Prijateljski i savršeni brojevi

Bošnjaković, Martina

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:264325

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-25**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Martina Bošnjaković

Prijateljski i savršeni brojevi

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Martina Bošnjaković

Prijateljski i savršeni brojevi

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2019.

Sadržaj

Uvod **i**

1 Znanost u 17. stoljeću **1**
1.1 Marin Mersenne 1
1.1.1 Mersenneovi brojevi 3

2 Savršeni brojevi **5**
2.1 Parni savršeni brojevi 7
2.1.1 Fermatovi brojevi 9
2.1.2 Euler i savršeni brojevi 11
2.1.3 Svojstva parnih savršenih brojeva 13
2.2 Neparni savršeni brojevi 16
2.3 Savršeni brojevi oblika $n^n + 1$ 19

3 Prijateljski brojevi **23**
3.1 Thabitovo pravilo 24
3.1.1 Eulerovo pravilo 25
3.1.2 Borhovo pravilo 26
3.1.3 Wiethausovo pravilo 28
3.2 Prijateljski brojevi posebnog oblika 29
3.2.1 te Rieleovo pravilo 31
3.3 Poznati prijateljski brojevi 33

Literatura **35**

Sažetak **36**

Summary **37**

Životopis **38**

Uvod

„Zašto su brojevi lijepi? Kada postavite ovo pitanje to je isto kao da ste pitali zašto je lijepa Beethovenova 9. Simfonija. Ja znam da su brojevi lijepi. Ako brojevi nisu lijepi, onda ništa nije lijepo." Iako je ovu rečenicu izjavio mađarski matematičar 20. stoljeća Paul Erdos, ljepota brojeva prepoznata je još u doba antike i Pitagore. U to vrijeme ljudi su u matematici tražili svrhu života. Moto Pitagorejaca bio je *„Broj je sve."* odnosno *„Bog je broj."* Smatrali su da se prirodnim brojevima može opisati cijeli svemir. Brojevi su za njih predstavljali savršenstvo, te su zbog toga zaslužni za mnoga danas poznata svojstva prirodnih brojeva.

U ovom diplomskom radu vidjet ćemo što su savršeni i prijateljski brojevi, upoznat ćemo njihova svojstva i posebne oblike.

Na početku rada napravljen je kratki pregled razvoja znanosti i matematike u 17. stoljeću. Opisana je uloga Marina Mersennea u razvoju znanosti i razmjeni znanstvenih otkrića među matematičarima diljem Europe, te su spomenuti brojevi koji su po njemu dobili ime, odnosno Mersenneovi brojevi.

U drugom poglavlju definiramo savršene brojeve, opisujemo njihov razvoj od antičkih vremena pa sve do danas, te navodimo prve poznate savršene brojeve. Zatim se upoznajemo sa parnim savršenim brojevima, te naglasak stavljamo na Fermatov i Eulerov doprinos u njihovom otkrivanju. Nadalje, opisujemo četiri svojstva parnih savršenih brojeva, te se upoznajemo sa neparnim savršenim brojevima. U zadnjem dijelu drugog poglavlja pokazujemo da je 28 jedini savršeni broj oblika $n^n + 1$.

U posljednjem poglavlju definiramo prijateljske brojeve, te navodimo prvi poznati par prijateljskih brojeva. Zatim opisujemo prvo eksplicitno pravilo za pronalaženje prijateljskih brojeva - Thabitovo pravilo. Također, opisujemo najpoznatija pravila koja su nastala na temelju Thabitovog, a to su: Eulerovo pravilo, Borhovo pravilo, Wiethausuovo pravilo i te Rielovo pravilo. Navedena pravila potkrepljujemo konkretnim primjerima. Na kraju poglavlja dajemo kronološki prikaz otkrića prijateljskih brojeva od starih Grka pa sve do danas, te navodimo prvih deset najmanjih poznatih prijateljskih parova.

1 Znanost u 17. stoljeću

U 16. stoljeću vrlo je malo ljudi bilo zainteresirano za matematiku i znanost općenito. Oni koji su se bavili znanošću najčešće su to radili u izolaciji jer znanost kao zanimanje tada nije bila cijenjena. Osim knjiga, za učene ljude nije bilo drugog načina da ostanu u kontaktu jedni s drugima. Objavljivanje radova bilo je otežano zbog crkvenih cenzura. Međutim, s vremenom se sve više ljudi počelo baviti znanošću što se očitovalo u snažnom napretku znanja i brzini novih otkrića. Zbog neprekidnog testiranja ideja odbačene su ranije postavljene hipoteze jer su se razvojem znanosti pokazale netočnima. Na taj način znanost se održavala živućom. Prva akademija koja se posvetila znanosti utemeljena je u Napulju 1560. godine pod nazivom Accademia Secretorum Naturae. Cilj akademije bio je okupiti skupinu intelekutalaca (znanstvenika) kako bi raspravljali o temama od zajedničkog interesa. No, rad akademije crkvi se činio sumnjivim tako da je vrlo brzo zatvorena. Ovaj kratkotrajni pokušaj formalne znanstvene organizacije prethodio je osnivanju nove akademije Accademia dei Lincei. Osnovana je 1603. godine u Rimu s ciljem otkrivanja novih znanstvenih ideja i otkrića, te njihovog objavljivanja svijetu. Akademija se sastojala od samo četiri člana sve dok se 1610. nije reorganizirala i povećala svoj opseg. Jedan od novih članova bio je i priznati znanstvenik Galileo. Accademia dei Lincei objavila je nekoliko knjiga među kojima su dvije Galileove knjige. Unatoč raznim usponima i padovima kroz koje je prolazila, akademija djeluje i danas te je vodeća znanstvena organizacija u Italiji.

1.1 Marin Mersenne

Iako su se prve znanstvene organizacije pojavile u 16. stoljeću u Italiji, tek u 17. stoljeću dolazi do pravog procvata znanstvenih udruženja neovisnih o sveučilištima. Prvi slučajevi redovitog okupljanja matematičara za koje znamo zabilježeni su zahvaljujući Marinu Mersenneu.

Marin Mersenne rođen je 8. rujna 1588. godine u Francuskoj. Budući da je od malih nogu pokazivao želju za učenjem, roditelji su ga poslali u Le Mans gdje je učio gramatiku. Kada je imao 16 godina pohađao je tada novosonovanu isusovačku školu College La Fleche. Daljnje školovanje nastavio je u Parizu na studiju filozofije College Royale du France, pohađajući paralelno i nastavu iz teologije na Sorbonni.

Studije je završio 1611. godine i odlučio se za život u samostanu. Nakon što se zaredio za svećenika, od 1614. do 1618. predavao je filozofiju i teologiju u samostanu u Neversu. Osim za filozofiju i teologiju, posebno je bio zainteresiran za matematiku te je smatrao da je znanost nemoguća bez matematike. Proučavao je proste brojeve, permutacije, barometre i zakon gravitacije. Mersenne je bio sposoban razumijeti i cijeniti rad drugih. Dolaskom u Pariz 1619. uvidio je nedostatak bilo kakve formalne organizacije u kojoj bi znanstvenici mogli djelovati. Svoj samostan učinio je mjestom redovitih susreta za sve one koju su htjeli razgovarati o svojim radovima i rezultatima, te slušati o tuđim idejama i radovima. Okupljao je znanstvenike iz različitih zemalja te je bio posrednik znanstvenih informacija. Kroz mrežu dopisivanja, kojom su se prenosile vijesti o napretku znanosti i novim otkrićima, potrudio se stupiti u kontakt sa svim ljudima koji su bili od neke važnosti u svijetu znanosti. Kroz brojna pitanja koja je postavljao u svojim pismima, Mersenne je poticao sve znanstvenike, koji bi mogli pridonijeti pronalaženju nekog odgovora, na razmišljanje. Njihove odgovore i pitanja prenosio je dalje drugima kako bi izazvao njihove reakcije. Nakon njegove smrti, pronađena su pisma od 78 različitih dopisnika među kojima su Fermat, Huygens, Hobbes, Pell, te Galileo i Torricelli.

Slika 1.1. *Marin Mersenne*

Marin Mersenne je imao ideju postaviti stupac žive na vrh planine i promatrati učinak atmosferskog tlaka. Međutim, prije nego što je uspio realizirati svoj plan, Pascal je proveo eksperiment i dokazao da visina stupca žive varira s visinom. Isto tako, Mersenne je imao značajnu ulogu u popularizaciji Galileovih istraživanja diljem Europe. Budući da se talijanski jezik slabo razumio u inozemstvu, 1634. godine

objavio je verziju Galileovih predavanja o mehanici, a 1639. preveo je Discorsi na francuski. Zanimljivo je da je to učinio iako je bio vjerni član katoličkog reda i crkve koja je u to vrijeme bila u neprijateljskom odnosu prema znanosti.

Iako je Marin Mersenne 1648. godine umro od upale pluća, sastanci znanstvenika i dalje su se održavali u raznim domovima u Parizu i okolici. Izravnim nasljednikom tih brojnih privatnih okupljanja smatra se Acad'emie Royale des Sciences koja je osnovana 1666. godine. Bila je sastavljena od matematičkog odjela koji uključuje sve "egzaktne znanosti" i fizičkog odjela koji se bavi "eksperimentalnim znanostima" kao što su fizika, kemija, botanika i anatomija. Kao što samo ime kaže, ovo udruženje je kraljevska institucija, ali i znanstvena akademija. Acad'emie Royale des Sciences imala je veliku potporu države koja je bila spremna pružiti znantna sredstva kako bi znanstvena istraživanja Acad'emie bila što uspješnija. Iako su u početku sjednice bile zatvorene za javnost, a zapisnici sa sastanaka ostajali u privatnom vlasništvu Acad'emie, nakon nekoliko godina akademija je svoje zaključke i radove počela objavljivati u novoosnovanom časopisu Jorunal des savants.

1.1.1 Mersenneovi brojevi

Osim što se bavio znanošću i okupljao znanstvenike iz cijele Europe, Marin Mersenne opsežno je proučavao brojeve oblika $2^n - 1$. U skladu s tim, brojevi takvog oblika nazvani su *Mersenneovi brojevi* i označavaju se M_n. Prvih nekoliko Mersenneovih brojeva su $M_1 = 1$, $M_2 = 3$, $M_3 = 7$, $M_4 = 15$, $M_5 = 31$, $M_6 = 63$, $M_7 = 127$ i $M_8 = 255$ iz čega je vidljivo da su neki od njih prosti, a neki složeni. Mersenneovi brojevi koji su prosti zovu se *Mersenneovi prosti brojevi.*

1644. godine u uvodu svoje knjige *Cogitata physico mathematica* Mersenne je iznio netočnu, ali provokativnu tvrdnju o Mersenneovim prostim brojevima. Ustvrdio je da je M_p prost broj za $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ i složen za sve ostale proste brojeve $p < 257$. Nitko nije znao kako je došao do te tvrdnje, stoga je ta tvrdnja pobudila veliko zanimanje među tadašnjim matematičarima. Nekoliko stotina godina nitko ju nije mogao potvrditi, a ni opovrgnuti, budući da se radilo o velikim brojevima.

