Inverzija u ravnini i primjene

Bockovac, Marinela

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Marinela Bockovac

Inverzija u ravnini i primjene

Diplomski rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Marinela Bockovac

Inverzija u ravnini i primjene

Diplomski rad

Voditelj: prof. dr. sc. Zdenka Kolar- Begović

Osijek, 2018.

Sadržaj

Uvod

Često se prilikom rješavanja geometrijskih zadataka koristimo nekom od transformacija ravnine. U ovom radu upoznat ćemo se s inverzijom, simetrijom s obzirom na kružnicu, preslikavanjem koje je po mnogim svojstvima analogno simetriji s obzirom na pravac.

Rad je podijeljen na tri poglavlja.

U prvom poglavlju rada uvedena je definicija inverzije, te razmatrana konstrukcija slike točke pri zadanoj inverziji.

U drugom poglavlju rada izvedena su i dokazana neka od značajnih svojstava inverzije. Konstruirat ćemo inverznu sliku pravca i kružnice, te razmatrati veličinu kutova i duljine dužina pri ovom preslikavanju.

U trećem poglavlju rada, ujedno i najvažnijem, razmotrit ćemo primjenu inverzije. Inverzija je vrlo korisna pri rješavanju geometrijskih problema. Korištenjem inverzije se složeniji problem svede na jednostavniji koji je onda moguće riješiti. U radu će biti iskazani i dokazani neki značajni teoremi geometrije trokuta kao što su Feuerbachov teorem, Ptolomejev teorem, Eulerov teorem, te će biti razmatran Apolonijev problem. Dokazi navedenih tvrdnji bit će provedeni primjenom inverzije.

Poglavlje 1

Inverzija

1.1. Definicija

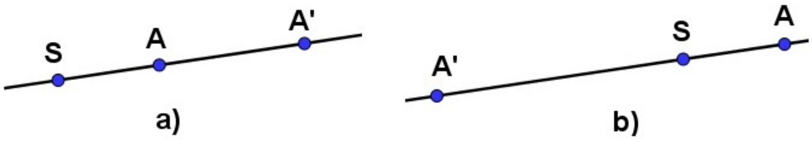
Većina transformacija koje smo upoznali preslikavaju pravce u pravce i kružnice u kružnice. U nekim zadacima posebno u svezi s kružnicama od velike nam je pomoći transformacija ravnine koja skup pravaca i kružnica preslikava u taj isti skup, ali pri tome može pravac preslikati u kružnicu i obrnuto. Takvu transformaciju ravnine nazivat ćemo inverzijom.

Definicija 1.1.1. *Preslikavanje ravnine na ravninu koje točki A pridružuje točku $\sigma(A) = A'$ tako da vrijedi*

1. *Točke A i A' su kolinearne s čvrstom točkom S ravnine i $A, A' \neq S$;*
2. $\mid SA \mid \cdot \mid SA' \mid = c$ $(c = const., c > 0)$;

*nazivamo **inverzijom**, točku S **centrom inverzije**, a c **konstantom inverzije** σ.*

Tako definiranu inverziju s centrom u točku S i konstantom c označavat ćemo s $\sigma(S, c)$. Moguće je definirati i negativnu inverziju, tj. kada je konstanta inverzije negativan broj(*Slika 1.b*). U radu ćemo proučavati pozitivnu inverziju.



Slika 1. *a) pozitivna inverzija, b) negativna inverzija*

Izravno iz definicije možemo uočiti neka od osnovnih svojstava inverzije, navedimo ih:

i) Inverzija je **involutorna** transformacija ravnine. Ako je A' inverzna slika od A pri zadanoj inverziji, tada je i A inverzna slika od A' pri istoj inverziji.

ii) Iz definicije možemo uočiti kako je svakoj točki ravnine na bijektivan način inverzijom pridružena jedna točka ravnine (osim centra inverzije S). Prema tome inverzija je **bijektivna** transformacija skupa točaka ravnine, s izuzetkom centra inverzije S, na sebe.

iii) Svaka točka na kružnici sa središtem u centru inverzije S i polumjera $r_s = \sqrt{c}$ preslika se tom inverzijom sama na sebe, odnosno, svaka je točka te kružnice fiksna. I to su jedine njezine fiksne točke. Uistinu, ako je $A = A'$ tada je $|SA'| = |SA|$, te prema definiciji vrijedi $|SA|^2 = c$, odnosno $|SA| = r_s$. Dakle, inverzija je jednoznačno određena kružnicom $k(S, r_s)$ koju nazivamo **kružnicom inverzije**.

Također, svaki pravac kroz centar inverzije S preslika se sam na sebe, s izuzetkom točke S. No točke tog pravca nisu fiksne točke (osim onih koje se nalaze na kružnici inverzije).
Kao što smo već spomenuli inverzija nije definirana na čitavoj ravnini, jer nije definirana u točki S, tj. ne postoji točka S' za koju vrijedi

$$|SS| \cdot |SS'| = r_s^2 > 0, \quad \text{jer} \quad \text{je} \quad |SS| = 0.$$

Dodamo li ravnini jednu beskonačno daleku točku i točki S pridružimo tu točku, inverzija će biti definirana u svakoj točki te ravnine. Tako nadopunjenu ravninu zovemo **inverzna ravnina**.

iv) Ako se proizvoljna točka A nalazi unutar kružnice inverzije njena slika A' nalazit će se izvan kružnice inverzije. Naime, ako je $|SA| < \sqrt{c}$, tada prema $|SA| \cdot |SA'| = c$ zaključujemo da je $|SA'| > \sqrt{c}$. Dakle, inverzijom se svaka točka unutar kružnice inverzije preslika u točku izvan te kružnice i obrnuto.

1.2. Konstrukcija inverzne slike točke

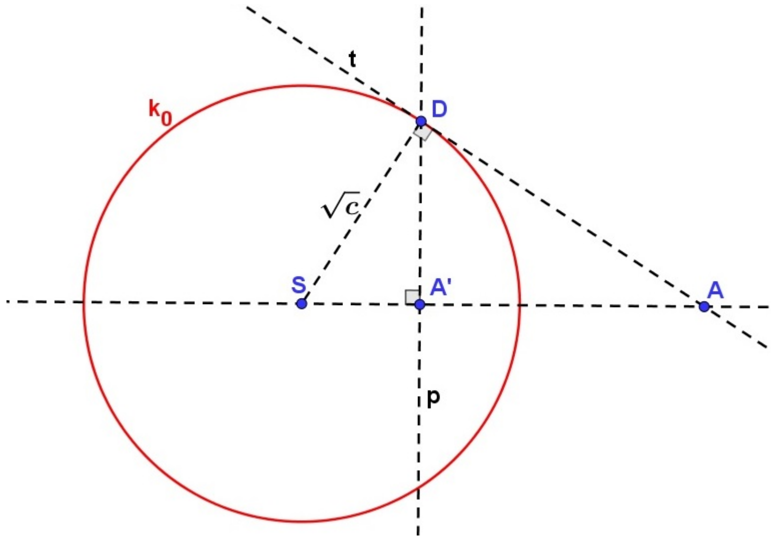
Pitanje koje si iduće možemo postaviti je to kako konstruirati inverznu sliku neke točke. Neka je dana kružnica k_0 sa središtem u točki S, te neka je zadana točka A koje je različita od S. Točka A u odnosu na kružnicu k_0 može biti unutar, izvan i nalaziti se na kružnici. Prema definiciji inverzije slika točke A je točka A' koja se nalazi na pravcu koji prolazi kroz točke S i A i zadovoljava jednadžbu

$$|SA| \cdot |SA'| = c.$$

1° *Točka A nalazi se na kružnici inverzije $k_0(S, r_s)$.*

Kao što smo se već uvjerili inverzna slika točke A je ona sama.

2° *Točka A nalazi se izvan kružnice inverzije $k_0(S, r_s)$.*



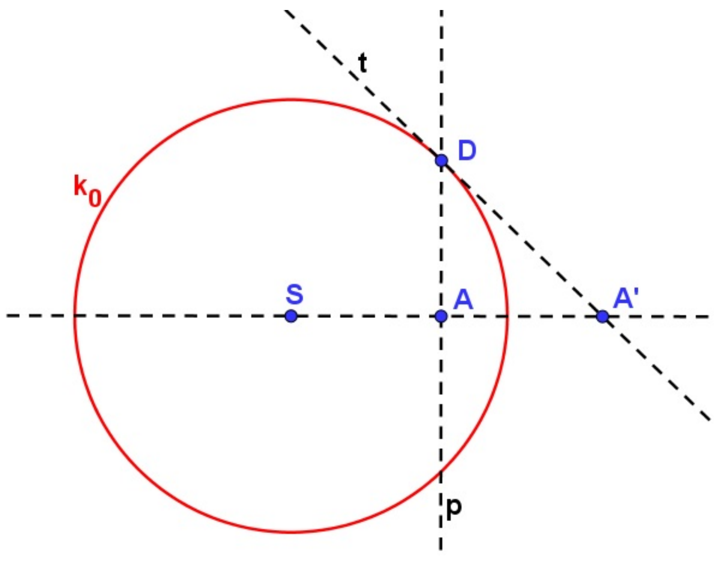
SLIKA 2. *Konstrukcija inverzne slike točke koja se nalazi izvan kružnice inverzije*

Trebamo pronaći inverznu sliku A' točke A, tj. točku $A' = \sigma(A)$. Konstruirajmo tangentu t iz točke A na kružnicu inverzije. Neka je točka D diralište tangente t i kružnice inverzije. Povucimo okomicu p iz točke D na pravac SA. Sjecište okomice p i pravca SA je tražena točka A' (*Slika 2*). Dokažimo da dobivena točka zadovoljava tražene uvjete.

Kako je $\measuredangle SA'D = \measuredangle ADS = 90°$ i $\measuredangle DSA' = \measuredangle DSA$ slijedi da se trokuti $SA'D$ i SAD podudaraju u sva tri (odgovarajuća) kuta. Prema poučku $K - K - K$ o sličnosti trokuta, zaključujemo da su trokuti $SA'D$ i SAD slični, te prema definiciji sličnosti slijedi:

$$\frac{|SA'|}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{|SA|} \Longrightarrow |SA'| \cdot |SA| = c.$$

Zaista, točke A i A' pridružene su točke inverzije koja je zadana točkom S i kružnicom inverzije $k_0(S, r_s)$. Ovim smo dokazali valjanost. □



SLIKA 3. *Konstrukcija inverzne slike točke koja se nalazi unutar kružnice inverzije*

3° *Točka A nalazi se unutar kružnice inverzije $k_0(S, r_s)$.*

Kako je inverzija involutorno preslikavanje ravnine, inverznu sliku A' točke A konstruirat ćemo obrnutim redoslijedom.

Konstruirajmo okomicu p u točki A na pravac SA. Označimo s D jedno od dirališta okomice p i kružnice $k_0(S, r_s)$. Kroz točku D konstruirajmo tangentu t na kružnicu. Presjek tangente t i pravca SA je tražena točka A'. Dokaz da je A' inverzna slika točke A pri danoj inverziji isti je kao u prethodnom slučaju pa ćemo dokaz izostaviti.

Poglavlje 2

Svojstva inverzije

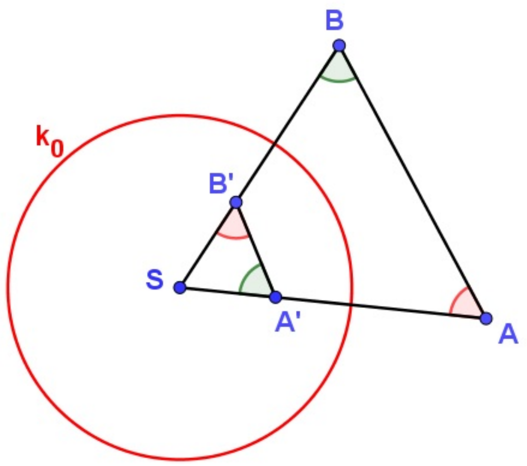
U ovom dijelu diplomskog rada proučavat ćemo sliku pravca i kružnice pri inverziji. Konstrukcijom inverznih slika pravca i kružnice, promatrat ćemo svojstva inverzije.

2.1. Inverzna slika pravca

Da odgovorimo na pitanje što je slika pravca pri inverziji najprije trebamo upoznati jedno svojstvo inverzije koje će nam biti od velike pomoći.

Teorem 2.1.1. *Neka su A, A' i B, B' parovi pridruženih točaka inverzije σ s kružnicom inverzije $k_0(S, r_s)$. Tada vrijedi:*

$$\measuredangle SAB = \measuredangle SB'A' \quad i \quad \measuredangle SBA = \measuredangle SA'B'.$$



SLIKA 4.

Dokaz. Kako su A i A', B i B' pridružene točke pri inverziji $\sigma(S, c)$ (*Slika 4*), vrijedi

$$|SA| \cdot |SA'| = c \quad \text{i} \quad |SB| \cdot |SB'| = c.$$

Iz toga nam slijedi sljedeća jednakost

$$|SA| : |SB| = |SB'| : |SA'| \quad \Longrightarrow \quad |SA| : |SB'| = |SB| : |SA'|,$$

iz koje zaključujemo da su stranice trokuta SAB i $SB'A'$ koje zatvaraju kut pri vrhu S proporcionalne. Kako je $\measuredangle ASB = \measuredangle B'SA'$ prema poučku $S - K - S$ o sličnosti trokuta slijedi da su trokuti SAB i $SB'A'$ slični. Iz te sličnosti slijedi jednakost navedenih kutova.□

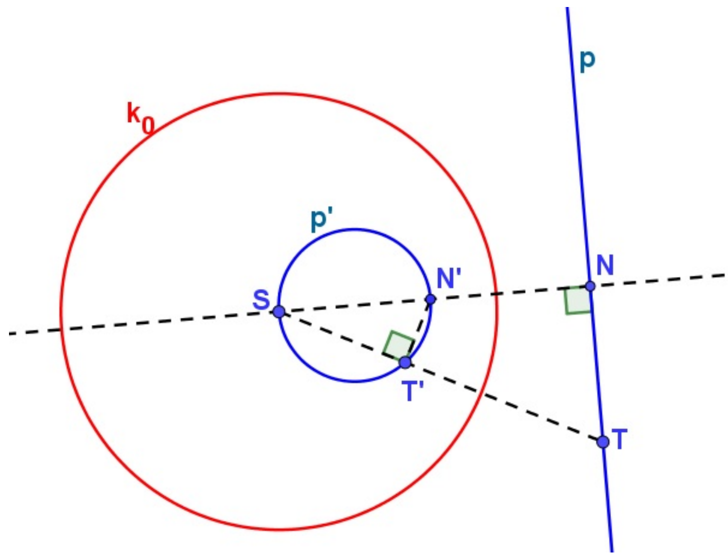
Napomena 2.1.1. *Iz prethodnog razmatranja slijedi da je svaka inverzija određena centrom inverzije i parom pridruženih točaka.*

S obzirom na položaj pravca i kružnice inverzije, razlikovat ćemo dva slučaja: pravac prolazi centrom S inverzije i pravac ne prolazi centrom S inverzije.

