $c(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$. Tada vrijedi

$$v_p = c'(0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0)u'(0) + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)v'(0).$$

Slijedi,

$$\begin{aligned} II(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p =& S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_u(u_0, v_0)(u'(0))^2 + S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + \\ &+ \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \cdot S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)u'(0)v'(0)) + S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0)(v'(0))^2. \end{aligned}$$

Funkcije $L, M, N : U \to \mathbf{R}$ definirane s

$$
\begin{aligned}
L &= S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_u(u_0, v_0), \\
M &= S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \cdot S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)), \\
N &= S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0)
\end{aligned}
$$

nazivamo **fundamentalne veličine drugog reda** plohe S u karti $\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3$.
Uvedimo operativnije izraze za fundamentalne veličine drugog reda(koeficijenti druge fundamentalne forme).

**Propozicija 1.1.** *Neka je $\mathbf{x} : U \to S$ karta. Tada vrijede sljedeće formule*

$$L = n \cdot \mathbf{x}_{uu} = \frac{1}{W} \det(\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$$

$$M = n \cdot \mathbf{x}_{uv} = \frac{1}{W} \det(\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$$

$$N = n \cdot \mathbf{x}_{vv} = \frac{1}{W} \det(\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$$

*gdje je $n = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$ standardno jedinično normalno polje od S.*

*Dokaz:* Vidjeti [3, str. 70]. □

Pomoću njih možemo kraće zapisati definiciju druge fundamentalne forme na sljedeći način

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Znajući kako su definirani koeficijente prve i druge fundamentalne forme, srednju zakrivljenost plohe $S$ računamo po formuli

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

# 2. Plohe konstantne srednje zakrivljenosti

Zakrivljenost plohe očito utječe na oblik krivulja na plohi. U ovom poglavlju ćemo proučiti plohe konstantne srednje zakrivljenosti. Ovakve plohe dobivamo kao rješenja izoperimetrijskog problema, tj. problema minimizacije površine zatvorene plohe bez promjene volumena plohe [1].

**Definicija 2.1.** *Plohu $M$ u $\mathbf{R}^3$ nazivamo* **plohom konstantne srednje zakrivljenosti** *ako je u svakoj točki $p$ plohe $M$ srednja zakrivljenost konstantna, odnosno ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbf{R}$ takav da je*

$$H(p) = \lambda.$$

Primjeri takvih ploha su ravnina i sfera te ćemo u nastavku izračunati njihove srednje zakrivljenosti.

**Primjer 2.1.** *Parametrizacija ravnine dana je sljedećim izrazom*

$$\mathbf{x}(u, v) = au + bv \quad a, b \in \mathbb{R}^3.$$

*Izračunajmo fundamentalne veličine prvog reda.*

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(u, v) &= (a_1, a_2, a_3) \\
\mathbf{x}_v(u, v) &= (b_1, b_2, b_3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_u^2 \\
&= (a_1, a_2, a_3)(a_1, a_2, a_3) \\
&= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\
&= (a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2, b_3) \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \mathbf{x}_v^2 \\
&= (b_1, b_2, b_3)(b_1, b_2, b_3) \\
&= b_1^2 + b_2^2 + b_3^2.
\end{aligned}$$

*Sada možemo izračunati*

$$W^2 = EG - F^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2.$$

*Dakle,*

$$W = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2}.$$

*Odredimo sada fundamentalne veličine drugog reda.*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu}(u,v) &= (0,0,0) \\ \mathbf{x}_{uv}(u,v) &= (0,0,0) \\ \mathbf{x}_{vv}(u,v) &= (0,0,0). \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{W} \det(\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

