Funkcije operatora

Bosanac, Maja

Undergraduate thesis / Završni rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:417845

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-10-19**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science

zir.nsk.hr

DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Maja Bosanac

Funkcije operatora

Završni rad

Osijek, 2019.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Maja Bosanac

Funkcije operatora

Završni rad

Mentor:
doc.dr.sc. Suzana Miodragović

Osijek, 2019.

Sadržaj

Sažetak

U ovom radu se proučavaju funkcije f za koje se može definirati operator $f(A)$, pri čemu je A linearni operator na nekom vektorskom prostoru V. U uvodnom dijelu će biti definirani osnovni pojmovi potrebni za razumijevanje rada. Zatim će biti definiran $f(A)$ za cijelu funkciju, te prikaz $f(A)$ u Jordanovoj i kanonskoj bazi. Zadnje poglavlje rada govori o $f(A)$ kao polinomu.

Ključne riječi: linearni operator, cijela funkcija, analitička funkcija, Jordanova baza

Abstract

In this paper we will consider functions f for which we can define operator $f(A)$, where A is a linear operator on the vector space V. In the introduction we will define the basic concepts that we need for understanding the paper. After that, $f(A)$ will be defined for the entire function and the representation of $f(A)$ in Jordan and canonical base. The paper will be concluded with the chapter about $f(A)$ as a polyomial.

Key words: linear operator, entire function, analytic function, Jordan basis

1 Uvod

Za početak definirajmo nekoliko osnovnih pojmova.

Definicija 1.1. *Neka su V i W vektorski prostori. Svako preslikavanje $A : V \to W$ naziva se operator.*

Definicija 1.2. *Neka su V i W vektorski postori definirani nad istim poljem K te $A : V \to W$ operator. Kažemo da je operator A :*

- *<u>aditivan</u> ako $\forall v, w \in V$ vrijedi $A(v + w) = A(v) + A(w)$,*
- *<u>homogen</u> ako $\forall v \in V,\ \ \forall \alpha \in K$ vrijdi $A(\alpha v) = \alpha A(v)$.*

Operator A je linearan ako je aditivan i homogen.

Napomena 1.1. *Za vektorske prostore V i W nad istim poljem K sa $L(V, W)$ ćemo označvati skup svih linearnih operatora $A : V \to W$.*

Definicija 1.3. *Neka je V vektorski prostor i $A \in L(V)$ linearan operator. A je nilpotentan operator ako za neki prirodan broj k vrijedi $A^k = 0$. Tada je $A^m = 0, \forall m \geq k$. Najmanji prirodan broj p takav da je $A^p = 0$ naziva se indeks nilpotentnosti operatora A; kažemo još da je operator A nilpotentan indeksa p. Naravno, vrijedi $A^{p-1} \neq 0$.*

Propozicija 1.1. *Neka je $A \in L(V)$ nilpotentan operator indeksa p i neka je $v \in V$ takav da je $A^{p-1}v \neq 0$. Tada su vektori $v, Av, A^2v, ...A^{p-1}v$ linearno nezavisni.*

Prema prethodnoj popoziciji, ukoliko je operator A nilpotentan operator indeksa nilpotentnosti $n = \dim(V)$, skup $\{v, Av, A^2v, ...A^{n-1}v\}$ je lineano nezavisan skup vektora koji čini bazu za prostor V. Ta baza se naziva ciklička baza nilpotentnog operatora A (ili ciklička baza prostora V) i piše se:

$$\{A^{n-1}v, A^{n-2}v, ..., Av, v\} =: e.$$

Zapis operatora A u toj bazi:

$$A(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}.$$

Ta se matrica naziva elementarna Jordanova klijetka reda n i označava J_n.

Definicija 1.4. *Neka je V vektorski prostor nad poljem K i $A \in L(V)$. Potprostor $W \leq V$ zove se $A-$invarijantan (ili potprostor invarijantan s obzirom na operator A) ako vrijedi*

$$\forall w \in W \Rightarrow Aw \in W,$$

odnosno ako je $AW \subseteq W$.

Teorem 1.1 (O Jordanovoj formi)**.** *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem K i neka je $A \in L(V)$. Neka je*

$$\sigma(A) = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\}, \quad \alpha_j \neq \alpha_k \quad za \quad j \neq k.$$

Dakle, minimalni polinom operatora A je

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{p_1}(\lambda - \alpha_2)^{p_2}...(\lambda - \alpha_s)^{p_s}, \quad p_1, p_2, ..., p_s \in \mathbb{N}.$$

Definiramo li s

$$V_i = \mathrm{Ker}\mu_i(A) = \mathrm{Ker}(A_i - \alpha_i I_i)^{p_i}, \quad A_i = A|V_i, \quad B_i = A_i - \alpha_i I_i.$$

(I_i je jedinični operator na prostoru V_i). Tada je B_i nilpotentan operator indeksa nilpotentnosti p_i. Postoji baza e prostora V, $e = e^{(1)} \cup e^{(2)} \cup ... \cup e^{(s)}$, gdje je $e^{(i)}$ baza za V_i, u kojoj cijeli operator A ima blok-dijagonalnu matricu (Jordanova forma matrice operatora A) čiji su blokovi $\alpha_i I_i(e^{(i)}) + B_i(e^{(i)})$, $1 \leq i \leq s$. Svaka matrica $B_i(e^{(i)})$ je blok-dijagonalna i blokovi su joj elementarne Jordanove klijetke od kojih je najveća reda $p_i \times pi$.