Teorem 2.1.2. *Pravac p koji prolazi centrom inverzije σ, preslikava se u samog sebe, odnosno $\sigma(p \setminus \{S\}) = p \setminus \{S\}$.*

Dokaz. Slijedi iz *Definicije 1.1.1.*, preciznije svojstva 1 koji kaže da su točke S, T i T' kolinearne i svojstva da je inverzija σ bijekcija. □

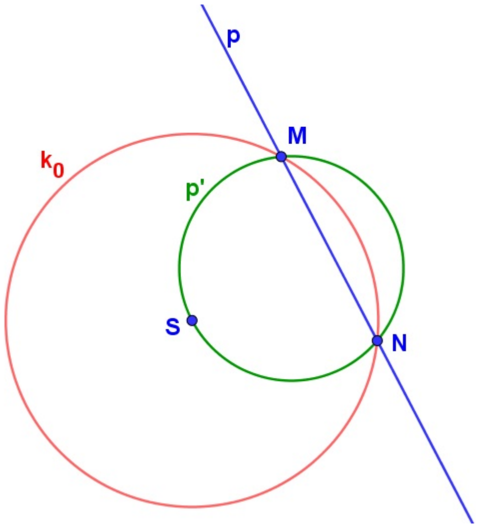
Teorem 2.1.3. *Pravcu p koji ne prolazi centrom S inverzije σ pridružena je kružnica koja prolazi centrom S te inverzije.*



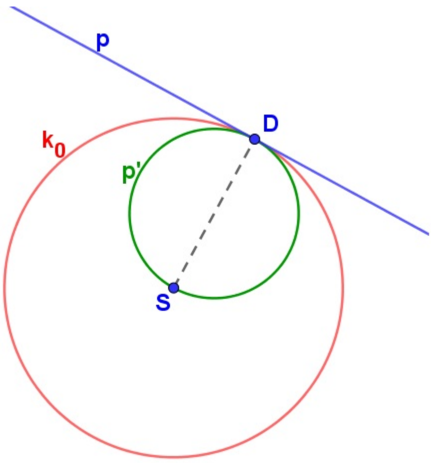
SLIKA 5. *Konstrukcija inverzne slike pravca koji ne prolazi centrom inverzije*

Dokaz. Neka je S centar inverzije, k_0 kružnica inverzije i p proizvoljan pravac koji ne prolazi centrom (*Slika 5*). Označimo s N nožište okomice spuštene iz točke S na pravac p, te neka je N' inverzna slika točke N pri danoj inverziji. Neka je $T \epsilon p$ bilo koja točka pravca p različita od N, a T' njena inverzna slika. Prema *Teoremu 2.1.1.* slijedi da je $\measuredangle ST'N' = \measuredangle SNT = 90°$. Iz toga, prema obratu Talesovog poučka, slijedi da se T' nalazi na kružnici p' kojoj je $\overline{SN'}$ promjer. Dakle, svaka točka pravca p preslikava se u točku kružnice promjera $\overline{SN'}$ koja prolazi centrom inverzije, odnosno kružnice p'. Budući da je σ bijekcija, tvrdnja neposredno slijedi. □

Primjedba 2.1.1. *Ako pravac p siječe kružnicu inverzije u točkama M i N, tada je kružnica p' određena s nekolinearnim točkama S, M i N (Slika 6), a ako pravac p dira kružnicu inverzije u točki D onda je p' kružnica s promjerom $\overline{SD}$ (Slika 7).*



SLIKA 6. *Slika pravca koji siječe kružnicu inverzije u točkama M i N*

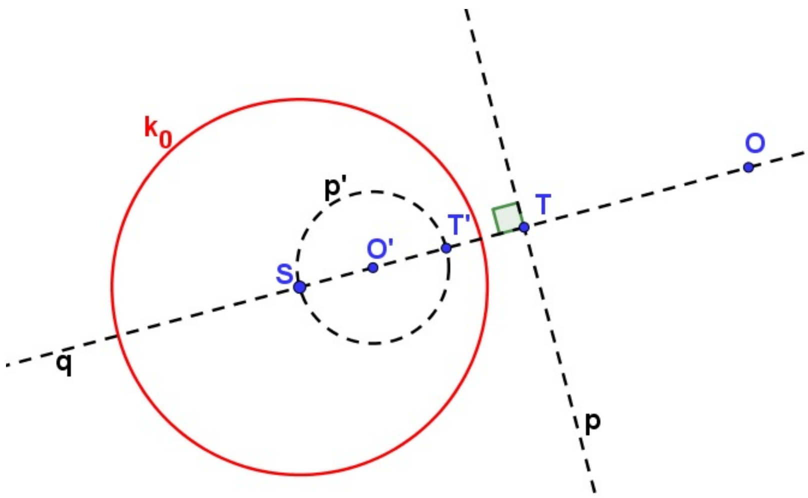


SLIKA 7. *Slika pravca koji dira kružnicu inverzije u točki D*

Lema 2.1.1. *Središte kružnice koja je inverzna slika pravca p je inverzna slika osnosimetrične slike središta inverzije S s obzirom na pravac p.*

Dokaz. Neka je zadana inverzija σ s centrom u točki S i radijusa $r_s = \sqrt{c}$. Neka je p proizvoljan pravac koji ne prolazi centrom S, te neka je q pravac okomit na pravac p koji prolazi centrom S. Presjek pravaca p i q označimo s T, a njegovu sliku pri inverziji σ s T'. Prema *Definiciji 1.1.1.* znamo da vrijedi

$$|ST| \cdot |ST'| = c. \tag{2.1}$$



SLIKA 8. *Lema 2.1.1.*

Zbog kolinearnosti točaka S, T i T' točka T' leži na pravcu q. Prema *Teoremu 2.1.3.* pravac p preslika se u kružnicu p' kojoj je polumjer $\overline{ST'}$. Označimo s O' središte kružnice p'. Vrijedi da je

$$|ST'| = 2 \cdot |SO'|. \tag{2.2}$$

Neka je O inverzna slika točke O'. Prema *Definiciji 1.1.1.* za te točke vrijedi

$$|SO| \cdot |SO'| = c. \tag{2.3}$$

Iz (2.1) i (2.3) slijedi

$$|ST| \cdot |ST'| = |SO| \cdot |SO'|. \tag{2.4}$$

Iz (2.2) i (2.4) slijedi

$$|ST| \cdot 2|SO'| = |SO| \cdot |SO'| \quad \Rightarrow \quad |SO| = 2|ST|. \tag{2.5}$$

Kako je pravac q okomit na pravac p te mu pripadaju točke S, O i T, te vrijedi (2.5) dolazimo do zaključka da je O osnosimetrična slika točke S s obzirom na pravac p. □

2.2. Inverzna slika kružnice

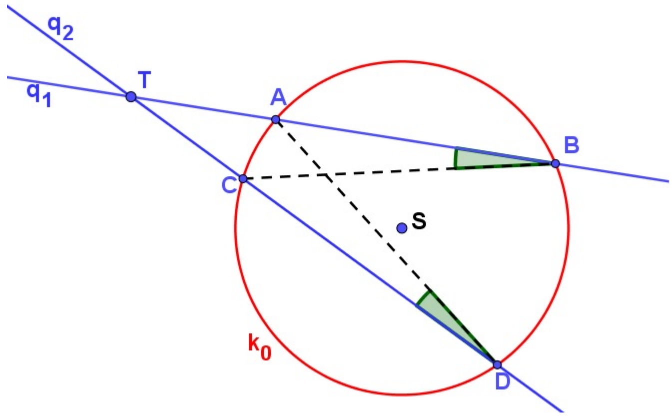
Kako je inverzija involutorno preslikavanje odmah možemo zaključiti u što će se preslikati kružnica koja prolazi centrom inverzije. Prije nego se u to uvjerimo upoznat ćemo se s pojmom potencije točke s obzirom na kružnicu, koji će nam biti od velike važnosti u daljnjem tekstu.

Definicija 2.2.2. *Neka je dana kružnica $k_0(S,r)$, T bilo koja točka ravnine i bilo koji pravac q koji prolazi kroz T i siječe kružnicu $k_0(S,r)$ u točkama A i B. Produkt*

$$p = |TA| \cdot |TB|$$

ne ovisi o izboru pravca q kroz T i nazivamo ga ***potencijom*** *p* ***točke*** *T* ***s obzirom na kružnicu*** *k_0.*

Pokažimo da je definicija dobra, odnosno potencija točke T ne ovisi o izboru pravca q kroz T.



SLIKA 9. *Potencija točke T s obzirom na kružnicu k_0*

Neka se točka T nalazi izvan kružnice $k_0(S,r)$, povučemo dva pravca q_1 i q_2 kroz T koji sijeku kružnicu k_0 (*Slika 9*). Budući da su obodni kutovi nad istim lukom jednaki slijedi da je

$$\measuredangle CBT = \measuredangle TDA.$$

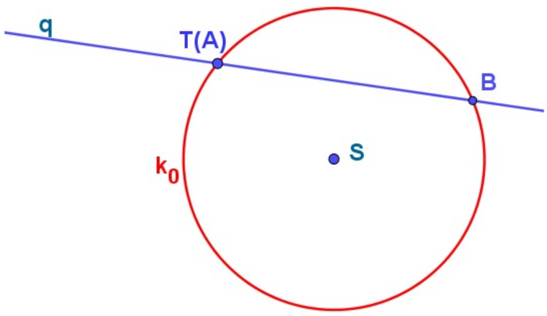
Prema poučku o sličnosti trokuta $K-K-K$ zaključujemo da su trokuti TDA i TBC slični, pa vrijedi

$$\frac{|TA|}{|TD|} = \frac{|TC|}{|TB|} \quad \Rightarrow \quad |TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|,$$

čime je tvrdnja dokazana. $\square$

Uočimo ako točka T leži na kružnici onda je njena potencija s obzirom na tu kružnicu jednaka 0. Zaista, tada je $T = A$ ili $T = B$. Ako je $T = A$ onda je $|TA| = 0$ (*Slika 10*), a ako je $T = B$ onda je $|TB| = 0$, pa je

$$|TA| \cdot |TB| = 0.$$

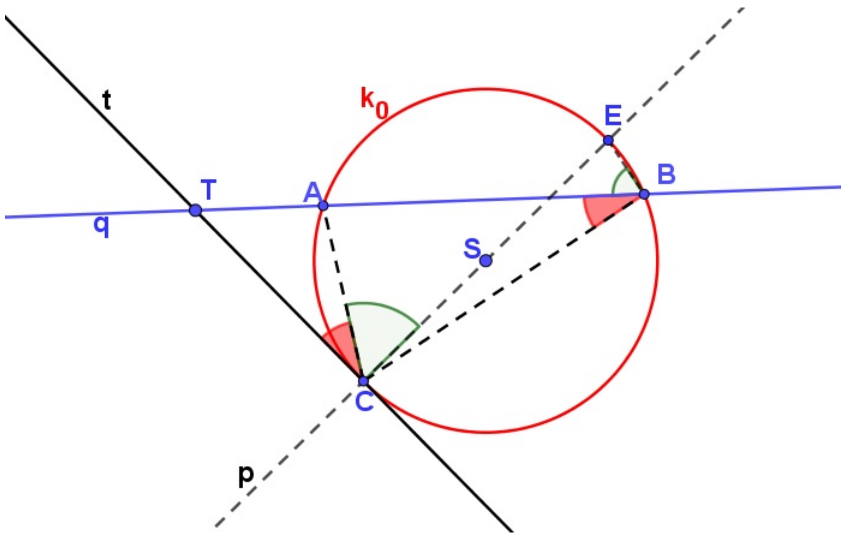


SLIKA 10. *Točka T leži na kružnici k_0*

Dokažimo još dvije tvrdnje vezane uz potenciju točke s obzirom na kružnicu.

Teorem 2.2.4. *Potencija točke T koja leži izvan kružnice k_0 s obzirom na tu kružnicu jednaka je kvadratu udaljenosti točke T i dirališta tangente iz te točke na kružnicu k_0.*

Dokaz. Neka točka T leži izvan kružnice k_0 i kroz T povučemo pravac q koji siječe kružnicu u točkama A i B, te neka je točka C diralište tangente t povučene iz točke T na kružnicu k_0 (*Slika 11*).



SLIKA 11. *Točka T leži izvan kružnice k_0*

Promotrimo trokute TCA i CBT. Uočavamo

$$\measuredangle ATC = \measuredangle BTC.$$

Konstruirajmo okomicu p na tangentu t koja prolazi središtem S kružnice k_0. Drugo sjecište okomice p i kružnice k_0 označimo s E. Uočavamo da je $\overline{CE}$ promjer kružnice k_0.

Tada je

$$\measuredangle TCA + \measuredangle ACE = \measuredangle TCE = 90^\circ \tag{2.6}$$

zbog okomitosti tangente t i pravca p.

Također vrijedi da je

$$\measuredangle CBT + \measuredangle ABE = \measuredangle CBE = 90^\circ \tag{2.7}$$

zbog kuta nad promjerom kružnice.

Kako su $\angle ACE$ i $\angle ABE$ obodni kutovi nad istim lukom vrijedi

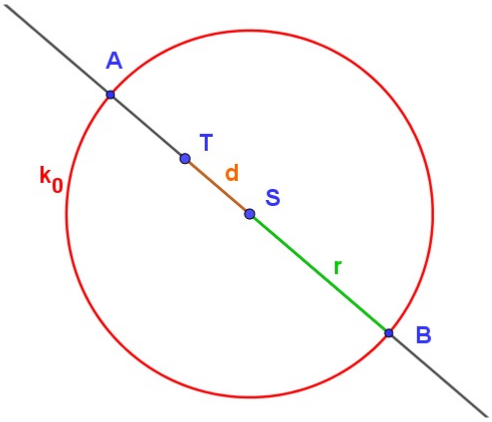
$$\measuredangle ACE = \measuredangle ABE. \tag{2.8}$$

Iz (2.6), (2.7) i (2.8) slijedi da su $\angle TCA$ i $\angle CBT$ jednaki. Prema poučku o sličnosti trokuta $K-K-K$ zaključujemo da su trokuti ATC i BTC slični, pa vrijedi

$$\frac{|TA|}{|TC|} = \frac{|TC|}{|TB|} \quad \Rightarrow \quad |TA| \cdot |TB| = |TC|^2,$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Teorem 2.2.5. *Potencija točke T koja leži unutar kružnice k_0 s obzirom na kružnicu k_0 jednaka je razlici kvadrata radijusa promatrane kružnice i kvadrata udaljenosti točke T do središta kružnice.*



Slika 12. *Točka T leži unutar kružnice k_0*

Dokaz. Označimo s r radijus promatrane kružnice i s d udaljenost točke T do središta kružnice (*Slika 12*). Neka je $\overline{AB}$ promjer kružnice k_0 koji prolazi točkom T. Vidimo da je potencija točke T obzirom na kružnicu jednaka

$$|AT| \cdot |TB| = (r - d) \cdot (r + d) = r^2 - d^2.$$

□

Sad možemo pokazati što će biti inverzna slika kružnice. Slično kao i kod pravaca promatrat ćemo dva slučaja:

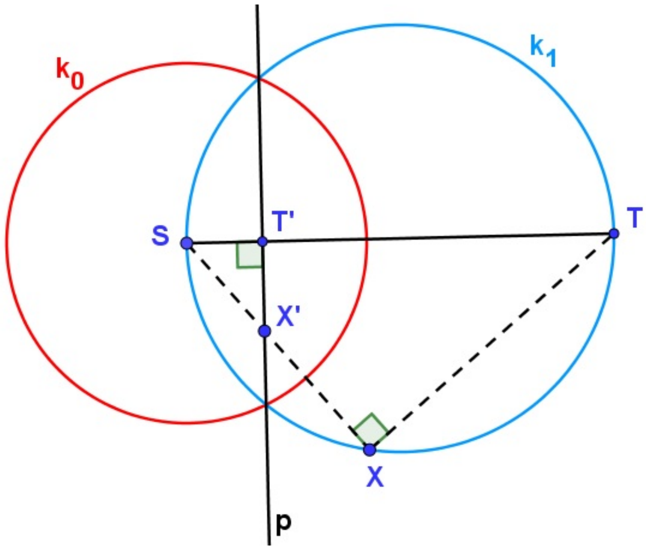
a) kružnica prolazi centrom inverzije;

b) kružnica ne prolazi centrom inverzije.