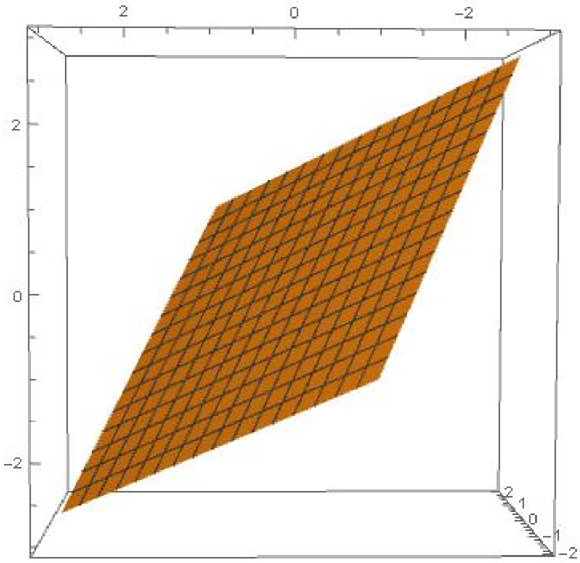
$$M = \frac{1}{W} \det(\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = \frac{1}{ab} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$N = \frac{1}{W} \det(\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = \frac{1}{ab} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

*Slijedi da je srednja zakrivljenost dana s*

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot 0 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \cdot 0 + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \cdot 0}{2\Big((a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2\Big)} =$$

$$= \frac{0}{2\Big((a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2\Big)} = 0.$$




Slika 1: Ravnina jednadžbe $\mathbf{x}(u,v) = (u+v, 2u-v, -u+2v)$

**Primjer 2.2.** *Parametarska jednadžba sfere dana je sljedećim izrazom*

$$\mathbf{x}(u,v) = (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)). \quad u \in \langle -\pi, \pi\rangle, v \in \langle 0, \pi\rangle.$$

*Izračunajmo fundamentalne veličine prvog reda.*

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(u,v) &= (-\sin(u)\sin(v), \cos(u)\sin(v), 0)\\
\mathbf{x}_v(u,v) &= (\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), -\sin(v)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_u^2\\
&= (-\sin(u)\sin(v), \cos(u)\sin(v), 0)(-\sin(u)\sin(v), \cos(u)\sin(v), 0)\\
&= \sin^2(u)\sin^2(v) + \cos^2(u)\sin^2(v)\\
&= \sin^2(v).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v\\
&= (-\sin(u)\sin(v), \cos(u)\sin(v), 0)(\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), -\sin(v))\\
&= -\sin(u)\sin(v)\cos(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)\sin(u)\cos(v)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \mathbf{x}_v^2\\
&= (\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), -\sin(v))(\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), -\sin(v))\\
&= \cos^2(u)\cos^2(v) + \sin^2(u)\cos^2(v) + \sin^2 v\\
&= 1.
\end{aligned}$$

*Sada možemo izračunati*

$$W^2 = EG - F^2 = (\sin^2(v) - 0^2 = \sin^2(v).$$

*Slijedi*

$$W = \sqrt{\sin^2(v)} = \sin(v).$$

*Izračunajmo fundamentalne veličine drugog reda.*

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uu}(u,v) &= (-\cos(u)\sin(v), -\sin(u)\sin(v), 0)\\
\mathbf{x}_{uv}(u,v) &= (-\sin(u)\cos(v), \cos(u)\cos(v), 0)\\
\mathbf{x}_{vv}(u,v) &= (-\cos(u)\sin(v), -\sin(u)\sin(v), -\cos(v)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)\\
&= \frac{1}{\sin(v)}\begin{vmatrix} -\cos(u)\sin(v) & -\sin(u)\sin(v) & 0\\ -\sin(u)\sin(v) & \cos(u)\sin(v) & 0\\ \cos(u)\cos(v) & \sin(u)\cos(v) & -\sin(v)\end{vmatrix}\\
&= \frac{1}{\sin(v)}\Big(-\sin(v)\Big)\Big(-\cos^2(u)\sin^2(v) - \sin^2(u)\sin^2(v)\Big)\\
&= \frac{\sin^3(v)}{\sin(v)} = \sin^2(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)\\
&= \frac{1}{\sin(v)}\begin{vmatrix} -\sin(u)\cos(v) & \cos(u)\cos(v) & 0\\ -\sin(u)\sin(v) & \cos(u)\sin(v) & 0\\ \cos(u)\cos(v) & \sin(u)\cos(v) & -\sin(v)\end{vmatrix}\\
&= \frac{1}{\sin(v)}\Big(-\sin(v)\Big)\Big(-\sin(u)\cos(v)\cos(u)\sin(v) + \sin(u)\cos(v)\cos(u)\sin(v)\Big)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$N = \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$$