U idućem primjeru pokazat ćemo postupak određivanja Jordanove forme operatora A.

Primjer 1.1. *Odrediti Jordanovu formu i Jordanovu bazu operatora $A \in L(\mathbb{C}^4)$ čiji je matrični zapis u kanonskoj bazi prostora $\mathbb{C}^4$:*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

Karakteristični polinom operatora : $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Odredimo potprostore $V_1 = \mathrm{Ker}(A^2), V_2 = \mathrm{Ker}(A - I)$ i $V_3 = \mathrm{Ker}(A + I)$.

- $\mathrm{Ker}(A^2)$:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^4,$$

$$A^2 x = 0 \;\Rightarrow\; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \\ -3x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}, x_1, x_2 \in \mathbb{C},$$

što znači da je $V_1 = \mathrm{Ker}(A^2) = [\{f_1, f_2\}]$, gdje su $f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ i $f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Sličnim postupkom dobijemo da je $V_2 = \mathrm{Ker}(A - I) = [\{f_3\}]$ i $V_3 = \mathrm{Ker}(A + I) = [\{f_4\}]$, gdje su $f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $f_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ovim postupkom smo dobili novu bazu $f = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ prostora $\mathbb{C}^4$ u kojoj operator A ima zapis:

$$A(f) = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = [1], \quad A_3 = [-1].$$

Promotrimo sada nilpotentan operator $B_1 = A_1 - \lambda_1 I$ i tražimo bazu u kojoj B_1 ima oblik elementarne Jordanove klijetke. Kako je B_1 nilpotentan operator indeksa nilpotentnosti 2 slijedi da je: $\mathbb{C}^2 = (\mathrm{Ker}(B_1^2) \dot{-} \mathrm{Ker}(B_1)) \dot{+} \mathrm{Ker}(B_1)$.

Lako se pokaže da je $\mathrm{Ker}(B_1^2) = [\{e_1, e_2\}]$, gdje su e_1, e_2 vektori kanonske baze za $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{C}$, a $\mathrm{Ker}(B_1) = [\{v_1\}]$ pri čemu je $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dakle, možemo uzeti da je $\mathrm{Ker}(B_1^2) \dot{-} \mathrm{Ker}(B_1) = [\{e_1\}]$ pa je $B_1 e_1 \in \mathrm{Ker}(B_1)$ i $\{B_1 e_1, e_1\}$ je baza u kojoj je $B_1 = A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Iz svega slijedi,

$$A(f') = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

gdje je $f' = \{f_1, -2f_1 - f_2, f_3, f_4\}$ Jordanova baza prostora $\mathbb{C}^4$. Minimalni polinom operatora A je $\mu_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Time smo riješili primjer.

Nadalje, u ostatku rada V će predstavljati konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$. Kako je za polinom $P(\lambda)$ i operator $A \in L(V)$ dobro definiran operator $P(A)$, postavlja se pitanje za koje još funkcije f se može definirati operator $f(A)$. Funkcije najsličnije polinomima su redovi potencija:

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ako gornji red konvergira za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ onda se funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ koju taj red definira naziva **cijela funkcija**.

Definicija 1.5. *Neka je D područje u $\mathbb{C}$ i $f : D \to \mathbb{C}$ funkcija. Ako f ima neprekidnu derivaciju na D, onda se funkcija f naziva analitička funkcija.*

Definicija 1.6. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad poljem $\mathbb{C}$. Za niz $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u $L(V,W)$ i za $A \in L(V,W)$ kaže se da niz operatora (A_k) konvergira prema operatoru A i piše se*

$$A = \lim_{k\to\infty} A_k,$$

ako postoje baza $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ prostora V i baza $f = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$ prostora W takve da za matrice

$$A_k(f,e) = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}^{(k)} & a_{m2}^{(k)} & \dots & a_{mn}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad A(f,e) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

vrijedi

$$a_{ij} = \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}, \quad \forall i \in \{1,2,...,m\}, \quad \forall j \in \{1,2,...,n\}.$$

Za red operatora $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ kaže se da konvergira, ako konvergira niz parcijalnih suma (S_k), gdje je

$$S_k = \sum_{j=0}^{k} A_k.$$

Limes niza parcijalnih sume se tada naziva suma toga reda.

2 Cijela funkcija operatora

U ovom poglavlju najprije navodimo propoziciju iz koje dobivamo cijelu funkciju operatora, a zatim neka svojstva tih funkcija.

Propozicija 2.1. *Neka je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cijela funkcija:*

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k, \quad a_k, \lambda \in \mathbb{C}$$

i neka je $A \in L(V)$. Tada red operatora

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$$

konvergira.

Dokaz. Vidi [3, str. 89.] □

Za cijelu funkciju f iz prethodne propozicije i za operator $A \in L(V)$ stavljamo

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k.$$

Operator $f(A)$ naziva se **cijela funkcija operatora** A.

Propozicija 2.2. *Neka su $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cijele funkcije, $\alpha \in \mathbb{C}$ i $A \in L(V)$. Tada je*

1. $(\alpha f)(A) = \alpha f(A)$,
2. $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$,
3. $(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$.