Teorem 2.2.6. *Ako kružnica k_1 prolazi centrom S inverzije σ, onda je slika kružnice k_1 pravac p koji ne prolazi centrom S.*

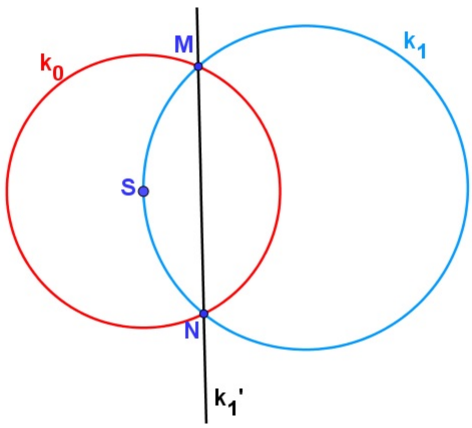
Dokaz. Ovo svojstvo direktno slijedi prema *Teoremu 2.1.3.* i činjenici da je inverzija involutorno preslikavanje, ali ipak provedimo dokaz.

Neka je S centar inverzije σ i k_1 kružnica koja prolazi kroz S i neka je $\overline{ST}$ promjer te kružnice (*Slika 13*). Uzmimo proizvoljnu točku X na kružnici k_1 i označimo s X' njezinu sliku. Nadalje, neka je T' slika točke T. Označimo s p pravac koji je okomit na ST i prolazi točkom T'. Tvrdimo da je slika kružnice k_1 pravac p. Prema Talesovom poučku vrijedi $\measuredangle SXT = 90°$, a prema *Teoremu 2.1.1.* slijedi da je $\measuredangle X'T'S = 90°$, tj. točka X' nalazi se na pravcu p. Kako to vrijedi za svaku točku kružnice k_1 i činjenice da je inverzija bijekcija, tvrdnje je dokazana. □



SLIKA 13. *Inverzna slika kružnice koja prolazi centrom S inverzije*

Primjedba 2.2.2. *Ako kružnica k_1 siječe kružnicu inverzije k_0 u točkama M i N i prolazi centrom S (Slika 14), tada je pravac MN slika kružnice.*



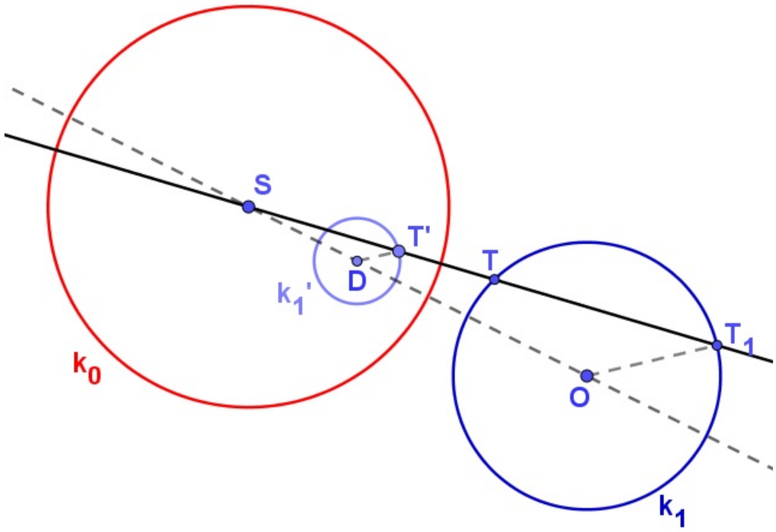
SLIKA 14. *Inverzna slika kružnice koja prolazi centrom S i siječe kružnicu inverzije u točkama M i N*

Teorem 2.2.7. *Ako kružnica k_1 ne prolazi centrom S inverzije σ, onda je slika kružnice k_1 kružnica k_1' koja ne prolazi centrom S.*

Dokaz. Neka je k_1 kružnica sa središtem u točki O koja ne prolazi kroz S. Neka je T proizvoljna točka na kružnici k_1. Označimo s T_1 drugo sjecište pravca ST i kružnice k_1 (*Slika 15*). Prema *Definiciji 2.2.2.* vrijedi produkt

$$|ST| \cdot |ST_1| = p. \tag{2.9}$$

Nadalje, homotetijom $\chi = \chi(S, \frac{c}{p})$ preslikajmo kružnicu k_1 i njezin radijus OT_1 u drugu kružnicu s paralelnim radijusom DT'. Pri čemu je c konstanta inverzije σ, a p potencija



SLIKA 15. *Inverzna slika kružnice koja ne prolazi centrom S inverzije*

centra S s obzirom na kružnicu k_1. Prema tome vrijedi

$$\frac{|ST'|}{|ST_1|} = \frac{|SD|}{|SO|} = \frac{c}{p}. \tag{2.10}$$

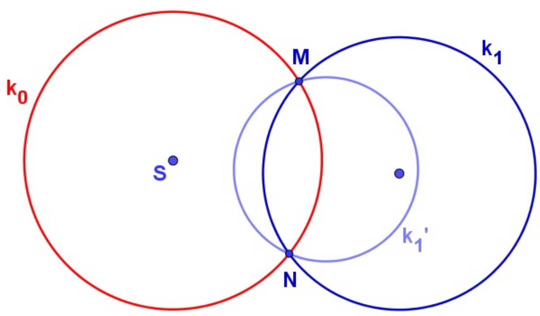
Iz (2.9) i (2.10) slijedi

$$|ST'| \cdot |ST| = c,$$

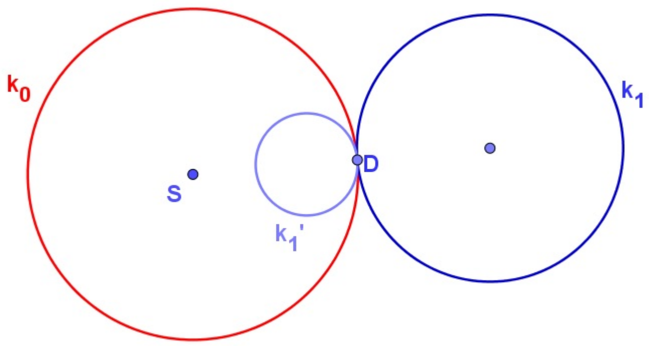
iz čega zaključujemo da je točka T' inverz od T i kružnica k_1' sa središtem u D inverzna danoj kružnici k_1 sa središtem u O. $\square$

Napomena 2.2.2. *Ovdje treba uočiti da središta O i D kružnica k_1 i k_1' nisu pridružene točke pri inverziji σ, ali jesu pridružene pri homotetiji χ.*

Primjedba 2.2.3. *Ako kružnica k_1 siječe kružnicu inverzije u točkama M i N i ne prolazi centrom S, tada tim točkama prolazi i slika kružnice k_1' (Slika 16), a ako se kružnica k_1 dodiruje s kružnicom inverzije u točki D onda se u toj točki dodiruje i s kružnicom k_1' (Slika 17).*



SLIKA 16.



SLIKA 17.

Prije nego izvedemo još jedno svojstvo inverzije upoznajmo se s pojmom okomitih kružnica.

Definicija 2.2.3. *Kažemo da se dvije kružnice sijeku okomito ako su njihove tangente u točkama presjeka međusobno okomite.*

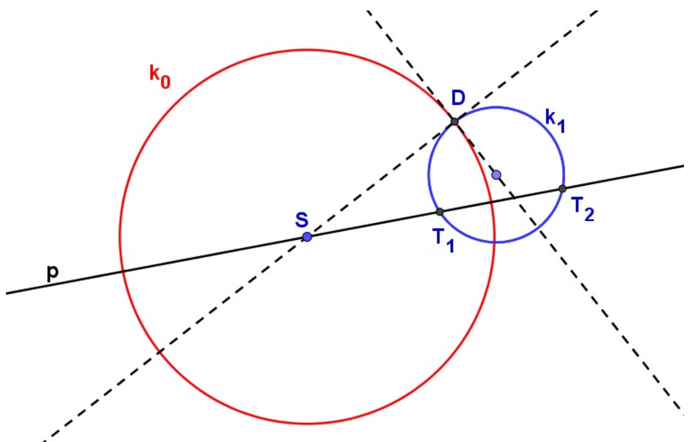
Pokazali smo da se kružnica k_1, koja ne prolazi centrom inverzije S, preslika u kružnicu koja također ne prolazi centrom S. Kružnica k_1 inverzijom se može preslikati sama u sebe i to u dva slučaja:

1° Kad je kružnica k_1 okomita na kružnicu inverzije k_0.

2° Kad je kružnica k_1 i kružnica inverzije k_0 jedna te ista kružnica, tj. $k_1 = k_0$.

Promotrimo prvi slučaj.

Teorem 2.2.8. *Kružnica k_1 koja kružnicu inverzije k_0 siječe okomito, preslika se tom inverzijom sama na sebe, odnosno $\sigma(k_1) = k_1$.*



SLIKA 18. *Inverzna slika kružnice koja je okomita na kružnicu inverzije*

Dokaz. Neka je k_0 kružnica inverzije i točka S njeno središte. Neka je k_1 kružnica koja kružnicu inverzije siječe okomito (*Slika 18*). Neka je D jedno od sjecišta tih dviju kružnica. Pravac SD je tangenta kružnice k_1. Povucimo pravac p točkom S tako da siječe kružnicu k_1 u točkama T_1 i T_2. Prema *Teoremu 2.2.4.* potencija točke S obzirom na kružnicu k_1 je

$$p = |ST_1| \cdot |ST_2| = |SD|^2.$$

Kako je $\overline{SD}$ polumjer kružnice inverzije slijedi da su točke T_1 i T_2 pridružene točke pri danoj inverziji, čime je teorem dokazan. $\square$

Teorem 2.2.9. *Sve kružnice koje prolaze nekom točkom A i sijeku okomito neku kružnicu k_0 prolaze još jednom točkom A'. Točke A i A' pridružene su točke inverzije σ definirane kružnicom k_0.*

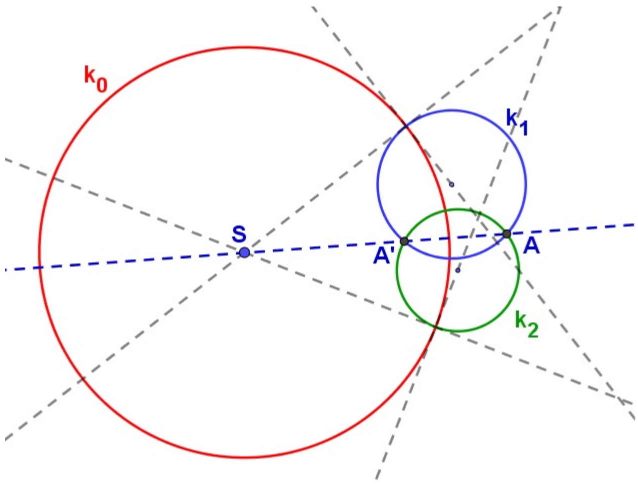
Dokaz. Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice koje prolaze proizvoljnom točkom A i koje okomito sijeku kružnicu k_0 (*Slika 19*). Prema prethodnom teoremu potencija centra S kružnice k_0 s obzirom na obje kružnice je

$$p = r_s^2.$$

Kako je $r_s = \sqrt{c}$, potencija točke S jednaka je konstanti c inverzije σ dane kružnicom k_0. Pravac SA siječe kružnicu k_1 u točki A', a kružnicu k_2 u točki $\overline{A}$. Zbog

$$|SA| \cdot |SA'| = |SA| \cdot |S\overline{A}| = c$$

dobivamo da je $A' = \overline{A}$ i da su A i A' par pridruženih točaka inverzije određene kružnicom k_0. $\square$



Slika 19.

Nakon ovog teorema inverziju σ možemo definirati na sljedeći način:

Točka A' je pridružena točki A pri inverziji $\sigma(S, c)$ ako svaka kružnica koja prolazi točkom A i okomita je na kružnicu inverzije, prolazi i točkom A'.

Prisjetimo se jednog od svojstava osne simetrije:

Ako su A i A' dvije točke simetrične s obzirom na os p, tada sve kružnice koje sijeku os p okomito i prolaze točkom A, prolaze također njoj simetričnom točkom A'.

Možemo uočiti analogiju s navedenim svojstvom inverzije. Pri tome pravac p, tj. os osne simetrije možemo promatrati kao kružnicu k neizmjerno velikog polumjera, te inverziju $\sigma(S, c)$ zovemo još i **simetrijom s obzirom na kružnicu** k.

Teorem 2.2.10. *Dvije različite točke* A, $B \neq S$ *preslikavaju se inverzijom* $\sigma(S, c)$ *u dvije različite točke* A' *i* B'*. Za dužine* $\overline{AB}$ *i* $\overline{A'B'}$ *vrijedi*

$$|A'B'| = |AB| \cdot \frac{c}{|SA| \cdot |SB|}.$$

Dokaz. Neka su dane dvije različite točke A i B koje se ne podudaraju s centrom inverzije S. Neka su A' i B' njihove slike pri toj inverziji. U dokazu *Teorema 2.1.1.* pokazali smo da su trokuti SAB i $SB'A'$ slični, pa prema tome vrijedi

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|SB'|}{|SA|}.$$

Kako je

$$|SB'| = \frac{c}{|SB|},$$

uvrštavanjem u gornju jednakost dobivamo

$$|A'B'| = |AB| \cdot \frac{c}{|SA| \cdot |SB|}.$$

□

2.3. Preslikavanje kutova

U ovom dijelu diplomskog rada cilj nam je dokazati da je inverzija konformno preslikavanje. Kako bi to pokazali dovoljno je dokazati da inverzija čuva kutove između objekata koje preslikava. Uvedimo dvije propozicije koje će nam pomoći u dokazu tog svojstva. One nam govore što se događa s kutovima prilikom inverzije u nekim posebnim slučajevima, npr. kad pravac prolazi središtem inverzije.

