Značajni pravci u geometriji trokuta

Alilović, Mirta

SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Mirta Alilović

ZNAČAJNI PRAVCI U GEOMETRIJI TROKUTA

Diplomski rad

Osijek, 2018.

SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

SMJER: Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Mirta Alilović

Diplomski rad

Značajni pravci u geometriji trokuta

Mentor diplomskog rada: prof.dr.sc Zdenka Kolar-Begović
Komentor diplomskog rada: dr.sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2018.

Sadržaj

Uvod

Trokut, kao najjednostavniji mnogokut, bio je proučavan još u staroegipatskoj geometriji, a proučavanje se nastavilo do danas te su nam poznata njegova brojna svojstva. Uz trokut se često spominju njemu karakteristične točke: ortocentar, središte trokutu opisane i središte trokutu upisane kružnice i težište trokuta, iako to nisu jedine točke koje možemo pridružiti trokutu. U ovom radu ćemo se baviti vezom između tri karakteristične točke trokuta; ortocentra, središta trokutu opisane kružnice te težišta trokuta. Promatrat ćemo nožišta okomica povučenih na stranice trokuta iz neke točke koja pripada kružnici opisanoj tom trokutu.

Diplomski rad sastoji se iz dva poglavlja u kojima se govori o značajnim pravcima trokuta. U prvom poglavlju proučavat ćemo pravac na kojem leže ortocentar trokuta, težište trokuta i središte trokutu opisane kružnice, odnosno Eulerov pravac. Na početku ćemo navesti činjenice o Eulerovom pravcu, a zatim pokazati dva različita pristupa dokazu teorema o Eulerovom pravcu. Na kraju ćemo iskazati teoreme koji govore o Eulerovom pravcu te iskazuju vezu tog pravca s Eulerovom kružnicom trokuta i Feuerbachovom točkom.

Drugo pogavlje govori o pravcu koji prolazi kroz nožišta okomica povučenih iz neke točke koja leži na kružnici opisanoj trokutu na stranice tog trokuta, u literaturi poznatog pod imenom Simsonov pravac. Dan je prikaz različitih načina dokazivanja kolinearnosti navedenih nožišta te su izrečena važnija svojstva takvog pravca. Na kraju su navedena poopćenja Simsovog pravca te njegova veza s Eulerovom kružnicom trokuta.

1 Eulerov pravac

1.1 O Leonhardu Euleru

Leonhard Euler je rođen 1707. godine u švicarskom gradu Baselu. Tijekom svog školovanja najviše se bavio matematikom te je već s 19 godina objavio svoj prvi znanstveni rad. Kroz život je promijenio više zanimanja. Najprije je, uz akademski posao, radio i za rusku mornaricu te je zatim postao profesor fizike. Nakon što se oslobodilo mjesto za profesora matematike, dodjeljen mu je posao na Akademiji u St. Petersburgu. Euler je bio jedan od najproduktivnijih matematičara u povijesti koji se bavio raznim područjima matematike kroz cijeli svoj život te je za sobom ostavio brojne matematičke knjige i članke. Mnogi matematički pojmovi dobili su ime u čast ovog matematičara jer ih je on uočio i proučavao njihova svojstva. Među tim pojmovima je i Eulerov pravac o kojem je 1763. godine, za vrijeme boravka u Berlinu, napisao članak koji je objavljen 4 godine kasnije u akademskim novinama St. Petersburške Akademije. Umro je 1783. godine.

1.2 Razni dokazi teorema o Eulerovom pravcu

Eulerov pravac je pravac na kojem leže tri karakteristične točke trokuta – središte trokutu opisane kružnice, težište, tj. sjecište težišnica trokuta te ortocentar, odnosno sjecište pravaca na kojima leže visine trokuta. Ukoliko promatramo jednakostraničan trokut, Eulerov pravac degenerira u točku jer se upravo tri navedene točke koje leže na Eulerovom pravacu poklapaju, dok se kod jednakokračnog trokuta Eulerov pravac podudara sa simetralom osnovice trokuta. Nadalje, ako promatramo tupokutan trokut, Eulerov pravac siječe najdulju stranicu trokuta, dok težište trokuta i središte trokutu opisane kružnice leže na različitim stranama Eulerovog pravca s obzirom na najdulju stranicu.

U ovom poglavlju bavit ćemo se raznim pristupima pri dokazivanju teorema o Eulerovom pravcu, stoga najprije iskažimo teorem:

Teorem 1. *Središte O opisane kružnice trokutu, težište G i ortocentar H leže na jednom pravcu pri čemu vrijedi $|GH| : |GO| = 2 : 1$.*

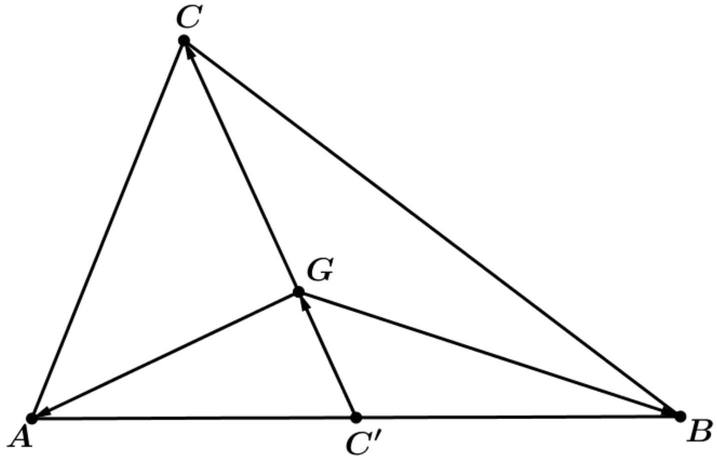
1.2.1 Dokaz teorema primjenom vektora

Neka je dan trokut ABC i neka je G težište trokuta, H ortocentar trokuta, a O središte trokutu ABC opisane kružnice. Neka je točka C' polovište dužine $\overline{AB}$ trokuta ABC. Uočimo da vrijede sljedeće tri jednakosti:

$$\overrightarrow{C'G} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{C'C},$$

$$\overrightarrow{C'G} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{C'B},$$

$$\overrightarrow{C'G} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{C'A}.$$