Dokaz. Neka je

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k \quad i \quad g(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \lambda^k.$$

Tada je

$$(\alpha f)(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \alpha_k \lambda^k \quad i \quad (f + g)(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k) \lambda^k.$$

Stoga slijedi:

1.

$$\begin{aligned}(\alpha f)(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \alpha_k A^k = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} \alpha \alpha_k A^k = \lim_{m \to \infty} \alpha \sum_{k=0}^{m} \alpha_k A^k = \\ &= \alpha \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} \alpha_k A^k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k = \alpha f(A)\end{aligned}$$

2.

$$(f+g)(A)=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k+\beta_k)A^k=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}(\alpha_k+\beta_k)A^k=\lim_{m\to\infty}(\sum_{k=0}^{m}\alpha_kA^k+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_kA^k)=$$
$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\alpha_kA^k+\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_kA^k=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_kA^k+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_kA^k=f(A)+g(A).$$

3. Neka je e baza prostora V. Za bilo koji operator $B \in L(V)$ sa $B(e)_{ij}$ ćemo označiti element matrice $B(e)$ na presjeku $i-$tog retka i $j-$tog stupca. Prema Propoziciji 2.1. redovi matričnih elemenata apsolutno su konvergentni, stoga se u njihovom produktu može mijenjati redoslijed članova i grupirati, pa slijedi

$$[f(A)g(A)]\,(e)_{ij}=\sum_{l=1}^{n}f(A)_{il}g(A)(e)_{lj}=\sum_{l=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\alpha_{il}^{(k)}\right]\cdot\left[\sum_{s=0}^{\infty}\beta_s\alpha_{lj}^{(s)}\right]=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_k\beta_s\sum_{l=1}^{n}\alpha_{il}^{(k)}\alpha_{lj}^{(s)}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_{ij}^{(k+s)}=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{m}\alpha_r\beta_{m-r}\right)\alpha_{ij}^{(m)}.$$

S druge strane,

$$(f\cdot g)(A)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{m}\alpha_r\beta_{m-r}\right)A^m,$$

pa slijedi

$$[(f\cdot g)(A)]\,(e)_{ij}=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{m}\alpha_r\beta_{m-r}\right)\alpha_{ij}^{(m)}.$$

Dakle, vrijedi $[f(A)g(A)]\,(e)_{ij}=[(f\cdot g)(A)]\,(e)_{ij},\ \ \forall i,j\in\{1,...,n\}$, odnosno

$$(f\cdot g)(A)=f(A)g(A).$$

□

3 Funkcije operatora u Jordanovoj bazi

Neka je $A \in L(V)$ i neka je e Jordanova baza prostora V u kojoj je

$$A(e) = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_1 + J_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_2 + J_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_s I_s + J_s \end{bmatrix},$$

gdje su I_j jedinične matrice reda $j \times j$, J_j elementarne Jordanove klijetke reda $j \times j$ te $\sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_s\}$, pri tome svojstvene vrijednosti ne moraju biti nužno različite. Kako je $A(e)$ blok-dijaginalna matrica tada je njezina k-ta potencija ponovo blok-dijagonalna matrica čiji su blokovi k-te potencije odgovarajućih blokova matrice $A(e)$, tj.

$$A^k(e) = \begin{bmatrix} (\lambda_1 I_1 + J_1)^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & (\lambda_2 I_2 + J_2)^k & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & (\lambda_s I_s + J_s)^k \end{bmatrix}.$$

Za cijelu funkciju

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$$

vrijedi:

$$[f(A)]\,(e) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1 I_1 + J_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & f(\lambda_2 I_2 + J_2) & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & f(\lambda_s I_s + J_s) \end{bmatrix}.$$

U nastavku ćemo promatrati jedan blok matrice operatora A i problem definicije

$$f(\lambda_0 I + J),$$

pri čemu je I jedinična matrica reda $n \times n$, J elementarna Jordanova klijetka istog reda, a λ_0 svojstvena vrijednost.

Lema 3.1. *Neka je $f : K(\lambda_1, r) \to \mathbb{C}$ funkcija koja je definirana i analitička na krugu*

$$K(\lambda_1, r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_1| < r\}$$

i neka je

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (\lambda - \lambda_1)^k$$

njen Taylorov red oko točke λ_1 koji konvergira apsolutno za svaki $\lambda \in K(\lambda_1, r)$. Za svaku točku $\lambda_0 \in K(\lambda_1, r)$ red matrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k((\lambda_0 - \lambda_1)I + J)^k$$

konvergira i suma mu je jednaka

$$f(\lambda_0)I + \frac{f'(\lambda_0)}{1!}J + \frac{f''(\lambda_0)}{2!}J^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!}J^{n-1}.$$

Dokaz. Označimo za bilo koji $p \in \mathbb{N}$

$$S_p = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k((\lambda_0 - \lambda_1)I + J)^k \quad i \quad f_p(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k(\lambda - \lambda_1)^k.$$

Primjenom binomnog poučka za svaki k dobivamo:

$$((\lambda_0 - \lambda_1)I + J)^k = (\lambda_0 - \lambda_1)^k I + \binom{k}{1}(\lambda_0 - \lambda_1)^{k-1}J + ... + \binom{k}{k-1}(\lambda_0 - \lambda_1)J^{k-1} + J^k.$$