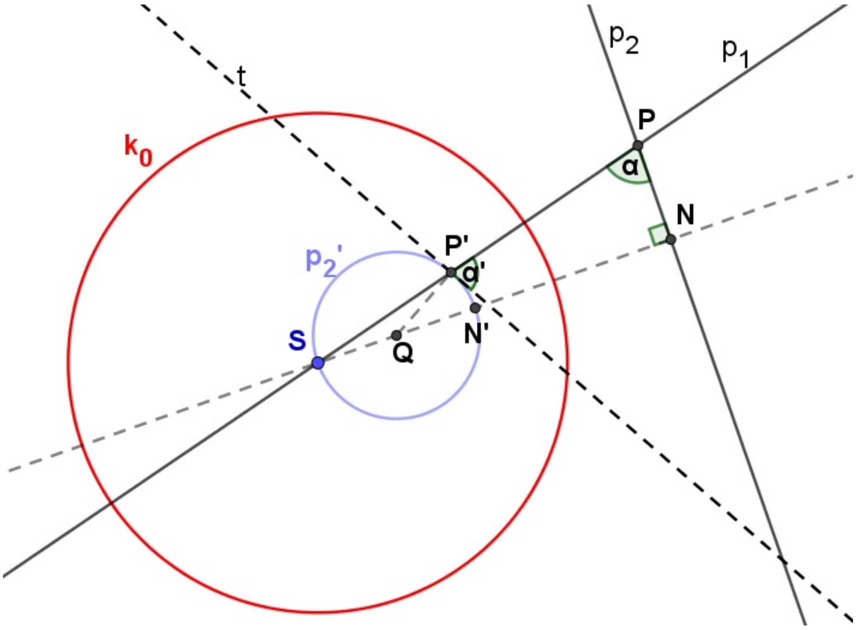
Propozicija 2.3.1. *Kut što ga zatvaraju dva pravca od kojih jedan prolazi središtem inverzije, jednak je po veličini kutu što ga zatvaraju njihove inverzne slike.*

Dokaz. Neka je S centar inverzije σ, p_1 pravac koji prolazi točkom S, te p_2 pravac koji ne prolazi točkom S. Označimo s P točku u kojoj se sijeku ti pravci i α kut kojeg zatvaraju (*Slika 20*). Prema *Teoremu 2.1.2.* inverzna slika pravca p_1 je on sam, a prema *Teoremu 2.1.3.* inverzna slika pravca p_2 je kružnica ${p_2}'$ koja prolazi točkom S. Označimo s N nožište okomice spuštene iz točke S na pravac p_2, a s N' njenu inverznu sliku. U dokazu *Teorema 2.1.3.* pokazali smo da je $\overline{SN'}$ promjer kružnice p_2'. Označimo njeno središte s Q. Kako je $\triangle\ SNP$ pravokutan vrijedi:

$$\alpha = 90^\circ - \measuredangle PSN. \tag{2.11}$$

Neka je P' inverzna slika točke P pri danoj inverziji. Kroz točku P' konstruirajmo tangentu t na kružnicu p_2'. Označimo s α' kut između pravca p_1 i tangente t. Kako su u trokutu QSP' njegove dvije stranice polumjeri kružnice p_2' vrijedi da je taj trokut jednakokračan pa imamo:

$$\measuredangle PSN = \measuredangle P'SN = \measuredangle QP'S. \tag{2.12}$$



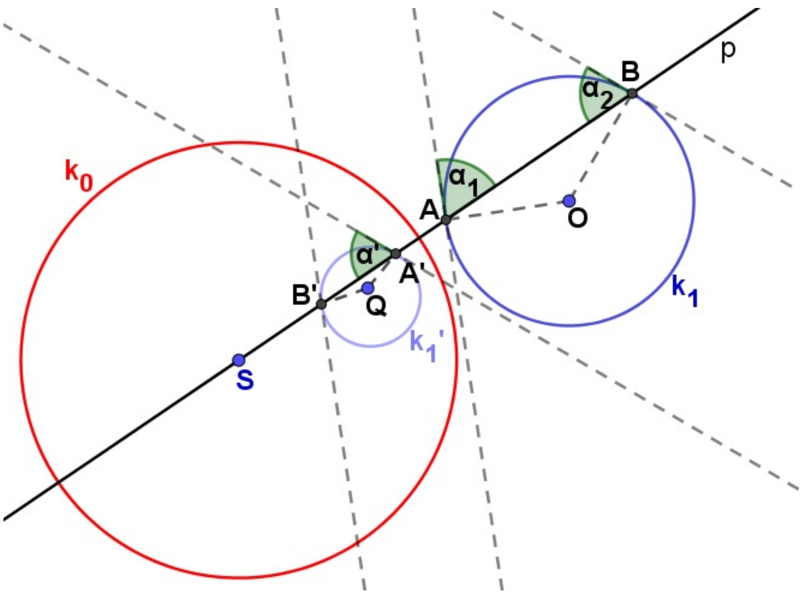
SLIKA 20.

Iz (2.11) i (2.12) slijedi:

$$\alpha' = 180^\circ - 90^\circ - \angle QP'S = 90^\circ - \angle PSN = \alpha.$$

Time smo pokazali da se kut što ga zatvaraju pravci p_1 i p_2 inverzijom preslika na kut iste mjere. $\square$

Propozicija 2.3.2. *Kut što ga zatvaraju pravac koji prolazi središtem inverzije i kružnica koja ne prolazi središtem inverzije jednak je po veličini kutu što ga zatvaraju njihove inverzne slike.*



SLIKA 21.

Dokaz. Neka je dana inverzija $\sigma(S, r_s^2)$, p pravac koji prolazi točkom S, te $k_1(O, r)$ kružnica koji ne prolazi točkom S (*Slika 21*). Označimo s A i B točke u kojima se sijeku pravac p i kružnica k_1, te s α_1 i α_2 kut kojeg zatvaraju pravac p i kružnica k_1 u točki A, odnosno točki B. Vrijedi:

$$\alpha_1 = 90^\circ - \measuredangle BAO = 90^\circ - \measuredangle OBA = \alpha_2. \tag{2.13}$$

Prema *Teoremu 2.1.2.* inverzna slika pravca p_1 je on sam, a prema *Teoremu 2.2.7.* inverzna slika kružnice k_1 je kružnica k_1' koja ne prolazi centrom inverzije. Neka su A' i B' inverzne slike točaka A i B, te označimo s Q središte kružnice k_1'. Kako je kružnica k_1' homotetična kružnici k_1 s centrom homotetije u točki S vrijedi:

$$\measuredangle OBA = \measuredangle QA'B'. \tag{2.14}$$

Iz (2.13) i (2.14) slijedi:

$$\alpha' = 90^\circ - \measuredangle QA'B' = 90^\circ - \measuredangle OBA = \alpha_2 = \alpha_1.$$

Time je propozicija dokazana. □

Sada možemo iskazati i dokazati glavni teorem ovog dijela.

Teorem 2.3.11. *Kut što ga zatvaraju*

a) dva pravca;

b) pravac i kružnica;

c) dvije kružnice;

jednak je po iznosu i suprotan po predznaku kutu što ga zatvaraju inverzne slike tih parova figura.

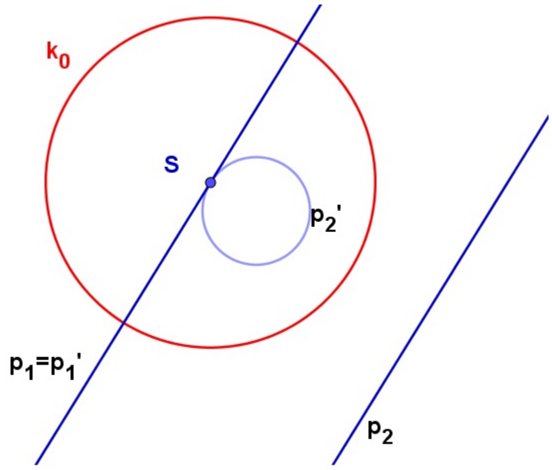
Dokaz.

a) Razlikujemo tri slučaja:

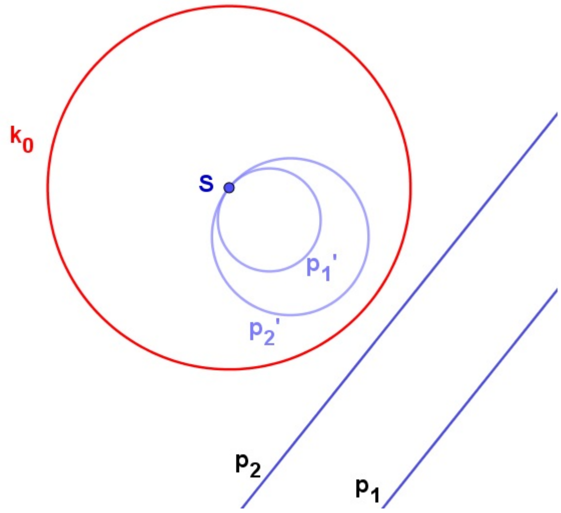
1° Ako pravci p_1 i p_2 prolaze centrom inverzije njihova inverzna slika su ti isti pravci. Pa se kut između pravaca inverzijom preslika u taj isti kut.

2° Jedan od pravaca prolazi centrom inverzije, a drugi ne:

- Pravci su paralelni. Neka pravac p_1 prolazi centrom inverzije, dok p_2 ne prolazi (*Slika 22*). Prema tome $\angle(p_1, p_2) = 0$ i $\angle(p_1', p_2') = 0$, time je tvrdnja dokazana.
- Pravci se sijeku. U *Propoziciji 2.3.1.* smo pokazali da se kut što ga zatvaraju pravci, od kojih jedan prolazi centrom inverzije, inverzijom preslika na kut iste mjere.



Slika 22.



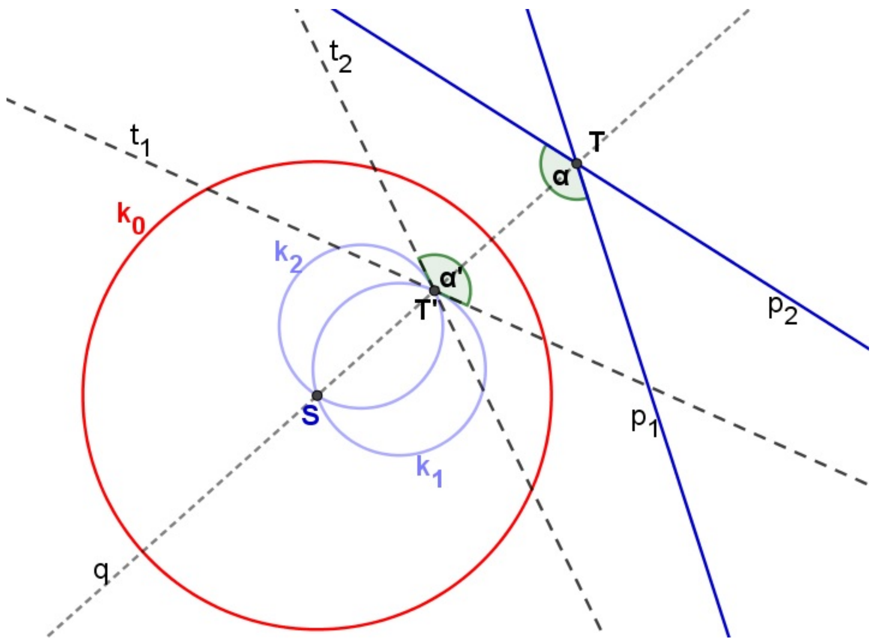
Slika 23. *Inverzna slika paralelnih pravaca*

3° Pravci ne prolaze centrom inverzije:

- Pravci su paralelni. Inverzna slika paralelnih pravaca su kružnice koje se dodiruju u centru inverzije (*Slika 23*).
- Pravci se sijeku. Pokažimo da to vrijedi i za pravce od kojih niti jedan ne prolazi centrom inverzije.

Neka je dana inverzija $\sigma(S, r_s^2)$, pravci p_1 i p_2 koji ne prolaze centrom inverzije i sijeku se u točki T (*Slika 24*). Označimo s α kut što ga zatvaraju ta dva pravca. Neka je kružnica k_1 inverzna slika pravca p_1, kružnica k_2 inverzna slika pravca p_2 i T' inverzna slika točke T. Neka je t_1 tangenta kružnice k_1 u točki T' i t_2 tangenta kružnice k_2 u točki T', te neka je α' kut kojeg zatvaraju kružnice k_1 i k_2, odnosno tangente t_1 i t_2. Neka je q pravac koji prolazi točkama S i T. Pravac q dijeli kut α na dva dijela.
Kako pravac q prolazi centrom inverzije prema *Propoziciji 2.3.1.* vrijedi:

$$\measuredangle(p_1, q) = \measuredangle(k_1, q) = \measuredangle(t_1, q),$$



Slika 24.

$$\measuredangle(p_2, q) = \measuredangle(k_2, q) = \measuredangle(t_2, q). \tag{2.15}$$

Pravac q također dijeli kut α' na dva dijela i prema (2.15) slijedi:

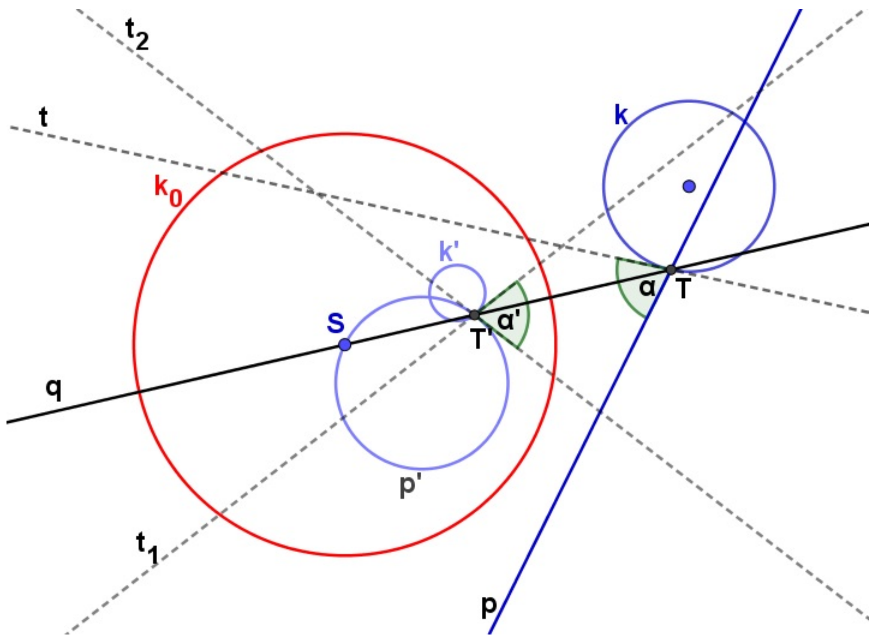
$$\alpha' = \measuredangle(k_1, k_2) = \measuredangle(t_1, t_2) = \measuredangle(t_1, q) + \measuredangle(t_2, q) = \measuredangle(p_1, q) + \measuredangle(p_2, q) = \measuredangle(p_1, p_2) = \alpha.$$

Time smo pokazali da se kut što ga zatvaraju pravci p_1 i p_2 inverzijom preslika u kut istog iznosa i suprotnog predznaka. Prvi dio teorema je dokazan.

b) U *Propoziciji 2.3.2.* smo dokazali da je kut što ga zatvaraju pravac koji prolazi centrom inverzije i kružnica koja ne prolazi centrom jednak po veličini kutu što ga zatvaraju njihove inverzne slike.

Inverzija također čuva kut između pravca i kružnice od kojih oba prolaze centrom inverzije. Ako pravac prolazi centrom inverzije onda je njegova slika on sam, a inverzna slika kružnice prema *Teoremu 2.2.6.* je pravac koji ne prolazi centrom inverzije. Kako smo u *Propoziciji 2.3.1.* dokazali da se kut između dvaju pravaca inverzijom preslika u kut jednake veličine i jer je inverzija involutorno preslikavanje, zaključujemo da će se kut između pravca i kružnice koji prolaze središtem inverzije preslikati u kut jednake veličine. Pokažimo da to vrijedi i za pravac i kružnicu koji ne prolaze središtem inverzije.