Slika 1.1: Vektorski pristup dokazu teorema o Eulerovom pravcu

Ukoliko gornje jednakosti zbrojimo, dobivamo sljedeće:

$$3\overrightarrow{C'G} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{C'C} \tag{1.1}$$

Budući da G dijeli težišnicu $\overline{CC'}$ u omjeru 2:1 od vrha, slijedi

$$3\overrightarrow{C'G} = \overrightarrow{C'C}.$$

Nadalje, kako je C' polovište dužine $\overline{AB}$, slijedi da su vektori $\overrightarrow{AC'}$ i $\overrightarrow{C'B}$ jednake duljine, odnosno da je

$$\overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{0}.$$

Uvrstimo li dobivene tvrdnje u jednakost (1.1), dobivamo:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}. \tag{1.2}$$

Promotrimo sada visine trokuta. Točku O osnom simetrijom s obzirom na pravac AB preslikajmo u točku O_1. Tada je četverokut OBO_1A romb jer je točka O središte trokutu opisane kružnice, što znači da je jednako udaljena od točaka A i B pa su dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ polumjeri te kružnice. Analogno vrijedi i za udaljenosti točaka A i B od točke O_1 jer osna simetrija čuva udaljenost.
Nadalje, vrijedi jednakost:

$$\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO_1},$$

a kako smo prethodno utvrdili da je OBO_1A romb, vrijedi jednakost vektora $\overrightarrow{AO_1}$=$\overrightarrow{OB}$ pa dobivamo sljedeću jednakost:

$$\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}. \tag{1.3}$$

Neka je H četvrti vrh paralelograma određenog točkama C, O i O_1. Tada je dužina $\overline{OH}$ dijagonala navedenog paralelograma te vrijedi

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH},$$

odnosno, kako je CHO_1O paralelogram, vrijedi da je $\overrightarrow{CH}$=$\overrightarrow{OO_1}$ iz čega slijedi:

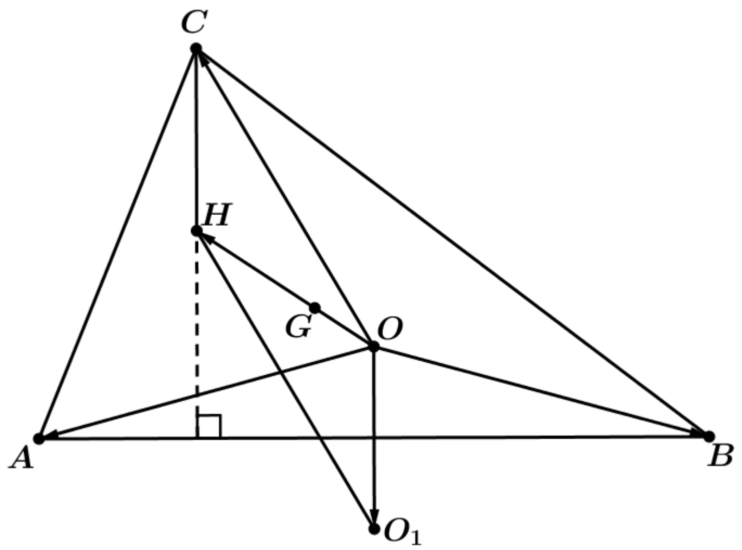
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OO_1}. \tag{1.4}$$

Uvrstimo li jednakost (1.3) u jednakost (1.4), dobivamo sljedeće:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \tag{1.5}$$

Jer je CHO_1O paralelogram to je dužina $\overline{CH}$ paralelna s dužinom $\overline{OO_1}$, iz čega slijedi da je produžetak dužine $\overline{CH}$ na stranicu $\overline{AB}$ promatranog trokuta ABC okomica na tu stranicu, odnosno da je ta dužina visina na stranicu $\overline{AB}$ promatranog trokuta te da je točka H ortocentar trokuta ABC (vidi sliku 1.2).

Analogno se dobiju preostale dvije visine trokuta ABC. Dakle, analogno osnom si-



Slika 1.2: Trokut ABC s istaknutim paralelogramom CHO_1O

metrijom preslikavamo točku O s obzirom na pravce na kojima leže preostale dvije stranice trokuta ABC te na isti način promatramo pripadajući romb te pripadajući paralelogram iz kojih dobivamo analogne jednakosti te visine na preostale dvije stranice trokuta.

Dobivene rezultate primijenimo na dokazivanje teorema o Eulerovom pravcu, za što nam je bila potrebna prethodna analiza.

