

# Newton- Cotesove formule

---

**Marušić, Laura**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:923205>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-04**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Laura Marušić

**Newton – Cotesove formule**

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Laura Marušić

**Newton – Cotesove formule**

Završni rad

Mentor: izv.prof.dr.sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2019.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Općenito o integracijskim formulama</b>	<b>3</b>
2.1	Newton – Cotesova formula . . . . .	3
2.1.1	Ponašanje težinskih funkcija . . . . .	4
2.1.2	Pogreška . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Newton – Cotesove formule</b>	<b>6</b>
3.1	Trapezno pravilo ( $n = 1$ ) . . . . .	6
3.1.1	Pogreška kod trapeznog pravila . . . . .	7
3.1.2	Produljeno trapezno pravilo . . . . .	8
3.2	Simpsonovo pravilo ( $n = 2$ ) . . . . .	11
3.2.1	Produljeno Simpsonovo pravilo . . . . .	12
3.3	Simpsonovo 3/8 pravilo ( $n = 3$ ) . . . . .	14
3.4	Midpoint pravilo . . . . .	15
3.5	Zatvorene i otvorene Newton – Cotesove formule . . . . .	16
3.6	Formule za polinome višeg stupnja . . . . .	17
	<b>Literatura</b>	<b>18</b>



## Sažetak

U ovom završnom radu upoznat ćemo se s numeričkom integracijom. Glavni dio ovog rada bit će baziran na metodama numeričke integracije, točnije Newton – Cotesovoj formuli te ćemo detaljnije obraditi njene posebne slučajeve, trapezno pravilo i Simpsonovo pravilo, koje dolaze od Newton – Cotesove formule. Spomenut ćemo i jednu metodu otvorene Newton – Cotesove formule.

**Ključne riječi:** Newton – Cotesove formule, trapezno pravilo, Simpsonovo pravilo, Simpsonovo 3/8 pravilo, midpoint pravilo, Newton – Leibniz, aproksimacija, pogreška aproksimacije, numeričko integriranje, Lagrangeov interpolacijski polinom

## Abstract

In this final paper we will get knowledge about numerical analysis. The main part of this paper will be based on numerical integration methods, more precisely Newton – Cotes formula, then we will further elaborate its special instances, trapezoidal rule and Simpson's rule, that come from the Newton – Cotes formula. We will mention one method of open Newton – Cotes formula.

**Keywords:** Newton – Cotes formulae, trapezoidal rule, Simpson's rule, Simpson's 3/8 rule, midpoint rule, Newton – Leibniz, approximation, approximation error, numerical integration, Lagrange interpolating polynomial

# 1 Uvod

Numerička analiza, pa tako i numerička integracija, bavi se traženjem aproksimativnih rješenja kompleksnih problema korištenjem najjednostavnijih operacija aritmetike. Jedna od tih metoda nazvana po engleskim matematičarima, Isaac Newtonu<sup>1</sup> i Roger Cotesu<sup>2</sup>, je Newton – Cotesova kvadratura formula  $n$ -tog reda, koja se odnosi na problem određenih integrala. Zbog toga se ovaj problem naziva numerička kvadratura, jer se taj pojam odnosi i na računanje odgovarajuće površine, što podsjeća na antički problem kvadrature kruga, tj. konstrukcije kvadrata koja ima jednaku površinu kao i krug.

Uglavnom ćemo razmatrati problem određenih jednostrukih integrala, iako se numerička analiza također bavi i problemima višestrukih i neodređenih integrala. Vidjet ćemo i zbog čega koristimo numeričku analizu za rješavanje integrala. Upoznat ćemo se samo s jednom metodom otvorenog tipa Newton – Cotesove formule te se u većini ovog rada baviti zatvorenim tipom formule.

U ovom završnom radu ćemo proučiti izvode metoda za numeričku integraciju koje proizlaze iz Newton – Cotesove formule, trapezno pravilo i Simpsonovo<sup>3</sup> pravilo te u posljednjem dijelu ovoga rada ćemo izvesti i neke metode višeg reda. Također ćemo se baviti i pogreškama aproksimacije tih metoda.

Newton – Cotes formule mogu biti korisne ako su dane vrijednosti funkcije na jednako udaljenim točkama. Također, postoje još prikladnije metode koje se koriste ako nemamo jednako udaljene točke, poput Gaussove kvadrature i Clenshaw-Curtisove kvadrature, ali njima se nećemo posvetiti u ovom radu.

---

<sup>1</sup>Isaac Newton (1642.-1717.), engleski fizičar, matematičar i astronom. Jedan od najznačajnijih znanstvenika u povijesti.

<sup>2</sup>Roger Cotes (1682.–1716.) bio je vrlo cijenjen mladi kolega Isaaca Newtona. Povjerenica mu je priprema drugog izdanja Newtonove Principia - e. Izradio je i objavio koeficijente Newtonove formule za numeričku integraciju za  $n \leq 11$ .

<sup>3</sup>Thomas Simpson (1710–1761), engleski matematičar, najpoznatiji po svom radu na interpolaciji i numeričkim metodama integracije. Privatno je predavao matematiku u londonskim kafićima i od 1737. počeo je pisati matematičke knjige.

## 2 Općenito o integracijskim formulama

Postoje situacije gdje nije moguće primijeniti osnovni teorem integralnog računa, tj. Newton – Leibnizovu formulu<sup>4</sup> pri rješavanju određenih integrala neprekidne funkcije preko vrijednosti primitivne funkcije na rubovima segmenta, te ih moramo riješiti numeričkom analizom. Ako imamo:

- za funkciju koju integriramo ne možemo nikako dobiti njenu primitivnu funkciju
- da je podintegralna funkcija poznata samo u nekoliko (konačno) točaka.