S druge strane,

$$\binom{k}{j}(\lambda_0 - \lambda_1)^{k-j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}(\lambda_0 - \lambda_1)^{k-j} = \frac{1}{j!} \cdot \frac{d^j}{d\lambda^j}(\lambda - \lambda_1)^k \Big|_{\lambda=\lambda_0},$$

pa slijedi:

$$((\lambda_0 - \lambda_1)I + J)^k = \left[(\lambda - \lambda_1)^k I + \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{d\lambda}(\lambda - \lambda_1)^k J + ... + \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{d\lambda^k}(\lambda - \lambda_1)^k J^k\right]\Big|_{\lambda=\lambda_0}. \quad (1)$$

Za $k \geq n$ je $J^n = ... = J^k = 0$ stoga u gornjem izrazu ne treba pisati sve članove, samo do člana

$$\frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}(\lambda - \lambda_1)^k \Big|_{\lambda=\lambda_0} J^{n-1}.$$

Za $k < n - 1$ imamo

$$\frac{1}{j!} \cdot \frac{d^j}{d\lambda^j}(\lambda - \lambda_1)^k = 0 \ \ za \ \ j = k+1, ..., n-1,$$

pa u izrazu (1) s desne strane možemo dopisati sumande

$$\frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}(\lambda - \lambda_1)^k \Big|_{\lambda=\lambda_0} J^k + ... + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}(\lambda - \lambda_1)^k \Big|_{\lambda=\lambda_0} J^{n-1}.$$

Dakle, za svaki $k \geq 0$ vrijedi:

$$((\lambda_0-\lambda_1)I+J)^k = \left[(\lambda-\lambda_1)^k I+\frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{d\lambda}(\lambda-\lambda_1)^k J+...+\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}(\lambda-\lambda_1)^k J^{n-1}\right]\Big|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Ako sada pomnožimo gornju jednakost s α_k i zbrojimo po k od 0 do p, s lijeve strane jednakosti se dobije upravo ranije definirana matrica S_p:

$$S_p = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \left[(\lambda-\lambda_1)^k I+\frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{d\lambda}(\lambda-\lambda_1)^k J+...+\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}(\lambda-\lambda_1)^k J^{n-1}\right]\Big|_{\lambda=\lambda_0} =$$

$$= f_p(\lambda_0)I+\frac{1}{1!}f_p'(\lambda_0)J+...+\frac{1}{(n-1)!}f_p^{(n-1)}(\lambda_0)J^{n-1}. \tag{2}$$

Budući da je

$$\lim_{p\to\infty} f_p(\lambda_0) = f(\lambda_0) \quad i \quad \lim_{p\to\infty} f_p^{(k)}(\lambda_0) = f^{(j)}(\lambda_0) \quad za \quad j=1,...n-1,$$

iz jednakosti (2) slijedi tvrdnja leme. □

Definicija 3.1. *Neka je $A \in L(V)$ i $\mu_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{p_1}(\lambda-\lambda_2)^{p_2}...(\lambda-\lambda_s)^{p_s}$, pri čemu su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s \in \mathbb{C}$ i $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\forall i \neq j$. S $\mathcal{F}(A)$ ćemo označiti skup svih funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sa svojstvima:*

1. *Domena funkcije f sadrži $\sigma(A)$,*

2. *Ako je $p_j > 0$ tada domena funkcije f, $D(f)$, sadrži krug $K(\lambda_j, r_j)$ i na tom krugu je funkcija f analitička.*

Tada zapis operatora $f(A)$ u Jordanovoj bazi e prostora V, za svaku funkciju $f \in \mathcal{F}(A)$, izgleda:

$$f(A)(e) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1 I_1+J_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & f(\lambda_2 I_2 + J_2) & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & f(\lambda_s I_s + J_s) \end{bmatrix},$$

pri čemu je za svaki $j \in \{1, ..., s\}$

$$f(\lambda_j I_j + J_j) = \begin{bmatrix} f(\lambda_j) & f'(\lambda_j) & \frac{f''(\lambda_j)}{2!} & ... & \frac{f^{(p_j-1)}(\lambda_j)}{(p_j-1)!} \\ 0 & f(\lambda_j) & f'(\lambda_j) & ... & \frac{f^{(p_j-2)}(\lambda_j)}{(p_j-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & f'(\lambda_j) \\ 0 & 0 & 0 & ... & f(\lambda_j) \end{bmatrix}.$$

Primjer 3.1. *Neka je dan operator $A : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ i njegov matrični zapis u kanonskoj bazi prostora $\mathbb{C}^4$:*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite matricu operatora $\sin(A)$ u Jordanovoj bazi.

Rješenje:
U Primjeru 1.1. smo odrediti Jordanovu formu operatora A, tj. zapis operatora A u Jordanovoj bazi prostora $\mathbb{C}^4$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Prema prethodnoj definiciji slijedi da je:

$$\sin(A) = \begin{bmatrix} \sin(0) & \sin'(0) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(0) & \cos(0) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(-1) \end{bmatrix}.$$

3.1 Osnovna svojstva

U idućem teoremu ćemo navesti neka osnovna svojstva funkcija iz skupa $\mathcal{F}(A)$, te neka od njih i dokazati.