Dokaz. Oznake koje smo koristili u prethodnoj analizi, koristit ćemo i u dokazu teorema 1. Dakle, ortocentar trokuta ABC označavamo s H, težište s G, a središte trokutu opisane kružnice s O. Promatrajući trokut ABC (slika 1.3), možemo uočiti sljedeće jednakosti:

$$\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{OB},$$

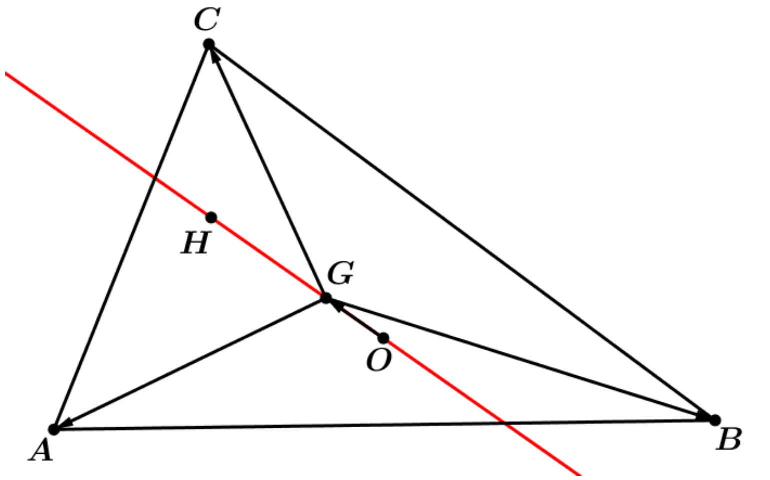
$$\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{OC}.$$

Zbrojimo li gornje jednakosti, dobivamo sljedeće:

$$3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Iskoristimo li jednakost (1.2), dobivamo:

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$



Slika 1.3: Dokaz Eulerovog teorema

Uvrstimo li sada to u jednakost (1.5), slijedi:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH},$$

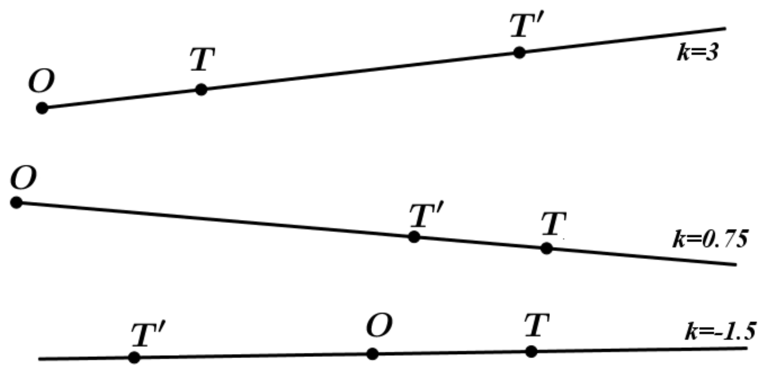
tj. točke O, G i H su kolinearne te vrijedi da točka G dijeli dužinu $\overline{HO}$ u omjeru 2:1. $\square$

1.2.2 Dokaz pomoću homotetije

U ovom pristupu koristit ćemo homotetiju. Definirat ćemo pojam homotetije te iskazati teoreme koje ćemo koristiti:

Definicija 1. *Neka je O točka ravnine M i k realan broj, $k \neq 0$. Homotetija je preslikavanje h_O^k ravnine M, koje svakoj točki $T \in M$ pridružuje točku T', $T'=h_O^k(T)$, tako da vrijedi:*

- *Točke O, T i T' leže na istom pravcu;*
- *Ako je k>0, onda T' leži na polupravcu OT;*
  Ako je k<0, onda T' leži na polupravcu TO;
- $|OT'| = |k||OT|$.



Slika 1.4: Tri različita slučaja homotetije u ovisnosti o k

Točku O nazivamo centar homotetije, a broj k koeficijent homotetije (slika 1.4).

Može se dokazati da je homotetija preslikavanje sličnosti, o čemu nam govori sljedeći teorem:

Teorem 2. *Ako je h_O^k dana homotetija i ako su P i Q bilo koje dvije točke takve da je $P' = h_O^k(P)$ i $Q' = h_O^k(Q)$, tada vrijedi $|P'Q'| = |k||PQ|$.*

Dokaz. Promotrimo trokute OQP i $OQ'P'$ (slika 1.5). Kako zbog svojstva homotetije vrijedi

$$\frac{|OP'|}{|OP|} = |k| = \frac{|OQ'|}{|OQ|}$$

te kako se kutovi $\measuredangle POQ$ i $\measuredangle P'OQ'$ sukladni, slijedi da su promatrani trokuti slični. Iz sličnosti trokuta slijedi:

$$\frac{|P'Q'|}{|PQ|} = \frac{|OP'|}{|OP|} = |k|,$$

stoga vrijedi

$$|P'Q'| = |k||PQ|.$$

□

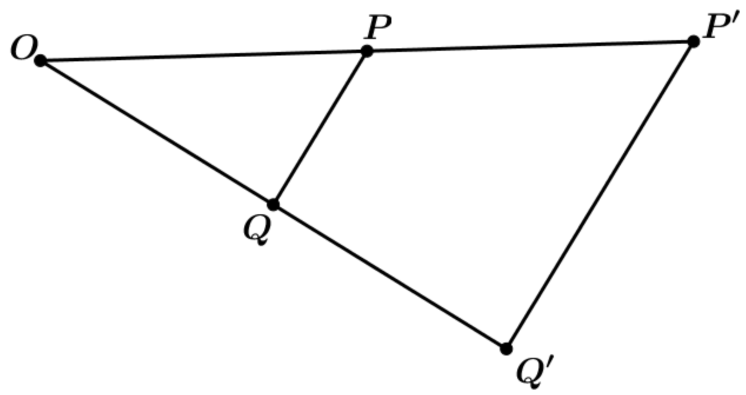
Može se pokazati da homotetija h s centrom O i koeficijentom k, dužinu preslika u dužinu. Dakle, promotrimo bilo koju dužinu $\overline{PQ}$. Ono što želimo pokazati je da ako je X bilo koja točka koja leži na dužini $\overline{PQ}$ i ako je $X' = h_O^k(X)$ da tada X' mora ležati na dužini $\overline{P'Q'}$.