Zbog tih problema, mi ćemo aproksimativno izračunati vrijednost integrala tako što ćemo podintegralnu funkciju interpolirati nekom, njoj sličnoj, jednostavnijom funkcijom. Tako ćemo doći do Newton – Cotesove formule. Zapravo će opća integracijska formula imati oblik

$$I = I^* + E_n, \quad I^* = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i),$$

pri čemu je za  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $n + 1$  broj korištenih čvorova,  $I^*$  pripadna aproksimacija integrala,  $E_n$  pritom napravljena greška, a  $\omega_i$  težinske funkcije tako da se  $f$  može dobro aproksimirati polinomom. Ovakve formule često se zovu kvadraturene formule.

### 2.1 Newton – Cotesova formula

Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija. Segment  $[a, b]$  podijelit ćemo na  $n$  jednakih podintervala jednoliko raspoređenih čvorovima  $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ , tj. sa  $n + 1$  točaka, tako da je  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ,  $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = h$ ,  $i = 1, \dots, n$ , a funkciju  $f$  ćemo interpolirati polinomom  $n$ -tog reda u Lagrangeovom obliku. U općenitom slučaju, definiramo:

- zatvorenu formulu, kada imamo  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$  i  $h = \frac{b-a}{n}$ , za  $n \geq 1$
- otvorenu formulu, kada imamo  $x_0 = a + h$ ,  $x_n = b - h$  i  $h = \frac{b-a}{n+2}$ , za  $n \geq 0$ ,

pa prema Lagrangeovoj formuli za interpolaciju imamo

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) p_k(x), \quad \text{pri čemu je } p_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Približnu vrijednost  $I_n^*$  integrala  $I$  mogli bismo dobiti kao integral dobivenog polinoma u istim granicama kao i dana funkcija  $f$ .

$$\begin{aligned} I_n^* &= \int_a^b P_n(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k) p_k(x) dx = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b p_k(x) dx = \\ &= \frac{b-a}{b-a} \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b p_k(x) dx = (b-a) \sum_{k=0}^n f(x_k) \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b p_k(x) dx}_{\omega_k} = \\ &= (b-a) \sum_{k=0}^n \omega_k f(x_k), \quad \text{pri čemu su } \omega_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b p_k(x) dx \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Newton – Leibnizova formula:  $I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .



Uz supstituciju  $x = \Psi(t) = a + (b - a)t$  dobivamo jednostavniji prikaz težinskih funkcija

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{1}{b-a} \int_a^b p_k(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = a + (b-a)t \\ dx = (b-a) dt \\ x \rightarrow a \Rightarrow t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow b \Rightarrow t \rightarrow 1 \end{array} \right| = \frac{1}{b-a} \int_0^1 p_k(a + (b-a)t)(b-a) dt = \\ &= \int_0^1 p_k(a + (b-a)t) dt = \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{a + (b-a)t - a - \frac{b-a}{n}i}{a + \frac{b-a}{n}k - a - \frac{b-a}{n}i} dt = \\ &= \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{\cancel{\frac{b-a}{n}}(nt - i)}{\cancel{\frac{b-a}{n}}(k - i)} dt = \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{nt - i}{k - i} dt. \end{aligned}$$

Stoga, za  $n \geq 1$  dobivamo grupu formula, tj. poznatu **kvadraturnu** ili **Newton – Cotesovu formulu  $n$ -tog reda** za aproksimaciju integrala  $I$ :

$$I_n^* = (b-a) \sum_{k=0}^n \omega_k f(x_k), \quad \omega_k = \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{nt - i}{k - i} dt \quad (2.1)$$

### 2.1.1 Ponašanje težinskih funkcija

Koeficijenti  $\omega_k$ , tj. težine ne ovise o  $a$ ,  $b$ ,  $h$  i  $f$ , nego samo o  $n$  te mogu biti prikazani tablično *a priori*<sup>5</sup>. Polinomi  $p_k$  i  $p_{n-k}$ , za  $k = 0, \dots, n-1$  imaju simetrično jednake integrale tako da su i odgovarajuće težine  $\omega_k$  i  $\omega_{n-k}$  jednake za  $i = 0, \dots, n-1$ . Zbog toga, u tablici 1 prikazujemo samo prvu polovicu težina.

$n$	1	2	3	4	5	6
$\omega_0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{90}$	$\frac{19}{288}$	$\frac{41}{840}$
$\omega_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{9}{35}$
$\omega_2$	-	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{27}{840}$
$\omega_3$	-	-	$\frac{1}{8}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{272}{840}$
$\omega_4$	-	-	-	$\frac{7}{90}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{27}{840}$
$\omega_5$	-	-	-	-	$\frac{19}{288}$	$\frac{9}{35}$
$\omega_6$	-	-	-	-	-	$\frac{41}{840}$

Tablica 1: Težine zatvorenih Newton – Cotesovih formula (vidi [10])

Zatvorena Newton – Cotesova formula za  $n = 1$  i  $n = 2$  su ekvivalentne trapeznom pravilu odnosno Simpsonovom pravilu. Formula za  $n = 3$  zove se Simpsonovo pravilo 3/8, za  $n = 4$  Booleovo pravilo i za  $n = 6$  Weddleovo pravilo.