$$= \frac{1}{\sin(v)} \begin{vmatrix} -\cos(u)\sin(v) & -\sin(u)\sin(v) & -\cos(v) \\ -\sin(u)\sin(v) & \cos(u)\sin(v) & 0 \\ \cos(u)\cos(v) & \sin(u)\cos(v) & -\sin(v) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sin(v)}\Big( -\cos(v)\Big( -\sin^2(u)\cos(v)\sin(v) - \cos^2(u)\cos(v)\sin(v)$$

$$- \sin(v)\Big( -\cos^2(u)\sin^2(v) - \sin^2 u \sin^2(v)\Big)\Big)$$

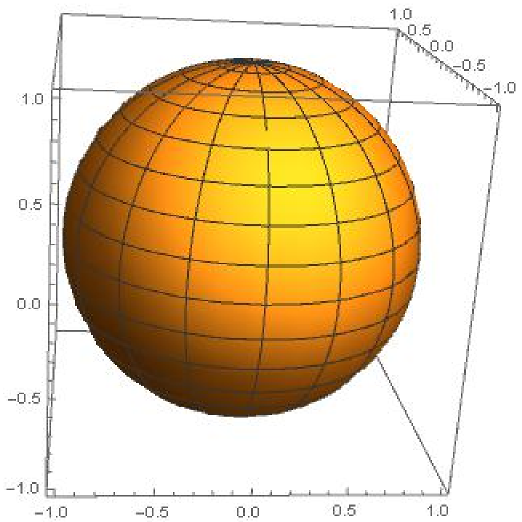
$$= \frac{\sin(v)}{\sin(v)}$$

$$= 1$$

*Slijedi da je srednja zakrivljenost dana s*

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{\sin^2(v) \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot \sin^2(v)}{2(\sin^2(v) - 0^2)}$$

$$= \frac{2\sin^2(v)}{2\sin^2(v)} = 1.$$




Slika 2: Sfera parametarske jednadžbe $\mathbf{x}(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos u)$

## 2.1 Minimalne plohe

Specijalan slučaj ploha konstantne srednje zakrivljenosti su minimalne plohe.

**Definicija 2.2.** *Minimalne plohe su one plohe čija je srednja zakrivljenost*

$$H(p) = 0$$

*u svakoj točki p plohe.*

Uočimo da iz definicije srednje zakrivljenosti slijedi da za minimalnu plohu vrijedi da je $k_1 = -k_2$. Pojam minimalne plohe susrećemo i u prirodi.

Prirodna minimalna ploha označava oblike koje poprima opna od sapunice razapeta na žicu savijenu u zadanu prostornu krivulju. Opna uvijek ima najmanju površinu od svih ploha koje zadovoljavaju iste rubne uvjete. Prije nego što je numerička analiza postala moguća razvojem računala, ova se pojava koristila u izradi fizikalnih modela. Na minimalnoj su plohi naprezanja jednaka u svakoj točki i u svim smjerovima tangencijalne ravnine uslijed čega je i nosivost materijala svuda jednoliko iskorištena.

Ako zadamo plohu parametrizacijom $(x, y, f(x, y))$, njezina srednja zakrivljenost će iznositi 0 ako i samo ako funkcija $f(x, y)$ zadovoljava Lagrangeovu nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu, [2, str. 59]

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Kao trivijalno rješenje Lagrangeove jednadžbe može se dobiti najjednostavnija minimalna ploha - ravnina. Prva netrivijalna rješenja, katenoid i helikoid, dali su Meusnier i Euler u 18. stoljeću.

Lagrangeova jednadžba prilično je složena. Danas pomoću računala i simboličkih matematičkih programa (Mathematica i dr.) možemo dobiti niz analitički definiranih minimalnih ploha odnosno rješenja Lagrangeove jednadžbe.

# 3. Primjeri minimalnih ploha

U ovom poglavlju promatrat ćemo primjere minimalnih ploha za specijalne klase ploha kao što su: rotacijske plohe, pravčaste plohe i translacijske plohe.

## 3.1 Minimalne rotacijske plohe

Najprije precizno definirajmo rotacijske plohe.