Teorem 3.1. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, $A \in L(V), \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t\}$ pri čemu su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t$ međusobno različiti i neka je*

$$\mu_A = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} ... (\lambda - \lambda_t)^{p_t}.$$

Tada vrijedi:

1. *Ako je $f(\lambda) = 1 \ \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$ onda je $f \in \mathcal{F}(A)$ i $f(A) = I$.*

2. *Ako je $f(\lambda) = \lambda \ \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$ onda je $f \in \mathcal{F}(A)$ i $f(A) = A$.*

3. *Neka su $f, g \in \mathcal{F}(A)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Definiramo funkciju h tako da je $D(h) = D(f) \cap D(g)$ i $h(\lambda) = \alpha f(\lambda) + \beta g(\lambda)$. Tada je*

$$h \in \mathcal{F}(A) \quad i \quad h(A) = \alpha f(A) + \beta g(A).$$

4. *Neka su $f, g \in \mathcal{F}(A)$. Definiramo funkciju h tako da je $D(h) = D(f) \cap D(g)$ i $h(\lambda) = f(\lambda) g(\lambda)$. Tada je*

$$h \in \mathcal{F}(A) \quad i \quad h(A) = f(A)g(A).$$

5. *Pretpostavimo da su $f, g \in \mathcal{F}(A)$ takve da je $f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j)$ za $0 \leq k \leq p_j - 1$ i za $1 \leq j \leq t$. Tada je $f(A) = g(A)$.*

6. *Neka je $f \in \mathcal{F}(A)$ i neka je (f_k) niz u $\mathcal{F}(A)$. Pretpostavimo da vrijedi*

$$f^{(i)}(\lambda_j) = \lim_{k \to \infty} f_k^{(i)}(\lambda_j) \ \ za \ \ k = 0, 1, ..., p_j - 1 \ \ i \ \ za \ \ j = 1, 2, ..., t.$$

Tada je

$$f(A) = \lim_{k \to \infty} f_k(A).$$

7. *Za $f \in \mathcal{F}(A)$ vrijedi $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) = \{f(\lambda_1), f(\lambda_2), ..., f(\lambda_t)\}$.*

Dokaz. Tvrdnje 1., 2., 3. i 5. su očigledne, stoga ćemo dokazati preostale dvije. Dokažimo najprije tvrdnju 4.:
Stavimo $V_j = \mathrm{Ker}((A - \lambda_j I)^{p_j}), \ 1 \leq j \leq t$. Tada znamo da su svi potprostori V_j $A-$invarijantni i da je $V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus ... \dotplus V_t$. Imamo redom

$$f(A)g(A)|V_j = (f(A)|V_j) \cdot (g(A)|V_j) = f(A|V_j)g(A|V_j) =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{p_j - 1} \frac{f^{(i)}(\lambda_j)}{i!} J^i \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{p_j - 1} \frac{g^{(k)}(\lambda_j)}{k!} J^k \right) = \sum_{l=0}^{p_j - 1} \left(\sum_{k=0}^{l} \frac{f^{(l-k)}(\lambda_j)}{(l-k)!} \cdot \frac{g^{(k)}(\lambda_j)}{k!} \right) J^l =$$

$$\sum_{l=0}^{p_j - 1} \left(\left(\frac{1}{l!} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} f^{(l-k)}(\lambda_j) g^{(k)}(\lambda_j) \right) \right) J^l = \sum_{l=0}^{p_j - 1} \frac{h^{(l)}(\lambda_j)}{l!} J^l = h(A|V_j) = h(A)|V_j.$$

Kako ovo vrijedi za sve $j = 1, 2, ..., t$ i kako je $V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus ... \dotplus V_t$, slijdi $f(A)g(A) = h(A)$.
Preostaje jos dokazati tvrdnju 7. Imamo redom ekvivalencije:

$$\lambda_0 \in \sigma(f(A)) \iff \det(\lambda_0 I(e) - [f(A)]\,(e)) = 0 \iff$$

$$\iff \quad (\lambda_0 - f(\lambda_1)^{n_1})\lambda_0 - f(\lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda_0 - f(\lambda_t))^{n_t} = 0, \ \ n_j = \dim(V_j) \quad \iff$$

$$\iff \quad \lambda_0 \in \{f(\lambda_1), f(\lambda_2), ..., f(\lambda_t)\}.$$

□

4 Operator $f(A)$ kao polonom od A

Iz Definicije 3.1. vidimo da je skup $\mathcal{F}(A)$ ovisan samo o spektru operatora A i minimalnom polinomu tog operatora, odnosno funkcije iz $\mathcal{F}(A)$ su trebale djelovati u okolini spektra operatora A. Zbog toga će različite funkcije $f, g \in \mathcal{F}(A)$ definirati isti operator, $f(A) = g(A)$. Točnost ovoga slijedi iz činjenice da se svi operatori $f(A)$ mogu dobiti ako za f uzmemo samo polinome.