<sup>5</sup>ono što je apsolutno neovisno o svakom iskustvu, onaj stav koji je unaprijed zauzet, načelno ili proizvoljno, tako da ne uzima u obzir razloge i okolnosti koji bi ga mogli izmijeniti

### 2.1.2 Pogreška

Naravno, cijela se numerička analiza bazira na aproksimacijama, te nas zanima kolika je zanemarena pogreška kod aproksimativnih vrijednosti. Tako nas i sada zanima kolika je pogreška kod primjene Newton – Cotesove formule za aproksimacije integrala, o čemu nam govori sljedeći teorem (vidi [5], poglavlje 9).

**Teorem 2.1.** *Za Newton – Cotesovu formulu koja odgovara danoj vrijednosti parnog broja  $n$ , vrijedi sljedeća karakterizacija pogreške  $E_n$  integrala  $I_n^*$  danog u izrazu (2.1). Ako je  $f \in C^{n+2}([a, b])$ , gdje je  $n$  paran broj, onda postoji  $\xi \in (a, b)$ , tako da vrijedi*

$$E_n(f) = \frac{M_n}{(n+2)!} h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi), \quad \text{gdje je } M_n = \int_0^n t \pi_{n+1}(t) dt < 0, \quad \pi_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^n (t-i) \quad (2.2)$$

*Slično, za dane vrijednosti neparnog broja  $n$ , vrijedi sljedeća ocjena pogreške integrala  $I_n^*$ .*

$$E_n(f) = \frac{K_n}{(n+1)!} h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi), \quad K_n = \int_0^n \pi_{n+1}(t) dt < 0, \quad \pi_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^n (t-i). \quad (2.3)$$

### 3 Newton – Cotesove formule

Primijenimo sada Newton – Cotesovu formulu (2.1) za neke  $n \in \mathbb{N}$ .

#### 3.1 Trapezno pravilo ( $n = 1$ )

Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija,  $a = x_0 < x_1 = b$  te  $h = x_1 - x_0 = b - a$ . Prvo ćemo izračunati težine iz općenite Newton – Cotesove formule  $n$ -tog reda (2.1), a nakon toga lako dobivamo trapezno pravilo.

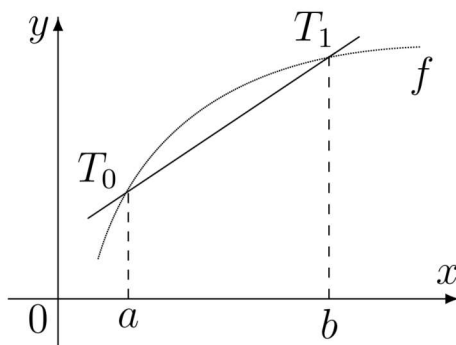
$$\omega_0 = \int_0^1 \frac{t-1}{0-1} dt = \frac{1}{2}$$

$$\omega_1 = \int_0^1 \frac{t}{1} dt = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I_1^* = (b-a) \sum_{k=0}^1 f(x_k) \omega_k = (b-a) \left( f(a) \frac{1}{2} + f(b) \frac{1}{2} \right) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

**Trapezno pravilo:**  $I^* = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$  (3.1)

Općenito, trapezno pravilo dobije se interpolacijom funkcije  $f$  polinomom  $P_1$  stupnja 1 koja prolazi dvjema točkama  $T_0 = (a, f(a))$  i  $T_1 = (b, f(b))$ , tj. računat ćemo površinu ispod pravca kao što je prikazano na slici 1.



Slika 1: Trapezno pravilo

$$I^* = \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b P_1(x) dx, \text{ pri čemu je } \varphi(x) = P_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x - a)$$

Slijedi,

$$\begin{aligned} I^* &= \int_a^b \left( f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right) dx = f(a) x \Big|_a^b + \frac{(x - a)^2}{2} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Big|_a^b = \\ &= f(a)(b - a) + \frac{f(b) - f(a)}{2(b - a)} ((b - a)^2 - (a - a)^2) = (b - a) \left( f(a) + \frac{f(b)}{2} - \frac{f(a)}{2} \right) = \\ &= (b - a) \left( \frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} \right) = \frac{b - a}{2} (f(a) + f(b)) \end{aligned}$$

Zapravo se dođe do klasične formule za površinu trapeza, kao što vidimo na slici 1, s osnovicama  $f(a)$  i  $f(b)$  te visinom  $b - a$ , odakle nam i naziv za trapezno pravilo.

### 3.1.1 Pogreška kod trapeznog pravila

Vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 3.1.** *Neka je  $f \in C^2([a, b])$ . Tada postoji  $c \in \langle a, b \rangle$  tako da je*

$$I = \int_a^b f(x) dx = \underbrace{\frac{b - a}{2}(f(a) + f(b))}_{I^*} - \frac{(b - a)^3}{12} f''(c) \quad (3.2)$$

*Dokaz.* Prema teoremu o ocjeni pogreške<sup>6</sup>, postoji  $\xi(x) \in \langle a, b \rangle$  tako da je

$$E := I - I^* = \int_a^b (f(x) - P_1(x)) dx = \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2} (x - a)(x - b) dx.$$

Kako je  $(x - a)(x - b) \leq 0$  za sve  $x \in [a, b]$ , koristeći poopćeni teorem o srednjoj vrijednosti integralnog računa<sup>7</sup>, zaključujemo da postoji  $c \in \langle a, b \rangle$  takav da je

$$\begin{aligned} E &= \frac{f''(c)}{2} \int_a^b (x - a)(x - b) dx = \left. \begin{array}{l} x = a + (b - a)t \\ dx = (b - a)dt \\ x \rightarrow a \Rightarrow t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow b \Rightarrow t \rightarrow 1 \end{array} \right| = \\ &= \frac{f''(c)}{2} \int_0^1 (b - a)t(a + (b - a)t - b)(b - a) dt = \frac{(b - a)^3}{2} f''(c) \int_0^1 (t^2 - t) dt = \\ &= \frac{(b - a)^3}{2} f''(c) \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{(b - a)^3}{2} f''(c) \left( \frac{-1}{6} \right) = -\frac{(b - a)^3}{12} f''(c) \end{aligned}$$

□

<sup>6</sup>Za svaki  $\bar{x} \in [a, b]$  postoji  $\xi \in \langle a, b \rangle$ , tako da je  $f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\bar{x} - x_0) \cdots (\bar{x} - x_n)$ .