Tek 1772. godine Leonhard Euler pokazao je da je M_{31} prost tako što je provjerio sve proste brojeve do 46339 kao moguće djelitelje, ali tu metodu nije mogao

upotrijebiti na brojevima M_{67}, M_{127} i M_{257}.

Édouard Lucas je 1876. godine uspio dokazati da je M_{127} prost broj. Osim toga, pokušao je dokazati da je Mersenneov broj M_{67} složen, ali nije uspio naći njegove faktore. Tridesetak godina kasnije američki matematičar Frederick Nelson Cole dao je faktorizaciju Mersenneovog broja M_{67}. Naime, Cole je na okupljanju Američkog matematičkog društva izišao pred ploču i ništa ne rekavši izračunao $2^{67} - 1$, a zatim na drugoj strani ploče pomnožio $193707721 \cdot 761838257287$. Rezultati ta dva računa su bili jednaki, zbog čega je nagrađen velikim pljeskom. Trebalo mu je 20 godina nedjeljnih popodneva da bi pronašao faktore broja M_{67}.

Ivan Mikheevich Pervushin pokazao je 1883. godine da je M_{61} prost broj. R. E. Powers pokazao je 1911. godine da je M_{89} prost broj, te 1914. godine da je M_{107} prost broj. Konačno, Lehmer je 1927. godine pokazao da je M_{257} složen broj.

Do 1947. godine testirani su svi brojevi oblika $2^n - 1$ za $n \leq 257$. Tek tada je bilo poznato koje je greške Mersenne napravio. Neispravno je zaključio da su M_{67} i M_{257} prosti, a brojeve M_{61}, M_{89} i M_{107} je isključio sa svoje liste prostih brojeva.

Razvojem modernih računala pronalazak većih Mersenneovih brojeva postao je lakši i uspješniji. 1952. godine otkriveno je pet novih Mersenneovih brojeva: M_{521}, M_{607}, M_{1279}, M_{2203} i M_{2281}. 1957. i 1961. godine okriveni su M_{3217}, M_{4253} i M_{4423}. U sklopu Sveučilišta Illionis u Urbana - Champaignu 1963. godine pronađena su tri nova Mersenneova broja. Zanimljivo je da su se nakon otkrića ti brojevi u obliku žiga pojavljivali na poštanskoj markici grada Urbana. (*Slika 1.2. Poštanska marka*)

Slika 1.2. *Poštanska marka*

Do 2014. godine otkriveno je 48 Mersenneovih prostih brojeva.

2 Savršeni brojevi

Jedan od najstarijih problema u teoriji brojeva, s kojim je povezano i Mersenneovo ime, je pronalaženje savršenih brojeva. Neki biblijski znanstvenici smatrali su da je 6 savršen broj jer su vjerovali da je Bog stvorio svijet za šest dana, a Božje djelo je savršeno. S druge strane, Sveti Augustin je tvrdio da je Bog stvorio Zemlju u točno 6 dana kao simbol savršenog djela. Napisao je da je broj 6 sam po sebi savršen, čak i da Bog nije stvarao svijet šest dana, broj 6 bi i dalje bio savršen.

Stari Grci mislili su da savršeni brojevi imaju mistične moći pa su ih stoga smatrali vrlo posebnima. Pitagora i njegovi sljedbenici su broj 6 smatrali simbolom braka, zdravlja i ljepote. Što im je bilo tako mistično oko broja 6? Bili su zaintrigirani odnosom između broja i njegovih pravih djelitelja. Naime, primijetili su da je 6 jednak sumi svojih pravih djelitelja (pozitivnih djelitelja, ne uključujući samog sebe), tj. $6 = 1 + 2 + 3$.

Sljedeći broj s takvim svojstvom je 28. Budući da su pozitivni djelitelji od 28 brojevi 1, 2, 4, 7 i 14, slijedi da je $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Rani komentatori Starog zavjeta broj 28 povezivali su sa savršenstvom svemira budući da je Mjesecu potrebno 28 dana da obiđe Zemlju.

U skladu sa svojom filozofijom pripisavanja određenih društvenih kvaliteta brojevima, Pitagorejci su brojeve takvog oblika nazvali *savršenima.*

Definicija 1. *Pozitivan cijeli broj N savršen je broj ako je jednak sumi svojih pravih djelitelja.*

Označimo li sumu svih pozitivnih djelitelja od N (uključujući i N) sa

$$\sigma(N) = \sum_{d|N} d,$$

onda je suma svih pozitivnih djelitelja manjih od N jednaka $\sigma(N) - N$. Iz toga proizlazi uvjet, odnosno definicija:

Definicija 2. *Prirodan broj N je savršen ako je $\sigma(N) - N = N$, tj.*

$$\sigma(N) = 2N.$$

Na primjer, uzmemo li da je $N = 6$ imamo da je

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 2 \cdot 6.$$

Za $N = 28$ slijedi da je

$$\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 2 \cdot 28.$$

Prema tome, 6 i 28 su savršeni brojevi.

Samo su četiri savršena broja bila poznata starim Grcima. Oko 100. godine poslije Krista, Nicomachus je u svojoj knjizi *Introduction to Arithmetic* brojeve $P_1 = 6$, $P_2 = 28$, $P_3 = 496$ i $P_4 = 8128$ naveo kao savršene brojeve. Zaključio je da su ti brojevi jedini savršeni brojevi u intervalima između 1, 10, 100, 1000 i 10 000, odnosno da postoji jedan jednozmankast, jedan dvoznamenkast, jedan troznamenkast i jedan četveroznamenkast savršen broj.

Na osnovi toga zaključeno je:
1. n-ti savršen broj P_n sadrži točno n znamenki;
2. parni savršeni brojevi završavaju naizmjence na 6 i 8.

Obje tvrdnje su pogrešne. Ne postoji savršen broj s pet znamenki. $P_5 = 33\,550\,336$ je sljedeći savršen broj koji ima više od pet znamenki. Iako mu je posljednja znamenka 6, sljedeći savršen broj $P_6 = 8\,589\,869\,056$ također završava znamenkom 6, a ne znamenkom 8 kao što je pretpostavljeno. Veličina šestog savršenog broja ukazuje na rijetkost savršenih brojeva, te još uvijek nije poznato ima li ih konačno ili beskonačno mnogo.

Arapski matematičar Ismail ibn Fallus (1194. - 1239.) slijedio je Nicomachusov rad, te dao deset savršenih brojeva među kojima su bili peti, šesti i sedmi savršeni broj. Međutim od tih deset brojeva tri su se pokazala netočnima. 1460. godine Johann Müller Regiomontanus ponovo je otkrio peti i šesti savršeni broj, ali njegovi dokazi o tome dugo vremena nisu bili poznati.

2.1 Parni savršeni brojevi

Određivanje općeg oblika svih savršenih brojeva datira iz antičkih vremena. Djelomično je to riješio Euklid u Knjizi IX svojih Elemenata (oko 300. godine prije Krista). Primijetio je da su prva četiri savršena broja specifičnog oblika:

$$6 = 2^1(1+2) = 2 \cdot 3$$

$$28 = 2^2(1+2+2^2) = 4 \cdot 7$$

$$496 = 2^4(1+2+2^2+2^3+2^4) = 16 \cdot 31$$

$$8128 = 2^6(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6) = 64 \cdot 127.$$

Uočimo da nedostaju brojevi

$$90 = 2^3(1+2+2^2+2^3) = 8 \cdot 15$$

$$i$$

$$2016 = 2^5(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5) = 32 \cdot 63.$$

Euklid je istaknuo da je to zato što su 15 i 63 složeni brojevi, dok su brojevi 3, 7, 31 i 127 prosti.

Osim što su prva četiri savršena broja parna, možemo primijetiti da za umnoške s desne strane jednakosti vrijedi:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 &= 2^1(2^2-1) \\ 4 \cdot 7 &= 2^2(2^3-1) \\ 16 \cdot 31 &= 2^4(2^5-1) \\ 64 \cdot 127 &= 2^6(2^7-1). \end{aligned}$$

Rezultat ovih tvrdnji je sljedeći Euklidov teorem.

Teorem 1 (Euklid). *Ako je broj 2^n-1 prost, onda je broj $N = 2^{n-1}(2^n-1)$ savršen.*

Dokaz. Očito je da su 2^n-1 i 2 jedini prosti faktori od N. Budući da se broj 2^n-1 pojavljuje kao zaseban prost broj, imamo da je

$$\sigma(2^n-1) = 1 + (2^n-1) = 2^n.$$

Stoga je

$$\sigma(N) = \sigma(2^{n-1})\sigma(2^2-1) = \left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)2^n = 2^n(2^n-1) = 2N.$$

Prema tome, broj N je savršen. □

Brojeve oblika $2^{n-1}(2^n-1)$, gdje je 2^n-1 prost, nazivamo Euklidovim savršenim brojevima. Važno je naglasiti da Euklid nije tvrdio da su svi (parni) savršeni brojevi takvog oblika.

Hudalrichus Regius je 1536. godine otkrio prvi prost broj n takav da $2^{n-1}(2^n-1)$ nije savršen broj. U svojoj je knjizi *Utriusque Arithmetices* pokazao da je $2^{11}-1 = 2047 = 23\cdot 89$. Također je ponovo otkrio peti savršeni broj. J. Scheybl otkrio je 1555. godine ponovo šesti savršeni broj, ali to je ostalo neprimijećeno do 1977. godine.

Iako nije bio prvi koji je otkrio peti, šesti i sedmi savršeni broj, talijanski matematičar Pietro Cataldi zaslužan je za njihov pronalazak jer su njegovi dokazi prvi poznati dokazi o tim savršenim brojevima. Dokazao je da ta tri savršena broja redom izgledaju ovako:

$$\begin{aligned} 33\,550\,336 &= 2^{12}(2^{13}-1) \\ 8\,589\,869\,056 &= 2^{16}(2^{17}-1) \\ 137\,438\,691\,328 &= 2^{18}(2^{19}-1). \end{aligned}$$

Ovim je dokazom pokazao da Euklidovi savršeni brojevi završavaju sa znamenkama 6 i 8, ali ne naizmjence kako je to Nicomachus pretpostavio. Osim toga, Cataldi je pretpostavio da je 2^n-1 prost za $n = 23, 29, 31$ i 37. 1603. godine je objavio tablicu faktora svih brojeva do 800 s odvojenim popisom prostih brojeva do 750.