Pokazat ćemo da vrijedi sljedeća jednakost (slika 1.6):

$$|P'X'| + |X'Q'| = |P'Q'|.$$

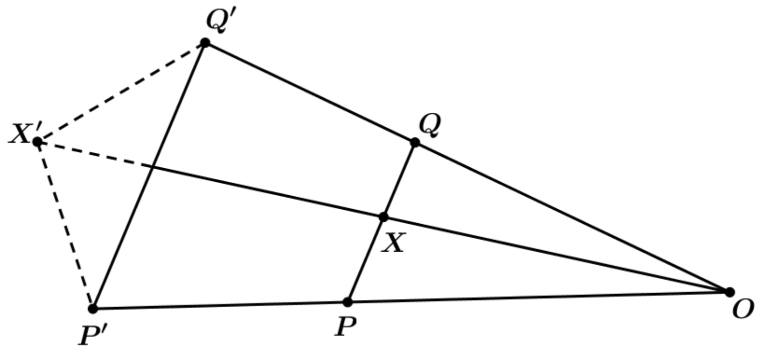
Pomoću prethodnog teorema zaključujemo da vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} |P'X'| + |X'Q'| &= |k||PX| + |k||XQ| \\ &= |k|(|PX| + |XQ|) \\ &= |k||PQ|, \end{aligned}$$



Slika 1.5: Slični trokuti OQP i $OQ'P'$

a pokazali smo da je $|P'Q'| = |k||PQ|$ iz čega slijedi $|P'X'| + |X'Q'| = |P'Q'|$ te X' leži na dužini $\overline{P'Q'}$. Iz ovog razmatranja možemo zaključiti da se svaka točka koja leži na dužini $\overline{PQ}$ preslika u točku koja leži na dužini $\overline{P'Q'}$. Time smo pokazali da homotetija dužinu preslika u dužinu. Istom metodom može se pokazati da homotetija



Slika 1.6: Homotetija dužinu preslika u dužinu

pravce preslika u pravce.

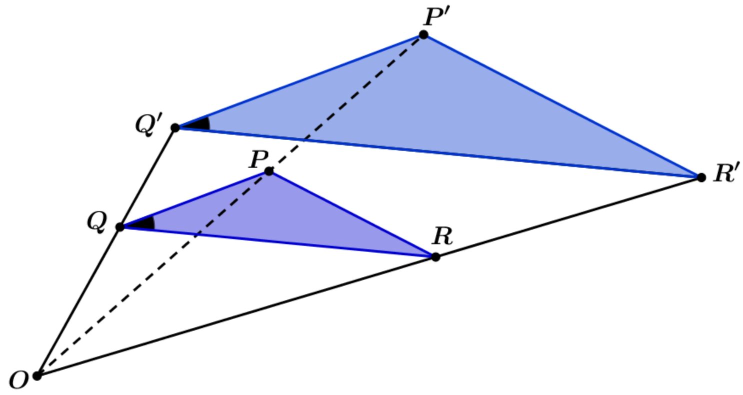
Nadalje, još jedno bitno svojstvo homotetije je da čuva mjeru kuta, odnosno ako je $\measuredangle P'Q'R' = h_O^k(\measuredangle PQR)$, tada je mjera $\measuredangle P'Q'R'$ jednaka mjeri kuta $\measuredangle PQR$. Kako bi pokazali to svojstvo, promotrimo trokute $\triangle PQR$ i $\triangle P'Q'R'$ (slika 1.7). Može se primijeniti iz prethodno navedenog teorema 2 vrijedi sljedeće:

$$\frac{|P'Q'|}{|PQ|} = \frac{|Q'R'|}{|QR|} = \frac{|P'R'|}{|PR|} = |k|.$$

S obzirom da vrijede prethodne jednakosti, slijedi da je $\triangle P'Q'R' \sim \triangle PQR$, što znači da vrijedi $\measuredangle P'Q'R' = \measuredangle PQR$.

Iz ovoga možemo zaključiti da ako homotetijom preslikamo dva okomita ili dva paralelna pravca, njihove slike će također biti okomiti, odnosno paralelni pravci. Na osnovu ovih svojstava homotetije slijedi da homotetija preslikava poligone u njima slične poligone. Navedimo sljedeću tvrdnju o svojstvima homotetije:

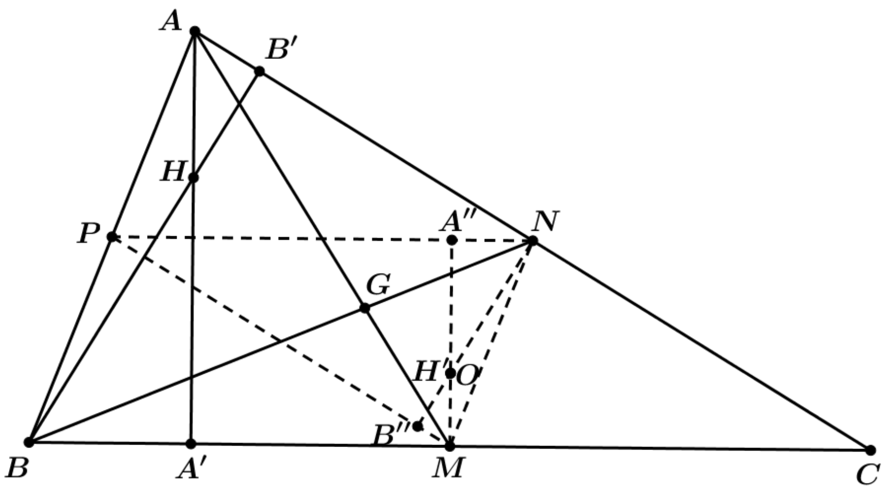
Teorem 3. *Neka je preslikavanje h homotetija ravnine. Tada vrijedi:*