<sup>7</sup>Ako je  $f$  neprekidna na segmentu  $[a, b]$ , a  $g$  integrabilna funkcija stalnog predznaka na tom segmentu, onda postoji  $c \in [a, b]$  takav da vrijedi

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$



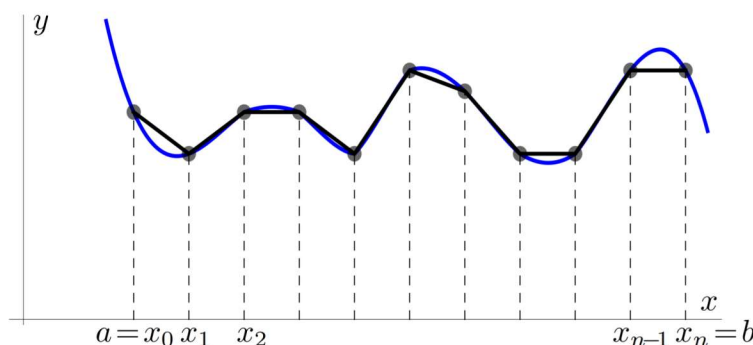
U dokazu prethodnog teorema 3.1 dobije se pogreška kod primjene trapeznog pravila koja iznosi  $E = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(c)$ . Ako je segment integracije  $[a, b]$  velik, i pogreška  $E$  će biti velika.

### 3.1.2 Produljeno trapezno pravilo

U cilju postizanja bolje aproksimacije  $I^*$  integrala  $I$ , interval  $[a, b]$  podijelit ćemo na  $n$  pointervalu i onda na svakom od njih primijeniti trapezno pravilo (3.1). Pretpostavimo da imamo  $n + 1$  ekvidistantno raspoređenih točaka  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$  tako da je  $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} =: h$  te  $x_0 = a$  i  $x_n = b$ . Označimo

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + ih, & i &= 0, \dots, n \\ y_i &= f(x_i), & i &= 0, \dots, n \\ n \cdot h &= b - a & \Rightarrow & h = \frac{b - a}{n} \end{aligned}$$

Promotrimo sliku 2.



Slika 2: Generalizirano trapezno pravilo

Iz nje je očigledno da točke  $x_0, \dots, x_n$  dijele segment  $[a, b]$  na  $n$  jednakih podsegmenta duljine  $h$ . Sada ćemo imati intervale  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$  na koje ćemo primijeniti trapezno pravilo (3.1), tj. računat ćemo integral polinoma 1. stupnja kroz dvije točke,  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  i  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Imamo:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}) \right) dx = \frac{h}{2} (y_{i-1} + y_i), \quad i = 1, \dots, n$$

*Primjedba 3.1.* Vidimo da u ovom slučaju računamo površine malih trapezića s osnovicama  $y_{i-1}$  i  $y_i$ ,  $i=1, \dots, n$  te visinom  $h$ .

Sumiranjem svih površina malih trapezića dobijemo generalizirano (produljeno) trapezno pravilo.

$$\begin{aligned} I^* &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{h}{2} (y_0 + y_1) + \frac{h}{2} (y_1 + y_2) + \dots + \frac{h}{2} (y_{n-1} + y_n) \\ &\Rightarrow \boxed{I^* = \frac{h}{2} (y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n)} \end{aligned} \quad (3.3)$$



Pitamo se kolika je pogreška kod produljenog trapeznog pravila. Primjenom teorema 3.1 dobijemo:

$$\begin{aligned} E = I - I^* &= \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = - \sum_{i=1}^n \frac{h^3}{12} f''(c_i) = \\ &= \frac{-h^3}{12} \sum_{i=1}^n f''(c_i) = \frac{-h^2}{12} \underbrace{\frac{b-a}{n}}_h \sum_{i=1}^n f''(c_i) \end{aligned}$$

Zbog neprekidnosti funkcije  $f''$  na intervalu  $\langle a, b \rangle \exists c \in \langle a, b \rangle$  takav da je

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(c_i) = f''(c).$$

Pa imamo

$$E = \frac{-h^2}{12} (b-a) f''(c)$$

Ocijenimo sada apsolutnu pogrešku integrala  $I^*$ .

$$\Delta I^* = |E| = |I - I^*| = \frac{h^2}{12} (b-a) |f''(c)| \leq \frac{h^2}{12} (b-a) M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Iz ove ocjene ćemo moći odrediti broj podintervala  $n$  na koji je potrebno podijeliti  $[a, b]$  kako bismo mogli primijeniti generalizirano trapezno pravilo i postići točnost  $\varepsilon > 0$ , tj. da je  $|E| = |I - I^*| < \varepsilon$ . Iz te nejednadžbe dobijemo da je

$$\boxed{n > (b-a) \sqrt{\frac{(b-a) M_2}{12 \varepsilon}}}$$

**Primjer 3.1.** Trapeznim pravilom izračunajte integral  $\int_1^3 x^2 \ln x dx$ ,  $\varepsilon = 0.1$ .

Integral ćemo računati na 2 načina:

