# Mertonov model kreditnog rizika

**Brkić, Iva**

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Iva Brkić

# Mertonov model kreditnog rizika

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Iva Brkić

# Mertonov model kreditnog rizika

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Danijel Grahovac

Osijek, 2020.

# Sadržaj

# 1 Uvod

Osnovno dobro kojim se trguje na svim tržištima je kredit odnosno zajam i on povezuje financijska tržišta (vidi [15]). Kredit se može definirati kao dužničko-vjerovnički odnos koji nastaje temeljem povjerenja između osobe koja posuđuje neka sredstva (vjerovnik) i osobe koja prima ta sredstva uz obvezu vraćanja (dužnik) i druge kreditne uvjete.
Rizik ima jednu od najznačajnih uloga na financijskom tržištu. Rizik je star koliko i bankarstvo, jer posuđivanje novca drugoj ugovornoj strani uvijek je sa sobom nosilo opasnost da posuđena sredstva neće biti vraćena. To je neizvjesni čimbenik koji na zadovoljstvo investitora utječe negativno. Financijske institucije su izložene brojnim rizicima i zbog toga nam je potrebno znanje o upravljanju i kontroli rizika. Jedan rezultat globalne financijske krize bila je jasna spoznaja da banke moraju biti podložne strožim pravilima i zahtjevima u pogledu područja poput kapitala. Nakon Baselskog sporazuma[1] kojem je osnovni cilj bio bolje upravljanje rizicima u bankama povezivanjem kreditnog rizika, propisanih kapitalnih rezervi i koeficijenata adekvatnosti kapitala, banke moraju imati određeni iznos kapitala za pokriće rizika svojstvenog njezinom kreditnom portfelju. Basel II omogućava kreditnim institucijama oslanjanje na svoje interne procjene komponenata rizika koje određuju kapitalne zahtjeve za pokriće kreditog rizika. To je natjeralo banke da razviju statističke alate kojim bi se zaštitile od gubitaka. Kreditni rizik je jedan od najznačajniji rizika kojem su izložene banke u svom poslovanju. Šarlija u [18] definira kreditni rizik na sljedeći način: Kreditni rizik je posljedica ugovorene i/ili moguće transakcije između davatelja i uzimatelja sredstava odnosno varijacija mogućih povrata koji bi se mogli zaraditi na financijskoj transakciji zbog zakašnjelog ili nepotpunog plaćanja glavnice i/ili kamata. Odnosno kreditni rizik je vjerojatnost da dužnik neće otplatiti dug. Default (status neispunjavanja obveza) je događaj kada se tvrtka ne može suočiti sa obvezom plaćanja koju duguje nekom subjektu.
Prema Odluci o adekvatnosti kapitala[2] koju je propisala HNB, default druge ugovorne strane nastaje kada je ispunjen bilo koji ili oba sljedeća uvjeta:

- kreditna institucija smatra vjerojatnim da druga ugovorna strana neće u cijelosti otplatiti svoje kreditne obveze, ne uzimajući u obzir mogućnost naplate iz realizacije instrumenata osiguranja (ukoliko postoje);
- druga ugovorna strana kasni više od 90 dana po bilo kojoj materijalno značajnoj kreditnoj obvezi.

Statusom neispunjavanja obveza (default) neće se smatrati iznos dospjelog duga koji zadovoljava barem jedan od sljedećih uvjeta (to je prag materijalnosti):

- iznos dospjelog duga ne prelazi 500 kuna za izloženosti prema pravnim osobama, odnosno 100 kuna za izloženosti prema fizičkim osobama

[1] Baselska komisija za nadzor banaka je tijelo Banke za međunarodne namire (BIS), koja usuglašava međunarodne standarde nadzora nad bankama.
[2] Odluka o adekvatnosti jamstvenog kapitala kreditnih institucija, Zagreb, 2. siječnja 2009.; dostupno na stranici www.hnb.hr

- dospjeli iznos ne čini više od 2,5% ukupne izloženosti umanjene za dospjeli dio.

Vjerojatnost ulaska u default (engl. Probability od default) predstavlja vjerojatnost neispunjenja obveza u određenom vremenskom periodu. Istraživanje Svjetske banke [3] pokazuje da od banaka i financijskih institucija koje propadaju, 90% njih propada zbog izloženosti kreditnom riziku. Bankovni sustav Republike Hrvatske ima relativno visoke stope kredita koji ne donose prihode. U posljednjih desetak godina stanje u Hrvatskoj se poboljšalo i smanjio se broj kredita koji ne donose prihode, a to se dogodilo zbog poboljšanja makroekonomske situacije i jačeg fokusa banaka na naplatu. Matematički modeli opisuju posljedice financijskog tržišta koje je složeno i potpuno nepredvidivo.

Cilj ovog rada je dati sliku osnovne podjele strukturnih modela kreditnih rizika i prikazati matematičke izvode i primjene pojedinih modela te ih međusobno usporediti i analizirati. Model koji se detaljno obrađuje je Mertonov model te se navodi KMV model koji je praktična implementacija Mertonovog modela. Analiza i primjena Mertonovog modela će se provesti nad podacima hrvatskih tvrtki koje trguju na Zagrebačkoj burzi.

[3] www.worldbank.org

# 2 Strukturni modeli kreditnog rizika

Strukturni modeli su jedni od kreditnih modela koji pokušavaju objasniti mehanizme zbog kojih dolazi do defaulta, tj. statusa neispunjavanja obveza. Pokušavaju odgovoriti na pitanja kako izmjeriti kreditni rizik i kako ga pravilno ocijeniti. Strukturni modeli bazirani su na kapitalnoj strukturi. Prema [18] kapitalna struktura je kombinacija dugova, kapitala i ostale pasive koje poduzeće koristi za financiranje imovine (aktive). Ukoliko je vrijednost pasive veća od vrijednosti aktive kapital je negativan, to znači da je tvrtka prezadužena i velika je vjerojatnost da će otići u stečaj. Osnovna ideja strukturnih modela je da tvrtka ne izvršava svoje obveze ukoliko joj je kapital negativan. Ovakav način razmišljanja doprinosi razvoju znanosti o upravljanju kreditnim rizicima i nastanku mnogih modela u okviru financijske industrije. U ovom radu će se obraditi i jedan takav model pod nazivom KMV model, ali rad započinje s Mertonovim modelom kao uvodom u strukturne modele.

Najprije se uvode osnovni pojmovi financijskog tržišta kako bi se lakše uveli i objasnili strukturni modeli.

## 2.1 Osnovni pojmovi

Financijsko tržište je dinamično, složeno i nepredvidivo, a matematički modeli su gruba aprokismacija stvarnog financijskog tržišta.

Modeli koji se obrađuju u ovom radu zahtjevat će dvije vrste imovine (rizičnu i nerizičnu). Dionice su najčešći oblik rizične imovine zbog nepredvidivog fluktuiranja cijena. Nerizična imovina donosi siguran povrat. Neke od njih su novac i obveznice i njihova nam je vrijednost poznata u svakom trenutku.

Manipulirati rizikom možemo preko izvedenih financijskih instrumenata. Europske opcije su najjednostavniji izvedeni financijski instrumenti koji se mogu koristiti za smanjivanje rizika na financijskom tržištu.

**Definicija 2.1** *Opcija je ugovor koji vlasniku (kupcu opcije) daje pravo, ali ne i obavezu, kupiti ili prodati neku financijsku imovinu do određenog trenutka (vrijeme dospijeća) u budućnosti po unaprijed dogovorenoj cijeni (cijena izvršenja). Prodavatelj opcije se ujedno naziva i pisac opcije.*

Opcije se mogu ugovoriti na bilo kojoj vrsti financijske imovine od kojih su najčešća dionice. Moguće je ugovriti opcije i financijskoj imovini poput obveznica, deviza, zlata i kave. Europske opcije mogu se provoditi samo na dan dospijeća. Razlikujemo Europske put i call opcije.

Europska *call* opcija (ECO) je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obavezu, kupiti neku financijsku imovinu u trenutku dospijeća $T$ po cijeni izvršenja $K$. Vrijednost u trenutku dospijeća je za njezinog vlasnika modelirana slučajnom varijablom

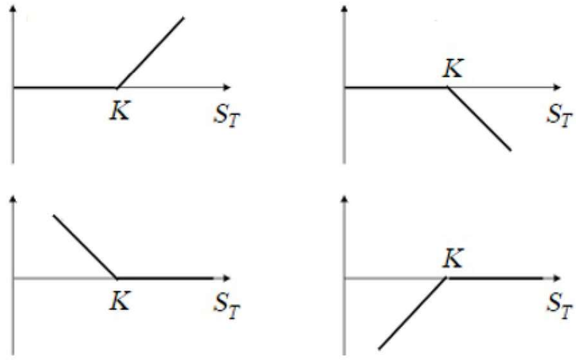
$$C_T^{CALL} = \max(0, S_T - K) := (S_T - K)^+,$$

gdje je $S_T$ cijena imovine u trenutku $t = T$ i $K$ cijena izvršenja. Postoje dvije pozicije za call opciju, to su duga pozicija i kratka pozicija. Kupac imovine je u dugoj poziciji, dok je prodavatelj u kratkoj poziciji. S dugom call pozicijom se očekuje rast vrijednosti financijske imovine, dok s kratkom call pozicijom se očekuje pad vrijednosti financijske imovine. Vlasnik put opcije iskoristit će pravo da imovinu proda za $K$ u trenutku $T$ ako je $K > S_T$, u suprotnom $(K < S_T)$ je opcija bezvrijedna.

Europska *put* opcija (EPO) je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obavezu, prodati financijsku imovinu u trenutku dospijeća T po cijeni izvršenja K. Vrijednost *put* opcije u trenutku dospijeća je za njezinog vlasnika modelirana slučajnom varijablom

$$C_T^{PUT} = \max(0, K - S_T) := (K - S_T)^+.$$

Postoje dvije pozicije za put opciju, to su duga pozicija i kratka pozicija. S dugom put pozicijom se očekuje pad vrijednosti financijske imovine, dok s kratkom put pozicijom se očekuje rast vrijednosti financijske imovine.




Slika 2.1: Vrijednost u trenutku dospijeća kao funkcija cijene dionica za kupca europske call opcije (gore lijevo), za prodavatelja europske call opcije (gore desno), za kupca put opcije (dolje lijevo) i za prodavatelja put opcije s cijenom izvršenja $K$ i cijenom imovine $S_T$ (dolje desno).

Formula koja povezuje vrijednosti ECO i EPO u istom trenutku $t = T$ naziva se *call − put* paritet i dana je s:

$$C_T^{CALL} - C_T^{PUT} = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K, \tag{2.1}$$

gdje je $T$ vrijeme dospijeća opcije, $K$ cijena izvršenja, $C_T^{CALL}$ vrijednost *call* opcije u trenutku dospijeća $T$ i $C_T^{PUT}$ vrijednost *put* opcije u trenutku dspijeća $T$.

Zanima nas kolika je vrijednost premije za promatranu opciju kako niti kupac opcije niti prodavatelj opcije nebi trpili ogromne gubitke ili ostvarili sigurnu zaradu. Odgovor na to pitanje dali su nam Black, Scholes i Merton 1973. godine u obliku Black Scholes modela za što su osvojili Nobelovu nagradu 1997.godine.

## 2.2 Black-Scholesova formula

S obzirom na to da se Mertonov model temelji na primjeni Black Scholesove formule za vrednovanje europske put i call opcije potrebno navesti kratak pregled njihovog rada.

U radu [3] su Black i Scholes analizirali geometrijsko Brownovo gibanje kao model za kretanje cijena dionica u neprekidnom vremenu i tako su dobili formulu za nearbitražno vrednovanje europske *put* i *call* opcije.