Slika 1.7: Homotetični trokuti

- *h preslikava dužine u dužine, polupravce u polupravce, pravce u pravce;*
- *h čuva mjeru kutova, odnosno kut preslika u njemu sukladan kut;*
- *h čuva paralelnost i okomitost pravaca;*
- *h preslikava poligone u njima slične poligone.*

Sada možemo dokazati teorem o Eulerovom pravcu koristeći homotetiju.
Dokaz. Promotrimo trokut ABC (slika 1.8). S G označimo težište promatranog trokuta



Slika 1.8: Dokaz teorema o Eulerovom pravcu pomoću homotetije

te s A' označimo nožište visine iz vrha A, a s B' nožište visine iz vrha B. S H označimo sjecište dva pravca na kojima leže navedene visine, odnosno ortocentar danog trokuta. Prema definiciji homotetije promatrana točka, njezina slika te centar homotetije su kolinearne točke. Stoga ćemo promatrati točku G kao centar homotetije, a točku H kao točku koju ćemo preslikavati homotetijom. Ukoliko pokažemo da se homotetijom s centrom u točki G i koeficijentom homotetije $k = -\frac{1}{2}$ točka H preslika u središte trokutu opisane kružnice O, dokazali smo teorem o Eulerovom pravcu.
Promotrimo najprije homotetične slike vrhova A, B i C trokuta ABC s obzirom na točku

G i koeficijentom $k = -\frac{1}{2}$. Označimo polovišta stranica trokuta $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ s M, N i P redom. Kako je G težište trokuta, a točka M polovište stranice $\overline{BC}$ promatranog trokuta, slijedi $|MG|=\frac{1}{2}|AG|$. Stoga homotetija s centrom G i koeficijentom $k = -\frac{1}{2}$ vrh A preslika u točku M. Analogno, vrh B preslika se u točku N koja je polovište stranice $\overline{AC}$ promatranog trokuta, a vrh C preslika se u točku P koja je polovište stranice $\overline{AB}$. Slijedi da homotetija s centrom u točki G i koeficijentom $k = -\frac{1}{2}$ trokut ABC preslika u trokut MNP.
Nadalje, kako točka A' leži na stranici $\overline{BC}$, njena slika $A'' = h(A')$ leži na slici dužine $\overline{BC}$, odnosno na stranici $\overline{NP}$. Također, budući da su dužine $\overline{AA'}$ i $\overline{BC}$ okomite, slijedi da su i $\overline{MA''}$ i $\overline{NP}$ okomite dužine. Slično tome, homotetija visinu $\overline{BB'}$ preslika u $\overline{NB''}$, što je visina trokuta MNP. Kako ortocentar H leži na oba pravca na kojima leže visine, točka $H' = h(H)$ leži na slikama tih visina, odnosno na pravcima MA'' i NB'' na kojima leže visine trokuta MNP, što znači da je upravo točka H' ortocentar tog trokuta.
Kako je ranije spomenuto, dužine $\overline{MA''}$ i $\overline{NP}$ su okomite, a znamo da homotetija pravce preslika u njima paralelene pravce pa su stoga dužine $\overline{NP}$ i $\overline{BC}$ paralelne, iz čega slijedi da su dužine $\overline{MA''}$ i $\overline{BC}$ također međusobno okomite. S obzirom da vrijedi prethodna okomitost te da je točka M polovište stranice $\overline{BC}$, vrijedi da je pravac MA'' simetrala te stranice. Analogno zaključimo da je pravac NB'' simetrala stranice $\overline{AC}$.
Simetrale stranica trokuta ABC sijeku se u središtu trokutu opisane kružnice koju smo označili s O. Dakle, vrijedi da je $O \equiv H'$, odnosno da se ortocentar H trokuta ABC preslika u točku O koja je središte opisane kružnice tog trokuta, iz čega slijedi da su ortocentar H, težište G te središte opisane kružnice O, prema definiciji homotetije, kolinearne točke. Također, s obzirom da smo za centar homotetije uzeli točku G, te koeficijent $k = -\frac{1}{2}$, vrijedi da je