- jednostavnim trapeznim pravilom (3.1):

Prvo ćemo izračunati  $f(a)$  i  $f(b)$

$$f(a) = f(1) = 1^2 \ln 1 = 0, \quad f(b) = f(3) = 3^2 \ln 3 = 9.88751$$

i uvrstimo to u trapeznu formulu

$$I^* = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) = \frac{3-1}{2} \cdot 9.88751 = 9.88751.$$

- generaliziranim trapeznim pravilom (3.3):

Prvo moramo odrediti potreban broj koraka kako bi se odredila aproksimacija od  $I$  uz točnost  $\varepsilon = 0.1$ . Stoga, izračunajmo dugu derivaciju funkcije  $f$  i  $M_2$  koje ćemo ubaciti u generaliziranu trapeznu formulu.

$$f''(x) = 2 \ln x + 3, \quad M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| = \max_{x \in [1, 3]} |2 \ln x + 3| = 5.19722$$

$$n > (b - a) \sqrt{\frac{M_2}{\varepsilon} \cdot \frac{b - a}{12}} = (3 - 1) \sqrt{\frac{5.19722}{0.1} \cdot \frac{3 - 1}{12}} = 5.88$$

Slijedi da je  $n = 6$ . Sada računamo:

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{3 - 1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_i = a + ih = 1 + i \cdot \frac{1}{3}, \quad i = 0, 1, \dots, 6$$

$x_i$	$y_i$
1	0
$\frac{4}{3}$	0.51143
$\frac{5}{3}$	1.41896
$\frac{6}{3}$	2.77258
$\frac{7}{3}$	4.613066
$\frac{8}{3}$	6.97478
$\frac{9}{3}$	9.88751

Sada imamo sve podatke i trebamo ih uvrstiti u formulu:

$$I^* = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) = \frac{1}{6}(y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) + y_6) = 7.07872$$

Egzaktno rješenje ovog integrala je 6.9986 pa vidimo da je aproksimacija generalizirane trapezne formule puno bolja od one koju dobijemo rješavajući integral općenitom trapeznom formulom.

### 3.2 Simpsonovo pravilo ( $n = 2$ )

Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna fukcija,  $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$  te  $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \frac{b-a}{2}$ . Primijetimo da je u ovom slučaju:  $x_1 = \frac{a+b}{2}$ , tako da nam sve točke budu međusobno jednako udaljene. Najprije ćemo izračunati težine iz općenite Newton – Cotesove formule  $n$ -tog reda (2.1) te se lako dođe do tzv. Simpsonovog pravila.

$$\omega_0 = \int_0^1 \frac{2t-1}{-1} \cdot \frac{2t-2}{-2} dt = \int_0^1 (2t^3 - 3t + 1) dt = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{6}$$

$$\omega_1 = \int_0^1 \frac{2t}{1} \cdot \frac{2t-2}{-1} dt = \int_0^1 (-4t^2 + 4t) dt = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\omega_2 = \int_0^1 t \cdot \frac{2t-1}{1} dt = \int_0^1 (2t^2 - t) dt = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

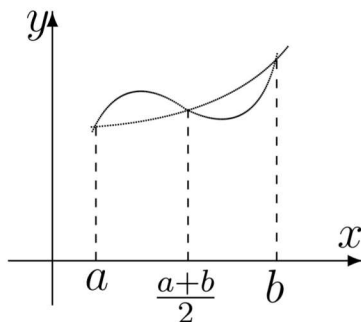
$$I_2^* = (b-a)(\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)) = (b-a) \left( \omega_0 f(a) + \omega_1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \omega_2 f(b) \right)$$

$$\Rightarrow \text{Simpsonovo pravilo: } \boxed{I^* = \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)} \quad (3.4)$$

Pogrešku aproksimacije kod primjene Simpsonova pravila ćemo samo napomenuti, ali ju je lako odrediti jednostavnim računom integrala.

$$E = I - I^* = \int_a^b (f(x) - P_2(x)) dx = \dots = -\frac{1}{90} \underbrace{\left(\frac{b-a}{2}\right)^5}_{h^5} f^{(4)}(c), \quad \text{za neki } c \in \langle a, b \rangle.$$

Kao i kod trapeznog pravila, Simpsonovo pravilo se može općenito izvesti iz interpolacije polinomom 2. stupnja koji prolazi točkama:  $T_0 = (a, f(a))$ ,  $T_1 = \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$  i  $T_2 = (b, f(b))$ . Pogledajmo sljedeću sliku.

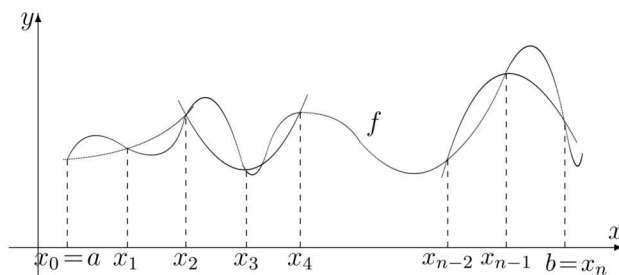


Slika 3: Općenito Simpsonovo pravilo

### 3.2.1 Produljeno Simpsonovo pravilo

Podijelimo segment  $[a, b]$  na  $n = 2m$  ekvidistantnih podintervala duljine  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{x_{i+2} - x_i}{2}$ ,  $i = 0, \dots, n-2$ , čvorovima  $x_i = a + hi$ ,  $i = 0, \dots, 2m$ . Promotrimo sliku 4 i zaključimo da segment  $[a, b]$  rastavljamo na podsegmente  $[x_0, x_2]$ ,  $[x_2, x_4]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{2m-2}, x_{2m}]$  te uz oznaku  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  primijenimo Simpsonovo pravilo (3.4) na te podsegmente pa se sada lako dođe do generaliziranog Simpsonovog pravila.