**Definicija 2.2** *Brownovo gibanje $(Z_t, t \geq 0)$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je slučajan proces u neprekidnom vremenu s neprebrojivim skupom stanja koji ima sljedeća svojstva:*

1. $Z_0 = 0$ *gotovo sigurno*
2. *(Nezavisnost prirasta) Za proizvoljne $t_0, t_1, .., t_n \geq 0$ takve da je $t_0 < t_1 < ... < t_n$ slučajne varijable $Z_{t_1} - Z_{t_0}, Z_{t_2} - Z_{t_1}, ..., Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}$ su nezavisne*
3. *(Stacionarnost prirasta) Za proizvoljne $s, t \geq 0$ takve da je $0 \leq s < t$ je $Z_t - Z_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.*

**Definicija 2.3** *Geometrijsko Brownovo gibanje je slučajan proces $(S_t, t \geq 0)$ definiran s*

$$S_t = S_0 e^{\sigma Z_t + t(\mu - \frac{\sigma^2}{2})},$$

*pri čemu je $(Z_t, t \geq 0)$ Brownovno gibanje, a $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ konstante.*

Najprije je potrebno navesti pretpostavke na financijskom tržištu koje su primjenjene u Black Scholes modelu.

**Pretpostavka 1.** Svi sudionici na tržištu imaju jednak pristup informacijama.

**Pretpostavka 2.** Nema transakcijskih troškova pri kupovini ili prodaji financijske imovine. Sva financijska imovina je beskonačno djeljiva, likvidna (nisu ograničene količine kupnje i prodaje). Kamatna stopa jednaka je za investiranje i posuđivanje.

**Pretpostavka 3.** Postoji dovoljno ulagača s usporedivom razinom bogatstva kako bi mogli kupovati i prodavati onoliko koliko žele po određenoj tržišnoj cijeni.

**Pretpostavka 4.** Cijena osnovne rizične financijske imovine u trenutku $t = 0$ je poznata, a za $t > 0$, cijene se mogu modelirati nenegativnim slučajnim varijablama.

**Pretpostavka 5.** Dionice ne isplaćuju dividende, tj. posjedovanjem imovine ne ostvaruje se dodatni prihod ili trošak.

Osnovne pretpostavke modela, uz Pretpostavke 1, 2, 3, 4, 5 navedene ranije, su:

- trgovanje je moguće neprekidno u periodu $[0, \infty)$

- trguje se dvama financijskim instrumentima: jednom nerizičnom financijskom imovinom čija cijena u trenutku $t \geq 0$ i iznosi $e^{rt}$ i jednom rizičnom financijskom imovinom čija je cijena modelirana pomoću geometrijskog Brownovog gibanja

$$S_t = S_0 e^{\sigma Z_t + t(\mu - \frac{\sigma^2}{2})}$$

za neko Brownovo gibanje $(Z_t)$ i $S_0$ konstanta koja označava početnu vrijednost. $S_0$, $S_t$ i $Z_t$ definirane na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Model i matematička analiza zasnovani su na stohastičkim diferencijabilnim jednadžbama i Itôvim integralima, (vidi [3]). Vjerojatnosna mjera do sada je bila $P$. Kako bi odredili formulu za nearbitražno vrednovanje europske *put* i *call* opcije, bilo je potrebno odrediti vjerojatnost $P^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ neutralnu na rizik, tj. vjerojatnosnu mjeru u odnosu na koju je proces

$$(e^{-rt} S_t, \quad t \in [0, T])$$

$\mathbb{F}-$martingal u neprekidnom vremenu, pri čemu je $\mathbb{F}$ prirodna filtracija Brownovog gibanja. Nova mjera $P^*$ je ekvivalentna vjerojatnosnoj mjeri $P$.

Girsanovljev teorem direkno omogućuje pronalazak te vjerojatnosti.

**Teorem 2.1** *(Girsanovljev teorem) Neka je $\{Z_t, t \in [0, T]\}$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ te neka je $\mathbb{F} = \{F_t, t \in [0, T]\}$ njegova prirodna fitracija. Tada je proces*

$$X_t = e^{-qZ_t - \frac{1}{2}q^2 t}, \quad t \geq 0, q \in \mathbb{R}$$

*$\mathbb{F}$-martingal. Relacija*

$$P^*(A) = E(S_t I_A),$$

*za $A \in \mathcal{F}$ definira vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ takva da je $P^* \approx P$ i u odnosu na proces $\{\tilde{Z}_t, t \in [0, T]\}$*

$$\tilde{Z}_t = Z_t + qt, \quad t \geq 0$$

*Brownovo gibanje na $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$ adaptirano na istu filtraciju $\mathbb{F}$.*

Za detaljniju obradu i dokaz (vidi [19]).
Vjerojatnosna mjera $P^*$ je vjerojatnosna mjera uz koju se rizična financijska imovina ponaša kao nerizična.

Direktnom primjenom Girsanovljevljeva teorema na Black Scholesov model slijedi fomula za nearbitražno vrednovanje europske *call* i *put* opcije.

Nearbitražna cijena europske *call* opcije s vremenom dospijeća $T$ i cijenom izvršenja $K$ u trenutku $t$ dana je s:

$$C_t^{CALL} = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \tag{2.2}$$

gdje je:

$$d_1 = \frac{\left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{2.3}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2} dz. \tag{2.4}$$

Vrijednost call opcije ovisi o preostalom vremenu do dospijeća opcije $T-t$ ($T$ je vrijeme dospijeća), cijeni izvršenja $K$, trenutnoj cijeni dionice $S$, kamatnoj stopi $r$ i volatilnosti $\sigma$.

Korištenjem *put-call* pariteta i dobivene Black-Scholes formule (2.2) za europsku *call* opciju u trenutku $t$ dobivamo formulu za vrijednovanje europske *put* opcije u trenutku $t$:

$$C_t^{PUT} = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_tN(-d_1). \tag{2.5}$$

Za detaljniju obradu i izvod formule koji su izvan opsega ovog rada, (vidi [3]).

# 3 Mertonov model

Robert C. Merton postavio je temelje za izradu strukturnih modela. U radu [13] prezentira formulu za procjenu vjerojatnosti da tvrtka neće isplatiti svoje obveze koristeći Black-Scholes formulu.
Analitičari i danas koriste Mertonov model kako bi shvatili koliko je tvrtka sposobna ispunjavati financijske obveze, otplaćivati dug i procjeniti mogućnost propasti tvrtke, tj. ulazak u default.

## 3.1 Pretpostavke modela

Uz pretpostavke navedene u ranijem poglavlju, Merton u [13] navodi i dodatne pretpostavke koje slijede u nastavku.

**Pretpostavka 6.** Cijena obveznice koja u trenutku $T = 1$ isplaćuje 1, jednaka je $P(t) = e^{-r(T-t)}$, gdje je $r$ konstantna kamatna stopa.

**Definicija 3.1** *Bezkuponska obveznica (obveznica bez kupona) s vremenom dospijeća T je ugovor kojim se vlasniku obveznice jamči isplata jediničnog iznosa u trenutku T bez međuisplata. Oznaka za vrijednost obveznice u trenutku t je $P_t$, gdje je $t < T$. Očito je onda $P_T = 1$.*

**Pretpostavka 7.** Vrijedi Modigliani-Millerov teorem:

**Teorem 3.1 (Modigliani-Millerov teorem)** *U odsutnosti poreza, troškova bankrota i asimetričnih informacija na efikasnom tržištu vrijednost tvrtke ne ovisi o načinu financiranja. Ukupni trošak kapitala neovisan je o kapitalnoj strukturi.*

Drugim riječima, ukupni trošak kapitala[4] uz određene uvjete neovisan je o kombinaciji duga i kapitala.
Iskaz i dokaz može se pronaći u [14].

**Pretpostavka 8.** Dinamika kretanja vrijednosti imovine $A_t$ neke tvrtke opisana je stohastičkom diferencijalnom jednadžbom

$$dA_t = \mu A_t dt + \sigma_A A_t dZ_t,$$

gdje je $\mu$ srednja (očekivana) stopa povrata, $Z_t \geq 0$ standardno Brownovo gibanje, $\sigma_A$ volatilnost imovine.

**Pretpostavka 9.** U slučaju ulaska u default, vlasnici dugova dobivaju cjelokupnu preostalu vrijednost imovine, a default se događa samo po dospijeću vremena $T$.

U stvarnom svijetu nije lako zadovoljiti sve navedene pretpostavke. To nikako nije razlog za umanjivanje vrijednosti modela, naprotiv, potrebno je razmotriti hoće li model dati dobre rezultate ukoliko ne budu zadovoljene sve pretpostavke.

[4]Ukupni trošak kapitala smatramo očekivanu profitabilnost investiranja.

## 3.2 Osnovni koncept

Ideja je modelirati dug i tržišnu vrijednost kapitala tvrtke kao financijske izvedenice na vrijednost imovine. Prateći Black Scholes model, Merton je došao do zaključka da vrijednost imovine tvrtke modelirana geometrijskim Brownovim gibanjem kao što je navedeno u Pretpostavci 8. Vijednost imovine $A_t$ tvrtke opisana je:

$$dA_t = \mu A_t dt + \sigma_A A_t dZ_t, \quad A_0 > 0 \tag{3.1}$$

gdje je $\mu$ srednja (očekivana) stopa povrata, $Z_t \geq 0$ standardno Brownovo gibanje, $\sigma_A$ je volatilnost imovine. Jednadžba (3.1) se može zapisati u odnosu na vjerojatnost $P^*$ neutralnu na rizik pomoću $dZ_t^* = dZ_t + \frac{\mu - r}{\sigma_A} dt$,

$$dA_t = rA_t dt + \sigma_A A_t dZ_t^*, \quad A_0 > 0, \tag{3.2}$$

gdje je $V_t$ vrijednost imovine u trenutku $t$, $r$ bezrizična kamatna stopa i $Z_t^*$ Brownovo gibanje. Pretpostavka je da se ukupni dug $D_t$ sastoji samo od jedne obveze ili obveznice bez kupona nominalne vrijednosti $D$ s dospijećem $T$ i nema drugih obveza. Dug se smatra rizičnim zbog mogućnosti neizvršenja obveza i računa se kao razlika bezrizičnog duga i očekivanog gubitka. Rizičan dio je dio pasive, a njegova vrijednost se procjenjuje iz vrijednosti imovine čija vrijednosti nije unaprijed poznata.
U trenutku $t$ tvrtka ima vrijednost imovine $A_t$ financiranu pomoću kapitala $E_t$ i obveza $D_t$. Vrijednost imovine tvrtke u trenutku $t$ je dana s:

$$A_t = E_t + D_t, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.3}$$

Bitna značajka Mertonovog modela je da firma ne može vršiti plaćanja, isplate ili izdati novi dug prije dospijeća $T$. Default se događa kada tvrtka nije u mogućnosti isplatiti obveze i to se jedino može dogoditi po dospijeću $T$.
Karakteristika Mertonovog modela je da je vrijeme dospijeća $T$ jednako 1 godina.

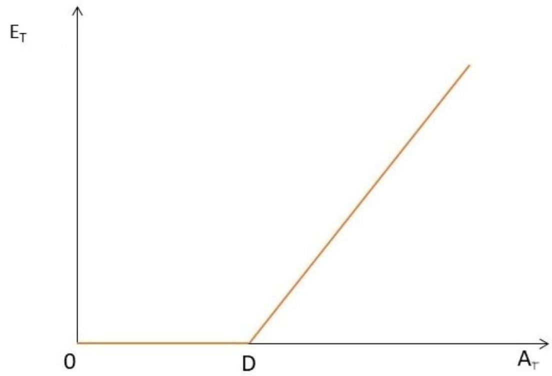
$D$ se još naziva i točka defaulta (engl. default point) ili razina defaulta, jer ukoliko tržišna vrijednost imovine tvrtke padne ispod razine $D$ tvrtka je u defaultu. U Mertonovom modelu $D$ je vrijednost obveza kojima je dospijeće 1 godina.