**Definicija 3.1. Rotacijska ploha** *je skup točaka koji nastaje rotacijom neke krivulje (prostorne ili ravninske) oko pravca u toj ravnini pri čemu krivulju koja rotira nazivamo generatrisom plohe, a pravac oko kojega krivulja rotira osi rotacije.*

Postoji veliki broj primjera rotacijskih ploha. Jedna od najpoznatijih, kojom ćemo se mi baviti, je katenoid.

### 3.1.1 Katenoid

Švicarski znanstvenik Euler je 1744. godine pokazao da rotacijom lančanice $y = a\mathrm{ch}x$ oko danog pravca nastaje rotacijska ploha koju je nazvao **katenoid**. Kako bismo izračunali fundamentalne veličine prvog i drugog reda, te iz njih pripadnu srednju zakrivljenost, navedimo parametrizaciju katenoida. Parametrizacija katenoida kao rotacijske plohe je oblika

$$\mathbf{x}(u,v) = \Big(c\cos(u)\mathrm{ch}\Big(\frac{v}{c}\Big), c\sin(u)\mathrm{ch}\Big(\frac{v}{c}\Big), v\Big).$$

Izračunajmo najprije fundamentalne veličine prvog reda.

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \Big(-c\sin(u)\mathrm{ch}\Big(\frac{v}{c}\Big), c\cos(u)\mathrm{ch}\Big(\frac{v}{c}\Big), 0\Big)$$

$$\mathbf{x}_v(u,v) = \Big(\cos(u)\mathrm{sh}\Big(\frac{v}{c}\Big), \sin(u)\mathrm{sh}\Big(\frac{v}{c}\Big), 1\Big).$$

Koristeći definicije za fundamentalne veličine prvog reda imamo sljedeći niz jednakosti.

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_u^2 \\
&= \Big(-c\sin u\mathrm{ch}\Big(\frac{v}{c}\Big), c\cos u\mathrm{ch}\Big(\frac{v}{c}\Big), 0\Big)^2 \\
&= c^2\sin^2 u\mathrm{ch}^2\Big(\frac{v}{c}\Big) + c^2\cos^2 u\mathrm{ch}^2\Big(\frac{v}{c}\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= c^2\mathrm{ch}^2\Big(\frac{v}{c}\Big). \\
F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\
&= \Big(-c\sin u\mathrm{ch}\Big(\frac{v}{c}\Big), c\cos u\mathrm{ch}\Big(\frac{v}{c}\Big), 0\Big)\Big(\cos u\mathrm{sh}\Big(\frac{v}{c}\Big), \sin u\mathrm{sh}\Big(\frac{v}{c}\Big), 1\Big) \\
&= -c\sin u\cos u\mathrm{sh}\Big(\frac{v}{c}\Big)\mathrm{ch}\Big(\frac{v}{c}\Big) + c\sin u\cos u\mathrm{ch}\Big(\frac{v}{c}\Big)\mathrm{sh}\Big(\frac{v}{c}\Big) \\
&= 0. \\
G &= \mathbf{x}_v^2 \\
&= \Big(\cos u\mathrm{sh}\Big(\frac{v}{c}\Big), \sin u\mathrm{sh}\Big(\frac{v}{c}\Big)\Big) \\
&= \cos^2 u\mathrm{sh}^2\Big(\frac{v}{c}\Big) + \sin^2 u\mathrm{sh}^2\Big(\frac{v}{c}\Big) + 1 \\
&= \mathrm{sh}^2\Big(\frac{v}{c}\Big) + 1 \\
&= \mathrm{ch}^2\Big(\frac{v}{c}\Big).
\end{aligned}
$$

Sada imamo

$$
W^2 = EG - F^2 = c^2\mathrm{ch}^2\Big(\frac{v}{c}\Big)\mathrm{ch}^2\Big(\frac{v}{c}\Big) - 0^2 = c^2\mathrm{ch}^4\Big(\frac{v}{c}\Big).
$$

Dakle,

$$
W = c \cdot \mathrm{ch}\Big(\frac{v}{c}\Big).
$$

Izračunajmo sada fundamentalne veličine drugog reda.