$$\begin{aligned}
 I^* &= \underbrace{\frac{x_2 - x_0}{6}}_{\frac{h}{3}} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \underbrace{\frac{x_4 - x_2}{6}}_{\frac{h}{3}} (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + \dots + \\
 &\quad + \underbrace{\frac{x_{2m} - x_{2m-2}}{6}}_{\frac{h}{3}} (f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})) = \\
 &= \frac{h}{3} [(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \dots + (f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m}))] = \\
 &= \frac{h}{3} [y_0 + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + y_{2m}] \\
 \Rightarrow &\boxed{I^* = \frac{h}{3} [y_0 + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + y_{2m}]} \quad (3.5)
 \end{aligned}$$



Slika 4: Generalizirano Simpsonovo pravilo

Ocjena pogreške apsolutne pogreške integrala  $I^*$ :

$$\Delta I^* = |I - I^*| \leq \underbrace{\frac{b-a}{180} h^4 M_4}_{(*)} < \varepsilon$$

Iz nejednadžbe (\*) možemo dobiti broj podsegmentata  $n$ , za danu točnost  $\varepsilon > 0$ , kako bismo mogli primijeniti generalizirano Simpsonovo pravilo.

$$\Rightarrow \boxed{n > (b-a) \sqrt[4]{\frac{(b-a)M_4}{180\varepsilon}}}$$

**Primjer 3.2.** Simpsonovom formulom izračunajte integral iz Primjera 3.1, uz točnost  $\varepsilon = 0.1$ .

- jednostavnim Simpsonovim pravilom (3.4):

Prvo računamo  $f(a)$ ,  $f(b)$  i  $f(\frac{a+b}{2})$

$$f(a) = f(1) = 0, \quad f(b) = f(3) = 9.88751, \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(2) = 2^2 \cdot \ln 2 = 2.772589$$

Uvrstimo te podatke u (3.4)

$$I^* = \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) = \frac{3-1}{6} (4 \cdot 2.772589 + 9.88751) = 6.992622$$

- generaliziranim Simpsonovim pravilom (3.5):

Najprije ćemo izračunati četvrtu derivaciju funkcije  $f$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2}{x^2} \text{ i } M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)| = \max_{x \in [1, 3]} \left| -\frac{2}{x^2} \right| = 2.$$

Sada možemo računati potreban broj koraka da bi se mogla primijeniti generalizirana Simpsonova formula uz postignutu točnost  $\varepsilon = 0.1$

$$n > (b-a) \sqrt[4]{\frac{M_4}{\varepsilon} \cdot \frac{b-a}{180}} = (3-1) \sqrt[4]{\frac{2}{0.1} \cdot \frac{3-1}{180}} = 1.37317 \Rightarrow n = 2.$$

U ovom slučaju je  $n = 2$ , pa se dobiva jednaki rezultat kao kod jednostavnog Simpsonovog pravila. Izračunajmo sada  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{2} = 1$   $x_i = a + ih = 1 + i \cdot 1$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

$x_i$	$y_i$
1	0
2	2.77258
3	9.88751

Na kraju sve uvrstimo u (3.5)

$$I^* = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + \dots + y_{2m-2})] = \frac{1}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) = 6.99261.$$

Općenito, osim što nam generalizirana Simpsonova formula daje bolju aproksimaciju integrala, ona ima i manji broj koraka od generalizirane trapezne formule.



### 3.3 Simpsonovo 3/8 pravilo ( $n = 3$ )

Još jedna metoda numeričke integracije koju je izveo Thomas Simpson je zapravo Newton – Cotesova formula četvrtoga reda, tj. interpolacija polinomom četvrtog stupnja kroz dane četiri točke.

Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna fukcija,  $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b$  te  $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \frac{b-a}{3}$ . Primijetimo da je u ovom slučaju:  $x_i = a + \frac{b-a}{3}i$ , jer su nam tako sve točke međusobno jednako udaljene. Najprije ćemo izračunati težine iz općenite Newton – Cotesove formule  $n$ -tog reda (2.1) te se lako dođe do tzv. Simpsovovog 3/8 pravila.

$$\omega_k = \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^3 \frac{3t-i}{k-i} dt, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 0}}^3 \frac{3t-i}{0-i} dt = \int_0^1 \frac{3t-1}{-1} \cdot \frac{3t-2}{-2} \cdot \frac{3t-3}{-3} dt = \int_0^1 \left( -\frac{9}{2}t^3 + 9t^2 - \frac{11}{2}t + 1 \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{9t^4}{4} + 6t^3 - \frac{11t^2}{2} + 2t \right) \Big|_0^1 = \dots = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 1}}^3 \frac{3t-i}{1-i} dt = \int_0^1 \frac{3t}{1} \cdot \frac{3t-2}{1-2} \cdot \frac{3t-3}{1-3} dt = \int_0^1 \left( \frac{27t^3}{2} - \frac{45t^2}{2} + 9t \right) dt = \\ &= \frac{9}{2} \left( \frac{3t^4}{4} - \frac{5t^3}{3} + t^2 \right) \Big|_0^1 = \dots = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 2}}^3 \frac{3t-i}{2-i} dt = \int_0^1 \frac{3t}{2} \cdot \frac{3t-1}{2-1} \cdot \frac{3t-3}{2-3} dt = \int_0^1 \left( -\frac{27t^3}{2} + 18t^2 - \frac{9t}{2} \right) dt = \\ &= -\frac{9}{2} (9t^2 - 8t + 1) \Big|_0^1 = \dots = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 3}}^3 \frac{3t-i}{3-i} dt = \int_0^1 \frac{3t}{3} \cdot \frac{3t-1}{3-1} \cdot \frac{3t-2}{3-2} dt = \int_0^1 \left( \frac{9t^3}{2} - \frac{9t^2}{2} + t \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{9t^4}{4} - 3t^3 + t^2 \right) \Big|_0^1 = \dots = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_3^* = (b-a) \sum_{k=0}^3 \omega_k f(x_k) = (b-a) (\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2) + \omega_3 f(x_3))$$