Teorem 4.1. *Neka je m stupanj minimalnog polinoma μ_A operatora $A \in L(V)$ i $f \in \mathcal{F}(A)$. Postoji jedinstveni polinom P stupnja manjeg od m takav da je $P(A) = f(A)$.*

Dokaz. Jedinstvenost:
Neka su $P_1(\lambda)$ i $P_2(\lambda)$ dva polinoma kojima je stupanj manji od m. Ako je $P_1(A) = P_2(A)$ tada je $(P_1 - P_2)(A) = 0$, iz čega slijedi da je $P_1(\lambda) - P_2(\lambda)$ djeljivo sa μ_A. Kako je stupanj polinoma $P_1 - P_2$ manji od $m = deg(\mu_A)$, $P_1 - P_2$ iščezava pa slijedi da postoji najviše jedan polinom P stupnja manjeg od m za kojega je $P(A) = f(A)$.
Egzistencija: Pretpostavimo da postoji polinom P s traženim svojstvima. Neka je

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} ... (\lambda - \lambda_t)^{p_t}, \quad p_1 + ... + p_t = m \tag{3}$$

minimalni polinom operatora A, pri čemu su $\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$. Rastavimo razlomak $\frac{P(\lambda)}{\mu_A(\lambda)}$ na parcijalne razlomke

$$\frac{P(\lambda)}{\mu_A(\lambda)} = \sum_{k=1}^{t} \left[\frac{\alpha_{k1}}{\lambda - \lambda_k} + \frac{\alpha_{k2}}{(\lambda - \lambda_k)^2} + ... + \frac{\alpha_{kp_k}}{(\lambda - \lambda_k)^{p_k}} \right]. \tag{4}$$

Sa Γ_k ćemo označiti malu kružnicu sa središtem u λ_k koja osim λ_k ne sadrži niti jednu drugu točku iz $\sigma(A)$. Iz (4) slijedi

$$\alpha_{kj} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} (\lambda - \lambda_k)^{j-1} \frac{P(\lambda)}{\mu_A(\lambda)} d\lambda; \quad j = 1, ..., p_k; \quad k = 1, ...t. \tag{5}$$

Neka je $k = 1$:

$$\mu_1 = \frac{P(\lambda)}{(\lambda - \lambda_2)^{p_2} ... (\lambda - \lambda_t)^{p_t}} = \mu_1(\lambda_1) + \frac{\mu_1'(\lambda_1)}{1!}(\lambda - \lambda_1) + ...$$

Iz

$$(\lambda - \lambda_1)^{j-1} \frac{P(\lambda)}{\mu_A(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda - \lambda_1)^{p_1 - j + 1}} \mu_1(\lambda) = ... + \frac{1}{(p_j - j)!} \mu_1^{(p_1 - j)}(\lambda_1) \cdot \frac{1}{\lambda - \lambda_1} + ...$$

i (5) dobivamo

$$\alpha_{1j} = \frac{1}{(p_1 - j)!}\mu_1^{(p_1-j)}(\lambda_1) = \frac{1}{(p_1 - j)!}\left[(\lambda - \lambda_1)^{p_1}\frac{P(\lambda)}{\mu_A(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_1}^{(p_1-j)}.$$

Analogno,

$$\alpha_{kj} = \frac{1}{(p_k - j)!}\left[(\lambda - \lambda_k)^{p_k}\frac{P(\lambda)}{\mu_A(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_k}^{(p_k-j)}; \quad j = 1, ...p_k; \quad k = 1, ..., t. \tag{6}$$

Ovime su koeficijenti proizvoljnog polinoma P stupnja manjeg od m izraženi pomoću elemenata skupa $\sigma(A)$ i polinoma μ_A.
Za konstrukciju traženog polinoma ćemo pomoću funkcije f definirati sustav brojeva α_{kj} na način:

$$\alpha_{kj} = \frac{1}{(p_k - j)!}\left[(\lambda - \lambda_k)^{p_k}\frac{f(\lambda)}{\mu_A(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_k}^{(p_k-j)}; \quad j = 1, ...p_k; \quad k = 1, ..., t \tag{7}$$

i pomoću ovako definiranih brojeva α_{kj} ćemo definirati polinom

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{\alpha_{k1}}{\lambda - \lambda_k} + \frac{\alpha_{k2}}{(\lambda - \lambda_k)^2} + ... + \frac{\alpha_{kp_k}}{(\lambda - \lambda_k)^{p_k}}\right]\mu_A(\lambda) \tag{8}$$

stupnja manjeg od m. Iz (8) slijedi da su brojevi α_{kj} iz te relacije sa P povezani relacijom (6). Dakle,

$$\left[(\lambda - \lambda_k)^{p_k}\frac{P(\lambda)}{\mu_A(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_k}^{(q)} = \left[(\lambda - \lambda_k)^{p_k}\frac{f(\lambda)}{\mu_A(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_k}^{(q)}, \quad q = p_k - j = 0, 1, ..., p_k - 1$$

Gornja jednakost je moguća samo za $P^{(q)}(\lambda_k) = f^{(q)}(\lambda_k)$, $q = 0, 1, ..p_k - 1$. Na taj način je pokazano da polinom (8) s koeficijentima (7) ima iste elemente kao i f na $\sigma(A)$, ali tada je $P(A) = f(A)$. $\square$

Iz prethodnog dokaza slijedi teorem:

Teorem 4.2 (Lagrange−Sylvester). *Neka su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t \in \mathbb{C}$ međusobno različiti i neka su $p_1, p_2, ..., p_t \in \mathbb{N}$. Nadalje, neka su zadani $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$ za $i = 0, ..., p_j - 1$ i za $j = 1, ..., t$. Tada postoji jedinstveni polinom $P(\lambda)$ stupnja manjeg od $p_1 + p_2 + ... + p_t$ takav da vrijedi*

$$P^{(i)}(\lambda_j) = \beta_{ij}, \quad 0 \leq i \leq p_j - 1, \quad 1 \leq j \leq t.$$

Taj polinom se naziva Lagrange−Sylvesterov interpolacijski polinom.