2.1.1 Fermatovi brojevi

Izuzetan doprinos u otkrivanju savršenih brojeva dao je 1640. godine Pierre de Fermat. Radom na savršenim brojevima dokazao je da su $2^{23}-1$ i $2^{37}-1$ složeni brojevi. Time je pokazao da je Cataldi pogrešno pretpostavio da je $N = 2^{n-1}(2^n-1)$ savršen broj za $n = 23$ i $n = 37$.

Slika 2.1. *Pierre de Fermat (1601. - 1665.)*

Istraživanje o savršenim brojevima Fermat je započeo određivanjem svih prostih brojeva oblika $a^n - 1$, gdje su a i n pozitivni cijeli brojevi. Njegov zaključak dan je u sljedećem teoremu.

Teorem 2. *Ako je $a^n - 1$ prost za cijele brojeve $a > 1$ i $n > 1$, tada je $a = 2$ i n prost.*

Dokaz. Budući da je $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$ prost broj i $a - 1 = 1$, slijedi da je $a = 2$. Štoviše, ako je n složen broj, odnosno $n = rs$ za $r > 1$ i $s > 1$, tada je

$$2^n - 1 = 2^{rs} - 1 = (2^r - 1)(2^{r(s-1)} + 2^{r(s-2)} + \cdots + 1).$$

Međutim, svaki je faktor na desnoj strani veći od 1 što je u suprotnosti s činjenicom da je $2^n - 1$ prost. Dakle, n je prost, pa je teorem dokazan. □

Nakon što je dokazao uvjete pod kojima je $a^n - 1$ prost, pokazao je kada je $a^n + 1$ prost.

Teorem 3. *Ako je $a^n + 1$ prost za cijele brojeve $a > 1$ i $n > 0$, tada je a paran i $n = 2^r$ za pozitivan cijeli broj r.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $a^n + 1$ prost. Kada bi a bio neparan, vrijedilo bi da je $a^n + 1$ paran broj, veći od 3, koji nije prost. Stoga je a paran broj.
Pretpostavimo da n ima neparni faktor veći od 1, to jest, $n = rs$, gdje je s neparan broj veći od 1. Iz toga slijedi da je

$$a^n + 1 = a^{rs} + 1 = (a^r + 1)(a^{r(s-1)} - a^{r(s-2)} + \cdots - a^r + 1).$$

Budući da je $s \geq 3$, oba faktora od $a^n + 1$ su veća od 1, što je u kontradikciji s činjenicom da je $a^n + 1$ prost broj. Stoga, n nema neparnih faktora, pa mora vrijediti $n = 2^r$. □

Brojeve oblika $2^{2n} + 1$, za n nenegativan cijeli broj, nazivamo *Fermatovi brojevi* i označavamo ih sa F_n. Prvih nekoliko Fermatovih brojeva za $n = 0, 1, 2, 3, 4$ izgleda ovako:

$$F_0 = 3,\ F_1 = 5,\ F_2 = 17,\ F_3 = 257,\ F_4 = 65\,537.$$

Svih pet navedenih brojeva su prosti, pa je Fermat pretpostavio da je F_n prost za svaki nenegativan cijeli broj n. No, tu tvrdnju opovrgnuo je Leonhard Euler kada je dokazao da je F_5 složen broj. Ovim problemom stoljećima su se bavili mnogi znanstvenici, te su brojna istraživanja pokazala da su $F_0,\ F_1,\ F_2,\ F_3$ i F_4 jedini Fermatovi brojevi koji su prosti.

Marin Mersenne bio je vrlo zainteresiran za Fermatove rezultate o savršenim brojevima. Počeo ih je detaljno proučavati pa su tako brojevi $2^n - 1$ dobili ime po Mersenneu. Budući da je bio posrednik znanstvenih informacija, Mersenne je imao značajnu ulogu u razmjeni otkrića o savršenima brojevima između Bernarda Freniclea i Fermata. Naime, Frenicle mu je napisao da je $2^{37} - 1$ složen, ali nije uspio pronaći njegove faktore. Fermat je odgovorio da su 223 i 616 318 177 faktori od $2^{37} - 1$. Zatim je Frenicle zatražio od Fermata da pronađe savršen broj koji sadrži 20 ili 21 znamenku. Dva mjeseca kasnije, Fermat je odgovorio da takvi savršeni brojevi ne postoje.

2.1.2 Euler i savršeni brojevi

Švicarski matematičar, fizičar i astronom Leonhard Euler, 1732. godine je proširio Fermatovo istraživanje i tvrdio da ako su $n = 4k - 1$ i $8k - 1$ prosti, tada je $8k - 1$ faktor od $2^n - 1$. Taj rezultat iskoristio je kako bi dokazao da je $2^n - 1$ složen za $n = 11, 23, 83, 131, 179, 191$ i 239, te kako bi pronašao djelitelje od $2^n - 1$ za $n = 29, 37, 43, 47$ i 73. Formalni dokaz ovih tvrdnji dao je Lagrange 1775. godine.

Slika 2.2. *Leonhard Euler (1707. - 1783.)*

Oko 2000 godina nakon Euklidovog otkrića o savršenim brojevima, Euler je dokazao da su svi parni savršeni brojevi oblika danog u *Teoremu 1 (Euklid).*

Teorem 4 (Euler)**.** *Ako je N paran savršen broj, onda je N oblika $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$, gdje je $2^n - 1$ prost broj.*

Dokaz. Neka je $N = 2^{n-1} \cdot m$ savršen broj, gdje je $n \geq 2$ i m neparan. Budući da 2 ne dijeli m, 2^{n-1} i m su relativno prosti, tj. $(2^{n-1}, m) = 1$. Iz toga slijedi da je

$$\sigma(N) = \sigma(2^{n-1} \cdot m) = \sigma(2^{n-1})\sigma(m) = \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right)\sigma(m) = (2^n - 1)\sigma(m).$$

Budući da je N savršen, imamo

$$\sigma(N) = 2N = 2(2^{n-1}m) = 2^n m.$$

Te dvije relacije zajedno daju

$$2^n m = (2^n - 1)\sigma(m).$$

Budući da je $2^n - 1$ neparan, $2^n - 1$ dijeli m, pa možemo pisati $m = (2^n - 1)k$. Sada je

$$(2^n - 1)\sigma(m) = 2^n(2^n - 1)k,$$

što implicira

$$\sigma(m) = 2^n k = (2^n - 1)k + k = m + k.$$

Ali k dijeli m, pa $\sigma(m) = m + k$ znači da m ima samo dva pozitivna djelitelja, k i m, iz čega slijedi da je $k = 1$. Prema tome, $\sigma(m) = m + 1$ i m je prost broj. Budući da $2^n - 1$ dijeli m, $2^n - 1 = m$. Stoga je $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$, gdje je $2^n - 1$ prost broj. □

Sada je vidljivo da je pronalaženje parnih savršenih brojeva usko povezano uz pronalaženje prostih brojeva oblika $2^n - 1$, odnosno Mersenneovih prostih brojeva.
Iako ovaj teorem daje izvanrednu formulu za konstruiranje parnih savršenih brojeva, nije poznato postoji li beskonačno mnogo parnih savršenih brojeva.

Euler je znao za prvih sedam savršenih brojeva, $2^{n-1}(2^n - 1)$ za $n = 2$, 3, 5, 7, 13, 17 i 19. Pokazao je 1772. godine da je Mersenneov broj M_{31} prost, stoga je tada otkriven osmi savršeni broj:

$$2\,305\,843\,008\,139\,952\,128 = 2^{30}(2^{31} - 1).$$

Nakon što je dan osmi savršeni broj, Peter Barlow je 1811. godine u svojoj knjizi *Elementary Investigation of the Theory of Numbers* zaključio da je to najveći savršeni broj koji će ikada biti otkriven. Međutim, taj zaključak je bio pogrešan. Francuski matematičar Édouard Lucas je 1876. godine otkrio metodu, koju je D. H. Lehmer kasnije i dokazao, pa je nazvana Lucas - Lehmerovim testom, pomoću koje se određuje je li neki Mersenneov broj prost ili složen. Već 1876. godine Lucas je otkrio deveti savršeni broj, a sedam godina kasnije, I. Pervushin otkrio je deseti savršeni broj. Do 1914. godine bilo je poznato 12 Mersenneovih prostih brojeva, pa prema tome i 12 savršenih brojeva. Dvanaesti po redu (što se tiče otkrića), M_{89}, bio je i posljednji Mersenneov prosti broj koji je izračunat ručno.

Pronalazak novih Mersenneovih i savršenih brojeva i danas je aktualna i zanimljiva tema znanstvenicima diljem svijeta. Istraživanja pokazuju da je do 2018. godine otkriven 51 Mersenneov prost broj, pa stoga i 51 savršen broj. 51. savršeni broj je jednak:

$$2^{82\,589\,932}(2^{82\,589\,933} - 1).$$

2.1.3 Svojstva parnih savršenih brojeva

U sljedećim propozicijama prikazano je nekoliko svojstava parnih savršenih brojeva.

Prije iskaza prve propozicije, najprije ćemo definirati kada je broj trokutast.

Definicija 3. *Kažemo da je T trokutast broj ako vrijedi*

$$T = \sum_{i=1}^{k} i = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1) \text{ za neki } k.$$

Propozicija 1. *Ako je broj N paran savršen broj, onda je broj N trokutast.*

Dokaz. Znamo da su parni savršeni brojevi oblika

$$N = 2^{n-1}(2^n - 1) = \frac{1}{2}2^n(2^n - 1).$$

Neka je $2^n = k + 1$. Sada su parni savršeni brojevi oblika

$$N = \frac{1}{2}(k+1)(k+1-1) = \frac{1}{2}(k+1)k.$$

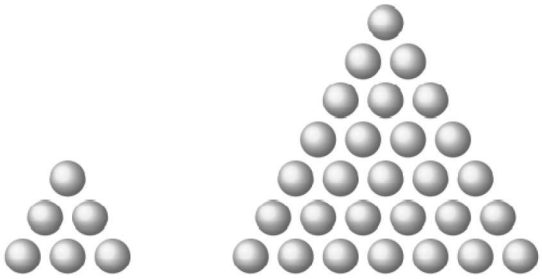
Prema tome, parni savršeni brojevi su trokutasti brojevi. □

Pogledajmo na konkretnom primjeru da to zaista vrijedi.

Primjer 1. *Neka je $N = 6$ paran savršen broj, pokaži da je N trokutast.*

$N = 6$ je paran savršen broj koji je oblika $2^1(2^2 - 1)$. U ovom je slučaju $n = 2$, pa je $2^2 = k+1$. Iz toga slijedi da je $k+1 = 4 \to k = 3$. Uvrstimo k u izraz $N = \frac{1}{2}(k+1)k$ i dobijemo $N = \frac{1}{2}(3+1)3 = 6$. Paran savršen broj 6 je trokutast.