Neka je dana inverzija $\sigma(S, r_s^2)$, pravac p i kružnica k koji ne prolaze centrom inverzije. Označimo s T jedno od sjecišta pravca i kružnice, t tangentu na kružnicu k u točki T i α kut što ga zatvaraju pravac p i kružnica k, odnosno pravac p i tangenta t (*Slika 25*). Neka je kružnica k' inverzna slika kružnice k, kružnica p' inverzna slika pravca p i T' inverzna slika točke T. Neka je t_1 tangenta kružnice k' u točki T' i t_2 tangenta kružnice p' u točki T', te neka je α' kut kojeg zatvaraju kružnice k' i p', odnosno tangente t_1 i t_2. Neka je q pravac koji prolazi točkama S i T. Pravac q dijeli kut α na dva dijela. Analogno kao i u prethodnom



Slika 25.

dokazu dobivamo

$$\alpha' = \measuredangle(k', p') = \measuredangle(t_1, t_2) = \measuredangle(t_1, q) + \measuredangle(t_2, q) = \measuredangle(t, q) + \measuredangle(p, q) = \measuredangle(t, p) = \measuredangle(k, p) = \alpha.$$

I u ovom slučaju kut α inverzijom se preslika u kut α' istog iznosa i suprotnog predznaka. Time je dokazan i drugi dio teorema.

c) Na temelju rezultata iz prethodnih dokaza dolazimo do zaključka da će se kut između dviju kružnica koje prolaze centrom inverzije, inverzijom preslikati u kut jednake veličine. Uistinu, kružnice koje prolaze centrom inverzije preslikaju se u dva pravca, a kako inverzija čuva kut između pravaca i involutorno je preslikavanje tvrdnja je dokazana.

Također, kut između kružnica od kojih samo jedna prolazi centrom inverzije, inverzijom će se preslikati u kut jednake veličine. Prema *Teoremu 2.2.6.* inverzna slika kružnice koja prolazi centrom inverzije je pravac koji ne prolazi centrom inverzije, a prema *Teoremu 2.2.7.* inverzna slika kružnice koja ne prolazi centrom je kružnica koja također ne prolazi centrom. Pod *b)* smo pokazali da se kut između kružnice i pravca koji ne prolaze centrom inverzije čuva pri inverziji. Kako je inverzija involutorno preslikavanje slijedi dokaz i ove tvrdnje.

Kut između kružnica od kojih niti jedna ne prolazi centrom inverzije, inverzijom će se preslikati u kut jednake veličine. Dokaz je potpuno analogan prethodnim pa ćemo ga izostaviti.

Time je teorem u potpunosti dokazan. □

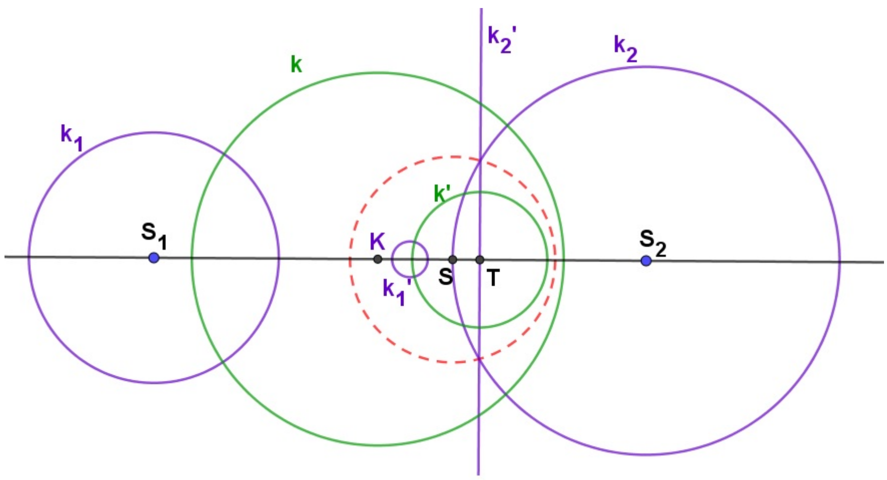
Napomena 2.3.3. *Iz prethodnog teorema općenito slijedi da se sjecišta pravaca i kružnica preslikavaju u sjecišta njihovih slika. Iznimka je centar inverzije. Dvije kružnice koje se dodiruju u centru inverzije preslikat će se u dva paralelna pravca. Dvije kružnice koje se sijeku u centru inverzije preslikat će se u dva pravca, s tim da će se drugo sjecište kružnica* *preslikati u sjecište pravaca. Isto vrijedi i za pravac i kružnicu koji se dodiruju u centru inverzije. Pravac će se preslikati sam na sebe, a kružnica u pravac koji je paralelan s ovim drugim pravcem.*

2.4. Zanimljiva svojstva inverzije

Pokažimo još neka svojstva inverzije koja će nam biti potrebna u daljnjem radu. Prije sljedeće tvrdnje definirajmo pojam koji se spominje u tvrdnji.

Definicija 2.4.4. *Neka su dane dvije kružnice $k_1(S_1, r_1)$ i $k_2(S_2, r_2)$ koje se ne sijeku i leže jedna izvan druge. Pravac koji spaja središte S_1 i S_2 zovemo centralom tih dviju kružnica.*

Teorem 2.4.12. *Neka su dane dvije kružnice k_1 i k_2 sa središtima S_1 i S_2 koje se ne sijeku. Postoji točno jedna kružnica k sa središtem K na centrali $\overline{S_1S_2}$ dviju danih kružnica koja siječe dvije dane kružnice ortogonalno.*

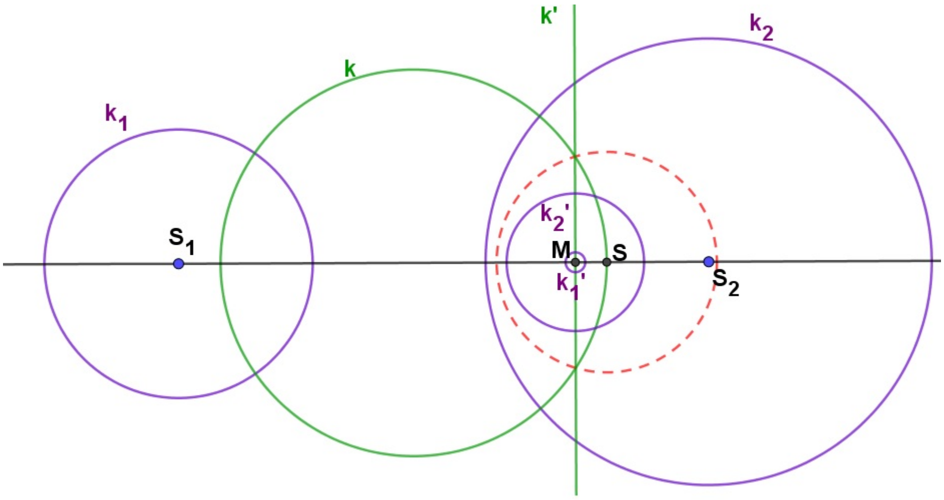


SLIKA 26.

Dokaz. Neka je $S = k_2 \cap \overline{S_1S_2}$ i neka je σ inverzija s centrom u točki S proizvoljnog radijusa r. Prema *Teoremu 2.2.7.* i *Teoremu 2.2.6.* inverzna slika kružnice k_1 je kružnica k_1' čije središte leži na pravcu S_1S_2, a kružnice k_2 pravac k_2' koji je okomit na S_1S_2 (*Slika 26*). Označimo točku presjeka pravaca S_1S_2 i k_2' s T. Neka je k' kružnica sa središtem u T koja je okomita na k_1', ona okomito siječe i pravac k_2'. S obzirom na to da inverzija čuva kutove, tada će slika kružnice k', kružnica k, pri inverziji σ okomito sjeći kružnice k_1 i k_2. □

Teorem 2.4.13. *Postoji inverzija σ koja preslikava dvije kružnice k_1 i k_2 koje se ne sijeku na par koncentričnih kružnica.*

Dokaz. Neka su k_1 i k_2 kružnice koje se ne sijeku i S_1 i S_2 njihova središta. Prema *Teoremu 2.4.12.* postoji jedinstvena kružnica k koja ortogonalno siječe kružnice k_1 i k_2 te se njeno središte nalazi na pravcu određenom točkama S_1 i S_2. Označimo s S jedno od sjecišta kružnice k i pravca S_1S_2. Neka je σ inverzija s centrom u točki S i proizvoljnim radijusom r.



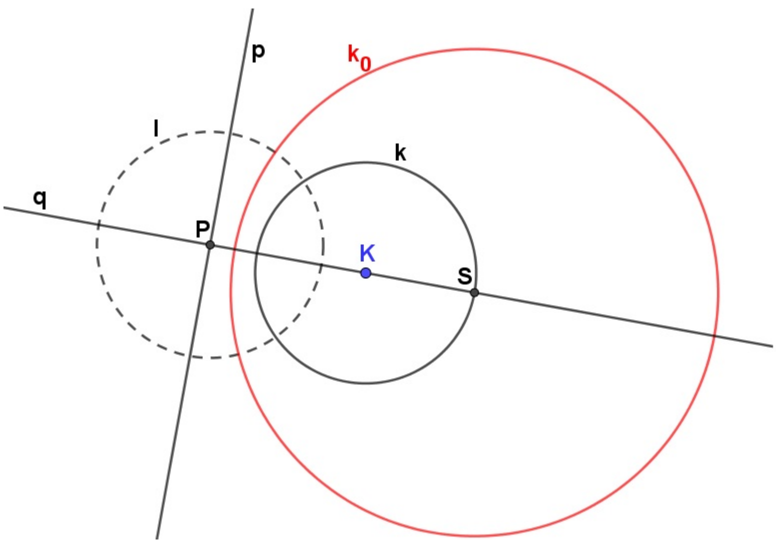
SLIKA 27.

Prema *Teoremu 2.1.2.* pravac S_1S_2 se preslika sam u sebe, a prema *Teoremu 2.2.6.* kružnica k u pravac k' koji je okomit na S_1S_2. Označimo tu točku sjecišta s M (*Slika 27*). Kako inverzija čuva kutove pravac k' okomito siječe kružnice k_1' i k_2' (slike kružnica k_1 i k_2 pri inverziji σ), odnosno pravac k' prolazi središtima kružnica k_1' i k_2'. Središta kružnica k_1' i k_2' također leže na pravcu S_1S_2 pa zaključujemo da se ona nalaze u točki M. □

Teorem 2.4.14. *Postoji inverzija σ koja preslikava pravac p i kružnicu k jedno na drugo.*

Dokaz. Ovisno o položaju pravca i kružnice razlikovat ćemo tri slučaja.

- Neka se pravac p i kružnica k, sa središtem u točki K, sijeku u točkama T_1 i T_2. Neka pravac q prolazi točkom K i okomit je na pravac p. Označimo sa S jedno od sjecišta pravca q i kružnice k. Kružnica koja prolazi točkama T_1 i T_2 i središte joj je u točki S tražena je kružnica inverzije.



SLIKA 28.

- Neka pravac p dodiruje kružnicu u točki T. Neka pravac q prolazi točkom T i okomit je na p. Drugo sjecište pravca q i kružnice k označimo sa S. Točka S je dijametralno suprotna točki T. Kružnica koja prolazi točkom T i središte joj je u točki S tražena je kružnica inverzije.

- Neka pravac p ne siječe kružnicu k. Odredimo pravac q koji je okomit na p i prolazi točkom K, te označimo točku sjecišta pravaca sa P. Neka je l kružnica sa središtem u točki P koja je ortogonalna na kružnicu k. Označimo sa S sjecište kružnice k i pravca q koje se nalazi izvan kružnice l (*Slika 28*). Tražena kružnica inverzije k_0 ima središte u točki S, a polumjer inverzije je takav da kružnica k_0 siječe kružnicu l ortogonalno.$\square$

Poglavlje 3

Primjena inverzije

3.1. Feuerbachov teorem

3.1.1. Trokut upisana, opisana i pripisane kružnice

U ovom poglavlju navest ćemo i primjenom inverzije dokazati neke poznate tvrdnje geometrije trokuta. Uvedimo najprije pojmove i teoreme vezane za trokut koji će nam trebati u nastavku.

Definicija 3.1.5. ***Upisana kružnica*** *trokutu ABC je kružnica koja dira svaku od stranica trokuta s unutrašnje strane. Središte joj se nalazi u sjecištu simetrala unutarnjih kutova tog trokuta.*

Polumjer upisane kružnice označavat ćemo s r.

Definicija 3.1.6. ***Opisana kružnica*** *trokutu ABC je kružnica koja prolazi kroz vrhove tog trokuta. Središte joj se nalazi u sjecištu simetrala stranica tog trokuta.*

Polumjer opisane kružnice označavat ćemo s R.

Definicija 3.1.7. ***Pripisana kružnica*** *k_a trokutu ABC je kružnica koja dira stranicu nasuprot vrha A s vanjske strane i produženja ostalih dviju stranica. Središte joj se nalazi u sjecištu simetrale unutarnjeg kuta nasuprot stranice koju dodiruje i simetrala vanjskih kutova trokuta kod vrhova B i C.*

Analogno se definiraju ostale dvije pripisane kružnice k_b i k_c. Polumjer pripisanih kružnica k_a, k_b i k_c označavat ćemo s r_a, r_b, odnosno r_c.

Teorem 3.1.15. *Neka je dan trokut ABC kojemu su duljine stranica $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$. Označimo s X, Y, Z dirališta upisane kružnice k_u trokuta ABC i stranica trokuta, a s X_a, Y_a, Z_a dirališta pripisane kružnice k_a stranice a i produžetaka ostale dvije stranice (Slika 29). Tada vrijedi*

$$|AZ| + |BC| = |BX| + |AC| = |CY| + |AB| = s, \tag{3.1}$$

$$|AZ| = |AY| = s - a, \tag{3.2}$$

$$|BX| = |BZ| = s - b, \tag{3.3}$$

$$|CY| = |CX| = s - c, \tag{3.4}$$

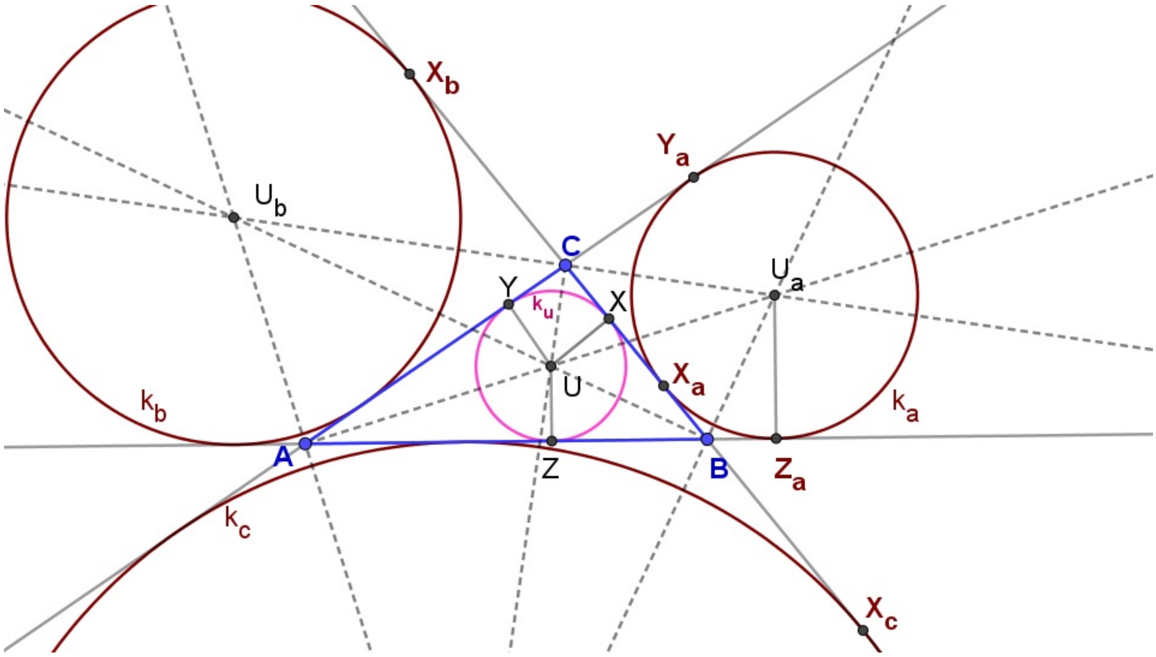
$$|AZ_a| = |AB| + |BX_a| = |AC| + |CX_a| = s, \tag{3.5}$$

$$|AZ_a| = |AY_a| = s, \tag{3.6}$$

$$|BX_a| = |BZ_a| = s - c, \tag{3.7}$$

$$|CX_a| = |CY_a| = s - b, \tag{3.8}$$

gdje je s poluopseg trokuta.