Dva su scenarija po dospijeću $T$ za odgovor na pitanje hoće li tvrtka otići u default ili ne.

- $D < A_T$ - postoji dovoljna vrijednost tvrtke za podmirivanje obveza, tvrtka neće otići u default. Vlasnici duga dobit će obećani iznos $D_T = D$, a vlasnici dionica ostvaruju dobit u iznosu $A_T – D$. Vrijednost imovine tvrtke je ono što ostaje nakon isplate dugova.

- $D \geq A_T$ - tvrtka nema dovoljno sredstava za otplatu dugova, sva preostala imovina ide vlasnicima duga, tj. tvrtka je u defaultu. Drugim riječima, vlasnici duga primaju isplatu jednaku iznosu vrijednosti imovine $D_T = A_T$, a vlasnici dionica ne dobivaju ništa, $E_T = 0$ (vidi [9]).

Kapital je vlasnikov udio u imovini tvrtke (imovina može biti u vlasništvu vlasnika ili se duguje vanjskim stranama). Po dospijeću $T$ odnos između varijabli vrijednosti kapitala i vrijednosti imovine možemo prikazati:




Slika 3.1: Dijagram naplate vlasnika call opcije

Vrijednost kapitala u vremenu T možemo izraziti kao:

$$E_T = \begin{cases} A_T - D, & A_T \geq D \\ 0, & A_T < D \end{cases} = \max(A_T - D, 0) = (A_T - D)^+. \tag{3.4}$$

Sve dok je vrijednost imovine ispod vrijednosti obveza, vrijednost kapitala je nula jer svu imovinu potražuju vlasnici dugova. Ukoliko je vrijednost imovine veća od nominalne vrijednosti duga, vlasnici udjela primaju preostalu vrijednost nakon isplate dugovanja. Kapital tvrtke po dospijeću $T$ odgovara dugoj poziciji *call* opcije na vrijednost imovine tvrtke $A_T$ u trenutku $T$ s cijenom izvršenja $D$ i rokom dospijeća $T$, što je ujedno i osnovna ideja Mertonovog rada. Default se shvaća kao neuspjeh izvršenja opcije. Iz toga slijedi jednostavna primjena Black Scholesove formule za vrednovanje europskih opcija.

Primjenom Black-Scholesove formule, vrijednost kapitala u trenutku $t$, $0 \leq t \leq T$ jednaka je:

$$E_t = A_t N(d_1) - De^{-r(T-t)} N(d_2) \tag{3.5}$$

gdje je:
$E_t$ tržišna vrijednost kapitala (vrijednost *call* opcije),
$D$ je točka defaulta (izvršna cijena *call* opcije),
$A_t$ je tržišna vrijednost imovine u trenutku $t$, $0 \leq t \leq T$
$r$ je bezrizična kamatna stopa (konstanta),
$\sigma_A$ je volatilnost imovine (konstanta),
$T - t$ je vrijeme do dospijeća $T$,

$N$ je funkcija distribucije standardne normalne slučajne varijable (2.4) čija se vrijednost računa u:

$$d_1 = \frac{\ln\frac{A_t}{D} + (r + \frac{\sigma_A^2}{2})(T-t)}{\sigma_A\sqrt{T-t}} \tag{3.6}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A\sqrt{t} = \frac{\ln\frac{A_t}{D} + (r - \frac{\sigma_A^2}{2})(T-t)}{\sigma_A\sqrt{T-t}} \tag{3.7}$$

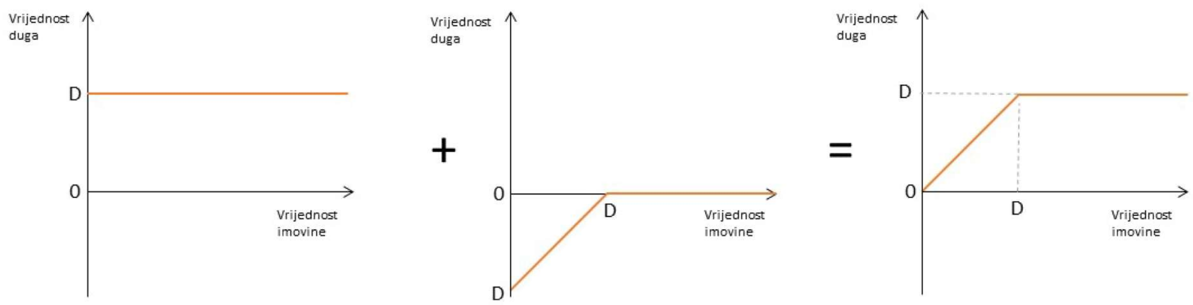
Iznos $D_T$ koji su primili vlasnici dugova po dospijeću T može se izraziti s:

$$D_T = \min(A_T, D) = \begin{cases} D, & A_T \geq D \\ A_T, & A_T < D \end{cases}.$$

Prema [17] tako definirana vrijednost duga $D_T$ u vremenu T može se opisati kao razlika nominalne vrijednosti duga i put opcije u kratkoj poziciji. Odnosno, pomoću *put* i *call* pariteta slijedi da je kupnja *call* opcije s cijenom izvršenja $D$ ekvivalentna posjedovanju imovine s otplatnom vrijednosti $D$ i posjednovanju *put* opcije. Odnosno,

$$D_T = \min(A_T, D) = D - \max(D - A_T, 0).$$

Na taj način dužnik daje garanciju da će nadoknaditi gubitak ukoliko dođe do neizvršenja obveza, odnosno ukoliko tvrka uđe u default. Kako ne postoji dijagram naplate koji savršeno opisuje otplatu duga, [17] to prikazuje na sljedeći način:




Slika 3.2: Dekompozicija vrijednosti duga u vremenu T do dospijeća

Kombinacijom naplate bezrizičnog duga (prvi dijagram na slici 3.2) i naplate *put* opcije u kratkoj poziciji (drugi dijagram na slici 3.2) slijedi naplata rizičnog duga (treći dijagram na slici 3.2). Vlasnik duga na ovaj način daje pravo vlasniku kapitala da proda imovinu tvrtke.

Vrijednost obveza $D_t$ u trenutku $t$, $0 \leq t \leq T$ je razlika sadašnje vrijednosti barijere defaulta $D$ i očekivanog gubitka koji se modelira s *put* opcijom čija je cijena izvršenja jednaka barijeri defaulta $D$:

$$D_t = De^{-r(T-t)} - (De^{-r(T-t)}N(-d_2) - A_tN(-d_1))$$

Zaključak je sljedeći:

- Tvrtka će otići u default i kapital će izgubiti na vrijednosti ukoliko imovina vrijedi manje od duga po dospijeću.
- Tvrtka neće otići u default i kapital će vrijediti razlici vrijednosti imovine i vrijednosti duga ukoliko imovina vrijedi više nego li dug po dospijeću.

## 3.3 Vjerojatnost ulaska u default PD

Vjerojatnost ulaska u default $PD$ (engl. Probability of default) u odnosu na vjerojatnost $P^*$ neutralnu na rizik u trenutku dospijeća $T$ se izračunava na sljedeći način:

$$PD = P^*(A_T \leq D) = P^*(\ln A_T \leq \ln D) \tag{3.8}$$

Potrebno je odrediti logaritam vrijednosti imovine.
Vrijednost imovine slijedi proces oblika (3.2).
Neka je $f(t, A_t) = \ln(A_t)$, tada :$\frac{d(f(t,A_t))}{dt} = 0$, $\frac{d(f(t,A_t))}{dA_t} = \frac{1}{A_t}$, $\frac{d^2(f(t,A_t))}{dA_t^2} = -\frac{1}{A_t^2}$.

Vrijednost imovine u trenutku $t$ može se izračunati primjenim Itôve leme na funkciju $\ln(A_t)$, pri čemu slijedi:

$$\begin{aligned}
d(\ln A_t) &= \frac{1}{A_t}A_t\sigma_A dZ_t^* + \left[0 + \frac{1}{A_t}A_t r + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{A_t^2}\right)(A_t\sigma_A)^2\right] dt \\
&= \sigma_A dZ_t^* + \left[0 + r - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right] dt \\
&= \sigma_A dZ_t^* + \left[r - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right] dt
\end{aligned}$$

Integriranjem dobivamo:

$$\int_0^t d\ln A_u = \sigma_A \int_0^T dZ_u^* + \int_0^t \left(r - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right) du$$

$$[\ln A_t - \ln A_0] = \sigma_A[Z_t^* - Z_0^*] + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)[t - 0]$$

$$\ln\left(\frac{A_t}{A_0}\right) = \sigma_A Z_t^* + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right) t$$

$A_t$ ima log-normalnu distribuciju i iz toga slijedi:

$$\ln A_t = \ln A_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma_A^2)t + \sigma Z_t^*, \tag{3.9}$$

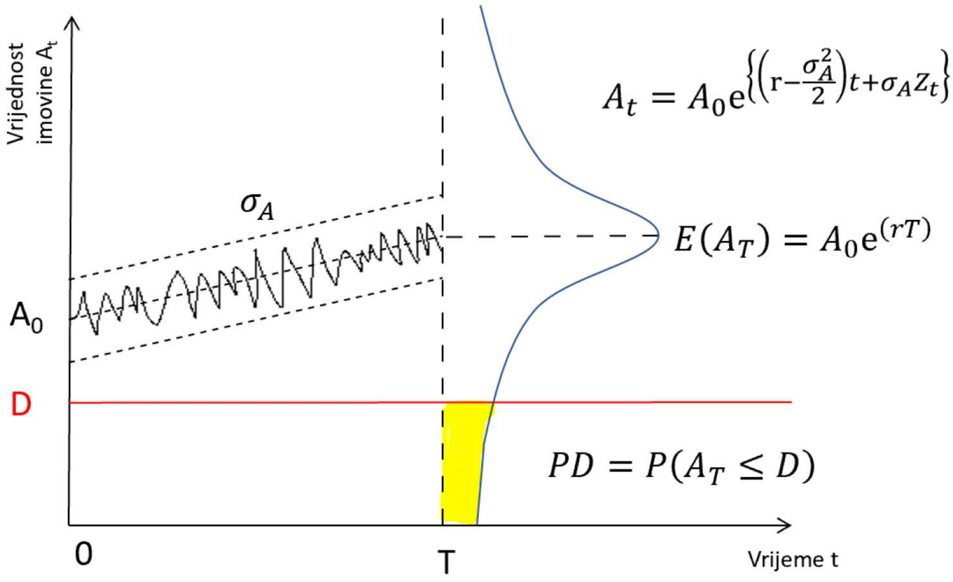
gdje je $A_0$ početna vrijednost imovine u trenutku $t = 0$, $Z_t^*$ je Brownovo gibanje.

Uvrštavanjem (3.9) u (3.8) slijedi:

$$\begin{aligned} PD &= P\left[\ln A_0 + \left(r - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T + \sigma_A Z_t^* \leq \ln D\right] \\ &= P\left[\ln A_0 + \left(r - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T + \sigma_A \sqrt{T}\mathcal{N}(0,1) \leq \ln D\right] \\ &= P\left[\mathcal{N}(0,1) \leq \frac{\ln \frac{D}{A_0} - \left(r - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right] \\ &= N\left[\frac{\ln \frac{D}{A_0} - \left(r - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right] = N[-d_2]. \end{aligned}$$

Član $d_2$ se naziva udaljednost do defaulta (engl. distance to default). Za dokaz i detaljniju obradu (vidi [5]).