Na slici 2.3. može se vidjeti prikaz trokutastih parnih savršenih brojeva $N = 6$ i $N = 28$.



Slika 2.3. *Trokutasti parni savršeni brojevi* $N = 6$ *i* $N = 28$

Propozicija 2. *Svaki paran savršen broj završava sa* 6 *ili* 8*; to jest,* $N \equiv 6\,(mod 10)$ *ili* $N \equiv 8\,(mod\,10)$.

Dokaz. Svaki prost broj $n > 2$ je oblika $4m + 1$ ili $4m + 3$. U prvom slučaju,

$$\begin{aligned} N &= 2^{n-1}(2^n - 1) \\ &= 2^{4m}(2^{4m+1} - 1) \\ &= 2^{8m+1} - 2^{4m} \\ &= 2 \cdot 16^{2m} - 16^m \\ &\equiv 2 \cdot 6 - 6 \\ &\equiv 6\,(\text{mod } 10), \end{aligned}$$

budući da se induktivno lako može vidjeti da vrijedi $16^t \equiv 6\,(\text{mod } 10)$ za svaki pozitivni cijeli broj t.
Slično, u drugom slučaju,

$$\begin{aligned} N &= 2^{n-1}(2^n - 1) \\ &= 2^{4m+2}(2^{4m+3} - 1) \\ &= 2^{8m+5} - 2^{4m+2} \\ &= 2 \cdot 16^{2m+1} - 4 \cdot 16^m \\ &\equiv 2 \cdot 6 - 4 \cdot 6 \\ &\equiv -12 \\ &\equiv 8\,(\text{mod } 10). \end{aligned}$$

Konačno, ako je $n = 2$, onda je $N = 6$, i time su pokrivene sve mogućnosti. Prema tome, svaki paran savršen broj ima posljednju znamenku jednaku 6 ili 8. □

Sljedeća propozicija daje još precizniji rezultat.

Propozicija 3. *Svaki paran savršen broj završava na* 6 *ili* 28.

Dokaz. U prethodnoj propoziciji pokazano je da je $N \equiv 6 \pmod{10}$ za prost broj n oblika $4m+1$. Sada trebamo pokazati da ako je n oblika $4m+3$, onda vrijedi $N \equiv 28 \pmod{100}$. Primijetimo da je

$$2^{n-1} = 2^{4m+2} = 16^m \cdot 4 \equiv 6 \cdot 4 \equiv 4 \pmod{10}.$$

Nadalje, za $n > 2$ očito 4 dijeli 2^{n-1}, pa je broj koji se sastoji od posljednje dvije znamenke broja 2^{n-1} djeljiv s 4. Situacija je sljedeća: posljednja znamenka broja 2^{n-1} je 4, dok 4 dijeli posljednje dvije znamenke.
Stoga imamo sljedeće mogućnosti:

$$2^{n-1} \equiv 4,\ 24,\ 44,\ 64,\ 84 \pmod{100}.$$

Iz toga slijedi da je

$$2^n - 1 = 2 \cdot 2^{n-1} - 1 \equiv 7,\ 47,\ 87,\ 27,\ 67 \pmod{100},$$

te dobivamo da je

$$N = 2^{n-1}(2^n - 1) \equiv 4 \cdot 7,\ 24 \cdot 47,\ 44 \cdot 87,\ 64 \cdot 27,\ 84 \cdot 67 \pmod{100}.$$

Preostaje pokazati da su svi dobiveni brojevi kongruentni 28 modulo 100. Za $4 \cdot 7 = 28$ je to očigledno. Zatim imamo

$$\begin{aligned} 24 \cdot 47 &\equiv 12 \cdot 94 \pmod{100} \\ &\equiv 6 \cdot 188 \pmod{100} \\ &\equiv 6 \cdot 88 \pmod{100} \\ &\equiv 3 \cdot 176 \pmod{100} \\ &\equiv 3 \cdot 76 \pmod{100} \\ &\equiv 228 \pmod{100} \\ &\equiv 28 \pmod{100} \end{aligned}$$

Preostala tri slučaja mogu se provjeriti na sličan način. □

Propozicija 4. *Suma recipročnih vrijednosti svih pozitivnih djelitelja savršenog broja jednaka je* 2.

Dokaz. Neka je N savršen broj. Uočimo da ako $d \mid N$, onda je $kd = N$ za neki k, pa je $k = (N/d) \mid N$. Vrijedi i obrnuto iz čega slijedi da $d \mid N$ ako i samo ako $(N/d) \mid N$. Sada je

$$\sum_{d|N} \frac{1}{d} = \frac{\sum_{d|N}(N/d)}{N} = \frac{\sum_{d|N} d}{N} = \frac{\sigma(N)}{N} = \frac{2N}{N} = 2,$$

čime je dokaz završen. □

Primjer 2. *Ilustracija Propozicije 4. za* $N = 6, 28, 496$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} &= 2 \\ \frac{1}{28} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} &= 2 \\ \frac{1}{496} + \frac{1}{248} + \frac{1}{124} + \frac{1}{62} + \frac{1}{31} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} &= 2. \end{aligned}$$

2.2 Neparni savršeni brojevi

Postoji li beskonačno mnogo parnih savršenih brojeva pitanje je koje je ostalo neriješeno sve do danas. Međutim, to nije jedini neriješeni problem vezan uz savršene brojeve. Mnogi znanstvenici stoljećima pokušavaju dokazati postoje li neparni savršeni brojevi. Iako su postavljeni mnogi uvjeti koje bi neparan savršen broj N trebao zadovoljavati, još uvijek nije pronađen niti jedan takav broj.

Prvi uvjet dao je Euler, koji je pokazao da je svaki neparan savršen broj N oblika

$$N = p^k q_1^{2a_1} q_2^{2a_2} \cdots q_r^{2a_r},$$

gdje su $p, q_1, q_2, ..., q_r$ različiti neparni prosti brojevi i $p \equiv k \equiv 1 \pmod 4$.

Teorem 5 (Euler). *Neka je N neparan savršen broj. Tada je faktorizacija od N oblika $N = p^{4e+1}q_1^{2a_1}q_2^{2a_2}\cdots q_r^{2a_r}$, gdje je $p \equiv 1 \pmod 4$.*

Dokaz. Neka je $N = l_1^{e_1}l_2^{e_2}\cdots l_s^{e_s}$ za neke proste brojeve $l_1, l_2, ..., l_s$. Budući da je N neparan, svi l_i su neparni. Konačno, $\sigma(N) = 2N$. Budući da je

$$\sigma(N) = \sigma(l_1^{e_1}l_2^{e_2}\cdots l_s^{e_s}) = \sigma(l_1^{e_1})\sigma(l_2^{e_2})\cdots\sigma(l_s^{e_s}),$$

promatramo $\sigma(l^e) = 1+l+l^2+\cdots+l^e$, sumu $e+1$ neparnih brojeva, koja je neparna samo ako je e paran. Kako je

$$\sigma(l_1^{e_1}l_2^{e_2}\cdots l_s^{e_s}) = \sigma(l_1^{e_1})\sigma(l_2^{e_2})\cdots\sigma(l_s^{e_s}) = 2l_1^{e_1}l_2^{e_2}\cdots l_s^{e_s},$$

imamo samo jedan faktor jednak 2. Stoga su parni svi e_i osim jednog, recimo e_1. Prema tome, $N = l_1^{e_1}q_1^{2a_1}\cdots q_r^{2a_r}$.

Nadalje očito vrijedi da $2 \mid \sigma(l_1^{e_1})$, ali $4 \nmid \sigma(l_1^{e_1})$. Budući da je l_1 neparan, e_1 je neparan. Sada vidimo da vrijedi ili $l_1 \equiv 1 \pmod 4$ ili $l_1 \equiv -1 \pmod 4$. Ali ako je $l_1 \equiv -1 \pmod 4$, onda vrijedi

$$\begin{aligned}\sigma(l_1^{e_1}) &= 1 + l_1 + l_1^2 + \cdots + l_1^{e_1-1} + l_1^{e_1} \\ &\equiv 1 + (-1) + 1 + \cdots + 1 + (-1) \\ &\equiv 0 \pmod 4,\end{aligned}$$

što je očito kontradikcija budući da $4 \nmid \sigma(l_1^{e_1})$. Prema tome, $l_1 \equiv 1 \pmod 4$. Sada vrijedi

$$\begin{aligned}\sigma(l_1^{e_1}) &= 1 + l_1 + l_1^2 + \cdots + l_1^{e_1-1} + l_1^{e_1} \\ &= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 \\ &\equiv e_1 + 1 \pmod 4.\end{aligned}$$

Budući da je e_1 neparan, vrijedi ili $e_1 + 1 \equiv 0 \pmod 4$ ili $e_1 + 1 \equiv 2 \pmod 4$. Ako je $e_1 + 1 \equiv 0 \pmod 4$, onda $4 \mid \sigma(l_1^{e_1})$ što je kontradikcija. Prema tome, $e_1 + 1 \equiv 2 \pmod 4$ onda i samo onda ako je $e_1 + 1 = 4e + 2$, odnosno, $e_1 = 4e + 1$. Sada slijedi da je

$$N = p^{4e+1}q_1^{2a_1}\cdots q_r^{2a_r}, \text{ za } p \equiv 1 \pmod 4,$$

čime je dokaz završen. □

Svaki neparan savršen broj može se zapisati u obliku

$$N = p^k q_1^{2a_1} \cdots q_r^{2a_r} = p^k (q_1^{a_1} \cdots q_r^{a_r})^2 = p^k m^2.$$

Korolar 1. *Ako je N neparan savršen broj, onda je N oblika $N = p^k m^2$, gdje je p prost broj, $p \nmid m$, te $p \equiv k \equiv 1 \,(mod\, 4)$. Posebno, $N \equiv 1 \,(mod\, 4)$.*

Dokaz. Jedino posljednja tvrdnja još nije dokazana. Budući da je $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)$, imamo $p^k \equiv 1 \,(\mathrm{mod} 4)$. Primijetimo da m mora biti neparan. Stoga je $m \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)$ ili $m \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\ 4)$. Nakon kvadriranja vrijedi $m^2 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)$. Sada slijedi

$$N = p^k m^2 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4).$$

□

James Sylvester je 1888. godine pokazao je da ne postoji neparan savršen broj koji ima manje od 6 različitih prostih faktora, te da ne postoji neparan savršen broj koji nije djeljiv s 3, a ima manje od 8 različitih prostih faktora.