$$
\mathbf{x}_{uu}(u,v) = \Big(-c\cos(u)\mathrm{ch}\Big(\frac{v}{c}\Big), -c\sin(u)\mathrm{ch}\Big(\frac{v}{c}\Big), 0\Big)
$$

$$
\mathbf{x}_{uv}(u,v) = \Big(-\sin(u)\mathrm{sh}\Big(\frac{v}{c}\Big), \cos(u)\mathrm{sh}\Big(\frac{v}{c}\Big), 0\Big)
$$

$$
\mathbf{x}_{vv}(u,v) = \Big(\frac{1}{c}\cos(u)\mathrm{ch}\Big(\frac{v}{c}\Big), \frac{1}{c}\sin(u)\mathrm{ch}\Big(\frac{v}{c}\Big), 0\Big).
$$

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \\
&= \frac{1}{c\cdot \mathrm{ch}^2(\frac{v}{c})}\begin{vmatrix} -c\cos(u)\mathrm{ch}(\frac{v}{c}) & -c\sin(u)\mathrm{ch}(\frac{v}{c}) & 0 \\ -c\sin(u)\mathrm{ch}(\frac{v}{c}) & c\cos(u)\mathrm{ch}(\frac{v}{c}) & 0 \\ \cos(u)\mathrm{sh}(\frac{v}{c}) & \sin(u)\mathrm{sh}(\frac{v}{c}) & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{c\cdot \mathrm{ch}^2(\frac{v}{c})}\Big(-c^2\cos^2(u)\mathrm{ch}^2\Big(\frac{v}{c}\Big) - c^2\sin^2(u)\mathrm{ch}^2\Big(\frac{v}{c}\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{c\cdot \mathrm{ch}^2(\frac{v}{c})}\Big(-c^2\mathrm{ch}^2\Big(\frac{v}{c}\Big)\Big) \\
&= -c.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \\
&= \frac{1}{c\cdot \mathrm{ch}^2(\frac{v}{c})}\begin{vmatrix} \sin(u)\sinh\left(\frac{v}{c}\right) & \cos(u)\mathrm{sh}\left(\frac{v}{c}\right) & 0 \\ -c\sin(u)\mathrm{ch}\left(\frac{v}{c}\right) & c\cos(u)\mathrm{ch}\left(\frac{v}{c}\right) & 0 \\ \cos(u)\mathrm{sh}\left(\frac{v}{c}\right) & \sin(u)\mathrm{sh}\left(\frac{v}{c}\right) & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{c\cdot \mathrm{ch}^2(\frac{v}{c})}\Big(-c\sin(u)\cos(u)\mathrm{sh}\Big(\frac{v}{c}\Big)\mathrm{ch}\Big(\frac{v}{c}\Big) + c\sin(u)\cos(u)\mathrm{sh}\Big(\frac{v}{c}\Big)\mathrm{ch}\Big(\frac{v}{c}\Big)\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

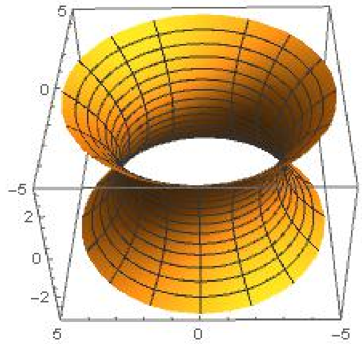
$$
\begin{aligned}
N &= \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \\
&= \frac{1}{c\cdot \mathrm{ch}^2(\frac{v}{c})}\begin{vmatrix} \frac{1}{c}\cos(u)\mathrm{ch}\left(\frac{v}{c}\right) & \frac{1}{c}\sin(u)\mathrm{ch}\left(\frac{v}{c}\right) & 0 \\ -c\sin(u)\mathrm{ch}\left(\frac{v}{c}\right) & c\cos(u)\mathrm{ch}\left(\frac{v}{c}\right) & 0 \\ \cos(u)\mathrm{sh}\left(\frac{v}{c}\right) & \sin(u)\mathrm{sh}\left(\frac{v}{c}\right) & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{c\cdot \mathrm{ch}^2(\frac{v}{c})}(\cos^2(u)\mathrm{ch}^2\Big(\frac{v}{c}\Big) + \sin^2(u)\mathrm{ch}^2\Big(\frac{v}{c}\Big))
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{c}.$$

Pomoću prethodno izračunatih veličina odredimo srednju zakrivljenost.