Očigledno je da s povećanjem duga $D$ raste vjerojatnost ulaska u default.




Slika 3.3: Vjerojatnost ulaska u default - Mertonov model (preuzeto iz [20])

Slika prikazuje jednu trajektoriju tržišne vrijednosti imovine tvrtke. Pretpostavka je da tržišna vrijednost imovine u trenutku $T$ ima log-normalnu distribuciju što znači da logaritam njezine vrijednosti ima normalnu distribuciju. Ukoliko vrijednost imovine padne ispod točke defaulta $D$ dolazi do ulaska u default. Vjerojatnost ulaska u default $PD$ obuhvaća dio ispod default barijere označen žutom bojom.

## 3.4 Implementacija Mertonovog modela

Tržišna vrijednost imovine i volatinost imovine ne mogu se direktno odrediti i zbog toga postoji nekoliko pristupa za procjenu od kojih će se u radu spomenuti dva. Volatilnost imovine prikazuje koliko je imovina zapravo rizična, odnosno volatilnost imovine je standardna devijacija godišnje postotne promjene u vrijednosti imovine. Ovisi o tržišnoj vrijednosti kapitala i knjigovodstvenoj vrijednosti obveza. Volatilnost imovine je veća što su veće promjene u tim varijablama.

### 3.4.1 Prvi pristup

Prvi pristup je rješavanje sustava dvije nelinearne jednadžbi s dvije nepoznanice.

Prva jednadžba je jednadžba oblika (3.5). Jednadžba (3.5) daje odnos između nepredvidive tržišne vrijednosti imovine $A_t$ i tržišne vrijednosti kapitala $E_t$. Stoga je u svakom trenutku moguće zaključiti trenutnu vrijednost imovine tvrtke s obzirom na trenutnu vrijednost kapitala, ali da bi se to moglo, volatilnost imovine $\sigma_A$ mora biti poznata. Postoji druga jednadžba koja je veza između volatilnosti kapitala i volatilnosti imovine [20].

Pod pretpostavkom da je tržišna vrijednost kapitala geometrijsko Brownovo gibanje oblika:

$$E_t = \mu E_t dt + \sigma_E E_t dZ. \tag{3.10}$$

Primjenjivanjem Itôve leme za stohastičko diferenciranje na tržišni kapital koji je funkcija vrijednosti imovine $A_t$ i vremena $t$ pri čemu $A_t$ ima diferencijal (3.1), slijedi:

$$dE_t = \frac{\partial E_t}{\partial A_t} dA_t + \frac{\partial E_t}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_t}{\partial A_t^2} dA_t^2$$

Uvrštavanjem (3.1) umjesto $dA_t$ i sređivanjem izraza slijedi:

$$dE_t = (\frac{\partial E_t}{\partial A_t} \mu A_t + \frac{\partial E_t}{\partial A_t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_t}{\partial A_t^2} \sigma_A^2 A_t^2) dt + \frac{\partial E_t}{\partial A_t} \mu A_t dZ_t. \tag{3.11}$$

Izjednačavanjem jednadžbi[5] (3.10) i (3.11) dobiva se relacija kojom su volatilnost kapitala i imovine povezane s izrazom (vidi [12]):

$$\sigma_E E_t = \frac{\partial E_t}{\partial A_t} \sigma_A A_t. \tag{3.12}$$

Iz jednadžbe (3.5) se može zaključiti da je $\frac{\partial E_t}{\partial A_t} = N(d_1)$.

$$\sigma_E = \frac{A_t}{E_t} N(d_1) \sigma_A. \tag{3.13}$$

Primjenom numeričkih metoda za rješavanje sustava dviju nelinearnih jednadžbi (3.5) i (3.13) procjenjuju se parametri $A_t$ i $\sigma_A$.

Zaključak pristupa je da za procjenu tržišne vrijednosti imovine potrebno znati podatke o tržišnoj vrijednosti kapitala $E_t$, volatilnosti kapitala $\sigma_E$ i točki defaulta $D$ koji su ulazni podaci za formule (3.5) i (3.13).

### 3.4.2 Drugi pristup

Drugi pristup je iterativini postupak koji su predložili Crosbie i Bohn, (vidi [4]).

Zapišemo jednadžbu (3.5) tako da izrazimo iz nje $A_t$.

$$A_t = \left( \frac{E_t + De^{-r(T-t)} N(d_2)}{N(d_1)} \right)$$

Ukoliko je $n$ broj dana trgovanja, vraćanjem $n$ dana unatrag dobiva se sustav jednažbi:

[5] Dvije stohastičke diferencijalne jednadžbe su jednake ukoliko su im jednaki koeficijenti gotovo sigurno.

$$
\begin{aligned}
A_t &= \left(\frac{E_t + D_t e^{-r_t(T-t)} N(d_2)}{N(d_1)}\right) \\
A_{t-1} &= \left(\frac{E_{t-1} + D_{t-1} e^{-r_{t-1}(T-(t-1))} N(d_2)}{N(d_1)}\right) \\
&\vdots \\
A_{t-n} &= \left(\frac{E_n + D_{t-1} e^{-r_n(T-(t-n))} N(d_2)}{N(d_1)}\right)
\end{aligned}
$$

Korištenje vremenski različitih kamatnih stopa i obveza nije u skladu s Mertonovim modelom, u kojem su obje konstantne. Ali u [4] su mislili da se tako može približiti tržišnim procjenama, jer se pristup zasniva na podacima koje tržište ima na određeni dan. Dani sustav se sastoji od $n+1$ jednadžbe s $n+1$ nepoznanicom (vrijednosti imovine). Postoji i dodatna nepoznata varijabla, a to je volatilnost imovine. Ta se varijabla može procijeniti iz vremenskog niza vrijednosti $A_t$ kao standardna devijacija log povrata vrijednosti imovine. Stoga se sustav jednadžbi može riješiti.
Uobičajene tvrtke imaju mnogo različitih obveza koje dospijevaju u različitim trenucima od jednog dana do 30 godina ili više.
Pretpostavka je da tvrtka ima samo obveze koje dospijevaju u jednoj godini. Strukturni modeli se koriste za procjenu jednogodišnjih vjerojatnosti neplaćanja. Pretpostavka je da je rok dospijeća jedna godina.. Postavljanje $T-t$ na 1 za svaki dan u prethodnih 12 mjeseci, dani se sustav jednadžbi pojednostavljuje na:

$$
\begin{aligned}
A_t &= \left(\frac{E_t + D_t e^{-r_t} N(d_2)}{N(d_1)}\right) \\
A_{t-1} &= \left(\frac{E_{t-1} + D_{t-1} e^{-r_{t-1}(2)} N(d_2)}{N(d_1)}\right) \\
&\vdots \\
A_{t-n} &= \left(\frac{E_n + D_{t-1} e^{-r_{t-n}(n+1)} N(d_2)}{N(d_1)}\right)
\end{aligned}
$$

Sustav jednadžbi se može riješiti iterativnom metodom:

Iteracija 0: Postave se početne vrijednosti $A_{t-a}$ za svaki $a = 0, 1, ..., n$. Razuman izbor je postaviti $A_{t-a}$ jednak zbroju tržišne vrijednosti kapitala $E_{t-a}$ i vrijednosti obveza $D_{t-a}$ i $\sigma_A$ kao standardnu devijaciju log povrata vrijednosti imovine. Ta vrijednost volatilnosti imovine je jedinstvena i opisuje volatilnost imovine kroz cijeli vremenski period u kojem je promatran vremenski niz.
Za svaku iduću iteraciju $k$ koriste se $A$ i $\sigma_A$ u formuli za računanje $d_i$, koristi se formule (3.6) i (3.7) kako bi se izračunale vrijednosti $d_i$, nove $A_t$ i novu $\sigma_A$. Ponavljati dok metoda ne konvergira, (vidi [4]). Tim korakom model ima sve parametre koji su potrebni za procjenu

vjerojatnosti ulaska u default. Uvrštavanjem tako dobivenih parametara u formulu

$$PD = N(-DD)$$

slijedi tražena vjerojatnost.

# 4 Primjena Mertonovog modela na stvarnim podacima

Cilj je provesti analizu i usporedbu primjene navedenog modela na Hrvatske tvrtke kojim se trguje na Zagrebačkoj burzi na temelju različitih parametara koji se procjenjuju na osnovu podataka na tržištu i bilancama tvrtki. Potrebno je procijeniti parametre i odrediti vjerojatnost ulaska u default u jednoj godini. Za procjenu se koristi R.

## 4.1 Podaci

U nastavku je opis tvrtki čija će se vjerojatnost ulaska u default procjenjivati.

**Vrijednosnica ADRS - ADRIS GRUPA** dioničko društvo za upravljanje i ulaganje Adris grupa vodeća je tvrtka u regiji te lider po kriterijima profitabilnosti i inovativnosti. Organizirana je u tri poslovne jedinice: turističkom upravlja Maistra d.d., uz segment prehrambene industrije koji predvodi Cromaris. Adris grupa je vlasnik najstarije hrvatske osiguravateljne kuće – Croatia osiguranja.

**Vrijednosnica HT - Hrvatski Telekom d.d.**
HT grupa vodeća je tvrtka telekomunikacijskih usluga u Hrvatskoj koja pruža usluge nepokretne i pokretne telefonije, veleprodajne, internetske i podatkovne usluge. Osnovne djelatnosti su pružanje elektroničkih komunikacijskih usluga te projektiranje i izgradnja elektroničkih komunikacijskih mreža na području Republike Hrvatske. Većinski vlasnik Hrvatskog Telekoma d.d. je Deutsche Telekom Europe B.V.

**Vrijednosnica ULPL - ALPHA ADRIATIC**- pomorski promet, dioničko društvo Uljanik je osnovan 1856. godine u Pulskom zaljevu kao glavna ratna luka i pomorska baza Austro-Ugarske Monarhije. Uljanik je gradio sve vrste brodova za kupce širom svijeta. Sada su klasificirani za proizvodnju visokosofisticiranih plovila kao što su jaružala, radne platforme, brodovi za prijevoz žive stoke i RORO brodovi. 2016. godine Uljanik je krenuo u proizvodnju polarnih plovila za krstarenja ugovarajući prvi luksuzni istraživački brod u svijetu s australskom Scenic Groupom. 2019. godine tvrtka nailazi na probleme i nalazi se na rubu propasti.

**Vrijednosnica DDJH - ĐURO ĐAKOVIĆ GRUPA DIONIČKO DRUŠTVO**
Đuro Đaković vodeća je tvrtki u metaloprerađivačkoj industriji u Hrvatskoj s dugom tradicijom. Grupacija Đuro Đaković obuhvaća društvo Đuro Đaković Grupa d.d. te četiri društva u kojima je Đuro Đaković Grupa d.d. većinski vlasnik. 2019. godine tvrtka nailazi na probleme i nalazi se na rubu stečaja i propasti.

Povijesni podatci od 1.1.2019. do 31.12.2019. za četiri Hrvatske tvrtke su preuzeti su sa internetske stranice Zagrebačke burze.

Vrijeme dospijeća $T = 1$

## 4.2 Bezrizična kamatna stopa

EIOPA[6] objavljuje mjesečne podatke za bez rizičnu kamatnu stopu za svaku zemlju Europske unije.