$$|GH'| = |GO| = |-\tfrac{1}{2}||GH|,$$

odnosno

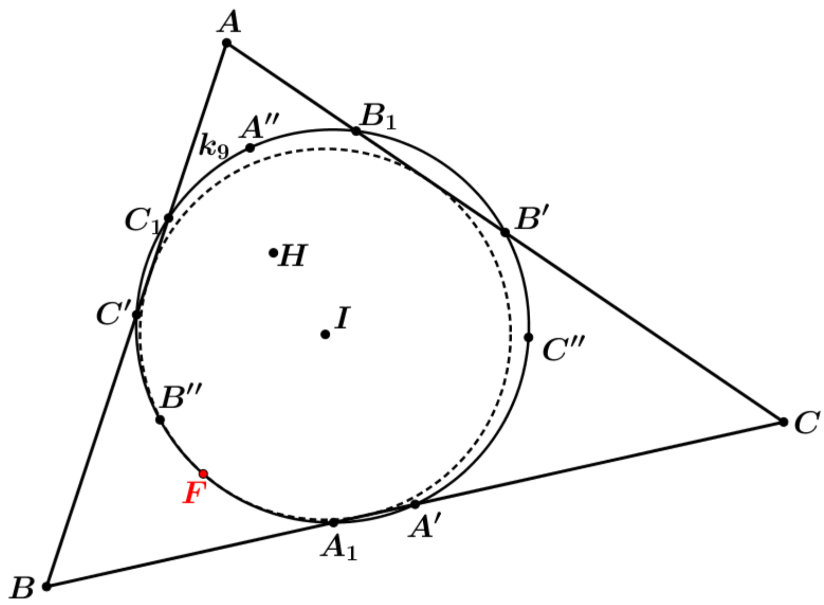
$$|GH| = 2|GH'| = 2|GO|,$$

čime smo dokazali da su promatrane tri karakteristične točke trokuta kolinearne te da je udaljenost od težišta do ortocentra dvostruko veća od udaljenosti od težišta do središta trokutu opisane kružnice, čime je dokazan teorem o Eulereovom pravcu pomoću homotetije. $\square$

1.3 Veza između Eulerovog pravca i Eulerove kružnice trokuta

Kada su u pitanju pojmovi iz geometrije koji su vezani uz Eulera, uz Eulerov pravac često se spominje i Eulerova kružnica trokuta. Upravo središte te kružnice leži na Eulerovom pravcu. Eulerova kružnica trokuta se definira kao kružnica na kojoj leži sljedećih devet točaka trokuta ABC: A', B', C' koje su polovišta stranica tog trokuta, A'', B'', C'' polovišta dužina $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, gdje je H ortocentar tog trokuta te točke A_1, B_1 i C_1, koje su nožišta visina tog trokuta (slika 1.9). Središte navedene kružnice je polovište dužine $\overline{OH}$, gdje je točka O središte trokutu ABC opisane kružnice, za koju smo već pokazali da leži na Eulerovom pravcu. Za dokaz svojstava Eulerove kružnie trokuta pogledati [1].

Također, treba naglasiti kako se Eulerov pravac pojavljuje kod definiranja i određiva-



Slika 1.9: Eulerova kružnica trokuta i Feuerbachova točka

nja svojstava Feuerbachove točke – odnosno točke u kojoj se dodiruju trokutu upisana kružnica i Eulerova kružnica trokuta (slika 1.9). Ta točka naziv je dobila po matematičaru Karlu Wilhelmu von Feuerbachu, koji se često spominje uz pojam Eulerove kružnice trokuta. O svojstvima Feuerbachove točke govori nam sljedeći teorem:

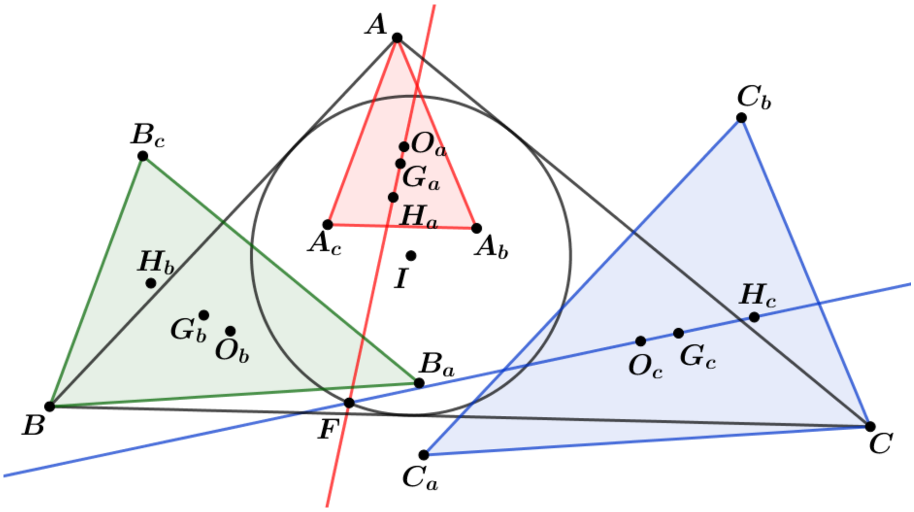
Teorem 4. *Neka je ABC trokut i I središte upisane kružnice tog trokuta. Neka su C_a i C_b redom nožišta okomica povučenih iz točke C na simetrale AI i BI odgovarajućih kutova. Analogno definiramo i točke A_b, A_c i B_a, B_c. Eulerovi pravci trokuta AA_bA_c, BB_aB_c i CC_aC_b sijeku se u Feuerbachovoj točki F trokuta ABC (slika 1.10).*

Prije samog dokaza ovog teorema, iskazat ćemo, leme, teorem i definiciju kojima ćemo se koristit:

Lema 1. *Neka je ABC trokut i I središte kružnice upisane trokutu ABC. Tada je $\measuredangle ABI = \measuredangle IBC$, $\measuredangle BCI = \measuredangle ICA$ i $\measuredangle CAI = \measuredangle IAB$ te vrijedi*

$$\measuredangle ABI + \measuredangle BCI + \measuredangle CAI = \measuredangle IBC + \measuredangle ICA + \measuredangle IAB = 90^\circ.$$

Lema 2. *Uz oznake iz teorema 4 vrijedi da je $|CH_c|$=r, pri čemu je H_c ortocentar trokuta CC_aC_b, a r polumjer trokutu ABC upisane kružnice.*



Slika 1.10: Sjecište Eulerovih pravaca naznačenih trokuta

Teorem 5. *Neka su A, B, C i D točke ravnine. Eulerove kružnice trokuta ABC, ABD, BCD i ACD sijeku se u jednoj točki.*

Definicija 2. *Točku iz teorema 5 nazivamo Ponceletova točka četvorke A, B, C i D.*

Teorem 6. *Neka je ABC trokut i I središte tom trokutu upisane kružnice. Eulerove kružnice trokuta AIB, AIC, BIC sijeku se u Feuerbachovoj točki trokuta ABC.*

Sada dokažimo teorem 4.