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{c^2 \mathrm{ch}^2 \frac{v}{c} \cdot \frac{1}{c} - 2 \cdot 0 \cdot 0 + \mathrm{ch}^2 \frac{v}{c} \cdot -c}{2(c^2 \mathrm{ch}^2 \frac{v}{c} \mathrm{ch}^2 \frac{v}{c} - 0^2)} = 0.$$

Kako je srednja zakrivljenost jednaka nuli pokazali smo da je katenoid minimalna ploha. Katenoid možemo skicirati u programu Mathematica.




Slika 3: Katenoid parametarske jednadžbe $\mathbf{x}(u, v) = (3\cos(u)\mathrm{ch}(\frac{v}{3}), c\sin(u)\mathrm{ch}(\frac{v}{3}), v)$.

## 3.2 Pravčaste minimalne plohe

**Definicija 3.2.** *Neka je $e = e(u)$ jedinično polje duž $c$, gdje je $c : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ regularna krivulja. Ploha koja dopušta parametrizaciju*

$$\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve(u), \quad u \in \mathbf{I}, v \in \mathbf{R}$$

*naziva se pravčastom plohom.*

Nužno je da vrijedi

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$$

da bi tako definiran skup točaka bio regularna ploha.
Pravčaste plohe možemo zamisliti i kao plohe koje nastaju gibanjem pravca duž krivulje. Imamo dosta primjera pravčastih ploha, no nama je najzanimljivija helikoid jer je to primjer minimalne pravčaste plohe. U nastavku ćemo se baviti tom pravčastom plohom.

### 3.2.1 Helikoid

**Definicija 3.3.** *Helikoid je pravčasta ploha koja nastaje istovremenom rotacijom i translacijom pravca oko fiksnog pravca na kojeg je okomit (tzv. helikoidalnim gibanjem).*

Parametarska jednadžba helikoida kao pravčaste plohe:

$$\mathbf{x}(u,v) = (0,0,au) + v(b\cos{(u)}, b\sin{(u)}, 0), \quad a,b>0.$$

Izračunajmo najprije fundamentalne veličine prvog reda.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(u,v) &= (-bv\sin(u), bv\cos(v), a)\\
\mathbf{x}_v(u,v) &= (b\cos(u), b\sin(u), 0)
\end{aligned}$$

Koristeći definicije za fundamentalne veličine prvog reda imamo sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_u^2\\
&= (-bv\sin(u), bv\cos(v), a)\\
&= b^2v^2\sin^2(u) + b^2v^2\cos^2(u) + a^2\\
&= b^2v^2 + a^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v\\
&= (-bv\sin(u), bv\cos(v), a)(b\cos(u), b\sin(u), 0)\\
&= -b^2v\cos(u)\sin(u) + b^2v^2\cos(u)\sin(u)\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \mathbf{x}_v^2\\
&= (b\cos(u), b\sin(u), 0)(b\cos(u), b\sin(u), 0)\\
&= b^2\cos^2(u) + b^2\sin^2(u) = b^2\\
&= b^2.
\end{aligned}$$

Sada imamo

$$W^2 = EG - F^2 = b^4v^2 + a^2b^2 = b^2(b^2v^2 + a^2).$$

Izračunajmo sada fundamentalne veličine drugog reda.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uu}(u,v) &= (-bv\cos{(u)}, -bv\sin u, 0)\\
\mathbf{x}_{uv}(u,v) &= (-b\sin{(u)}, b\cos(u), 0)\\
\mathbf{x}_{vv}(u.v) &= (0,0,0)
\end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$$

$$= \frac{1}{b\sqrt{b^2v^2+a^2}} \begin{vmatrix} -bv\cos(u) & -bv\sin(u) & 0 \\ -bv\sin(u) & bv\cos(u) & a \\ b\cos(u) & b\sin(u) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{b\sqrt{b^2v^2+a^2}} - a\Big(-b^2v\cos(u)\sin(u) + b^2\cos(u)\sin(u)\Big)$$