## 4.3 Default točka

Kratkoročne obveze (engl. short-term liabilities) su obveze poduzeća čiji je rok dospijeća do jedne godine. Evidentiraju se u pasivi bilance. Iz bilance tvrtke određuje se vrijednost duga $D$ koju je Merton u svom modelu uvrstio kao točku defaulta ili barijerom defaulta. Tablično je prikazana vrijednost duga za tvrtke iščitana iz bilance koja je preuzeta sa stranice Zagrebačke burze.

| | D (kn) |
|---|---|
| ADRS | 3 364 680 858,00 |
| HT | 2 428 612 411,00 |
| ULPL | 688 844 006,00 |
| DDJH | 294 719 937,00 |

Tablica 4.1: Točka defaulta za navedene tvrtke

## 4.4 Tržišna vrijednosti kapitala i volatilnosti kapitala

Tržišna vrijednost kapitala ne može se izravno promatrati, ali se može procijeniti tako da se pomnože završne cijene dionica na određeni dan s količinom dionica te se kumulativno zbrajaju[7].

Volatilnost kapitala $\sigma_E$ procjenjuje se na osnovu povijesnih podataka, (vidi [7]):

$$X_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}},$$

gdje je $X_t$ dnevni log povrat, a $S_t$ završna cijena dionica u trenutku $t$ kojima se trguje na burzi.
Procjena standardne devijacije log povrata korijenom iz korigirane varijance log povrata $(X_1, ..., X_n)$ dana je s:

$$\sigma_E^d = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n} (X_t - \bar{X}_n)},$$

[6]EIOPA (engl. European Insurance and Occupational Pensions Authority) je europski regulator osiguranja i strukovnog mirovinskog osiguranja, jedno od tri europska tijela za nadzor financijskog sustava, nastala kao rezultat reformi strukture nadzora financijskog sektora Europske unije.

[7]vidi primjer u Dodatku 5.1.

gdje je $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t$ prosječni log povrat, $n$ je broj dana promatranog razdoblja. Volatilnost kapitala se izračunava tako što se $\sigma_E^d$ pomnoži s kvadratnim korijenom ukupnog broja dana trgovanja:

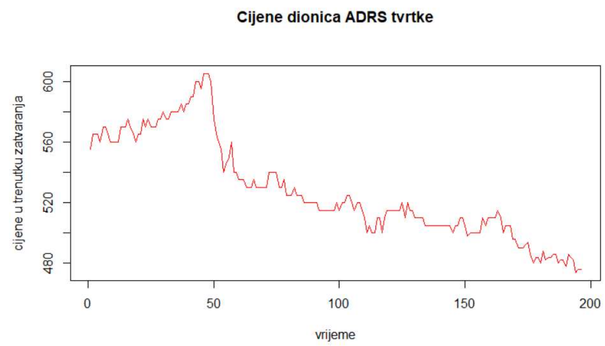
$$\sigma_E = \sqrt{n} \cdot \sigma_E^d.$$

Tablično su prikazane dobivene vrijednosti za danu tvrtku na dan 31.12.2019. primjenjujući navedeno.

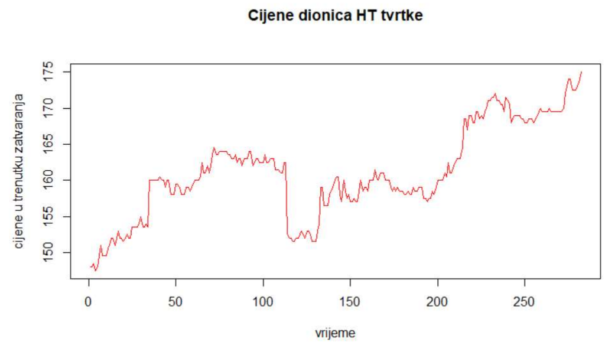
| | $E_0$ (kn) | $\sigma_E$ |
|---|---|---|
| ADRS | 59 820 742,00 | 0.1344 |
| HT | 363 908 108,50 | 0.1199 |
| ULPL | 2 737 871,40 | 1.1768 |
| DDJH | 12 696 595,10 | 0.6386 |

Tablica 4.2: Vrijednost kapitala $E_0$ i volatilnosti kapitala $\sigma_E$ za navedene tvrtke

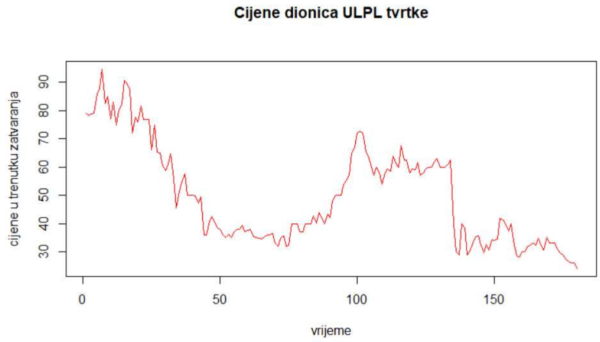
Promotre li se vrijednosti volatilnosti kapitala za promatranu 2019. godinu za dane tvrtke uočava se da tvrtka Uljanik (ULPL) ima najnestabilnije cijene dionica jer joj je volatilnost kapitala $\sigma_E$ daleko najveća, dok HT očigledno ima najmanju volatilnost. Stoga se zaključuje da su cijene dionica tvrtke HT vrlo stabilne. Grafički cijene dionica kroz 2019.godinu za dane tvrtke se mogu prikazati:



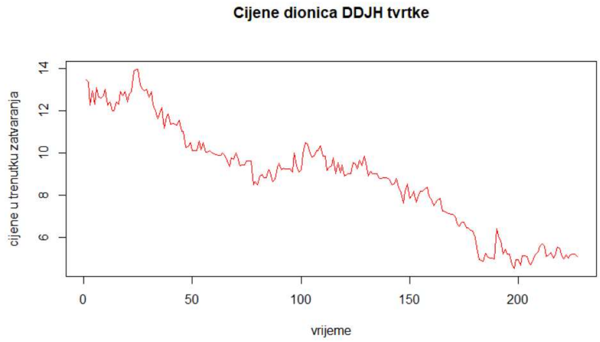

Slika 4.1: Kretanje cijena dionice ADRS




Slika 4.2: Kretanje cijena dionice HT




Slika 4.3: Kretanje cijene dionice ULPL




Slika 4.4: Kretanje cijene dionice DDJH

Da bi se procijenila vjerojatnost neplaćanja, potrebno je izračunati tržišnu vrijednost imovine i volatilnost imovine. Iako je vrijednost imovine navedena u financijskim izvještajima, ona ne predstavlja tržišnu vrijednost.

## 4.5 Procjena tržišne vrijednost imovine i volatilnost imovine

Sve vrijednosti inputa za procjenu vrijednosti imovine i volatilnosti imovine su dane i primjenjujući dva pristupa navedena ranije slijede rezultati.

### 4.5.1 Prvi pristup

Rješavanjem sustava dviju nelinearnih jednadžbi (3.5) i (3.13) procjenjuju se parametri $A$ i $\sigma_A$. Korištenjem R-a rješava se sustav nelinearnih jednadžbi[8] i izračunavaju se traženi parametri koji su prikazani tablično:

| | $A_0$ (kn) | $\sigma_A$ |
|---|---|---|
| ADRS | 3 420 822 176,00 | 0.0023 |
| HT | 2 793 244 3320,00 | 0.0156 |
| ULPL | 687 510 934,00 | 0.0126 |
| DDJH | 307 413 765,00 | 0.0282 |

Tablica 4.3: Tržišna vrijednost imovine i volatilnost imovine-Prvi pristup

[8] U dodatku 5.2. vidi R - kod korišten za procjenu

U ovoj metodi je korišten prosjek bezrizičnih mjesečnih kamatnih stopa izdane od strane EIOPE u razdoblju od siječnja do prosinca 2019. godine za obveznice kojima je rok dospijeća 1 godina. Bezrizična kamatna stopa iznosi $-0.0298\%$.

Usporede li se vrijednosti tržišne imovine dobivene ovom metodom i točke defaulta za dane tvrtke može se uočiti da tvrtka Uljanik na dan 31.12.2019. ima vrijednost imovine ispod vrijednosti obveza. To vodi do zaključka da postoji velika mogućnost ulaska u default tokom iduće godine.

### 4.5.2 Drugi pristup

Prilikom korištenja iterativne metode potrebni su povijesni podaci iz razdoblja 1.1.2019. godine do 31.12.2019. godine za varijable kapitala, kratkoročnih obveza i bezrizične kamatne stope[9]. Kratkoročne obveze su vrijednosti koje su kvartalno vidljive u bilanci tvrtke. Bezrizična kamatna stopa se objavljuje mjesečno na stranicama EIOPE. Procjenjeni parametri dobiveni uz programski softver R studio koristeći iterativnu metodu[10] su prikazani tablično:

| | $A_0$ (kn) | $\sigma_A$ |
|---|---|---|
| ADRS | 3 360 404 000,00 | 0.00247 |
| HT | 2 793 240 654, 00 | 0.038 |
| ULPL | 133 022 022,00 | 0.8681 |
| DDJH | 294 400 593,00 | 0.1098 |

Tablica 4.4: Tržišna vrijednost imovine i volatilnost imovine-Drugi pristup

Usporede li se vrijednosti imovine dobivene iterativnom metodom i točke defaulta za dane tvrtke može se uočiti da tvrtke Adris, Uljanik i Đuro Đaković na dan 31.12.2019. imaju tržišnu vrijednost imovine ispod vrijednosti obveza. To vodi do zaključka da postoji velika mogućnost ulaska u default tokom iduće godine.

## 4.6 Vjerojatnost ulaska u default za dane metode

Zadnji i ključan korak u Mertonovom modelu je odrediti vjerojatnost ulaska u default, odnosno odrediti vjerojatnost bankrota koristeći navedene inpute. Korištenjem Mertonovog modela slijede rezultati za vjerojatnosti ulaska u default za sve tvrtke na osnovu oba pristupa procijene traženih parametara:

| Strukturni modeli | PD (ADRS) | PD (HT) | PD (ULPL) | PD (DD) |
|---|---|---|---|---|
| Merton - sustav jednadžbi | 0% | 0% | 57.30% | 7.03% |
| Merton - iterativno | 9.20% | 0.01% | 99.00% | 52.69% |

Tablica 4.5: Vjerojatnost ulaska u default za oba pristupa

Vrijednosti imovine za dva različita pristupa za tvrtku HT približno su jednake, dok su za tvrtku Uljanik drastično različite. Obe metode predviđaju veću vjerojatnost ulaska u

[9] U dodatku 5.3. primjer je baze podataka tvrtke HT za dano razdoblje potrebne za iterativnu metodu
[10] U dodatku 5.4. vidi R - kod korišten za procjenu

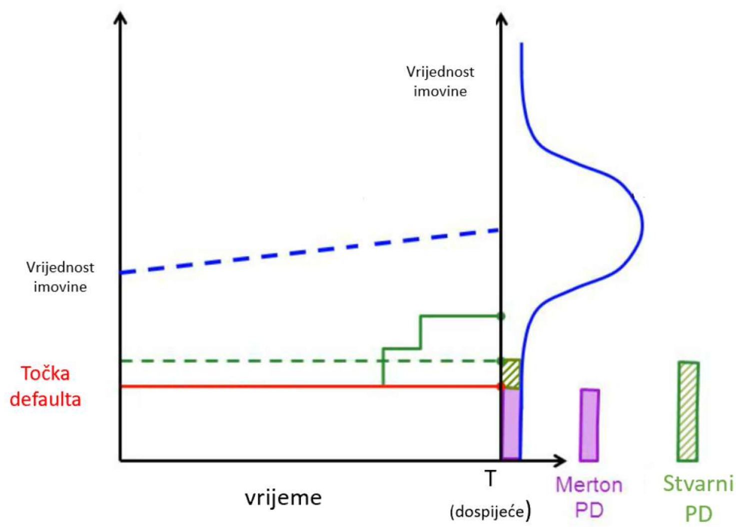
default za tvrtke Uljanik i Đuro Đaković po dospijeću godine u odnosu na ostale tvrtke. Volatilnosti se drastično razlikuju za sve tvrtke uspoređujući obje metode što je i razlog za razliku u procjeni vjerojatnosti ulaska u default. Korišteni su isti povijesni podaci o cijenama dionica u obe metode, ali su pristupi različiti. U sustavu jednadžbi procijenili smo volatilnost kapitala pomoću tih cijena dionica i to je dobro ukoliko volatilnost smatramo konstantom. No, Merton smatra kapital call opcijom s rizikom koji se mijenja kako se omjer $\frac{A_t}{E_t}$ mijenja. Za podatke koje karakteriziraju velike promjene, daje se prednost iterativnom pristupu, (vidi [11]).