Slika 29.

Dokaz. Udaljenost neke točke ravnine od oba dirališta tangenata položenih tom točkom na neku kružnicu je jednaka, pa je

$$|AY| = |AZ|, \quad |BX| = |BZ|, \quad |CX| = |CY|,$$

$$|AY_a| = |AZ_a|, \quad |BX_a| = |BZ_a|, \quad |CX_a| = |CY_a|. \tag{3.9}$$

Kako je zbroj duljina stranica trokuta opseg trokuta znamo da je

$$|AZ| + |BZ| + |BX| + |CX| + |CY| + |AY| = 2s,$$

pa prema (3.9) vrijedi

$$|AZ| + |BZ| + |CY| = s.$$

Kako je $|BZ| + |CY| = |BX| + |CX| = |BC| = a$, vrijedi

$$|AZ| = |AY| = s - a.$$

Analogno dobijemo jednakosti (3.3) i (3.4).

Dokažimo i drugi dio teorema. Iz slike (*Slika 29*) i jednakosti (3.9) vrijedi

$$|AZ_a| = |AB| + |BZ_a| = |AB| + |BX_a|,$$

$$|AY_a| = |AC| + |CY_a| = |AC| + |CX_a|,$$

odnosno

$$|AZ_a| = |AB| + |BX_a| = |AC| + |CX_a|.$$

Kako je $|AB| + |AC| + |BX_a| + |CX_a| = 2s$, slijedi

$$|AZ_a| = |AY_a| = s,$$

i time je dokazana jednakost (3.5).

Nadalje, iz slike (*Slika 29*) i jednakosti (3.9) vrijedi

$$|BX_a| = |BZ_a| = |AZ_a| - |AB| = s - c,$$

te je dokazana jednakost (3.7), analogno se dokaže i jednakost (3.8). □

Teorem 3.1.16. *Neka su X, X_a, X_b, X_c označena dirališta upisane i pripisanih kružnica sa stranicom $\overline{BC}$ trokuta ABC (Slika 29). Vrijedi*

$$|XX_a| = c - b,$$

$$|XX_b| = b,$$

$$|XX_c| = c.$$

Točke X i X_a su centralno simetrične s obzirom na polovište stranice BC.

Dokaz. Prema *Teoremu 3.1.15.* vrijedi

$$|XX_a| = |BX| - |BX_a| = s - b - (s - c) = c - b,$$

$$|XX_b| = |BX_b| - |BX| = s - (s - b) = b,$$

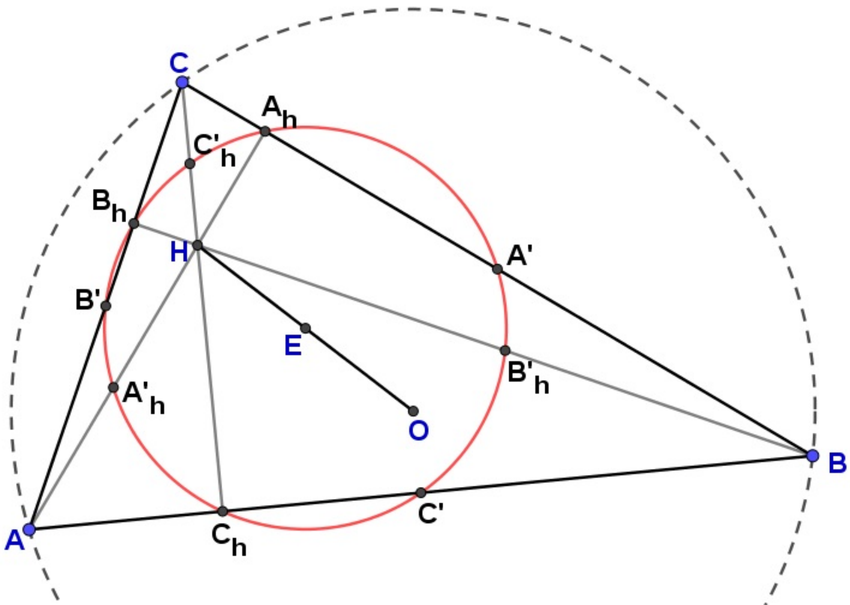
$$|XX_c| = |CX_c| - |CX| = s - (s - c) = c.$$

Također, prema *Teoremu 3.1.15.* vrijedi da je $|BX| = |CX_a| = s - b$, pa su točke X i X_a centralno simetrične s obzirom na polovište stranice $\overline{BC}$. □

3.1.2. Eulerova kružnica

Teorem 3.1.17. *Neka su A', B', C' polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, A_h, B_h, C_h nožišta visina, a H ortocentar trokuta ABC te neka su A'_h, B'_h, C'_h polovišta dužina $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$. Devet točaka A', B', C', A_h, B_h, C_h, A'_h, B'_h, C'_h leže na jednoj kružnici kojoj su $\overline{A'A'_h}$, $\overline{B'B'_h}$, $\overline{C'C'_h}$ promjeri, središte u točki E polovištu dužine $\overline{OH}$, a polumjer jednak polovini polumjera tom trokutu opisane kružnice (Slika 30).*

Dokaz. Trebamo dokazati koncikličnost navedenih devet točaka. Točke A' i B' polovišta su stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ pa prema teoremu o srednjici trokuta vrijedi da je $|A'B'| = \frac{1}{2}|AB|$ i $A'B' \parallel AB$. Kako je i $\overline{A'_hB'_h}$ srednjica trokuta ABH vrijedi $|A'_hB'_h| = \frac{1}{2}|AB|$. Iz toga slijedi da je $|A'B'| = |A'_hB'_h|$ i $A'B' \parallel A'_hB'_h$. Prema tome četverokut $A'B'A'_hB'_h$ je paralelogram, pa se dijagonale $A'A'_h$ i $B'B'_h$ međusobno raspolavljaju. Označimo točku presjeka s S.



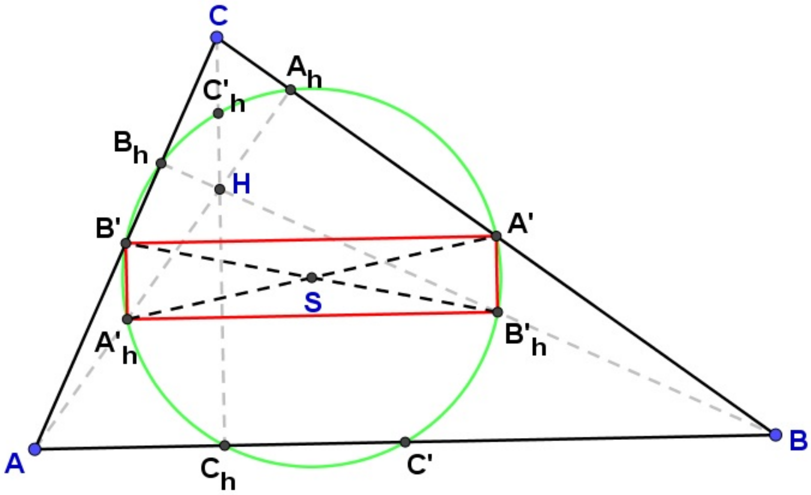
SLIKA 30. *Kružnica devet točaka*

Isti princip zaključivanja primijenimo i na trokutu AHC. Kako je $\overline{A'_hB'}$ srednjica trokuta AHC vrijedi da je $|A'_hB'| = \frac{1}{2}|CH|$ i $A'_hB' \parallel CH$. Pravac CH je po konstrukciji pravac na kojem leži visina trokuta ABC na stranicu AB, pa je $CH \perp AB$, odnosno $CH \perp A'_hB'_h$. Iz toga zaključujemo da je $A'_hB' \perp A'_hB'_h$ i $\measuredangle B'A'_hB'_h = 90°$. Četverokut $A'B'A'_hB'_h$ je pravokutnik pa mu se može opisati kružnica $k(S, \frac{1}{2}|A'A'_h|)$ (*Slika 31*).

Analogno se pokaže da je četverokut $A'C'A'_hC'_h$ pravokutnik i da se može opisati kružnica $k(S, \frac{1}{2}|A'A'_h|)$. Time smo pokazali da točke A', B', C', A'_h, B'_h, C'_h leže na istoj kružnici k.

Pokažimo još da i točke A_h, B_h, C_h leže na toj kružnici. Dužina $\overline{AA_h}$ prema konstrukciji je visina trokuta na stranicu $\overline{BC}$, pa je $\measuredangle A'A_hA'_h = 90°$. Trokut $A'A_hA'_h$ je pravokutan trokut s hipotenuzom $\overline{A'A'_h}$ pa prema obratu Talesovog teorema A_h također leži na kružnici k. Analogno se pokaže da i B_h i C_h leže na k.

Središte kružnice k, točka E, leži na presjeku simetrala tetiva $\overline{A'A_h}$ i $\overline{C'C_h}$, a to su srednjice trapeza $HOA'A_h$ i $HOC'C_h$. Ti trapezi imaju zajednički krak $\overline{OH}$, pa zaključujemo



SLIKA 31.

da se središte kružnice podudara s polovištem dužine $\overline{OH}$. □

Eulerovu kružnicu u literaturi možemo još naći pod imenom Feuerbachova kružnica. Godine 1765. poznati švicarski matematičar Leonhard Euler[1] dokazao je da polovišta stranica trokuta i nožišta visina leže na jednoj kružnici. Iako, prema povijesnim istraživanjima J.S.MacKaya (1892. godine) on nije zaslužan za to otkriće, ali ipak njemu u čast kružnica se naziva Eulerova kružnica.

Zapravo teško je reći da je teorem otkriven od strane točno nekog matematičara. Obuhvaćen je u matematičkim problemima koji su se pojavili 1804. i 1807. godine, te možda prvi put izričito iskazan od strane Ponceleta 1821. godine.

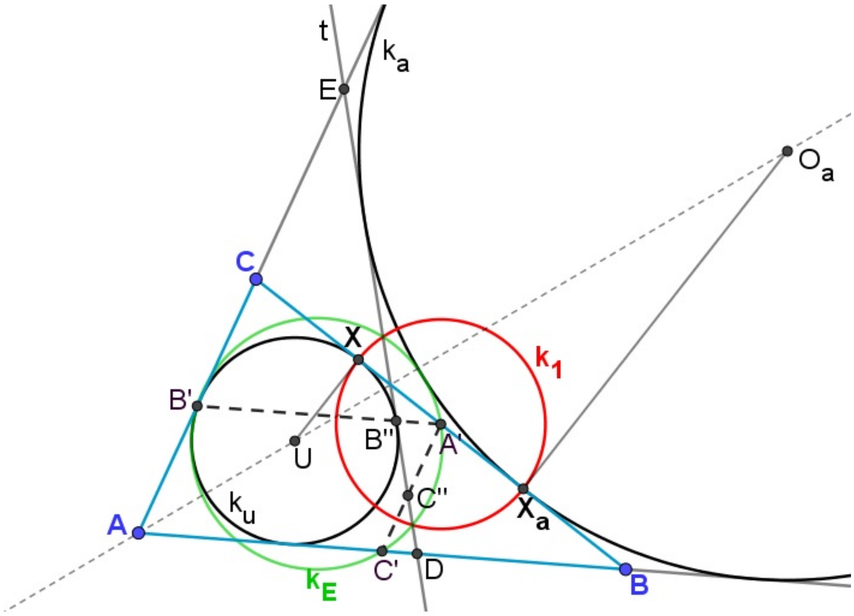
Njemački matematičar, 1822. godine, Karl Wilhelm Feuerbach[2] neovisno je dokazao i objavio teorem o Eulerovoj kružnici, u svom članku *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte der geradlinigen Dreiecks*, zajedno s novim i značajnim svojstvima kružnice. Te se njemu u čast kružnica naziva i Feuerbachova kružnica. Dokazao je da kružnica koja prolazi nožištima visina trokuta dira upisanu kružnicu i tri pripisane kružnice danog trokuta. Taj teorem u literaturi poznat je kao Feuerbachov teorem, kojeg ćemo u nastavku diplomskog rada i dokazati.

3.1.3. Dokaz Feuerbachovog teorema primjenom inverzije

Feuerbachov teorem smatra se jednim od najljepših teorema u geometriji trokuta. Mnogi matematičari dali su različite dokaze tog teorema, a mi ćemo ga dokazati primjenom inverzije.

[1]Leonhard Euler (1707.-1783.), švicarski matematičar, fizičar i astronom
[2]Karl Wilhelm Feuerbach (1800.-1834.), njemački matematičar

Teorem 3.1.18. ***(Feuerbachov teorem)*** *Eulerova kružnica dira upisanu i sve tri pripisane kružnice danog trokuta. Pri tome upisana kružnica dira Eulerovu kružnicu iznutra, dok je pripisane kružnice diraju izvana (Slika 32).*



SLIKA 32.

Dokaz. Promotrimo trokutu ABC upisanu kružnicu k_u i pripisanu kružnicu k_a. Neka su točke A', B', C' polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Dirašte upisane kružnice sa stranicom $\overline{BC}$ značimo s X, a diralište pripisane kružnice sa stranicom $\overline{BC}$ s X_a (*Slika 32*).
Prema *Teoremu 3.1.15.* i *Teoremu 3.1.16.* vrijedi:

$$|BX_a| = |CX| = s - c$$

i

$$|XX_a| = a - 2(s - c) = c - b,$$

gdje je s poluopseg, a a, b i c duljine stranica trokuta ABC. Iz čega slijedi:

$$|A'X| = |CA'| - |CX| = \frac{a}{2} - (s - c) = \frac{c - b}{2},$$

$$|A'X_a| = |BA'| - |BX_a| = \frac{a}{2} - (s - c) = \frac{c - b}{2},$$

odnosno

$$|A'X| = |A'X_a| = \frac{c - b}{2}.$$

Promotrimo inverziju σ s centrom u točki A' i konstantom

$$c_1 = |A'X|^2 = |A'X_a|^2 = \frac{1}{4}(c - b)^2.$$

Označimo kružnicu te inverzije s k_1. Promjer kružnice inverzije $\overline{XX_a}$ leži na pravcu BC koji je tangenta na kružnicu k_u i k_a. Prema tome zaključujemo da kružnica inverzije k_1 siječe okomito upisanu kružnicu k_u i pripisanu kružnicu k_a trokuta ABC. Prema *Teoremu 2.2.8.* kružnice k_u i k_a se inverzijom preslikaju same u sebe, odnosno $\sigma(k_u) = k_u$ i $\sigma(k_a) = k_a$.