Jer je  $\frac{b-a}{3} = h \Rightarrow b-a = 3 \cdot h$ , i označimo  $f(x_i) = f_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Slijedi **Simpsonovo 3/8 pravilo**:

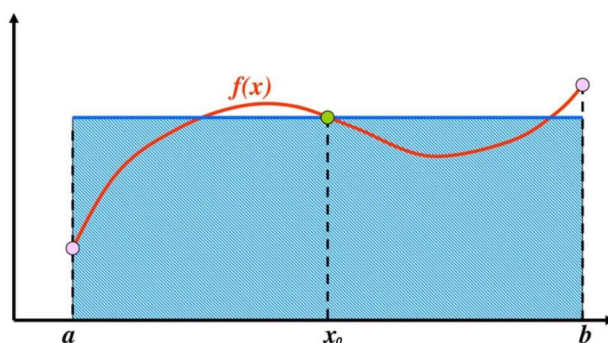
$$I_3^* = 3h \left( \frac{1}{8} f(x_0) + \frac{3}{8} f(x_1) + \frac{3}{8} f(x_2) + \frac{1}{8} f(x_3) \right) = \frac{3}{8} h (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

### 3.4 Midpoint pravilo

Do sada smo se upoznali s tri vrste Newton – Cotesovih kvadrature formula zatvorenog tipa. Ako prilikom interpolacije ne koristimo jednu ili nijednu rubnu točku, dobijemo otvorene Newton – Cotesove formule.

Stavimo  $x_0 := a$ ,  $x_1 := b$ ,  $h = \frac{b-a}{2}$ . Formula se dobiva zamjenom funkcije  $f$  nad segmentom  $[a, b]$  s konstantnom funkcijom koja postiže jednaku vrijednost u središnjoj točki segmenta  $[a, b]$  kao i u funkciji  $f$ .

$$\Rightarrow \text{Midpoint pravilo: } I_0^* = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (3.6)$$



Slika 5: Midpoint pravilo

Iz slike 5 vidimo da se radi o površini pravokutnika sa stranicama  $b-a$  i  $f(x_0)$ , pri čemu je  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  aritmetička sredina krajnjih točaka  $a$  i  $b$  segmenta  $[a, b]$ . Odatle dolazi još jedan naziv za ovo pravilo, a to je pravokutno pravilo.

Greška ove integracijske formule jednaka je integralu greške interpolacijskog polinoma stupnja nula, tj. konstante, koji interpolira  $f$  u srednjoj točki segmenta  $[a, b]$  i iznosi:

$$E = f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{24}, \quad \xi \in [a, b].$$

Koristimo li produljenu midpoint formulu na  $n$  ekvidistantnih podsegmenta duljine  $h$ , dobijemo generalizirano midpoint pravilo. Ono se dobije primjenom midpoint pravila na svakom podsegmentu  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, n-1$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = hf(x_{i+\frac{1}{2}}) \quad \Rightarrow \quad I_0^* = \int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

Pogreška generaliziranog midpoint pravila je dana s

$$E = \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

### 3.5 Zatvorene i otvorene Newton – Cotesove formule

Prikazat ćemo tablicama listu otvorenih i zatvorenih Newton – Cotesovih formula  $n$ -tog reda za  $i = 0, \dots, n$ . Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija.

- **Zatvoreni tip:** Neka je  $x_i = a + i\frac{b-a}{n} = a + ih$  i označimo  $f(x_i) = f_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Uzima se za odgovarajuće  $\xi \in [a, b]$ .

$n$	$h$	Ime metode	Formula	Pogreška aproksimacije
1	$b - a$	Trapezno pravilo	$\frac{h}{2}(f_0 + f_1)$	$-\frac{h^3}{12}f^{(2)}(\xi)$
2	$\frac{b-a}{2}$	Simpsonovo pravilo	$\frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$	$-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$
3	$\frac{b-a}{3}$	Simpsonovo 3/8 pravilo	$\frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$	$-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)$
4	$\frac{b-a}{4}$	Booleovo pravilo	$\frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$	$-\frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi)$

Tablica 2: Zatvorene Newton – Cotesove formule (vidi [9])

- **Otvoreni tip:** Neka je  $x_i = a + i\frac{b-a}{n} = a + ih$  i označimo  $f(x_i) = f_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , te za  $\xi$  se uzima odgovarajuće elemente iz  $[a, b]$ .