Na temelju dobivenih rezultata može se učinkovitije upravljati tvrtkom i njezinim poslovanjem.

# 5 Nedostaci Mertonovog modela

Glavna razlika Mertonovog modela u odnosu na druge pristupe u procjeni kreditnog rizika je ta što se Mertonov model fokusira na tržišnim cijenama dionica. Pretpostavke Mertonovg modela teško je zadovoljiti na stvarnom financijskom tržištu u realnim uvijetima. Analizu je potrebno provesti kroz više pristupa. Donošenje odluke ne treba se temeljiti na zaključcima jednog modela. Brojna istraživanja i poboljšanja (vidi [4], [12], [5]) Mertonovog modela tokom godina zaključuju da je za bolju procjenu vjerojatnosti ulaska u default potrebno uvođenje novih ulaznih varijabli.

- U Mertonovom modelu pasiva tvrtke se sastoji samo od kratkoročnih obveza. Pasivu je potrebno podijeliti u više klasa kao što su kratkoročne obveze, dugoročne obveze, povlaštene dionice[11], obične (redovne) dionice[12] i dividende[13].




Slika 5.1: Mertonov model nasuprot stvarnom modelu - Točka defaulta, (preuzeto iz [8])

U Mertonovom modelu točka (razina) defaulta je konstanta i jednaka je kratkoročnim obvezama, tj. obvezama s rokom dospijeća do jednu godinu s tim da nema drugih obveza. U stvarnosti tvrtke imaju više vrsta obveza (kratkoročne obveze, dugoročne obveze, povlaštene dionice, obične dionice, dividende) i nije moguće samo gledati propast tvrtke po neispunjenju kratkoročnih obveza. Obično se obveze u tvrtkama

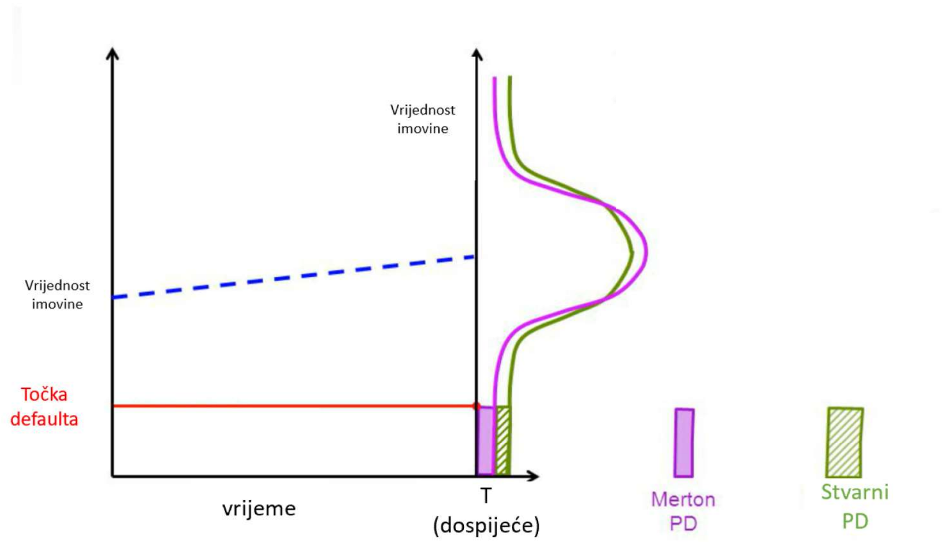
[11]Povlaštene dionice daju svojim imateljima neka povlaštena prava, npr. pravo na dividendu u unaprijed utvrđenom novčanom iznosu. Investitori povlaštenih dionica predstavljaju investiciju koja je između obveznice i obične dionice. One obično imaju veći prinos od obične dionice, ali nose i veći rizik, (vidi, [15].

[12]Redovne dionice daju imateljima pravo glasa na glavnoj skupštini dioničkog društva, pravo na isplatu dijela dobiti (dividendu) i pravo na isplatu vrijednosti ostatka imovine nakon likvidacije društva.

[13]Dio dobiti koji se isplaćuje vlasnicima dionica, tj. tvrtke.

povećavaju kako se bliži default. S povećanjem obveza razina defaulta se povećava što uzrokuje veću vjerojatnost ulaska u default.

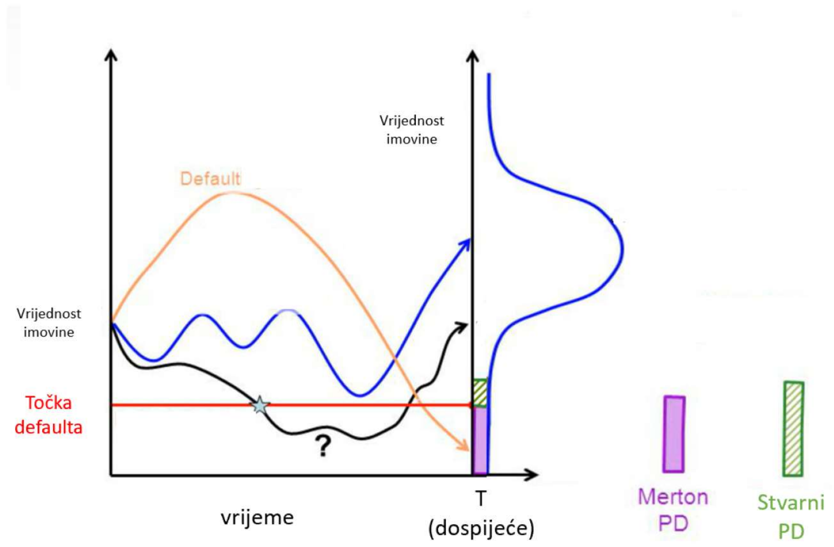
- Glavni nedostatak Mertonovog modela je što se vjerojatnost ulaska u default modelira pomoću normalne distribucije, tj. $PD = N(-DD)$, gdje je $DD$ udaljednost do defaulta.




Slika 5.2: Mertonov model nasuprot stvarnom modelu - Vjerojatnost ulaska u default, (preuzeto iz [8])

Istraživanjima se došlo do zaključka da je realnije primjenjivati mapiranje na rejting skalu što iziskuje veliku bazu podataka o tvrtkama koje su doživjele default kako bi se izvela empirijska funkcija distribucije koja povezuje udaljenost do defaulta $DD$ s vjerojatnosti ulaska u default $PD$.

- Tvrtka može ući u default samo u trenutku dospijeća $T$.




Slika 5.3: Mertonov model nasuprot stvarnom modelu - Default, (preuzeto iz [8])

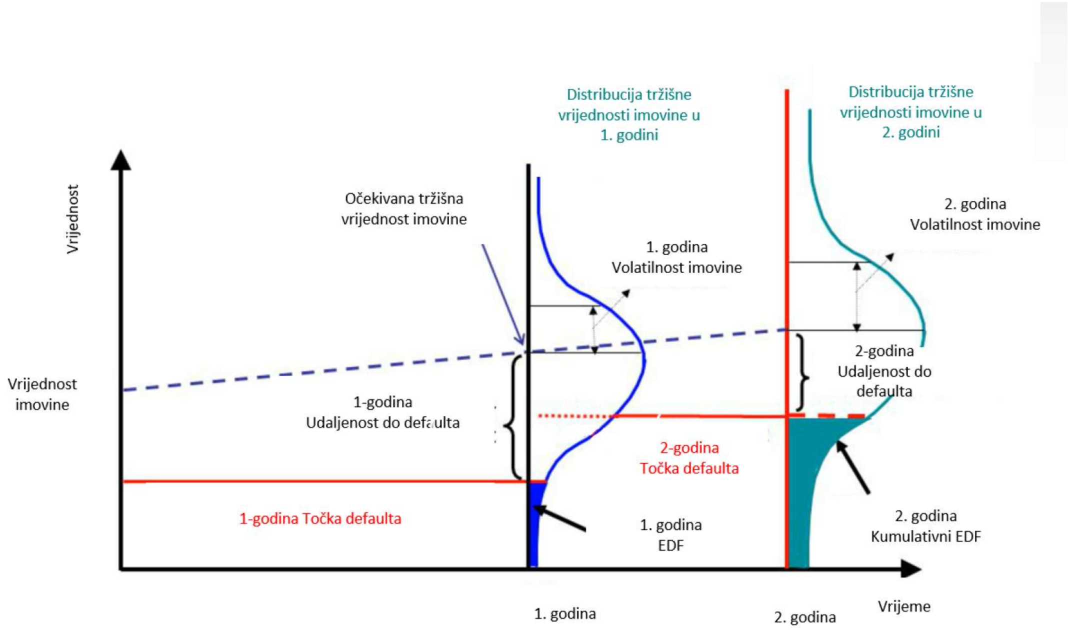
U Mertonovom modelu default se može dogoditi samo po dospijeću $T$, što govori da je vjerojatnost ulaska u default u bilo kojem trenutku $t$ prije dospijeća $T$ jednaka 0. Iz Slike 5.3 je vidljivo da prema Mertonovom modelu samo narančasto označena vrijednost imovine je pala ispod vrijednosti obveza u trenutku dospijeća i ta tvrtka je ušla u default s vjerojatnošću obojanom ružičastom bojom. No, tvrtke danas mogu defaultirati u bilo kojem trenutku prije dospijeća, tj. kada prvi put vrijednost imovine padne ispod točke defaulta.

Kealhofer, MeQuow i Vasicek na principu Mertonovog modela 1984. godine izvode model koji je prihvatljiviji u financijskoj industriji. Poboljšali su formulu udaljenosti do defaulta i izgradili bazu podataka koja uključuje sve tvtke koje su ušle u default do danas. Na temelju baze podataka odbacili su pretpostavku da se vjerojatnost ulaska u default modelira pomoću standardizirane normalne distribucije. Oni su kreirali preslikavanje između udaljenosti do defaulta i vjerojatnosti ulaska u defaut. 1989. godine Kealhofer, MeQuow, and Vasicek osnivaju tvrtku pod nazivom KMV koju 2002. godine preuzima Moody's Analytics[14]. Model se naziva KMV model, a baza podataka i detalji nisu skroz poznati javnosti.

## 5.1 KMV model

KMV je naziv za uspješnu implementaciju i nadogradnju Mertonovog modela. Prepostavke KMV modela su prihvatljivije stvarnoj situaciji na tržištu, a model se temelji na Mertonovoj teoriji. Veliki broj svjetskih financijskih institucija su korisnici promatranog modela radi uspješnog upravljanja kreditnim rizikom.