Rudolf Steuerwald je 1937. godine pokazao da ako je $N = p^k q_1^{2a_1} \cdots q_r^{2a_r}$ neparan savršen broj, gdje su $p, q_1, ..., q_r$ različiti neparni prosti brojevi i $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)$, onda ne mogu svi a_i biti jednaki 1; to jest, ako je $N = p^k q_1^2 \cdots q_r^2$ neparan broj s $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)$, onda N nije savršen. Zatim je 1941. godine Hans - Joachim Kanold pokazao da ne mogu svi a_i biti jednaki 2, niti može jedan a_i biti 2 dok su svi ostali jednaki 1. Peter Hagis, Jr. i Wayne L. McDaniel su 1972. godine dokazali da ne mogu svi a_i biti jednaki 3. Fouglas E. Iannucci i Ronald M. Sorli dokazali su 2003. godine da ako vrijedi $a_i \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 3)$ i $a_i \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\ 3)$ za sve i, onda $3 \nmid N$.

Franuski matematičar J. Touchard je 1953. godine tvrdio da neparan savršen broj N mora biti oblika $12k + 1$ ili $36k + 9$. Pedeset godina kasnije, W. Chau pokazao je da ako $N = 36k + 9$, onda N mora biti i oblika $108k + 9$, $108k + 35$ ili $324k + 81$. Zatim, tvrdio je da neparan savršen broj N mora imati najmanje 8 različitih prostih faktora. Ako N ima točno osam različitih prostih faktora, tada najmanji prosti faktor mora biti 3, 5 ili 7.

1991. godine R. P. Brent i G. L. Cohen pokazali su da neparan savršen broj mora biti veći od 10^{300}. D. E. Iannucci je 1995. godine pokazao da je drugi prosti faktor neparnog savršenog broja veći od 10^4, a treći prosti faktor veći od 100. Tri godine

kasnije G. L. Cohen i P. Hahgis Jr. dokazali su da je najveći prosti faktor neparnog savršenog broja veći od 10^6. Paul A. Weiner 2000. godine je tvrdio da ako vrijedi $3\sigma(n) = 5n$ za neki cijeli broj n, onda je $5n$ neparan savršen broj.

Vidimo da se većina suvremenih istraživanja neparnih savršenih brojeva temeljila na određivanju njihove veličine, te na rastavu na proste faktore. Među matematičarima postoji uvjerenje da takvi brojevi ne postoje, međutim, samo bi dokaz njihovog nepostojanja takva uvjerenja zaista i potvrdio.

2.3 Savršeni brojevi oblika $n^n + 1$

John L. Selfridge je 1990. godine tijekom konferencije o teoriji brojeva predstavio fascinantan problem (*Primjer 3.*) koji eksplicitno identificira posebnu klasu parnih savršenih brojeva. Budući da je Selfridge problem riješio za N paran broj, na konferenciji je pokrenuo raspravu što bi bilo rješenje kada bi N bio neparan. Peter L. Montgomery s Kalifornijskog sveučilišta je dani problem riješio tijekom konferencije.

Primjer 3. *Pronađite sve savršene brojeve oblika* $n^n + 1$.

Neka je $N = n^n + 1$.

1. slučaj:
Neka je n neparan. Budući da je N paran savršen broj, N mora biti oblika $N = 2^{m-1}(2^m - 1)$, gdje je $2^m - 1$ prost.
Očito je da se N može faktorizirati kao $N = n^n + 1 = (n + 1)r$, gdje je $r = n^{n-1} - n^{n-2} + \cdots - n + 1$.

Sada tvrdimo da je $(n + 1, r) = 1$, to jest, da su relativno prosti. Da bismo to pokazali, primijetimo da je n neparan, pa je $n + 1$ paran, a r neparan. Neka je $n + 1 = 2^s t$, gdje je t neparan cijeli broj ≥ 1, tada je $N = 2^s tr$. Budući da je N paran savršen broj, to je moguće samo ako je $t = 1$. Iz toga slijedi da je $n + 1 = 2^s$, pa je $(n + 1, r) = 1$.
(Kada bi $r = 1$, tada je $N = n^n + 1 = n + 1$, pa bi $n = 1$. Dobili bi da je $N = 2$, što nije savršen broj.)

Budući da je $N = 2^{m-1}(2^m - 1) = (n + 1)r = 2^s r$, gdje je $2^m - 1$ prost i r ne-

paran,

$$2^s = 2^{m-1} = n + 1$$

i

$$r = 2^m - 1 = 2 \cdot 2^{m-1} - 1 = 2(n+1) - 1 = 2n + 1.$$

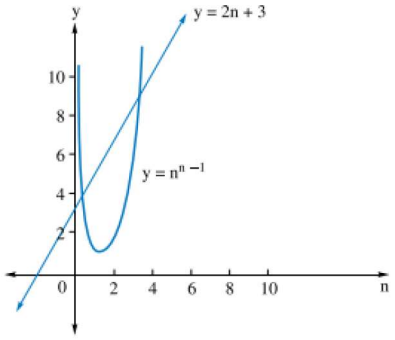
Stoga je,

$$N = n^n + 1 = (n+1)(2n+1) = 2n^2 + 3n + 1.$$

Iz toga slijedi da je

$$\begin{aligned} n^n &= 2n^2 + 3n \\ n^{n-1} &= 2n + 3. \end{aligned}$$

Budući da je n cijeli broj, ova jednadžba ima jedinstveno rješenje: 3, koje se može vidjeti na slici (*Slika 2.4. Geometrijsko rješenje jednadžbe* $n^{n-1} = 2n + 3$). Tada je $N = 3^3 + 1 = 28$. Dakle, 28 je jedini parni savršeni broj takvog oblika.



Slika 2.4. *Geometrijsko rješenje jednadžbe* $n^{n-1} = 2n + 3$

2. slučaj:

Neka je n paran i $n = 2k$. Tada je N neparan, n^n kvadrat nekog broja i $n^n \equiv -1 \pmod{N}$.

Tvrdimo da $3 \nmid N$, za pretpostavku $3 \mid N$. Tada je $n^n \equiv -1 \pmod 3$ iz čega slijedi

$$\begin{aligned} (2k)^{2k} &\equiv -1 \pmod 3 \\ 4^k \cdot k^{2k} &\equiv 2 \pmod 3 \\ 1 \cdot k^{2k} &\equiv 2 \pmod 3 \\ k^{2k} &\equiv 2 \pmod 3. \end{aligned}$$

Očito, $k \not\equiv 0$ ili 1 modulo 3. Ako je $k \equiv 2\,(\mathrm{mod}3)$, onda kongruencija $k^{2k} \equiv 2\,(\mathrm{mod}3)$ daje

$$\begin{aligned} 2^{2k} &\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3) \\ 4^{k} &\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3) \\ 1 &\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3), \end{aligned}$$

što nije moguće. Dakle, k ne može biti kongruentan s 0, 1 ili 2, što je nemoguće, pa $3 \nmid N$. Prema Touchardovom teoremu svaki neparni savršeni broj ima oblik $12m+1$ ili $36m+9$ za neki cijeli broj m. Ako je $N = 36m+9$, onda $3 \mid N$, što je kontradikcija. Stoga, $N = 12m+1$, to jest, $n^n = 12m$. Budući da $3 \mid 12m$, $3 \mid n^n$, pa $3 \mid n$. Dakle, imamo $2 \mid n$, $3 \mid n$, pa slijedi da $6 \mid n$.

Neka je $N = a^6 + 1$, gdje je $a = n^{\frac{n}{6}} > 1$. Tada se N može faktorizirati kao

$$N = (a^2+1)(a^4 - a^2 + 1).$$

Pokažimo da su ti faktori od N relativno prosti. Neka je p zajednički prosti faktor od a^2+1 i $a^4 - a^2 + 1$. Budući da je

$$\begin{aligned} a^4 - a^2 + 1 &= (a^4 + 2a^2 + 1) - 3a^2 \\ &= (a^2+1)^2 - 3a^2 \\ &= (a^2+1)^2 - 3(a^2+1) + 3, \end{aligned}$$

$p \mid 3$, to jest, $p = 3$. To implicira $3 \mid N$, što je kontradikcija, pa su faktori a^2+1 i $a^4 - a^2 + 1$ relativno prosti. Osim toga, N je neparan, pa su oba faktora također neparna.

Budući da je N savršen, a σ multipklikativna funkcija, $N = (a^2+1)(a^4 - a^2 + 1)$ vrijedi

$$\sigma(N) = \sigma(a^2+1)\sigma(a^4 - a^2 + 1).$$

Sada je,

$$2N = \sigma(a^2+1)\sigma(a^4 - a^2 + 1).$$

Budući da je N neparan, jedan od faktora također mora biti neparan. Ali, ako su m i $\sigma(m)$ oboje neparni, onda je m kvadrat nekog broja. Iz toga slijedi da je

a^2+1 ili a^4-a^2+1 kvadrat nekog broja. Međutim, $a^2 < a^2+1 < (a+1)^2$ i $(a^2-1)^2 < a^4-a^2+1 < (a^2)^2$, tako da niti jedan od njih ne može biti kvadrat nekog broja, što je kontradikcija.

Prema tome, nema neparnih savršenih brojeva oblika n^n+1, pa je 28 jedini savršeni broj takvog oblika.

3 Prijateljski brojevi

Drugi tip brojeva, čija povijest seže od starih Grka pa sve do danas, su *prijateljski brojevi*. Prijateljski brojevi su bili važni u magiji i astrologiji, određivanju horoskopa, te smišljanju ljubavnih napitaka. Grci su vjerovali da ti brojevi imaju poseban utjecaj na uspostavljanje prijateljstva između dvije osobe.

Definicija 4. *Par brojeva (m, n), gdje su m i n prirodni brojevi i $m < n$, naziva se prijateljski ako je svaki od brojeva m i n zbroj djelitelja drugog broja.*

Prvi otkriveni prijateljski brojevi bili su 220 i 284. Za njihovo otkriće zaslužni su Pitagora i njegovi sljedbenici. Budući da su Pitagorejci brojevima pripisivali razne vrline i društvene kvalitete, određene brojeve nazvali su prijateljskim brojevima. Kada je Pitagori postavljeno pitanje što je prijatelj, on je odgovorio „drugi ja". Što je to značilo u numeričkom smislu? Naime, primijenimo li definiciju 4. na primjeru brojeva 220 i 284, dobivamo sljedeće:

Pozitivni djelitelji broja 220 su 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 i 110. Zbrojimo li navedene djelitelje dobit ćemo broj 284, tj.

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$$

Budući da su pozitivni djelitelji od 284 brojevi 1, 2, 4, 71 i 142, slijedi da je

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

Neka su m i n prirodni brojevi. Suma svih pozitivnih djelitelja manjih od m jednaka je $\sigma(m) - m$, a suma svih pozitivnih djelitelja manjih od n jednaka $\sigma(n) - n$. Iz toga proizlazi sljedeća definicija:

Definicija 5. *Za prirodne brojeve m i n kažemo da su prijateljski ako vrijedi $\sigma(m) - m = n$ i $\sigma(n) - n = m$, tj.*

$$\sigma(m) = m + n = \sigma(n).$$

Povežemo li prijateljske brojeve sa savršenim brojevima, vidimo da su savršeni brojevi prijateljski sami sa sobom.