$n$	$h$	Ime metode	Formula	Pogreška aproksimacije
0	$\frac{b-a}{2}$	midpoint pravilo	$2hf(\frac{a+b}{2})$	$\frac{h^3}{3}f^{(2)}(\xi)$
1	$\frac{b-a}{3}$		$\frac{3h}{2}(f_0 + f_1)$	$\frac{3h^3}{4}f^{(2)}(\xi)$
2	$\frac{b-a}{4}$	Milneovo pravilo	$\frac{4h}{3}(2f_0 - f_1 + 2f_2)$	$\frac{14h^5}{45}f^{(4)}(\xi)$
3	$\frac{b-a}{5}$		$\frac{5h}{24}(11f_0 + f_1 + f_2 + 11f_3)$	$\frac{95h^5}{144}f^{(4)}(\xi)$

Tablica 3: Otvorene Newton – Cotesove formule (vidi [9])



### 3.6 Formule za polinome višeg stupnja

Newton – Cotesova formula može se konstruirati uporabom bilo kojeg stupnja  $n$  aproksimacije.

Neka je  $f$  neprekidna funkcija,  $P_n$  polinom  $n$ -tog stupnja i neka su dane točke  $x_0, \dots, x_n$  tako da je  $f(x_i) = y_i$  za  $i = 0, \dots, n$ . Rezultati aproksimacija integrala polinoma višeg stupnja mogu se dobiti u obliku

$$\int_{x_0}^{x_n} P_n(x) dx = Ch(c_0y_0 + c_1y_1 + \dots + c_ny_n)$$

pri čemu su  $C$  i  $c_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  konstante za nekoliko prvih  $n$  vrijednosti dane sljedećom tablicom

$n$	$C$	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$	$c_8$
1	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	$\frac{1}{3}$	1	4	1	0	0	0	0	0	0
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1	0	0	0	0	0
4	$\frac{2}{45}$	7	32	12	32	7	0	0	0	0
6	$\frac{1}{140}$	41	216	27	272	27	216	41	0	0
8	$\frac{4}{14175}$	989	5888	-928	10496	-4540	10496	-928	5888	989

Tablica 4: Konstante Newton – Cotesovih formula (vidi [6], poglavlje 14)

Međutim, za veliki  $n$  Newton-Cotesova formula može ponekad patiti od katastrofalnog “Rungeovog fenomena”<sup>8</sup> pa se formule višeg stupnja rijetko koriste. Djelomično zbog toga što su dostupne jednostavnije i podjednako točne formule, a i zbog pomalo iznenađujuće činjenice, da polinomi višeg stupnja ne moraju uvijek imati bolju točnost, tj. imati manju pogrešku. Metode poput Gaussove kvadrature i Clenshaw – Curtisove kvadrature s nejednako raspoređenim točkama su stabilne i preciznije. Ako se ove metode ne mogu upotrijebiti, jer je integral dan samo na ekvidistantnim udaljenostima, tada se Rungeov fenomen može izbjeći korištenjem generaliziranih Newton – Cotesovih pravila.

<sup>8</sup>Problem oscilacija na rubovima intervala koji se javlja kada se koristi interpolacija polinomom višeg stupnja te dolazi do eksponencijalnog rasta pogreške.

## Literatura

- [1] G. Dahlquist, A. Bjorck, *Numerical Methods in Scientific Computing, Volume I*, Siam, USA, 2008. (Dostupno na: [http://fmipa.umri.ac.id/wp-content/uploads/2016/03/Dahlquist\\_G.\\_Bjoerck\\_A.\\_Vol.1.\\_Numerical\\_methodBookZZ.org\\_.pdf](http://fmipa.umri.ac.id/wp-content/uploads/2016/03/Dahlquist_G._Bjoerck_A._Vol.1._Numerical_methodBookZZ.org_.pdf))
- [2] P. Holoborodko, *Stable Newton - Cotes Formulas*, (Dostupno na: <http://www.holoborodko.com/pavel/numerical-methods/numerical-integration/stable-newton-cotes-formulas>)
- [3] T. M. Huang, *Numerical Differentiation and Integration*, Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, Taiwan, 2008. (Dostupno na: [http://math.ntnu.edu.tw/~min/Numerical\\_Analysis/2008/Differentiatio\\_Integration.pdf](http://math.ntnu.edu.tw/~min/Numerical_Analysis/2008/Differentiatio_Integration.pdf))
- [4] M. Klaričić Bakula, *Uvod u numeričku matematiku*, Prirodoslovno – matematički fakultet Sveučilišta u Splitu, 2009. (Dostupno na: [http://mapmf.pmfst.unist.hr/~milica/Numericka\\_matematika/Folije\\_za\\_predavanja/UNM\\_Numinteg.pdf](http://mapmf.pmfst.unist.hr/~milica/Numericka_matematika/Folije_za_predavanja/UNM_Numinteg.pdf))
- [5] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerical Mathematics (Texts in Applied Mathematics 37), 2nd Edition*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [6] F. Scheid, *Schaum's outline of theory and problems of numerical analysis, 2nd edition - Chapter 14*, McGraw-Hill, New York, 1989.
- [7] R. Scitovski, *Numerička matematika, Izmijenjeno i dopunjeno izdanje*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku – Odjel za matematiku, Osijek, 2015.
- [8] N. Ujević, *Uvod u numeričku matematiku*, Fakultet prirodoslovno – matematičkih znanosti i odgojnih područja, Sveučilište u Splitu, 2004. (Dostupno na: <http://mapmf.pmfst.unist.hr/matematika/Nastavni%20materijali/nummat.pdf>)
- [9] *Wikipedia – Newton – Cotes formulas*, (Dostupno na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%E2%80%93Cotes\\_formulas](https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%E2%80%93Cotes_formulas))
- [10] *Wolfram Mathworld – Newton – Cotes formulas*, (Dostupno na: <http://mathworld.wolfram.com/Newton-CotesFormulas.html>)
- [11] *Wolfram Mathworld – Simpson's 3/8 rule*, (Dostupno na: <http://mathworld.wolfram.com/Simpsons38Rule.html>)