[14]https://www.moodysanalytics.com/




Slika 5.4: Vjerojatnost ulaska u default u KMV modelu, (preuzeto iz [8])

Model teorijski ne odskače puno od Mertonovog modela, no KMV model je izrealiziran na empirijskim testovima i implemetiran pomoću velike baze podataka.

Dani model određuje vjerojatnost defaulta tvrtke u 3 ključna koraka:
**Korak 1.** Procjena vrijednosti imovine i volatilnosti imovine
**Korak 2.** Računanje udaljenosti do defaulta $DD$ ( engl. Distance to default) [16].
**Korak 3.** Računanje vjerojatnosti defaulta

Kod procjene tržišne vrijednosti imovine i volatilnosti imovine koristi se jednadžba (3.5). Tržišna vrijednost kapitala se izračunava na temelju tržišnih podataka kao i kod Mertona. KMV korporacija je na uzorku od nekoliko stotina tvrtki primijetila da tvrtke uglavnom imaju veću vjerojatnost da neće podmiriti svoje obveze kada vrijednosti imovine dosegnu određenu kritičnu razinu koja se nalazi između vrijednosti ukupnih obveza i vrijednosti kratkoročnog duga. Vrijednost točke defaulta $D$ je zamijenjena boljom procjenom $DPT$. Default točka ($DPT$) je vrijednost imovine pri kojoj će poduzeće otići u default. Prema [6], $DPT$ u KMV modelu je približno jednaka kratkoročnim obvezama ($STD$) uvećanim za 50% dugoročnih obveza ($LTD$):

$$DPT = SDT + \frac{1}{2}LTD.$$

Sljedeći korak je izračunati udaljenost do defaulta ($DD$).
KMV je tu mjeru definirao na sljedeći način:

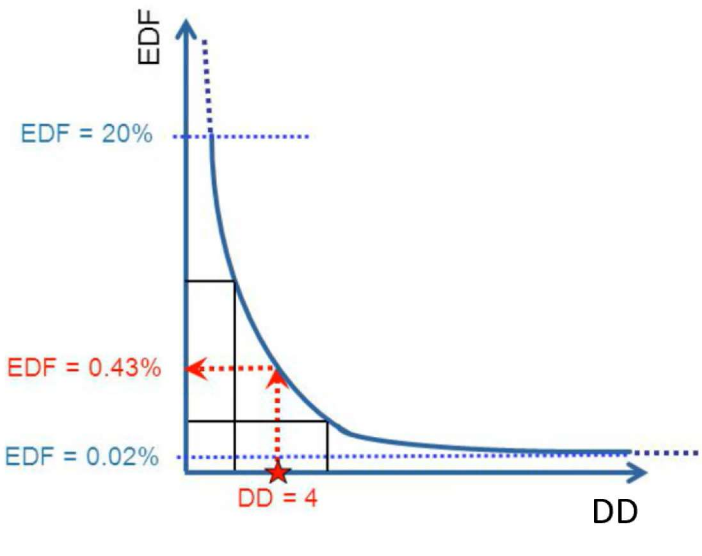
$$DD = \frac{A_0 - DPT}{\sigma_A A_0}. \tag{5.1}$$

Udaljenost do defaulta daje grubu procjenu koliko je daleko tvrtka od defaulta u određenom trenutku $t$. Manja vrijednost $DD$ znači veću vjerojatnost ulaska u default.

Računanje vjerojatnosti ulaska u default razlikuje se u ta dva modela. KMV model koristi empirijsku funkciju distribucije koja nije poznata javnosti, a koju su procijenili iz ogromne baze podataka mnogih tvrtki koje su ušle u default do danas. Vjerojatnost ulaska u default u KMV modelu još nazivaju relativna učestalost defaulta $EDF$ (engl. Expected Default Frequency). $EDF$ predstavlja vjerojatnost ulaska u default i procjenjena po KMV metodologiji. Trenutno je $EDF$ jedan od najpouzdanih primjera kreditne mjere na tržištu kapitala.

DD ovisi o iste tri varijable kao i kreditna mjera tvrtke $EDF$. Što su veće vrijednost dugoročnog duga, kratkoročnog duga, volatilnost povrata imovine i niža očekivana vrijednost imovine, niža je vrijednost udaljenosti do default vrijednosti. Što je niža vrijednost $DD$, to je veća vjerojatnost neizvršavanja obveza određene tvrtke.

**Primjer 5.1** *Udaljenost do defaulta od četiri standardne devijacije ($DD = 4$) rezultira učestalosti defaulta $EDF$ 0.43%. To znači da prema analizi baze podataka, 0.43% registriranih tvrtki s $DD = 4$ su neplatiše nakon jedne godine. Vjerojatnost ulaska u default obzirom na normalnu distribuciju za $DD = 4$ iznosila bi 0. U isto vrijeme, za $DD = 2$, $EDF$ raste na 1.2% što znači da 1.2% tvrtki s $DD = 1$ su neplatiše nakon jedne godine.*




Slika 5.5: Odnos između $DD$ i $EDF$, (preuzeto iz [8])

Što se tvrtka više približi default točki, to je veći $EDF$.

# 6 Dodatak

## 6.1 Procjena tržišne vrijednosti kapitala HT tvrtke

| 1 | Datum | Zadnja | Količina | Zadnja x Količina | Kapital |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2.1.2019 | 148 | 6464 | 956672 | 956672 |
| 3 | 2.1.2019 | 148 | 15000 | 2220000 | 3176672 |
| 4 | 3.1.2019 | 148,5 | 3281 | 487228,5 | 3663900,5 |
| 5 | 4.1.2019 | 147,5 | 8099 | 1194602,5 | 4858503 |
| 6 | 7.1.2019 | 148 | 3906 | 578088 | 5436591 |
| 7 | 8.1.2019 | 149,5 | 3492 | 522054 | 5958645 |
| 8 | 9.1.2019 | 151 | 2104 | 317704 | 6276349 |
| 9 | 10.1.2019 | 149,5 | 6584 | 984308 | 7260657 |
| 10 | 11.1.2019 | 149,5 | 1186 | 177307 | 7437964 |
| 11 | 14.1.2019 | 149,5 | 4191 | 626554,5 | 8064518,5 |
| 12 | 15.1.2019 | 150,5 | 4272 | 642936 | 8707454,5 |
| 13 | 16.1.2019 | 151 | 3177 | 479727 | 9187181,5 |
| 14 | 17.1.2019 | 152 | 979 | 148808 | 9335989,5 |
| 15 | 18.1.2019 | 152 | 5160 | 784320 | 10120309,5 |
| 16 | 21.1.2019 | 151 | 2742 | 414042 | 10534351,5 |
| 17 | 22.1.2019 | 152 | 5520 | 839040 | 11373391,5 |
| 18 | 23.1.2019 | 153 | 3952 | 604656 | 11978047,5 |
| 19 | 24.1.2019 | 152 | 1879 | 285608 | 12263655,5 |
| 20 | 25.1.2019 | 152 | 4057 | 616664 | 12880319,5 |
| 264 | 2.12.2019 | 169,5 | 4179 | 708340,5 | 341066481,5 |
| 265 | 3.12.2019 | 170 | 1854 | 315180 | 341381661,5 |
| 266 | 4.12.2019 | 169,5 | 703 | 119158,5 | 341500820 |
| 267 | 5.12.2019 | 169,5 | 3169 | 537145,5 | 342037965,5 |
| 268 | 6.12.2019 | 169,5 | 7849 | 1330405,5 | 343368371 |
| 269 | 9.12.2019 | 169,5 | 2284 | 387138 | 343755509 |
| 270 | 9.12.2019 | 169,5 | 52252 | 8856714 | 352612223 |
| 271 | 10.12.2019 | 169,5 | 1320 | 223740 | 352835963 |
| 272 | 11.12.2019 | 169,5 | 666 | 112887 | 352948850 |
| 273 | 12.12.2019 | 170 | 826 | 140420 | 353089270 |
| 274 | 13.12.2019 | 172 | 17719 | 3047668 | 356136938 |
| 275 | 16.12.2019 | 173 | 3754 | 649442 | 356786380 |
| 276 | 17.12.2019 | 174 | 10414 | 1812036 | 358598416 |
| 277 | 17.12.2019 | 174 | 11600 | 2018400 | 360616816 |
| 278 | 18.12.2019 | 172,5 | 2624 | 452640 | 361069456 |
| 279 | 19.12.2019 | 172,5 | 968 | 166980 | 361236436 |
| 280 | 20.12.2019 | 172,5 | 3903 | 673267,5 | 361909703,5 |
| 281 | 23.12.2019 | 173 | 1574 | 272302 | 362182005,5 |
| 282 | 27.12.2019 | 173,5 | 2048 | 355328 | 362537333,5 |
| 283 | 30.12.2019 | 175 | 7833 | 1370775 | 363908108,5 |

Slika 6.1: Procjena tržišne vrijednosti kapitala HT tvrtke

## 6.2 R kod za procjenu tržišne vrijednosti imovine i volatilnosti imovine rješavanjem sustava dvije nelinearne jednadžbe

```
E0=363908108.5; # Trzisna vrijednost kapital za t=0,
#procjenjena je tako sto se kolicina dionica u trenutku t=0 pomnozi sa zavrsnom cijenom
    dionica u tom trenutku
sigmaE=0.11988907 ; # procjenjena vrijednost kapitala iz povijesnih podataka
r=-0.000298; # prosjecna bezrizicna kamatna stopa na temelju mjesecinh izvjestaja od strane
    EIOPE
T=1; # Dospijece
D=2428612411; # Tocka defaulta (D_T=D) vrijednost duga po dospijecu $T$)



Merton_solve=function(parm){
  A0=parm[1] #inicijalna vrijednost za A0
  sigmaA=parm[2] #inicijalna vrijednost za sigmaA
  d1=(log(A0/D)+(r+sigmaA^2/2)*T)/(sigmaA*sqrt(T))
  d2=d1-sigmaA*sqrt(T)
  F=A0*pnorm(d1)-D*exp(-r*T)*pnorm(d2)-E0
  G=pnorm(d1)*sigmaA*A0-sigmaE*E0

  #  rezultat f-je:
  return(F^2+G^2)
}

# Kako bi odredili A0 i sigma_A
#potrebno je specificirati dvije inicijalne vrijednosti

# Neka je A_0=E0+D, a sigma_A=E0*sigma_E/A0
solutions=optim(c(A0=2792520520,sigmaA=0.01559556),Merton_solve)
# Procjenjene vrijednosti su:
A0=solutions$par[1]
sigmaA=solutions$par[2]
A0
#2793244332
sigmaA
#0.01561935

# Izracun d_1 i d_2
d1=(log(A0/D)+(r+sigmaA^2/2)*T)/(sigmaA*sqrt(T))

d2=d1-sigmaA*sqrt(T)
d2
#8.928908
# Vjerojatnost ulaska u default za jednu godinu tvrtke je:
pnorm(-d2)
#PD
#2.151173e-19
```