Spominjanje broja 220 može se pronaći i u Knjizi Postanka. Naime, Biblijski komentatori primijetili su simboliku broja 220 u broju Jakovljevih darova bratu Ezavu kojem je poklonio 200 koza i 20 jaraca, kako bi osigurao njegovu naklonost i prijateljstvo.

Prijateljski brojevi također se pojavljuju i u islamskim djelima, gdje se uglavnom povezuju sa čarobnjaštvom i izradom talismana. Islamski povjesničar iz 14. stoljeća, Ibn Khaldun, izjavio je da osobe koje izrađuju talismane potvrđuju da prijateljski brojevi 220 i 284 utječu na uspostavljanje bliskog prijateljstva između dvije osobe.

3.1 Thabitovo pravilo

Prvo eksplicitno pravilo za pronalaženje određenih prijateljskih brojeva priznaje se arapskom matematičaru devetog stoljeća, Thabit ibn Qurrau. Osim što se bavio matematikom, Thabit ibn Qurrau bio je fizičar, astronom i prevoditelj. Pravilo za pronalazak prijateljskih brojeva njegov je najveći doprinos u matematici.

Slika 3.1. *Thabit ibn Qurra (836. - 901.)*

Thabitovo pravilo. *Ako su tri broja* $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ *i* $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ *neparni i prosti, te* $n > 1$, *onda su* $2^n pq$ *i* $2^n r$ *prijateljski brojevi.*

Za $n = 2,\ 4,\ 7$ ovo pravilo daje tri prijateljska para: (220, 284), (17 296, 18 416) i (9 363 584, 9 437 056). Drugi i treći prijateljski par otkrili su Fermat i Descartes. Fermat je 1636. godine poslao pismu Mersenneu u kojem je napisao da su za $n = 4$, te proste brojeve $p = 23$, $q = 47$ i $r = 1\,151$, 17 296 i 18 416 prijateljski brojevi. Dvije

godine kasnije, Descartes je napisao Mersenneu da je pronašao treći prijateljski par (9 363,584, 9 437 056), za $n = 7$, $p = 191$, $q = 383$ i $r = 73\,727$. Nije otkriven niti jedan drugi par prijateljskih brojeva, manjih od $2 \cdot 10^{10}$, koji je zadovoljavao Thabitovo pravilo.

3.1.1 Eulerovo pravilo

Leonhard Euler je 1742. godine generalizirao Thabitovo pravilo na pravilo koje pronalazi sve prijateljske parove oblika $(2^n pq,\ 2^n r)$. Njegovo pravilo glasi:

Eulerovo pravilo. *$2^n pq$ i $2^n r$ čine prijateljski par ako su $p = 2^{n-1} f - 1$, $q = 2^n f - 1$ i $r = 2^{2n-1} f^2 - 1$ prosti brojevi, gdje je $f = 2^l + 1$ i $n > l \geq 1$.*

Dokaz. Prema definiciji prijateljskih brojeva n, p, q i r moraju zadovoljavati dvije jednadžbe:

$$(p+1)(q+1) = r + 1$$

i

$$(2^{n+1} - 1)(p+1)(q+1) = 2^n(pq + r).$$

Iz toga slijedi da je

$$r = pq + p + q$$

i

$$[p - (2^n - 1)] \cdot [q - (2^n - 1)] = 2^{2n}.$$

Zapišemo li desnu stranu druge jednažbe u obliku $A \cdot B$, gdje je $A = 2^{n-l}$ i $B = 2^{n+l}$ za neki cijeli broj $l \in [1, n-1]$, slijedi da je

$$p = 2^n - 1 + 2^{n-l}$$

i

$$q = 2^n - 1 + 2^{n+l}.$$

Ako su brojevi $p = 2^{n-l}(2^l - 1) - 1$, $q = 2^n(2^l + 1) - 1$ i $r = pq + p + q = 2^{2n-l}(2^l + 1)^2 - 1$ prosti, tada je $(2^n pq,\ 2^n r)$ par prijateljskih brojeva. □

Do Eulerovog otkrića bila su poznata samo tri para prijateljskih brojeva.

3.1.2 Borhovo pravilo

Eulerovo pravilo zahtijeva da su tri broja, p, q i r, istovremeno prosta. Njemački matematičar Walter Borho proučavao je pravila za konstrukciju prijateljskih brojeva koja zahtijevaju da su dva broja istovremeno prosta. Borhovo istraživanje bilo je motivirano pitanjem da li skup $\mu(b_1,\, b_2,\, p)$ prijateljskih parova oblika

$$(m_1, m_2) = (b_1 p^n q_1,\ b_2 p^n q_2),$$

gdje su b_1 i b_2 pozitivni cijeli brojevi, a p je prost broj koji ne dijeli $b_1 b_2$, može biti beskonačan u smislu da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n i prostih brojeva $q_1 = q_1(n)$, $q_2 = q_2(n)$ za koje je $(m_1,\ m_2)$ prijateljski par. Otkrio je nužan uvjet koji mora vrijediti da bi skup $\mu(b_1,\, b_2,\, p)$ bio beskonačan:

$$\frac{p}{p-1} = \frac{b_1}{\sigma(b_1)} + \frac{b_2}{\sigma(b_2)}.$$

To ga je dovelo do sljedećeg pravila:

Borhovo pravilo. *Neka su dani prirodni brojevi p, b_1 i b_2, gdje je p prost broj koji ne dijeli $b_1 b_2$, te zadovoljava jednadžbu $\frac{p}{p-1} = \frac{b_1}{\sigma(b_1)} + \frac{b_2}{\sigma(b_2)}$. Ako je za neki $n \in \mathbb{N}$ i $i = 1, 2$*

$$q_i = \frac{p^n (p-1)(b_1 + b_2)}{\sigma(b_i)} - 1$$

prost broj koji ne dijeli $b_i p$, tada je $(b_1 p^n q_1, b_2 p^n q_2)$ prijateljski par.

U Borhovom pravilu je vrlo bitno da su q_1 i q_2 u jednadžbi $q_i = \frac{p^n (p-1)(b_1+b_2)}{\sigma(b_i)} - 1$ cijeli brojevi. Borho kaže da je ovo pravilo zapravo primjer Thabitovog pravila za $n = 1, 2, \ldots$ dodajući da je n i potencija prostog broja p, tj. p^n. Pogledajmo na primjeru što to znači.

Primjer 4. *Neka $b_1 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$, $b_2 = 2^2$ i $p = 127$ zadovoljavaju jednadžbu $\frac{p}{p-1} = \frac{b_1}{\sigma(b_1)} + \frac{b_2}{\sigma(b_2)}$, a q_1 i q_2 su cijeli brojevi. Prema Thabitovom pravilu uređeni par $(b_1 p^n q_1,\, b_2 p^n q_2)$ je par prijateljskih brojeva za svaki $n \in \mathbb{N}$ za koji su q_1 i q_2 prosti.*

Uvrstimo li b_1 i p u izraz $b_1 p^n q_1$ dobivamo:

$$b_1 p^n q_1 = 2^2 \cdot 127^n \cdot 5 \cdot 11 \cdot q_1.$$

Uvrstimo li b_2 i p u izraz $b_2 p^n q_2$ dobivamo:

$$b_2 p^n q_2 = 2^2 \cdot 127^n \cdot q_2.$$

Uređeni par $(2^2 \cdot 127^n \cdot 5 \cdot 11 \cdot q_1,\ 2^2 \cdot 127^n \cdot q_2)$, prema Thabitovom pravilu, je par prijateljskih brojeva za svaki $n \in \mathbb{N}$ za koji su $q_1 = 56 \cdot 127^n - 1$ i $q_2 = 56 \cdot 72 \cdot 127^n - 1$ prosti brojevi.
Uzmemo li da je $n = 2$ slijedi da su $q_1 = 903\,223$ i $q_2 = 65\,032\,127$ prosti brojevi, te se dobije par prijateljskih brojeva:

$$(2^2 \cdot 127^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 903\,223,\ 2^2 \cdot 127^2 \cdot 65\,032\,127).$$

Primijetimo da je prvi član prijateljskog para dobivenog u primjeru 4. djeljiv sa 220, odnosno manjim članom Pitagorinog prijateljskog para (220, 284). To nije slučajnost. Naime, Borho je otkrio da ako uzmemo prijateljski par oblika $(au,\ as)$, gdje su a i us relativno prosti, a s prost broj, tada u Borhovom pravilu možemo odabrati da je $b_1 = au$, a $b_2 = a$. Slijedi da je

$$\frac{b_1}{\sigma(b_1)} + \frac{b_2}{\sigma(b_2)} = \frac{u+s+1}{u+s}.$$

Nadalje, ako je $u + s + 1 := p$ prost broj, tada b_1, b_2 i p zadovljavaju jednadžbu $\frac{p}{p-1} = \frac{b_1}{\sigma(b_1)} + \frac{b_2}{\sigma(b_2)}$. Pokazalo se da su q_1 i q_2 cijeli brojevi, pa dobivamo poseban slučaj Borhovog pravila.

Borhovo pravilo (poseban slučaj)**.** *Neka je $(au,\ as)$ prijateljski par, gdje su a i us relativno prosti, tj. $(a,\ us)=1$, a s prost broj. Neka je $p = u + s + 1$ prost broj koji ne dijeli a. Ako su za neki $n \in \mathbb{N}$ $q_1 = p^n(u+1) - 1$ i $q_2 = p^n(u+1)(s+1) - 1$ prosti brojevi koji ne dijele a, tada je $(aup^n q_1,\ ap^n q_2)$ prijateljski par.*

Primijenimo poseban slučaj Borhovog pravila na sljedeći primjer.

Primjer 5. *Neka je $(3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 89, 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2699)$ prijateljski par. Koristeći poseban slučaj Borhovog pravila pokažimo da je $(aup^n q_1,\ ap^n q_2)$ par prijateljskih brojeva.*

Iz $(au,\ as) = (3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 89,\ 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2699)$ slijedi da je $a = 3^4 \cdot 5 \cdot 11$, $u = 29 \cdot 89$ i $s = 2699$. Budući da je $p = u + s + 1 \to p = 5281$. p je prost broj koji ne dijeli a, pa dobivamo sljedeće Thabitovo pravilo:
$(3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 5281^n \cdot 29 \cdot 89 \cdot q_1,\ 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 5281^n \cdot q_2)$ je par prijateljskih brojeva za svaki $n \in \mathbb{N}$ za koji su $q_1 = 2582 \cdot 5281^n - 1$ i $q_2 = 2582 \cdot 2700 \cdot 5281^n - 1$ prosti brojevi.