Pravci koji sadrže stranice trokuta ABC tri su zajedničke tangente kružnica k_u i k_a. Neka je t četvrta tangenta tih dviju kružnica, te neka je $t \bigcap AB = D$ i $t \bigcap AC = E$. Spojimo centar inverzije A' s polovištima stranica C' i B', te neka je $t \bigcap A'C' = C''$ i $t \bigcap A'B' = B''$.

Dokažimo da je slika tangente t pri inverziji σ Eulerova kružnica k_E trokuta ABC. Simetrala unutarnjeg kuta pri vrhu A je os simetrije kružnica k_u i k_a. Prema tome vrijedi:

$$|AB| = |AE| = c \quad \text{i} \quad |AC| = |AD| = b. \tag{3.10}$$

Iz sličnosti trokuta $B'B''E$ i ADE slijedi:

$$\frac{|B'B''|}{|B'E|} = \frac{|AD|}{|AE|},$$

pa prema (3.10) vrijedi:

$$\frac{|B'B''|}{|B'E|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c}.$$

Točka B' je polovište stranice AC, to je $|AB'| = \frac{b}{2}$. Kako je $|B'E| = |AE| - |AB'| = c - \frac{b}{2}$, pa je

$$\frac{|B'B''|}{c - \frac{b}{2}} = \frac{b}{c},$$

odnosno

$$|B'B''| = \frac{b}{c}(c - \frac{b}{2}).$$

Nadalje, vrijedi:

$$|A'B''| = |A'B'| - |B'B''| = \frac{c}{2} - \frac{b}{c}(c - \frac{b}{2}) = \frac{(c-b)^2}{2c}.$$

Analogno iz sličnosti trokuta $C'C''D$ i AED dobijemo

$$|A'C''| = |A'C'| - |C'C''| = \frac{b}{2} - \frac{c}{b}(b - \frac{c}{2}) = \frac{(c-b)^2}{2b}.$$

Dalje imamo:

$$|A'B'| \cdot |A'B''| = \frac{c}{2} \cdot \frac{(c-b)^2}{2c} = \frac{(c-b)^2}{4} = c_1,$$
$$|A'C'| \cdot |A'C''| = \frac{b}{2} \cdot \frac{(c-b)^2}{2b} = \frac{(c-b)^2}{4} = c_1,$$

a to znači da su točke B' i B'', te C' i C'' parovi pridruženih točaka u inverziji σ.

Prema *Primjedbi 2.1.1.* tangenta t inverzijom se preslika u kružnicu koja prolazi centrom

inverzije A' i točkama B' i C'. Kako su točke A', B' i C' polovišta stranica trokuta ABC, prema *Teoremu 3.1.17.* ta kružnica je Eulerova kružnica k_E. Kako tangenta t dira i k_u i k_a u točkama koje su različite od centra inverzije, tada i njena slika, odnosno kružnica k_E dira te dvije kružnice.
Analogno se dokaže i za ostale dvije pripisane kružnice k_b i k_c. $\square$

3.2. Apolonijev problem

Apolonije iz Perge (260.-190. pr. Kr.), grčki matematičar, najpoznatiji je po razvoju teorije konika (koje je otkrio starogrčki matematičar Menehmo). U svom glavnom djelu obrađuje konike u 8 knjiga u kojima starije rezultate nadopunjava svojima. Prvi je uvidio da se na istom stošcu mogu dobiti sve tri konike kao presjek stošca i ravnine, te od njega potječu nazivi za parabolu, elipsu i hiperbolu.

Jedno od značajnijih Apolonijevih otkrića je i Apolonijev problem kojeg ćemo iskazati i riješiti u nastavku pomoću inverzije. Problem je konstruirati kružnice koje diraju tri zadane kružnice. Apolonije je postavio i riješio taj problem u svom djelu *O dodirima* koje je izgubljeno, ali njegovi rezultati ostali su sačuvani u izvješću Pappusa iz Aleksandrije. François Viète [3] riješio je problem koristeći samo šestar i ravnalo. Krenuo je od najjednostavnijeg slučaja tako da je tri kružnice zamijenio točkama. U svakom idućem koraku zamjenjivao je objekt kružnicama. Apolonije je u svom djelu imao sličan pristup, te se Vièteovo rješenje smatra vjerodostojnom rekonstrukcijom Apolonijevog rješenja.

Apolonijev problem: Neka su zadane tri kružnice k_1, k_2 i k_3. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadane kružnice.

Možemo promatrati i posebne slučajeve, odnosno neke (ili sve) od danih kružnica imaju polumjer nula (to su točke) ili beskonačan polumjer (to su pravci). Tada se problem svodi na 10 slučajeva u kojima treba konstruirati kružnicu koja:

1. prolazi kroz tri točke;
2. dira tri dana pravca;
3. prolazi kroz dvije točke i dira dani pravac;
4. prolazi danom točkom i dira dva dana pravca;
5. dira dva dana pravca i kružnicu;
6. prolazi danom točkom i dira dani pravac i kružnicu;
7. dira dani pravac i dvije dane kružnice;
8. prolazi kroz dvije točke i dira danu kružnicu;

[3] François Viète (1540.-1603.), francuski matematičar

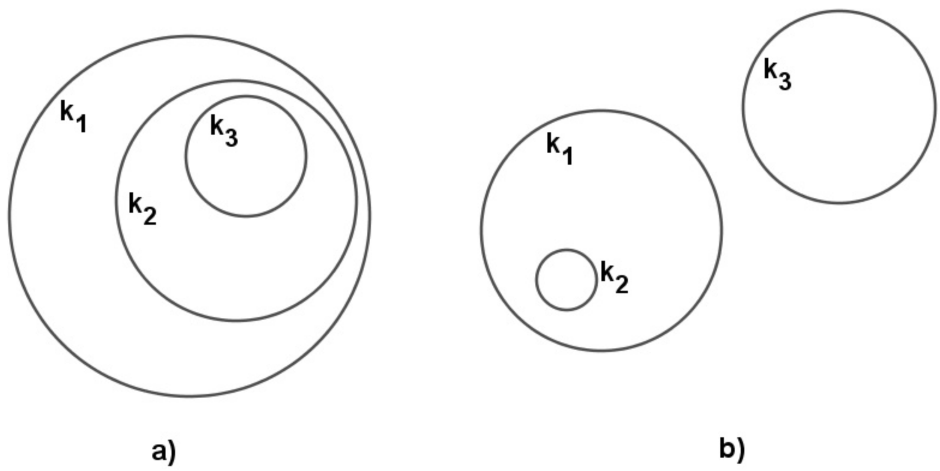
9. prolazi danom točkom i dira dvije dane kružnice;

10. dira tri dane kružnice.

Postoji najviše osam rješenja, odnosno osam kružnica koje diraju tri zadane kružnice, a ovisno o položaju danih kružnica može biti i manje rješenja. Riješimo najopćenitiji slučaj u kojem ćemo dobiti svih osam rješenja.

3.2.1. Konstrukcija kružnice koja dira tri dane kružnice

Problem nema rješenje ako kružnica k_2 leži unutar kružnice k_1, a kružnica k_3 leži unutar kružnice k_2 i pri tome niti jedna od njih se ne siječe s nekom drugom (*Slika 33.a*). Ne postoji rješenje i ako kružnica k_2 leži unutar k_1 i ne siječe ju, a kružnica k_3 leži izvan k_1 i ne siječe ju (*Slika 33.b*).



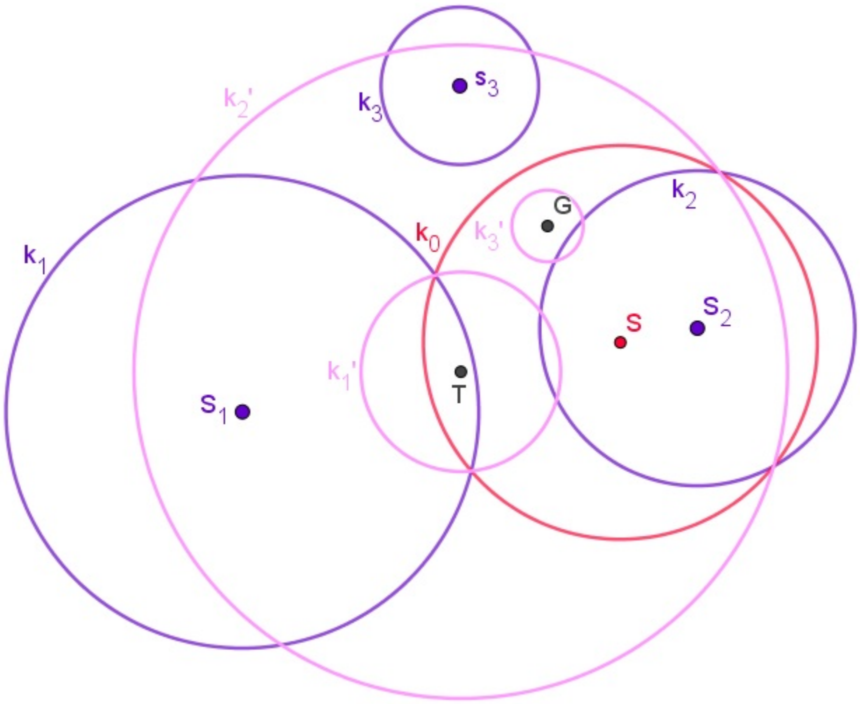
SLIKA 33.

Konstrukcija kružnica koje diraju tri zadane kružnice k_1, k_2 i k_3 koje se ne sijeku i leže jedna izvan druge.

Rješenje: Neka su dane kružnice k_1, k_2 i k_3 koje se ne sijeku i leže jedna izvan druge. Prema *Teoremu 2.4.13.* postoji inverzija koja kružnice k_1 i k_2 preslika u par koncentričnih kružnica k_1' i k_2'. Označimo s k_0 kružnicu inverzije σ i S centar inverzije. Pri inverziji σ kružnica k_3 preslika se u kružnicu k_3' koja prema *Teoremu 2.3.11.* ne siječe kružnice k_1' i k_2' i nalazi se "između" tih kružnica (*Slika 34*). Početni problem sveli smo na problem traženja kružnica l_i' koje diraju kružnice k_1', k_2' i k_3', te inverzijom σ preslikat ćemo ih u tražene kružnice l_i.

Neka kružnice k_1', k_2' i k_3' imaju redom duljine polumjera r_1', r_2' i r_3'. Ako kružnice l_i' diraju k_1', k_2' i k_3' moraju imati polumjer

$$\bar{r_1} = \frac{r_2' - r_1'}{2} \quad \text{ili} \quad \bar{r_2} = \frac{r_1' + r_2'}{2}. \tag{3.11}$$



Slika 34.

Središta kružnica l_i' nalaze se na kružnicama s_1 i s_2 koje su koncentrične s kružnicama k_1' i k_2' i kojima su polumjeri

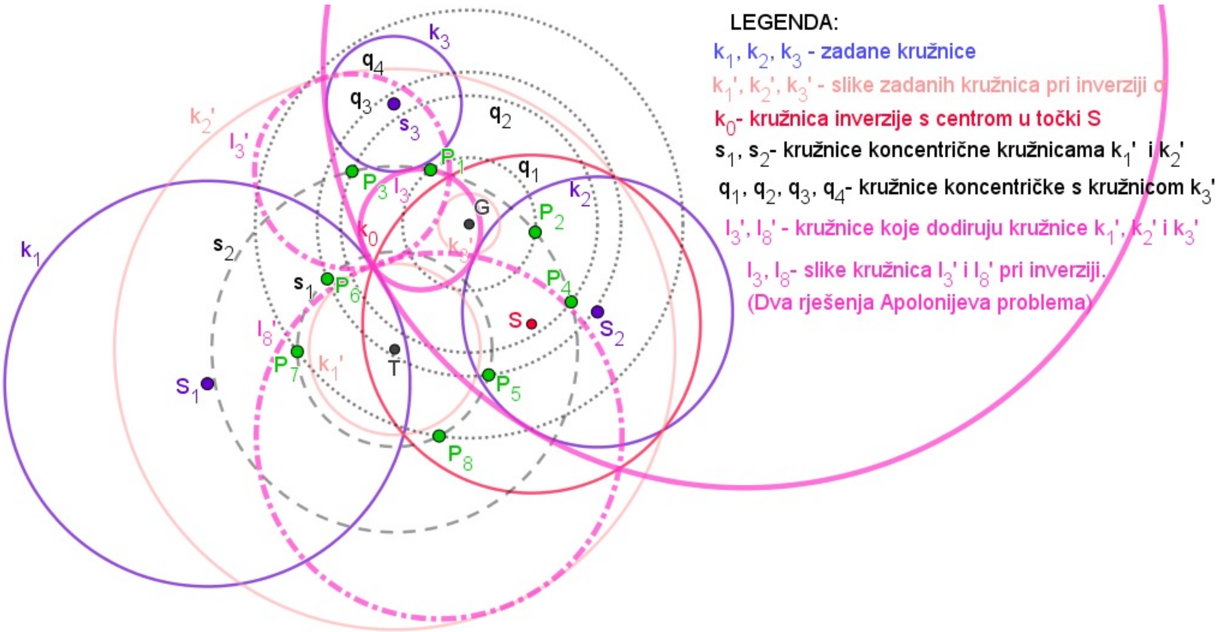
$$\bar{s_1} = \frac{r_2' - r_1'}{2} \quad \text{i} \quad \bar{s_2} = \frac{r_2' + r_1'}{2}.$$

Također, središta kružnica s polumjerima $\bar{r_1}$ i $\bar{r_2}$ nalazit će se i na kružnicama $q_{i,i=1,2,3,4}$ koncentričnim kružnici k_3' s polumjerima

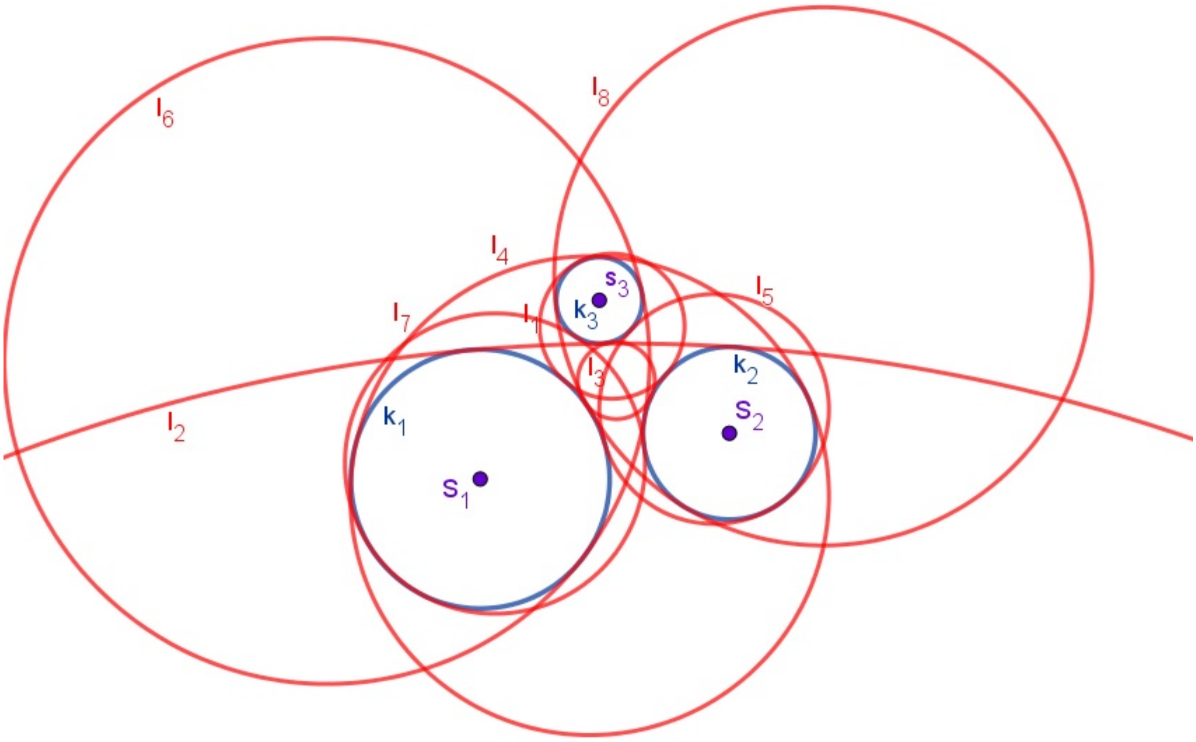
$$q_1' = \bar{r_1} - r_3', \quad q_2' = \bar{r_1} + r_3', \quad q_3' = \bar{r_2} - r_3' \quad i \quad q_4' = \bar{r_2} + r_3'.$$

Kružnice s_1, s_2, q_1, q_2, q_3 i q_4 prikazane su na *slici 35*. Središta $P_1' - P_8'$ kružnica $l_1' - l_8'$ nalazit će se na sjecištima kružnica s_1, s_2, q_1, q_2, q_3 i q_4. Trebamo još kružnice l_i' inverzijom preslikati na kružnice l_i, time je Apolonijev problem riješen (*Slika 36*).