Dokaz. Pomoću brojeva $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t$ i $p_1, p_2, ..., p_t$ definirat ćemo polinom μ kao u dokazu prethodnog teorema, odnosno

$$\mu(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1}...(\lambda - \lambda_t)^{p_t}, \quad p_1 + ... + p_t = m.$$

Ukoliko raspišemo relaciju (7) iz prethodnog dokaza te u rezultatu zamijenimo $f^{(q-1)}(\lambda_j)$ s β_{qj}, pomoću brojeva β_{qj} i poznatog polinoma μ možemo izračunati α_{ij}. Koristeći te α_{ij} može se konstruirati polinom $P(\lambda)$ kao u relaciji (8) u prethodonom dokazu. Za taj polinom također vrijedi relacija (6). Osim toga, slijedi da je $\beta_{qj} = P^{(q-1)}(\lambda_j)$, prema tome postoji barem jedan polinom stupnja manjeg od m za koji vrijedi $P^{(i)}(\lambda_j) = \beta_{ij}$. S druge strane, kako smo elemente polinoma P stupnja manjeg od m tražili kao u prethodnom dokazu, to znači da su ti koeficijenti jednoznačno određeni. Dakle, polinom P sa traženim svojstvima je jedinstven. □

U slučaju za $p_1 = ... = p_t = 1$ polinom iz prethodnog teorema naziva se Lagrangeov interpolacijski polinom i ima oblik:

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^{t} \frac{(\lambda - \lambda_1)...(\lambda - \lambda_{k-1})(\lambda - \lambda_{k+1})...(\lambda - \lambda_t)}{(\lambda_k - \lambda_1)...(\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1})...(\lambda_k - \lambda_t)} f(\lambda_k).$$

Lagrange−Sylvesterov teorem omogućuje efikasno izračunavanje funkcija operatora. Naime, za svaki par indeksa $k \in \{0, 1, ..., p_l - 1\}$ i $l \in \{1, 2, ..., t\}$ prema tom teoremu postoji jedinstven polinom $G_{kl}(\lambda)$ stupnja manjeg od m takav da vrijedi

$$G_{kl}^{i}(\lambda_j) = \delta_{ik}\delta_{jl}.$$

Ako stavimo $P_{kl} = G_{kl}(A)$, tada se iz formule za funkciju operatora lako vidi da je za svaku funkciju $f \in \mathcal{F}(A)$

$$f(A) = \sum_{k=1}^{t} \sum_{l=0}^{p_k-1} f^{(l)}(\lambda_k) \cdot P_{kl}. \tag{9}$$

Da bismo odredili operatore P_{kl}, čije poznavanje znači lako izračunavanje operatora $f(A)$ za svaku funkciju $f \in \mathcal{F}(A)$, nije nam potrebno pronalaziti polinome $G_{kl}(\lambda)$. Dovoljno je gornju jednakost napisati za funkcije $f_s(\lambda) = \lambda^s, \quad s = 0, ..., m-1$. Tada dobivamo sustav od m jednadžbi s $p_1 + p_2 + ... + p_t = m$ nepoznanica P_{kl}:

$$A^s = \sum_{k=1}^{t} \left(\sum_{l=0}^{p_k-1} \frac{s!}{(s-l)!} \lambda_k^{s-l} \cdot P_{kl} \right), \quad 0 \leq s \leq m-1.$$

Eksplicitnim rješavanjem tih jednadžbi dolazimo do operatora P_{kl}.

Propozicija 4.1. *Neka je V konačnodimenzionalni kompleksan vektorski prostor, $A \in L(V)$ i neka su operatori P_{kl} definirani na prethodno opisani način. Tada je $\{P_{kl};\ 0 \leq l \leq p_k - 1, 1 \leq k \leq t\}$ baza vektorskog prostora $\mathcal{L}(A)$, pri čemu sa $\mathcal{L}(A)$ označavamo* *potprostor od $L(V)$ razapet svim potencijama operatora A, tj.* $\mathcal{L}(A) = [\{I, A, A^2, ...\}] = \big[\{A^k; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\big] = \{P(A);\ P(A)$ *polinom*$\}$.

Dokaz. Svi operatori P_{kl} su polinomi operatora A, dakle, $P_{kl} \in \mathcal{L}(A)$. Broj tih operatora je $p_1 + ... + p_t$, dakle, jednak je stupnju m minimalnog polinoma μ_A operatora A, odnosno, dimenziji vektorskog prostora $\mathcal{L}(A)$. Nadalje, prema gornjim jednakostima potencije $I, A, A^2, ..., A^{m-1}$ su linearne kombinacije operatora P_{kl}. Budući da je $\{I, A, A^2, ..., A^{m-1}\}$ baza od $\mathcal{L}(A)$, slijedi da operatori P_{kl} razapinju prostor $\mathcal{L}(A)$. Dakle, operatori P_{kl} tvore bazu od $\mathcal{L}(A)$. $\square$

Pogledajmo primjenu prethodnih teorema na idućem primjeru.