Uzmemo li da je $n = 1 \to q_1$ i q_2 su doista prosti brojevi, pa dobivamo da je

$$(\, 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 5281 \cdot 29 \cdot 89 \cdot 13\,635\,541,\ 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 5281 \cdot 36\,815\,963\,399\,)$$

prijateljski par.

Te Riele je otkrio da je sljedeća vrijednost broja n za koju vrijedi poseban slučaj Borhovog pravila jednaka $n = 19$. Borho je pokazao da ne postoje druge vrijednosti za $n \leq 267$ za koje ovo pravilo daje par prijateljskih brojeva.

Povećanjem vrijednosti broja n, naglo se povećavaju i vrijednosti brojeva q_1 i q_2, pa je tada često barem jedan od njih složen broj. Stoga je na ovaj način pronađeno samo nekoliko prijateljskih parova.

Iz uvjeta Borhovog pravila, da su a i us relativno prosti, pri čemu je s prost broj, slijedi $(\, a, u\,) = 1$. Primijetimo da taj uvjet nije potreban. Zašto je to tako, pogledajmo na konkretnom primjeru.
Uzmemo li da je $(\, 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13,\ 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 139\,)$ prijateljski par oblika $(\, au,\ as\,)$, gdje je $a = 3 \cdot 5 \cdot 7$ i $u = 3^2 \cdot 13$. $s = 139$ je prost broj, ali $(\, a, us\,) = 3 \neq 1$. Štoviše, budući da je $u + s + 1 = 117 + 139 + 1 = 257$ prost, imamo Thabitovo pravilo:
$(\, 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 257^n \cdot q_1,\ 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 257^n \cdot q_2\,)$ je par prijateljskih brojeva za svaki $n \in \mathbb{N}$ za koji su $q_1 = 118 \cdot 257^n - 1$ i $q_2 = 118 \cdot 140 \cdot 257^n - 1$ prosti brojevi.

Zaključujemo da se u posebnom slučaju Borhovog pravila uvjet $(\, a, us\,) = 1$, gdje je s prost, može svesti na: *s je prost broj koji ne dijeli a.*

3.1.3 Wiethausovo pravilo

Holger Wiethaus razmatrao je Borhovo pravilo za $b_1 = aS$ i $b_2 = aq$, gdje su $a, S, q \in \mathbb{N}$. Ovdje je S kvadratno slobodan, q je prost broj i $(\, a, S\,) = (\, a, q\,) = (\, S, q\,) = 1$. Jednakosti $\frac{p}{p-1} = \frac{b_1}{\sigma(b_1)} + \frac{b_2}{\sigma(b_2)}$ i $q_i = \frac{p^n(p-1)(b_1+b_2)}{\sigma(b_i)} - 1$, gdje je q_i cijeli broj, dovele su ga do sljedećeg pravila:

Wiethausovo pravilo. *Neka su $a, S \in \mathbb{N}$, gdje je S kvadratno slobodan, a i S su relativno prosti, te vrijedi*

$$\frac{a}{\sigma(a)} = \frac{\sigma(S)}{S + \sigma(S) - 1}.$$

Označimo izraz $\sigma(S)(S+\sigma(S)-1)$ *s* D_1D_2, *za* $D_1, D_2 \in \mathbb{N}$. *Ako su* $p := D_1+S+\sigma(S)$ *i* $q := D_2 + \sigma(S) - 1$ *različiti prosti brojevi takvi da su* $(\, p, aS \,) = (\, q, a \,) = 1$, *tada vrijedi sljedeće Thabitovo pravilo:*

Ako su za neki $n \in \mathbb{N}$ *brojevi* $q_1 := (\, p + q \,)p^n - 1$ *i* $q_2 := (\, p - S \,)p^n - 1$ *prosti brojevi, te vrijedi da je* $(\, q_1, aS \,) = (\, q_2, aq \,) = 1$, *onda je* $(\, aSp^nq_1, aqp^nq_2 \,)$ *par pijateljskih brojeva.*

Pomoću ovog pravila Wiethaus je otkrio 10 000 novih prijateljskih parova uključujući i prvi par prijateljskih brojeva sa više od 1 000 znamenki koji je otkrio 1988. godine. Garcia je deset godina kasnije koristeći Wiethausovo pravilo otkrio prijateljski par sa 5 577 znamenki.

3.2 Prijateljski brojevi posebnog oblika

Većina današnjih poznatih parova prijateljskih brojeva pronađena je metodama koje imaju korijene u Eulerovim istraživanjima i otkrićima. Možemo reći da je Euler bio prvi matematičar koji je sustavno proučavao prijateljske brojeve. On je tragao za prijateljskim brojevima oblika $(\, aM, aN \,)$, gdje je a zajednički faktor, a M i N su nepoznati brojevi takvi da su a i $M \cdot N$ relativno prosti. Uzmemo li da je $a = 2^n$ za $n \in \mathbb{N}$, $M = pq$ i $N = r$, gdje su p, q, r različiti neparni prosti brojevi, dobivamo ranije spomenuto Thabitovo i Eulerovo pravilo.

Zamijenimo li u definiciji 4. $(\, m, n \,)$ s $(\, aM, aN \,)$ dobivamo sljedeće jednažbe:

$$\sigma(a)\sigma(M) = \sigma(a)\sigma(N) = a(\, M + N \,),$$

iz kojih slijedi

$$\sigma(M) = \sigma(N).$$

Euler je razmatrao različite kombinacije parametara M i N. Odabirom da je $a = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$, $M = pq$, a $N = r$ otkrio je prve prijateljske brojeve koji su neparni:

$$\begin{aligned} 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 17 &= 69\,615 \\ 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107 &= 87\,633. \end{aligned}$$

Također je proučavao i drugačiji pristup. Pretpostavio je da su M i N unaprijed dani brojevi koji zadovoljavaju $\sigma(M) = \sigma(N)$, dok je a, takav da je $\frac{\sigma(a)}{a} = \frac{M+N}{\sigma(M)}$, potrebno pronaći. Ako je $(\, a, M\,) = (\, a, N\,) = 1$, onda je $(\, aM, aN\,)$ prijateljski par zato što

$$\sigma(\, aM\,) = \sigma(a)\sigma(M) = a(\, M + N\,) = aM + aN$$

i

$$\sigma(\, aN\,) = \sigma(a)\sigma(N) = \sigma(a)\sigma(M) = \sigma(aM).$$

Matematičar E. J. Lee smatrao je da su prijateljski brojevi oblika $(\, m, n\,) = (\, Apq, Br\,)$, gdje su p, q i r prosti brojevi i $(\, A, pq\,) = (\, B, r\,) = 1$. Tada se prema definiciji prijateljskih brojeva dobiva jednadžba oblika

$$(\, c_1p - c_2\,)(\, c_1q - c_2\,) = c_3$$

gdje su p i q nepoznanice, a c_1, c_2, c_3 i r su oblika

$$\begin{aligned} c_1 &= A\sigma(B) - c_2, \\ c_2 &= \sigma(A)(\, \sigma(B) - B\,), \\ c_3 &= \sigma(B)(\, Bc_1 + Ac_2\,), \\ r &= \frac{\sigma(A)(\, p+1\,)(\, q+1\,)}{\sigma(B)} - 1. \end{aligned}$$

Zapišemo li desnu stranu jednažbe $(\, c_1p - c_2\,)(\, c_1q - c_2\,) = c_3$ kao produkt dvaju prirodnih brojeva, na sve moguće načine, i izjednačimo s lijevom stranom, pronaći ćemo sva moguća rješenja. Vrlo povoljna situacija nastaje kada je c_1 neki mali pozitivan broj, npr. $c_1 = 1$. Pomoću ove metode pronađeni su mnogi prijateljski brojevi.

Herman te Riele primijetio je da ako nam je poznat prijateljski par oblika $(\, b_1r_1, b_2r_2\,)$, gdje su r_1, r_2 prosti brojevi, a $(\, b_1, r_1\,) = (\, b_2, r_2\,) = 1$, tada odabirom $A = b_1$, $B = b_2$ i dijeljenjem zajedničkih faktora od c_1, c_2 i c_3 iz $(\, c_1p - c_2\,)(\, c_1q - c_2\,) = c_3$, koeficijent p može postati 1 ili neki mali cijeli broj veći od 1.

U sljedećem primjeru, pokazat ćemo kako iz poznatog prijateljskog para pomoću jednadžbe $(\, c_1p - c_2\,)(\, c_1q - c_2\,) = c_3$ doći do novog para prijateljskih brojeva.

Primjer 6. *Neka je par prijateljskih brojeva* $(2^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 281,\ 2^3 \cdot 53 \cdot 1879)$. *Pomoću danog para, izračunajmo novi prijateljski par.*

Uzmimo da je $A = 2^3 \cdot 53$, a $B = 2^3 \cdot 17 \cdot 19$. Tada su $c_1 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5$, $c_2 = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 11$ i $c_3 = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 409$. Uvrstimo li dobivene veličine u $(c_1 p - c_2)(c_1 q - c_2) = c_3$ dobivamo: $(2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot p - 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 11)(2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot q - 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 11) = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 409$. Kada sredimo dani izraz slijedi da je

$$(p - 264)(q - 264) = 5^2 \cdot 7 \cdot 409.$$

Zapišemo li desnu stranu u obliku $175 \cdot 409$, dobivamo da je $p = 439$, a $q = 673$. Uvrstimo li dobivene p i q u $r = \frac{\sigma(A)(p+1)(q+1)}{\sigma(B)} - 1$ slijedi da je $r = 44\,483$. Dobiveni prosti brojevi p, q i r daju novi prijateljski par

$$(2^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 44\,483,\ 2^3 \cdot 53 \cdot 439 \cdot 673).$$

3.2.1 te Rieleovo pravilo

Za ranije navedena Thabitova pravila možemo reći da su beskonačan skup tvrdnji nad prijateljskim parovima koji ovise o parametru $n \in \mathbb{N}$. Te Rielovo pravilo razlikuje se od Thabitovih jer ne ovisi o takvom parametru, a ono glasi:

te Rielovo pravilo. *Neka je* (au, ap) *prijateljski par gdje je* p *prost broj koji ne dijeli* a. *Ako postoji par različitih prostih brojeva* r *i* s *takvih da je* $(a, rs) = 1$, *koji zadovoljavaju jednakost*

$$(r - p)(s - p) = (p + 1)(p + u),$$

te ako postoji treći prost broj $q = r + s + u$ *takav da je* $(au, q) = 1$ *onda je* (auq, ars) *prijateljski par.*

Primijenimo pravilo na konkretan primjer.
Neka je $(3^2 \cdot 5^3 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 59,\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 18\,719)$ prijateljski par. Imamo da je $a = 3^2 \cdot 5 \cdot 13 = 14\,625$, $u = 5^2 \cdot 11 \cdot 59 = 16\,225$ i $p = 18\,719$. Primijenimo li dobivene veličine na te Rielovo pravilo dobivamo sljedeći izraz:

$$(p + 1)(p + u) = 2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13^2.$$

Zapišemo li desnu stranu jednadžbe kao $2688 \cdot 243\,360$ dobivamo tri prosta broja $r = 18\,719 + 2688 = 21\,407$, $s = 18\,719 + 243\,360 = 262\,079$ i $q = 21\,407 + 26\,2079 + 16\,225 = 299\,711$. Slijedi da je $(\,auq,\, ars\,) = (\,14\,625 \cdot 16\,225 \cdot 299\,711,\; 14\,625 \cdot 21\,407 \cdot 262\,079\,)$ prijateljski par.