Ako se kružnice k_1 i k_2 nalaze unutar kružnice k_3 postupak rješavanja isti je kao i u prethodnom primjeru. Postupak izostavljamo.



Slika 35.



Slika 36.

3.3. Ptolomejev teorem

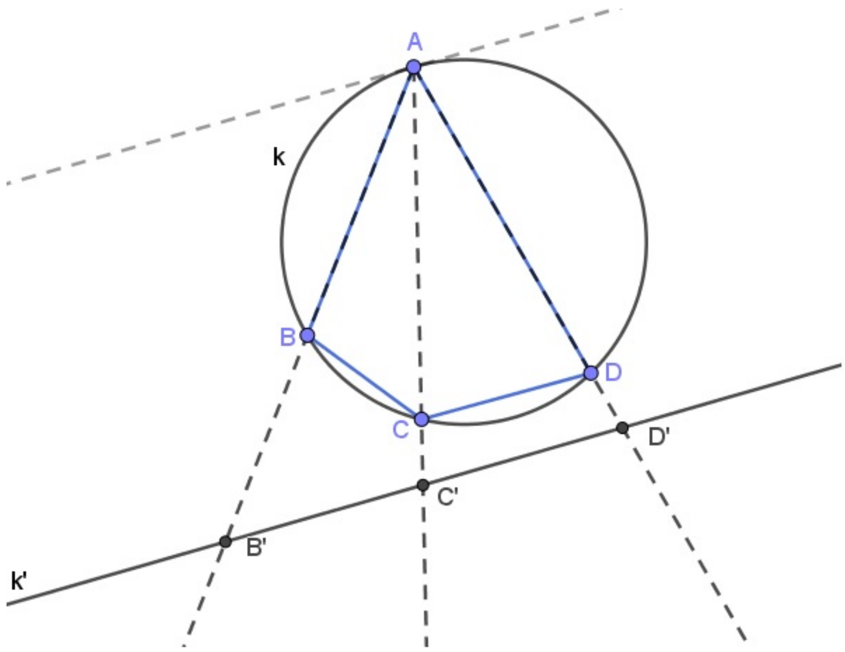
Klaudije Ptolemej (2. st.), grčki matematičar, osobito poznat kao astronom. U svom djelu *Almagest* daje matematičku teoriju gibanja Mjeseca, Sunca i planeta. Geocentrički sustav (Ptolomejev sustav) zasniva se na pretpostavci da se Sunce, planeti i zvijezde gibaju oko Zemlje koja je središte svemira. Pojavom Kopernikove teorije Ptolomejev sustav zamijenjen

je heliocentričnim sustavom.
Iskažimo i dokažimo pomoću inverzije Ptolomejev teorem u kojem je izražena veza između stranica i dijagonala tetivnog četverokuta.

Teorem 3.3.19. *Četverokut $ABCD$ je tetivni ako i samo ako vrijedi*

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|. \tag{3.12}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je četverokutu $ABCD$ opisana kružnica k. Pokažimo da vrijedi jednakost (3.12).



SLIKA 37.

Neka je pravac k' paralelan s tangentom kružnice k u točki A (*Slika 37*). Prema *Teoremu 2.4.14.* postoji inverzija σ s centrom u točki A koja preslikava kružnicu k na pravac k', odnosno preslikava točke B, C i D u točke B', C' i D' koje leže na pravcu k'. Točka C' leži između točaka B' i D' pa vrijedi:

$$|B'C'| + |C'D'| = |B'D'|. \tag{3.13}$$

Prema *Teoremu 2.2.10.* i (3.13) slijedi

$$\frac{|BC|}{|AB| \cdot |AC|} + \frac{|CD|}{|AC| \cdot |AD|} = \frac{|BD|}{|AB| \cdot |AD|}, \tag{3.14}$$

odakle slijedi jednakost (3.12).

Pretpostavimo da vrijedi (3.12). Pokažimo da je $ABCD$ tetivni četverokut, odnosno da mu je moguće opisati kružnicu. Neka kružnica inverzije σ ima centar u točki A i proizvoljan radijus r. Podijelimo li jednakost (3.12) s $|AB| \cdot |AC| \cdot |AD|$ dobit ćemo jednakost (3.14), te prema *Teoremu 2.2.10.* vrijedi jednakost (3.13). Točke B', C' i D' kolinearne su i točka

C' leži između njih. Iz toga slijedi da originali točaka B', C' i D' točke B, C i D leže na kružnici koja prolazi točkom A. Ta kružnica, označimo ju s k, inverzijom σ preslikava se na pravac koji sadrži točke B', C' i D'.
Kako zraka AC leži unutar kuta $\sphericalangle DAB$, dužina $\overline{AC}$ je dijagonala četverokuta $ABCD$. $\square$

3.4. Eulerov teorem

Leonhard Euler (1707.-1783.), švicarski matematičar, fizičar i astronom. Smatra se jednim od najznamenitijih i najproduktivnijih matematičara u povijesti. Podučavao ga je Johann Bernoulli koji je nagovorio Eulerova oca da mu dopusti studij matematike. Problem s vidom, te kasnije i potpuno osljepljenje, nije ga spriječilo da se i dalje bavi matematikom. Zanimljivo je to da je gotovo pola svojih rezultata ostvario u razdoblju potpune sljepoće.

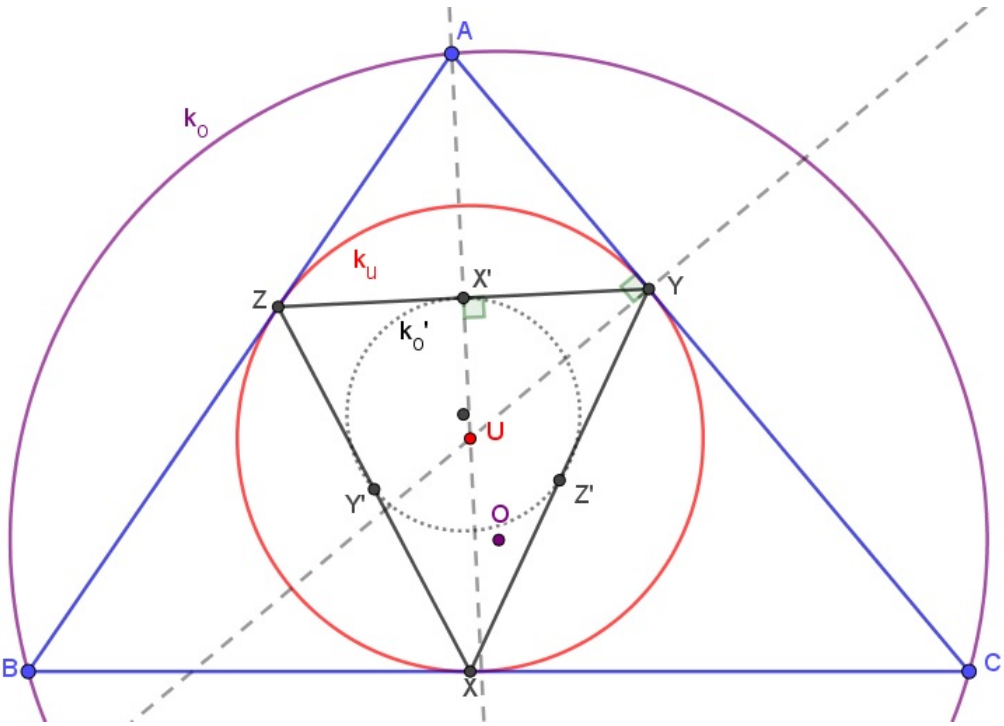
Jedan od njegovih mnogobrojnih rezultata, vezan za središta upisane i opisane kružnice trokuta, dokazat ćemo u nastavku pomoću inverzije.

Teorem 3.4.20. *Udaljenost središta U upisane kružnice k_u i središta O opisane kružnice k_o danog trokuta ABC dana je s*

$$|UO| = \sqrt{R^2 - 2Rr},$$

gdje je R polumjer opisane, a r polumjer upisane kružnice trokuta ABC.

Ova formula u literaturi je poznata kao Eulerova formula.



Slika 38.

Dokaz. Promotrimo inverziju σ kojoj je kružnica inverzije upisana kružnica k_u trokuta ABC. Označimo s X, Y i Z dirališta upisane kružnice k_u sa stranicama trokuta ABC, a s

X', Y' i Z' sjecišta stranica trokuta XYZ i pravaca na kojima leži U i odgovarajući vrhovi trokuta ABC (*Slika 38*). Prema konstrukciji inverzne slike točke vidimo da su točke X', Y' i Z' slike točaka A, B i C pri inverziji σ. Te je kružnica k'_o koja prolazi točkama X', Y' i Z' slika kružnice k_o pri toj inverziji.

Polumjer trokutu $X'Y'Z'$ opisane kružnice k'_o jednak je polovici polumjera opisane kružnice k_u, odnosno jednak je $\frac{1}{2}r$. Prema *Teoremu 2.2.5.* potencija točke U obzirom na kružnicu k_o je

$$p = R^2 - d^2,$$

gdje je s d označena udaljenost točaka U i O.

U dokazu *Teoremu 2.2.7.* pokazali smo da su kružnice k_o i k'_o homotetične s koeficijentom homotetije $\frac{c}{p}$, također su homotetične i s koeficijentom homotetije $\frac{\frac{1}{2}r}{R}$.
Kako je konstanta c inverzije σ jednaka r^2 imamo:

$$\frac{c}{p} = \frac{r^2}{R^2 - d^2} = \frac{\frac{1}{2}r}{R},$$

odakle slijedi Eulerova formula

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

$\square$

Literatura

[1] D. Bakoš, Z. K. Begović, *Eulerova kružnica*, Matematičko-fizički list,1 (2009/2010),23-28

[2] Z. K. Begović, A. Tonković, *Feuerbachov teorem*, Osječki matematički list, **9** (2009),21-30

[3] F. M. Brückler, *Povijest matematike I*, Sveučilište J. J. Strossmayera. Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[4] F. M. Brückler, *Povijest matematike II*, Sveučilište J. J. Strossmayera. Odjel za matematiku, Osijek, 2010.

[5] H. S. M. Coxeter, F. R. S., *Introduction to Geometry Second Edition*, New York, 1969.

[6] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, 1967.

[7] R. A. Johnson, *Modern Geometry*, New York, 1960.

[8] J.S. Mackay, *History of the Nine-point Circle*, Proc. Edinb. Math. Soc. 11 (1892) 19-61.

[9] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[10] D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.

[11] B. Pavković, *Inverzija u ravnini i njene primjene*, Društvo mladih matematičara "PITAGORA", Beli Manastir, 1990.

[12] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

Sažetak

Inverzija je transformacija ravnine određena s čvrstom točkom S koju nazivamo centar inverzije i pozitivnim realnim brojem c kojeg nazivamo konstanta inverzije. Svaka točka na kružnici polumjera $r_s = \sqrt{c}$ sa središtem u točki S inverzijom se preslika sama u sebe, stoga možemo reći da je inverzija jednoznačno određena kružnicom $k(S, r_s)$ koju nazivamo kružnica inverzije.

Inverzija je transformacija ravnine koja skup pravaca i kružnica preslikava u taj isti skup, ali pri tome može pravac preslikati u kružnicu i obrnuto. Pravci koji prolaze centrom inverzije S inverzijom se preslikaju sami u sebe, dok se ostali pravci preslikaju u kružnice koje ne prolaze centrom S. Kružnice koje prolaze centrom S inverzijom se preslikavaju u pravce koji ne prolaze centrom S, a ostale kružnice se preslikavaju u kružnice koje također na prolaze centrom inverzije S.

Korištenjem inverzije dokazali smo jedan od najljepših teorema geometrije trokuta, Feuerbachov teorem, koji tvrdi da Eulerova kružnica trokuta dira trokutu upisanu i sve tri pripisane kružnice. Nadalje, u radu smo primjenom inverzije dokazali najopćenitiji slučaj Apolonijevog problem. Primjenom inverzije dokazani su još i Ptolomejev i Eulerov teorem.

Ključne riječi: inverzija, Eulerova kružnica, Feuerbachov teorem, Apolonijev problem, Ptolomejev teorem, Eulerov teorem.

Summary

Inversion is a plane transformation determined by a fixed point S, which is called center of inversion and by a real number c called inversion constant. Each point on the circle of radius $r_s = \sqrt{c}$ centered at point S is mapped, by inversion, into itself, so we can say that the inversion is uniquely determined by a circle $k(S, r_s)$ which is called a circle of inversion.

Inversion is a plane transformation which set of lines and circles maps to the same set or it can replicate the line to a circle and vice versa. Lines through the center of inversion S, by inversion replicate themselves while the other lines replicate into a circles that does not pass the center S. Circles passing through the center S are mapped, by the inversion, in a lines that does not pass the center S, and the other circles are mapped into a circles, which also does not undergo inversion center S.

By using the inversion we have proved on of the most beautiful theorem in geometry of triangle, the Feuerbach's theorem. It claims that the Euler circle of any triangle is tangent internally to the incircle and tangent externally to the three escribed circles. Further, in addition to the work, by applying inversion, we have proved the most general case of the Apollonius problem. Ptolemy's and Euler's theorem were also proved.

Key words: inversion, Euler's circle, Feuerbach's theorem, Apollonius problem, Ptolomy's theorem, Euler's theorem.

Životopis

Marinela Bockovac je rođena 21. rujna 1993. godine u Osijeku. Osnovnu školu završila je u OŠ Višnjevac u Višnjevcu. 2008. godine je upisala III. gimnaziju u Osijeku, a 2012. upisuje Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom studiranja volontirala je u Dječjoj osječkoj kreativnoj kućici - Dokkica gdje je podučavala učenike matematiku. Trenutno radi kao učiteljica matematike u Osnovnoj školi Špansko-Oranice u Zagrebu.