Dokaz. Promotrimo trokut CC_aC_b (slika 1.11). Trebamo pokazati da njegov Eulerov pravac prolazi kroz Feuerbachovu točku trokuta ABC, koju smo označili s F. Ortocentar trokuta CC_aC_b označit ćemo s H_c, a središte opisane mu kružnice s O_c. Pravci CC_b i BI, odnosno pravci CC_a i AI su međusobno okomiti pa vrijedi da točke C_a i C_b leže na kružnici promjera $\overline{CI}$. Ta kružnica prolazi kroz vrhove promatranog trokuta CC_aC_b što znači da je to kružnica opisana tom trokutu i vrijedi

$$\measuredangle CIC_b = \measuredangle CC_aC_b. \tag{1.6}$$

Nadalje, pokažimo da su dužine $\overline{C_bC_a}$ i $\overline{AB}$ paralelne. Uočimo da je $\measuredangle CIC_b$ vanjski kut trokuta BCI i budući da točka C_b leži na pravcu IB, imamo sljedeće:

$$\measuredangle CIC_b = \measuredangle IBC + \measuredangle BCI. \tag{1.7}$$

Kako je $\measuredangle BCI = \dfrac{1}{2}\measuredangle BCA$, a $\measuredangle IBC = \dfrac{1}{2}CBA$, prema lemi 1 imamo da je

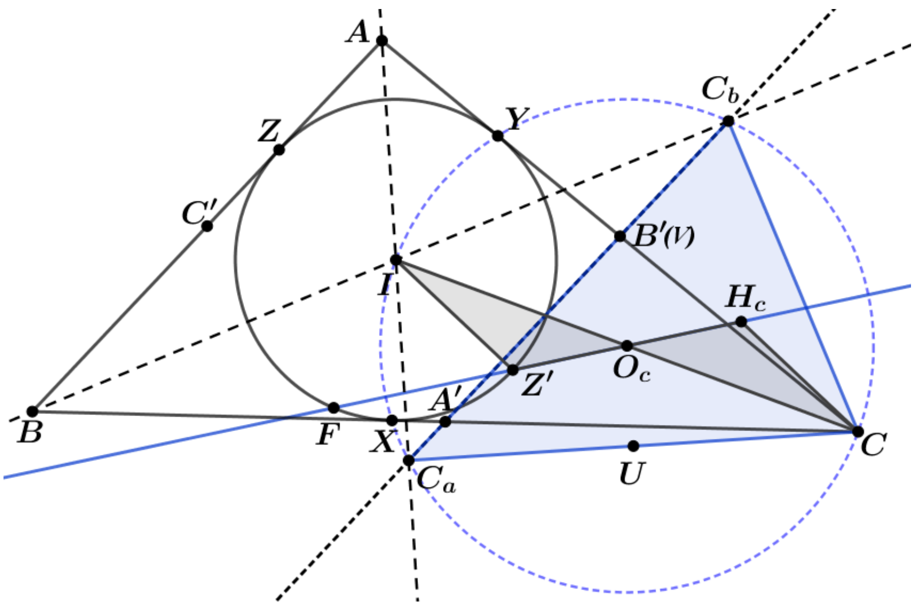
$$\measuredangle BCI + \measuredangle IBC = 90^\circ - \measuredangle IAC. \tag{1.8}$$

Kako su pravci CC_a i AI okomiti i zbog (1.8) vrijedi:

$$\measuredangle CIC_b = \measuredangle C_aCA. \tag{1.9}$$

Sada iz (1.6) i (1.9) dobivamo:

$$\measuredangle CC_aC_b = \measuredangle C_aCA. \tag{1.10}$$



Slika 1.11: Eulerov pravac trokuta CC_aC_b

Označimo s V sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{C_aC_b}$ te s U polovište dužine $\overline{CC_a}$. Zbog jednakosti (1.10) trokut CVC_a je jednakokračan i visina $\overline{VU}$ je okomita na stranicu $\overline{CC_a}$, iz čega dalje slijedi da je dužina $\overline{VU}$ paralelna s dužinom $\overline{AC_a}$. Kako je U polovište dužine $\overline{C_aC}$ i dužina $\overline{VU}$ paralelna s $\overline{AC_a}$ slijedi da je $\overline{VU}$ srednjica trokuta CAC_a, odnosno V je polovište dužine $\overline{AC}$. Stoga pravac C_bC_a prolazi kroz polovište stranice $\overline{AC}$.
Analogno se pokaže da pravac C_bC_a prolazi kroz polovište stranice $\overline{BC}$ iz čega slijedi da srednjica trokuta ABC leži na pravcu C_aC_b, odnosno pravac C_aC_b paralelan je s pravcem AB.
Neka su X, Y i Z točke u kojima kružnica upisana trokutu ABC dira stranice $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, redom. Neka je Z' slika točke Z pri centralnoj simetriji s centrom u I. Tada i Z' leži na upisanoj kružnici trokuta ABC. Primijetimo da su dužine $\overline{IZ'}$ i $\overline{CH_c}$ paralelne što slijedi iz okomitosti dužina $\overline{IZ}$ i $\overline{AB}$, odnosno $\overline{IZ}$ i $\overline{C_aC_b}$ te okomitosti dužina $\overline{C_aC_b}$ i $\overline{CH_c}$.
Nadalje, uočimo da vrijedi i sljedeće:

$$\measuredangle BIA = \measuredangle C_bIC_a.$$

Primjenom leme 1, dobivamo da je

$$\measuredangle BIA = 180° - (\measuredangle ABI + \measuredangle IAB) = 180° - (90° - \measuredangle ACI) = 90° + \measuredangle ACI.$$