U slučaju da su a i u relativno prosti, desna strana jednadžbe $(\,r - p\,)(\,s - p\,) = (\,p + 1\,)(\,p + u\,)$ može se zapisati u obliku

$$(\,p + 1\,)(\,p + u\,) = (\sigma(u))^2 \frac{\sigma(a)}{a}$$

i možemo očekivati da što u ima više prostih faktora, imat će ih i ovaj izraz.

Borho i Hoffmann shvatili su da uvjet u te Rielovom pravilu da je $(\,au,\, ap\,)$ prijateljski par može bit oslabljen. Zamjenom pretpostavke u te Rielovom pravilu da je $(\,au,\, ap\,)$ prijateljski par sa prepostavkom da je $(\,au,\, a\,)$ mentor, dobivamo općenitije pravilo, odnosno Borhovo pravilo s mentorom. Prije iskazivanja tog pravila, najprije ćemo definirati kada je uređeni par $(\,a_1, a_2\,)$ mentor.

Definicija 6. *Par pozitivnih cijelih brojeva* $(\,a_1, a_2\,)$ *zove se mentor ako jednadžbe*

$$a_1 + a_2 x = \sigma(a_1) = \sigma(a_2)(\,x + 1\,)$$

imaju pozitivno cjelobrojno rješenje x.

Borhovo pravilo s mentorima. *Neka ja* $(\,au,\, a\,)$ *mentor sa cjelobrojnim rješenjem* x. *Ako postoji par različitih prostih brojeva* r *i* s, *takvih da je* $(\,a,\, rs\,) = 1$, *koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$(\,r - x\,)(\,s - x\,) = (\,x + 1\,)(\,x + u\,),$$

te ako postoji treći prosti broj $q = r + s + u$ *takav da je* $(\,au,\, q\,) = 1$ *onda je* $(\,auq,\, ars\,)$ *prijateljski par.*

Iz definicije 6. jasno je da se svaka metoda pomoću koje možemo pronaći prijateljske parove oblika $(\,i, 1\,)$, $i \geq 1$, može koristiti za pronalazak mentora. Zašto to vrijedi? Ako je u jednažbi $a_1 + a_2 x = \sigma(a_1) = \sigma(a_2)(\,x + 1\,)$ x prirodan broj koji ne dijeli a, onda je par brojeva $(\,a_1,\, a_2 x\,)$ prijateljski par.

Na temelju Borohovog pravila s mentorima Garcia uspjeva pronaći više od milijun novih prijateljskih parova. Većina prijateljskih parova koji su bili poznati do 2004. godine pronađena je pomoću te Rielovog i Borhovog pravila s mentorima.

3.3 Poznati prijateljski brojevi

Do 18. stoljeća bila su otkrivena samo tri para prijateljskih brojeva. Otkriće prvog para, ujedno i najmanjeg, pripisuje se Pitagori, dok su drugi i treći par otkriveni zahvaljujući Fermatu i Descartesu. U 18. stoljeću Leonhard Euler sastavio je popis 64 prijateljska para. Kasnije je otkriveno da dva od 64 para nisu parovi prijateljskih brojeva. Francuski matematičar Adrien - Marie Legendre je 1830. godine pronašao još jedan prijateljski par, (8 520 191, 2 172 649 216).

Poseban doprinos u otkriću prijateljskih brojeva dao je 16-godišnji talijanski učenik Niccoló Paganini. On je 1866. godine zapanjio matematičare diljem svijeta jer je rekao da su 1184 i 1210 prijateljski brojevi. To je bio drugi najmanji par prijateljskih brojeva, kojeg je Euler u svom istraživanju očito previdio. Nažalost, Paganini nije dao nikakvu naznaku o tome kako je pronašao te brojeve, pretpostavlja se da ih je otkrio metodom pokušaja i pogrešaka.

Prvih deset prijateljskih parova poredanih po veličini su:

(220, 284), (1184, 1210), (2620, 2924), (5020, 5564), (6232, 6368),

(10 744, 10 856), (12 285, 14 595), (17 296, 18 416), (63 020, 76 084)

i (66 928, 66 992).

Koristeći Eulerovu metodu P. Seelhoff je 1844. godine otkrio dva nova para prijateljskih brojeva, (7 677 248, 7 684 672) i (406 581 029 127, 647 373 259 143). L. E. Dickson je 1911. godine također otkrio dva nova prijateljska para, dok je E. B. Escott 1946. godine na popis dodao 233 prijateljska para. Tada je bilo poznato ukupno 390 prijateljskih parova. Razvojem tehnologije i pojavom računala taj broj porastao je na više od 1000 parova.

Matematičar Mariano Garcia je 1997. godine otkrio je prijateljski par čiji članovi imaju 4829 znamenki. Do 2007. godine bilo je poznato skoro 12 000 000 prijateljskih parova. Posljednja istraživanja pokazuju da je trenutno poznato više od 1 223 393 596 prijateljskih parova.

Bez obzira na niz provedenih istraživanja, i dalje nije poznato postoji li beskonačan broj prijateljskih parova. Dio problema leži u tome što za razliku od jedinstvene formule za generiranje savršenih (parnih) brojeva, ne postoji poznato pravilo za pronalaženje svih parova prijateljskih brojeva.

Literatura

[1] D. Burton, *The History of Mathematics: An Introduction, Sixth Edition*, The McGraw-Hill Companies, New York, 2007.

[2] M. Garcia, *Amicable Pairs, a Survey*, Fields Institute Communications, 41 (2004), 183-191.

[3] M. Gusić, *Povijest - Hipas glavom platiti mora*, Matka, 24 (2015), 182-183.

[4] V. J. Katz, *A History of Mathematics: An Introduction, 3rd Edition*, Addison-Wesley, Boston, Massachusetts, 2009.

[5] T. Koshy, *Elementary Number Theory with Applications, Second Edition*, Academic Press, Waltham, Massachusetts, 2007.

[6] A. Maslać, *Mersenneovi i savršeni brojevi*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Diplomski rad, Osijek, 2012.

[7] M. Swain, *Fascinating Amicable Numbers*, Academia, 2013, *https* : *//www.academia.edu*/16530867/*FascinatingAmicableNumbers*

[8] J. J. Tattersall, *Elementary Number Theory in Nine Chapters, Second Edition*, Cambridge University Press, New York, 2005.

[9] G. Woltman, *Great Internet Mersenne Prime Search*, *https* : *//www.mersenne.org/primes/*

Sažetak

U 16. stoljeću vrlo je malo ljudi bilo zainteresirano za matematiku i znanost općenito. Tek u 17. stoljeću dolazi do pravog procvata znanstvenih udruženja neovisnih o sveučilištima. Prvi slučajevi redovitog okupljanja matematičara zabilježeni su zahvaljujući Marinu Mersenneu. U ovom radu najprije ćemo vas kratko upoznati s radom Marina Mersennea, njegovim doprinosom u teoriji brojeva, te Mersenneovim brojevima. Zatim ćemo vas upoznati s brojevima posebnih oblika i svojstava, odnosno savršenim i prijateljskim brojevima. Budući da su Pitagorejci brojevima pripisivali određene društvene kvalitete, brojeve za koje vrijedi da su jednaki sumi svojih pravih djelitelja nazvali su savršenim brojevima. Izuzetan doprinos u otkrivanju savršenih brojeva posebnih oblika dali su Euklid, Pierre de Fermat i Leonhard Euler. Do danas je otkriven 51 savršen broj i svi su parni. Znanstvenici smatraju da neparni savršeni brojevi ne postoje, međutim to još nitko nije uspio dokazati. Drugi tip brojeva kojeg su proučavali stari Grci su prijateljski brojevi. Prvo pravilo za pronalaženje prijateljskih brojeva posebnog oblika dao je Thabit ibn Qurrau. Na temelju njegovog pravila kasnije su nastala mnoga druga pravila među kojima su najpoznatija Eulerovo pravilo, Borhovo pravilo, Wieathausovo pravilo i te Rielovo pravilo. Iako je danas poznato više od 1 223 393 596 prijateljskih parova, znanstvenici još uvijek nisu dokazali postoji li beskonačno mnogo prijateljskih brojeva.

Ključne riječi: Mersenneovi brojevi, (parni) savršeni brojevi, prijateljski brojevi

Summary

In the 16th century, very few people were interested in math and science in general. Only in the 17th century there was a real flourishing of scientific associations of universities independent. The first cases of regular gathering of mathematicians were recorded thanks to Marin Mersenne. In this paper, we will briefly introduce you to the work of Marin Mersenne, his contribution to the theory of numbers, and Mersenne's numbers. Then we'll introduce you to numbers of special shapes and features, perfect and amicable numbers. Since the Pythagoreans have attributed certain social qualities to numbers, the numbers that are worthy of being equal to the sum of their true divisors are called perfect numbers. An outstanding contribution to the discovery of perfect numbers of special forms was given by Euclid, Pierre de Fermat and Leonhard Euler. Until now, 51 perfect numbers have been discovered and all are even. Scientists believe that odd perfect numbers do not exist, but nobody has proven it. The other type of numbers studied by the ancient Greeks are amicable numbers. The first rule to find amicable numbers of special form was given by Thabit ibn Qurra. On the basis of his rule, many other rules have been created, among which are the most famous Euler's rule, Borho's Rule, Wieathaus's Rule and te Riele's Rule. Although more than 1 223 393 596 amicable pairs are known today, scientists have not yet proven that there are infinitely many amicable numbers.

Keywords: Mersenne numbers, (even) perfect numbers, amicable numbers

Životopis

Rođena sam 13. kolovoza 1991. godine u Osijeku u Hrvatskoj. U razdoblju od 1998. do 2006. sam pohađala osnovnu školu „Vladimir Nazor". Srednju školu „A. G. Matoša" u Đakovu upisujem 2006. godine, smjer opća gimnazija. Nakon završene srednje škole i položene državne mature, 2010. upisujem Preddiplomski nastavnički studij matematike na Prirodoslovno matematičkom fakultetu, Sveučilišta u Zagrebu. 2015. godine se prebacujem na Integrirani nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.