## 6.3 Baza podataka korištena u iterativnoj metodi za tvrtku HT

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Datum | Et | Dt | r |
| 2 | 2.1.2019 | 956672 | 2578699325 | 0,0830% |
| 3 | 2.1.2019 | 3176672 | 2578699325 | 0,0830% |
| 4 | 3.1.2019 | 3663900,5 | 2578699325 | 0,0830% |
| 5 | 4.1.2019 | 4858503 | 2578699325 | 0,0830% |
| 6 | 7.1.2019 | 5436591 | 2578699325 | 0,0830% |
| 7 | 8.1.2019 | 5958645 | 2578699325 | 0,0830% |
| 8 | 9.1.2019 | 6276349 | 2578699325 | 0,0830% |
| 9 | 10.1.2019 | 7260657 | 2578699325 | 0,0830% |
| 10 | 11.1.2019 | 7437964 | 2578699325 | 0,0830% |
| 11 | 14.1.2019 | 8064518,5 | 2578699325 | 0,0830% |
| 12 | 15.1.2019 | 8707454,5 | 2578699325 | 0,0830% |
| 13 | 16.1.2019 | 9187181,5 | 2578699325 | 0,0830% |
| 14 | 17.1.2019 | 9335989,5 | 2578699325 | 0,0830% |
| 15 | 18.1.2019 | 10120309,5 | 2578699325 | 0,0830% |
| 16 | 21.1.2019 | 10534351,5 | 2578699325 | 0,0830% |
| 17 | 22.1.2019 | 11373391,5 | 2578699325 | 0,0830% |
| 18 | 23.1.2019 | 11978047,5 | 2578699325 | 0,0830% |
| 272 | 11.12.2019 | 352948850 | 2428612411 | -0,0420% |
| 273 | 12.12.2019 | 353089270 | 2428612411 | -0,0420% |
| 274 | 13.12.2019 | 356136938 | 2428612411 | -0,0420% |
| 275 | 16.12.2019 | 356786380 | 2428612411 | -0,0420% |
| 276 | 17.12.2019 | 358598416 | 2428612411 | -0,0420% |
| 277 | 17.12.2019 | 360616816 | 2428612411 | -0,0420% |
| 278 | 18.12.2019 | 361069456 | 2428612411 | -0,0420% |
| 279 | 19.12.2019 | 361236436 | 2428612411 | -0,0420% |
| 280 | 20.12.2019 | 361909703,5 | 2428612411 | -0,0420% |
| 281 | 23.12.2019 | 362182005,5 | 2428612411 | -0,0420% |
| 282 | 27.12.2019 | 362537333,5 | 2428612411 | -0,0420% |
| 283 | 30.12.2019 | 363908108,5 | 2428612411 | -0,0420% |

Slika 6.2: Baza podataka korištena u iterativnoj metodi za tvrtku HT

## 6.4 R kod za procjenu tržišne vrijednosti imovine i volatilnosti imovine iterativnom metodom

```
getwd()
setwd("C:ht")
library(timeSeries)
library(qrmtools)

ht <- read.csv2("ht.csv")
Evalues = ht$Et
sigmaE=0.119675563
time=ht$t
D =2428612411
Dvalues=ht$D


rooteqn <- function(A,E,t,r,sigmaA,D,T)
{
  E - Black_Scholes(t,A,r,sigmaA,D,T,"call")
}
# Inicijalne vrijednosti volatilnosti
sigmaA <- sigmaE
sigmaA.old <- 0
it = 1
#iterativna metoda za procjenu trzisne vrijednosti imovine i volatilnosti imovine

while (abs(sigmaA-sigmaA.old)/sigmaA.old > 0.0001){it = it + 1
for (i in 1:length(Evalues)){ tmp = uniroot(rooteqn, interval =c(Evalues[i],10*Evalues[i]),
                                           E=Evalues[i],t=0,r=-0.000298,sigmaA=sigmaA,D=
                                               Dvalues[i],T=1,extendInt = "yes" )
Avalues[i] = tmp$root}
sigmaA.old = sigmaA
sigmaA = as.numeric(sd(returns(Avalues))*sqrt(179)}


A0=Avalues[length(Avalues)]
Avalues$SS.1
#daje popis svih 180 vrijednosti za A_t, potrebna je u 0-tom trenutku A0=688312345
A0
sigmaA
#0.03861256

A0=2793244354
r=-0.000298; # prosjecna bezrizicna kamatna stopa na temelju mjesecinh izvjestaja od strane
    EIOPE
T=1; # Dospijece
D=2428612411;


# Izracun d_1 i d_2
d1=(log(A0/D)+(r+sigmaA^2/2)*T)/(sigmaA*sqrt(T))
d2=d1-sigmaA*sqrt(T)
d1
#-1.959404
d2
#-1.95995
# Vjerojatnost ulaska u default za jednu godinu tvrtke je:
pnorm(-d2)
#PD
#0.0001617644
```

# Literatura


[1] M. AMMANN, *Credit risk valuation: methods, models, and applications*, Springer Science & Business Media, 2013.

[2] S. T. BHARATH, T. SREEDHAR, *Forecasting Default with the KMV Model*, AFA 2006 Boston Meetings Paper, 2004.

[3] F. BLACK, M. SCHOLES, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy 81, br. 3, 637–654., 1973.

[4] J. BOHN, P. CROSBIE, *Modeling default risk*, Moody's KMV Company, 2003.

[5] D. BRIGO, M. MORINI, A. PALLAVICINI, *Counterparty Credit Risk, Collateral and Funding With Pricing Cases for All Asset Classes*, John Wiley & Sons , 2013.

[6] J. B. CAOUETTE, E. I. ALTMAN, P. NARAYANAN, *Managing Credit Risk, The Next Great Financial Challenge*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.

[7] J. CVITANOVIĆ, F. ZAPATERO, *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*, MIT Press, 2004.

[8] K. HOGSTON, *Measuring & Managing Credit Risk EDF$^{TM}$ Credit Measures for Public Firms*
`https://www.moodysanalytics.com/`

[9] J. HULL, I. NELKEN, A. WHITE, *Merton's Model, Credit Risk, and Volatility Skews* Working Paper, University of Toronto, 2004.

[10] D. LANDO, *Credit Risk Modeling*, Princeton University Press, 2004.

[11] G. LOFFLER, P. N. POSCH, *Credit risk modeling using Excel and VBA*, John Wiley & Sons, 2007.

[12] Y. LU, *Default Forecasting in KMV*, University of Oxford, 2008.

[13] R. C. MERTON, *On the pricing of corporate debt: The risk structure of interestrates*, The Journal of Finance 29, br. 2, 449–470., 1974.

[14] R. C. MERTON, *On the pricing of contingent claims and the Modigliani-Miller theorem*, Journal of Financial Economics 5, br. 2, 241–249., 1977.

[15] B. NOVAK, *Financijska tržišta i institucije*, Ekonomski fakultet u Osijeku, 2005.

[16] M. ONG, *Internal Credit Risk Models – Capital Allocation and Performance Measurement*, Risk Books, 2005.

[17] R. K. SUNDARAM, *The Merton/KMV Approach to Pricing Credit Risk*, Working Paper, Stern School of Business, New York University, January 2, 2001.

[18] N. ŠARLIJA, *Upravljanje kreditnim rizicima*, web skripta, 2009. https://www.mathos.unios.hr/images/homepages/nsarlija/UKR/4._cjelina_modeli_bazirani_na_racunovodstvenim_podacima_i_trzisnoj_vrijednosti_2018.pdf

[19] Z. VONDRAČEK, *Financijsko modeliranje*, Predavanja, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2008.

[20] T. ZIELINSKI, *Merton's and KMV Models In Credit Risk Management* https://docplayer.net/1621640-Merton-s-and-kmv-models-in-credit-risk-management.html

# Sažetak

U ovom radu predstavljeni su strukturni modeli kreditnog rizika. Navedene su pretpostavke Mertonovog modela i opisan je Mertonov model koji je ujedno i začetnik strukturnih modela kreditnog rizika. Mertonov model temelji se na Black Scholesovom modelu nearbitražnog vrednovanja europske *put* i *call* opcije. Ideja je modelirati dug i tržišnu vrijednost kapitala tvrtke kao financijske izvedenice na vrijednost imovine. Merton daje formulu za procjenu vjerojatnosti ulaska u default tvrtke u jednoj godini. Prema Mertonu tvrtka će otići u default i kapital će izgubiti na vrijednosti ukoliko imovina vrijedi manje od duga po dospijeću. Merton vjerojatnost ulaska u default modelira pomoću normalne distribucije. Primjenom Mertonovog modela na hrvatske tvrtke: Hrvatski telekom, Adris grupa, Uljanik te Đuro Đaković procjenjena je vjerojatnost ulaska u default za dane tvrtke na temelju povijesnih podataka i bilance tvrtke preuzete sa stranice Zagrebačke burze. Za određivanje vjerojatnosti ulaska u default najprije je potrebno odrediti tržišnu vrijednost imovine i volatilnost imovine. Kako se one ne mogu direktno odrediti postoji nekoliko pristupa za procjenu od kojih su u radu spomenuta dva. S obzirom na restriktivne pretpostavke Mertonovog modela koje je teško zadovoljiti na stvarnom tržištu u realnim uvjetima mnoga istraživanja su dovela do pristupačnijih modela. Jedan od njih je KMV model kojeg su razvili Kealhofer, MeQuow i Vasicek 1984. godine. Poboljšali su formulu udaljenosti do defaulta i izgradili bazu podataka koja uključuje sve tvtke koje su ušle u default do danas. Na temelju spomenute baze podataka odbacili su pretpostavku da se vjerojatnost ulaska u default modelira pomoću normalne distribucije. Oni su kreirali preslikavanje između udaljenosti do defaulta i vjerojatnosti ulaska u defaut. Baza podataka i konačan model nisu u potpunosti poznati javnosti.

**Ključne riječi:** strukturni modeli, Black-Scholes model, točka defaulta, europska put opcija, europska call opcija, Merton model, vjerojatnost ulaska u default, KMV model, relativna učestalost defaulta, Moody's analitika

# Summary

This thesis will review structural models of credit risk. It will list the assumptions of the Merton's model and describe Merton's model which is the foundation of structural models of credit risk. Merton's model is founded on Black Scholes' model of no-arbitrage valuation of European put and call option. The idea is to model the debt and the market value as a financial derivative on the value of company's equity. Merton provides a formula for assessing the corporation's risk of credit default in a year. According to Merton, the company will default and the equity will lose its value if the assets are less than the debt at the time of maturity. Merton models the probability of default through standard normal distribution. Through application of the Merton model, the paper will assess the probability of default for Croatian companies Croatian Telecom, Adris Group, Uljanik and Đuro Đaković using the historic data and company's balance sheet which were acquired from Zagreb stock market. To determine the probability of default, it is first necessary to determine the market value of the asset and the volatility of the asset. However, they cannot be directly determined and therefore there are several approaches to assessment from which two will be discussed in the paper. Taking into consideration the restrictive assumptions of the Merton model which are hard to achieve in the stock market in realistic conditions, many researches came up with more approachable models. One of them is KMV model which was developed by Kealhofer, MeQuow and Vasicek in 1984. Their approach improved the calculation of the distance to default and created a database which includes every company which defaulted up to date. By using that database, they discarded the assumption that the probability of default is modelled by normal distribution. They introduces a new mapping of finding the probability of default from the given distance to default. The database of default firms and the final model are not fully known to the public.

**Key words:** structural models, Black-Scholes model, default point, european put option, european call option, Merton model, probability of default, KMV model, Expected Default Frequency, Moody's Analytics

# Životopis

Iva Brkić rođena 2. kolovoza 1995. godine u Slavonskom Brodu. Nakon osnovne škole upisujem prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Gimnaziji Matija Mesić u Slavonskom Brodu koju završavam 2014. godine. Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku upisujem iste te godine i 2017. godine stječem naziv prvostupnice matematike uz završni rad *Redovi realnih brojeva* pod mentorstvom doc.dr.sc. Ivana Solde. U jesen 2017. godine upisujem diplomski studij matematike, smjer Financijska matematika i statistika na istoimenom fakultetu. Tijekom diplomskog studija odradila sam stručnu praksu u Državnom zavodu za statistiku u Zagrebu. Trenutno zaposlena u Uniqa osiguranju kao aktuar pripravnik u službi aktuarskih poslova u Zagrebu.