$$= 0.$$

$$M = \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$$

$$= \frac{1}{b\sqrt{b^2v^2+a^2}} \begin{vmatrix} -b\cos(u) & -b\sin(u) & 0 \\ -bv\sin(u) & bv\cos(u) & a \\ b\cos(u) & b\sin(u) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{b\sqrt{b^2v^2+a^2}}(-b\sin^2(v) - b\cos^2(v))$$

$$= \frac{-b}{b\sqrt{b^2v^2+a^2}}.$$

$$N = \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$$

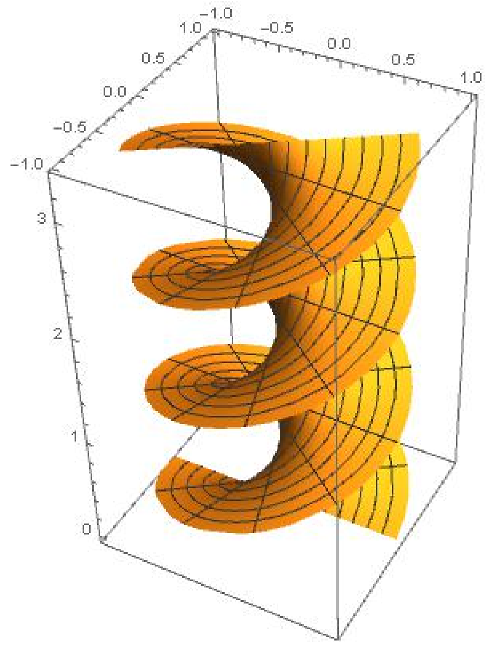
$$= \frac{1}{b\sqrt{b^2v^2+a^2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -bv\sin(u) & bv\cos(u) & a \\ b\cos(u) & b\sin(u) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$

Pomoću prethodno izračunatih veličina odredimo srednju zakrivljenost helikoida.

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{(b^2v^2+a^2)\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot \frac{-b}{b\sqrt{b^2v^2+a^2}} + b^2\cdot 0}{2\Big((b^2v^2+a^2)b - 0^2\Big)} = 0.$$

Kako je $H = 0$ uvjerili smo se da je helikoid minimalna ploha. Helikoid se također može skicirati u programu Mathematica.




Slika 4: Helikoid parametarske jednadžbe $\mathbf{x}(u, v) = (0, 0, u/3) + v(\cos(u), \sin(u), 0)$

## 3.3 Translacijske plohe

**Definicija 3.4.** *Jednostavna ploha čija je parametrizacija dana s*

$$\mathbf{x}(u, v) = c_1(u) + c_2(v)$$

*naziva se translacijska ploha, pri čemu* $c_1(u)$ *i* $c_2(v)$ *nazivamo regularnim krivuljama. Generatrisama plohe nazivamo krivulje* $c_1(u)$ *i* $c_1(v)$*.*

Tangencijalni vektori generatrisa ne smiju biti kolinearni kako bi skup točaka definiran tom parametrizacijom bio regularna ploha, odnosno

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0.$$

Kao primjer minimalne translacijske plohe svakako možemo spomenuti i ravninu kao i cilindar, ali ćemo detaljnije predstaviti i vizualno zanimljivu Scherkovu plohu.

### 3.3.1 Scherkova ploha

Scherkova ploha dobila je ime po matematičaru Heinricku Scherku koji je 1834. godine opisao dvije potpuno ugrađene minimalne plohe. Prva ploha je dvostruko periodična, dok je druga jednostruko periodična (vidjeti sliku 5). Prva ploha je asimptotska s dvije konačne familije paralelnih ravnina koje su međusobno ortogonalne i nalaze se blizu $z = 0$. Druga ploha se sastoji od dvije ortogonalne ravnine čije sjecište čini dio tunela u naizmjeničnim smjerovima.
Njena parametrizacija dana je s