Primjer 4.1. *Odrediti općenito $f(A)$ za bilo koji $f \in \mathcal{F}(A)$ ako je operator $A \in L(\mathbb{C}^2)$ dan matricom u kanonskoj bazi prostora $\mathbb{C}^2$:*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Zatim još odrediti $f(A) = A^2 - A$ također u kanonskoj bazi prostora $\mathbb{C}^2$.

Rješenje:
Najprije odredimo karakteristični polinom operatora A:

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (6 - \lambda)(7 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda - 4)(\lambda - 9).$$

Slijedi da je minimalni polinom operatora A jednak:

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 9).$$

Prema tome svojstvene vrijednosti operatora A su $\lambda_1 = 4$ i $\lambda_2 = 9$. Uvrstimo li to u formulu (9) za $t = 2,\ \ p_1 = p_2 = 1$ dobivamo:

$$\begin{aligned} f(A) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=0}^{p_k - 1} f^{(l)}(\lambda_k) \cdot P_{kl} = \sum_{l=0}^{p_1-1} f^{(l)}(\lambda_1) \cdot P_{1l} + \sum_{l=0}^{p_2-1} f^{(l)}(\lambda_2) \cdot P_{2l} = \\ = f^{(0)}(\lambda_1) P_{10} + f^{(0)}(\lambda_2) P_{20} = f(\lambda_1) P_{10} + f(\lambda_2) P_{20}. \end{aligned}$$

Sada je potrebno odrediti P_{10} i P_{20}, pa gornju jednakost raspišemo za $f_s = \lambda^s$ gdje je $s = 0, 1$ i dobivamo:

$$I = 1 \cdot P_{10} + 1 \cdot P_{20} \quad \Rightarrow P_{10} = I - P_{20}$$

i

$$A = f(4) P_{10} + f(9) P_{20} = 4 \cdot P_{10} + 9 \cdot P_{20}.$$

Rješavanjem ovog sustava dobijamo P_{10} i P_{20}:

$$P_{10} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \qquad P_{20} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Tražena funkcija je oblika:

$$f(A) = f(\lambda_1) \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} + f(\lambda_2) \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Još preostaje izračunati $f(A) = A^2 - A$ primjenom dobivene formule.

$$f(A) = (\lambda_1^2 - \lambda_1) \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} + (\lambda_2^2 - \lambda_2) \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} =$$

$$= 12 \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} + 72 \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 24 \\ 36 & 48 \end{bmatrix}.$$

Zaključimo rad još jednim zadatkom.

Zadatak 1. *Za operator $A \in L(\mathbb{C}^3)$ odrediti $\sqrt{A}$ u Jordanovoj i kanonskoj bazi, ako je A dan matricom u kanonskoj bazi prostora $\mathbb{C}^3$*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

Najprije je potrebno odrediti Jordanovu formu operatora A, koju možemo izračunati postupkom kao u Primjeru 1.1. pa dobivamo:

$$A(e') = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

pri čemu je $e' = \{-e_1 - e_3, e_3, e_2 + e_3\}$ Jordanova baza prostora $\mathbb{C}^3$. Iz zapisa operatora A u bazi e' lako iščitavamo minimalni polinom operatora A: $\mu_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$.
Dakle, tražena funkcija operatora u Jordanovoj bazi prostora $\mathbb{C}^3$ je:

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(2) & f'(2) & 0 \\ 0 & f(2) & 0 \\ 0 & 0 & f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Preostaje još odrediti funkciju $\sqrt{A}$ u kanonskoj bazi, a to ćemo napraviti kao u prethodnom primjeru. Iz minimalnog polinoma vidimo da je $t = 1$ i $p_1 = 2$. Uvrštavamo sve u formulu (9):

$$f(A) = \sum_{k=1}^{1} \sum_{l=0}^{p_1 - 1} f^{(l)}(\lambda_k) \cdot P_{kl} = \sum_{l=0}^{2-1} f^{(l)}(\lambda_1) \cdot P_{1l} =$$

$$= f^{(0)}(\lambda_1) P_{10} + f^{(1)}(\lambda_1) P_{11} = f(\lambda_1) P_{10} + f^{(1)}(\lambda_1) P_{11}.$$

Potrebno je odrediti P_{10} i P_{11}. Raspisivanjem gornje jednakosti za $f_s = \lambda^s$ za $s = 0, 1$ iščitavamo sustav:

$$I = 1 \cdot P_{10} + 0 \cdot P_{11} \qquad \Rightarrow P_{10} = I$$

$$A = 2 \cdot P_{10} + 1 \cdot P_{11} \qquad \Rightarrow P_{11} = A - 2P_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tražena funkcija je oblika:

$$f(A) = f(\lambda_1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + f'(\lambda_1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Preostaje izračunati $f(A) = \sqrt{A}$ u kanonskoj bazi prostora $\mathbb{C}^3$, pa je:

$$\sqrt{A} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Ovime smo riješili zadatak i zaključujemo da se $f(A)$ u kanonskoj bazi razlikuje od $f(A)$ u Jordanovoj bazi.

Literatura

[1] D.Bakić, Linearna algebra, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] S. Kurepa, Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[3] H.Kraljević, Vektorski prostori, Predavanja na Odjelu za matematiku, Osijek, 2008.