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(u,v,\frac{1}{a}\ln\frac{\cos(au)}{\cos(av)}\right).$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u,v)&=(1,0,-\operatorname{tg}(au))\\ \mathbf{x}_v(u,v)&=(0,1,\operatorname{tg}(av)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E&=\mathbf{x}_u^2\\ &=(1,0,-\operatorname{tg}(au))(1,0,-\operatorname{tg}(au))\\ &=1+\operatorname{tg}^2(au)\\ F&=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v\\ &=(1,0,-\operatorname{tg}(au))(0,1,\operatorname{tg}(av))\\ &=-\operatorname{tg}(au)\operatorname{tg}(av)\\ G&=\mathbf{x}_v^2\\ &=(0,1,\operatorname{tg}(av))(0,1,\operatorname{tg}(av))\\ &=1+\operatorname{tg}^2(av).\end{aligned}$$

Slijedi

$$W^2=(1+\operatorname{tg}^2(au))(1+\operatorname{tg}^2(av))-(-\operatorname{tg}(au)\operatorname{tg}(av))^2$$

$$W=\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2(au))(1+\operatorname{tg}^2(av))-(-\operatorname{tg}(au)\operatorname{tg}(av))^2}$$

Izračunajmo sada fundamentalne veličine drugog reda.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu}(u,v)&=(0,0,-a\sec^2(au))\\ \mathbf{x}_{uv}(u,v)&=(0,0,0)\\ \mathbf{x}_{vv}(u.v)&=(0,0,a\sec^2(av))\end{aligned}$$

$$L=\frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{uu},\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2(au))(1+\operatorname{tg}^2(av))-(-\operatorname{tg}(au)\operatorname{tg}(av))^2}}\begin{vmatrix}0&0&-a\sec^2(au)\\1&0&-\operatorname{tg}(au)\\0&1&\operatorname{tg}(av)\end{vmatrix}$$

$$= \frac{a\sec^2(au)}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2(au))(1+\operatorname{tg}^2(av)) - (-\operatorname{tg}(au)\operatorname{tg}(av))^2}}$$

$$M = \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2(au))(1+\operatorname{tg}^2(av)) - (-\operatorname{tg}(au)\operatorname{tg}(av))^2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\operatorname{tg}(au) \\ 0 & 1 & \operatorname{tg}(av) \end{vmatrix}$$

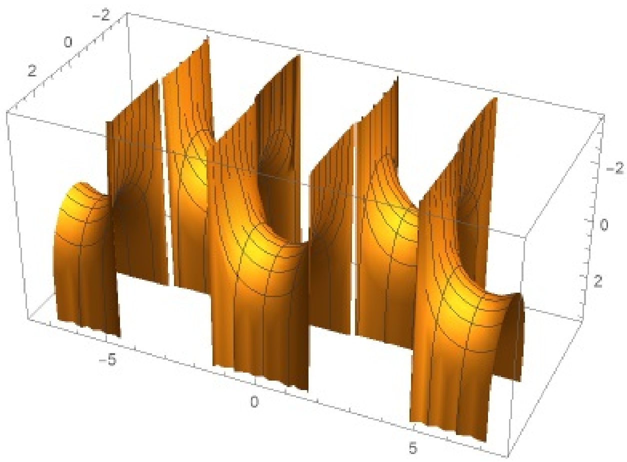
$$= 0$$

$$N = \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2(au))(1+\operatorname{tg}^2(av)) - (-\operatorname{tg}(au)\operatorname{tg}(av))^2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a\sec^2(av) \\ 1 & 0 & -\operatorname{tg}(au) \\ 0 & 1 & \operatorname{tg}(av) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a\sec^2(av)}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2(au))(1+\operatorname{tg}^2(av)) - (-\operatorname{tg}(au)\operatorname{tg}(av))^2}}$$

Uvrštavanjem izraza dobivenih za koeficijente prve, odnosno druge fundamentalne forme slijedi $H = 0$.




Slika 5: Scherkova ploha parametarske jednadžbe $\mathbf{x}(u,v) = (u, v, \ln\frac{\cos(au)}{\cos(av)})$

# Literatura


[1] K. Kenmotsu,*Surfaces with Constant Mean Curvature*, Tohoku University, Sendai, Japan, 2003

[2] I. Kodrnja, E. Šamec, *Familija ploha Heltocat*, Kog 7(2019), 57–64.

[3] Ž. M. Šipuš, S. Vidak, *Uvod u diferencijalnu geometriju*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2016.

[4] P. Vukašinović, *Plohe konstantne srednje zakrivljenosti*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2015.