Stoga imamo:

$$\measuredangle C_bIC_a = \measuredangle BIA = 90° + \measuredangle ACI. \tag{1.11}$$

Kako točke C, C_b, I i C_a leže na kružnici opisanoj trokutu CC_aC_b pri čemu C i I ne leže na istom kružnom luku određenom s točkama C_a i C_b vrijedi:

$$\measuredangle C_bCC_a = 180° - \measuredangle C_bIC_a. \tag{1.12}$$

Sada iz (1.11) i (1.12) dobivamo:

$$\measuredangle C_bCC_a = 180 - \measuredangle C_bIC_a = 180^\circ - (90^\circ + \measuredangle ACI) = 90^\circ - \measuredangle ACI. \tag{1.13}$$

Kako su pravci CH_c i $Z'I$ paralelni vrijedi da su kutovi $\measuredangle H_cCI$ i $\measuredangle Z'IC$ sukladni, odnosno da su i kutovi $\measuredangle H_cCO_c$ i $\measuredangle Z'IO_c$ također sukladni. Kako je točka O_c polovište dužine $\overline{CI}$ vrijedi da je $|CO_c| = |O_cI|$, a iz leme 2 je $|CH_c| = |IZ'|$ pa vrijedi da su trokuti CH_cO_c i $IZ'O_c$ sukladni. Stoga vrijedi i sukladnost kutova $\measuredangle CO_cH_c$ i $\measuredangle IO_cZ'$ te su stoga točke O_c, H_c i *Z'* kolinearne.
Prema Talesovom teoremu vrijedi da je kut $\measuredangle Z'FZ$ pravi. Sljedeće što ćemo pokazati je da je i $\measuredangle O_cFZ$ pravi kut.
Iskoristimo sada teorem 6 koji kaže da je Feuerbachova točka zapravo Ponceletova točka četvorke *A*, *B*, *C* i *I*, tj. da leži na Eulerovim kružnicama trokuta *ABC*, *AIB*, *BIC* i *AIC*. Označimo s *W* polovište dužine $\overline{BI}$, a s A', B' i C' polovišta dužina $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom. Nadalje,

$$\measuredangle ZFO_c = \measuredangle WFO_c - \measuredangle ZFW. \tag{1.14}$$

Kako imamo da točke O_c, *F*, *W* i A' leže na Eulerovoj kružnici trokuta *BIC*, slijedi da su kutovi $\measuredangle WFO_c$ i $\measuredangle WA'O_c$ sukladni. S obzirom da su dužine $\overline{O_cW}$ i $\overline{A'W}$ srednjice tog istog trokuta, zaključujemo da je četverokut $A'WIO_c$ paralelogram pa imamo da je kut $\measuredangle WA'O_c$ sukladan kutu $\measuredangle O_cIW$. Ukoliko uzmemo u obzir zbroj kutova u trokutu *BIC* i lemu 1, slijedi:

$$\measuredangle O_cIW = \measuredangle CIB = \measuredangle CBI + \measuredangle ICB = 90^\circ - \measuredangle BAI. \tag{1.15}$$

Promotrimo li trokut *AIB*, njegova Eulerova kružnica sadrži točke *W*, *F*, *Z* i C', imamo da su kutovi $\measuredangle ZFW$ i $\measuredangle ZC'W$ suplementarni.
Kako je dužina $\overline{WC'}$ srednjica trokuta *ABI*, vrijedi:

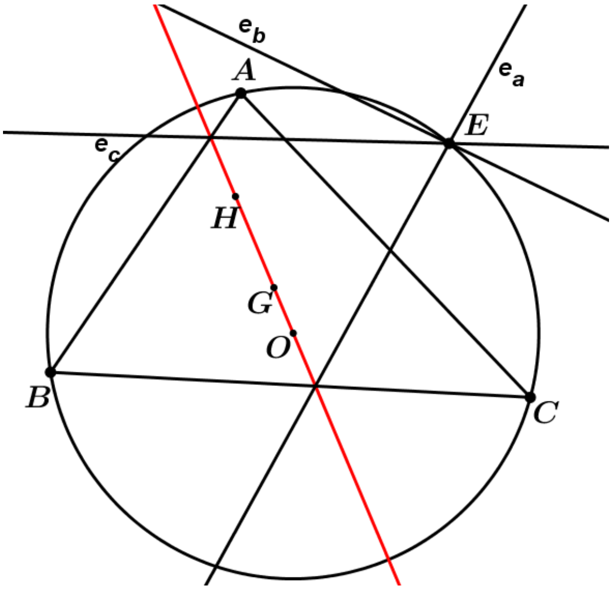
$$\measuredangle ZC'W = \measuredangle BAI. \tag{1.16}$$

Uvrstimo li (1.15) i (1.16) u (1.14), slijedi da je kut $\measuredangle ZFO_c$ pravi kut. Kako smo dobili da su kutovi $\measuredangle Z'FZ$ i $\measuredangle ZFO_c$ pravi, imamo da točka *F* leži na pravcu $Z'O_c$, odnosno leži na Eulerovom pravcu trokuta CC_aC_b.
Analogno se pokaže da je točka *F* na Eulerovim pravcima preostalih trokuta iz čega nam slijedi tvrdnja da je točka *F* sjecište Eulerovih pravaca trokuta AA_bA_a, BB_aB_c i CC_aC_b.

□

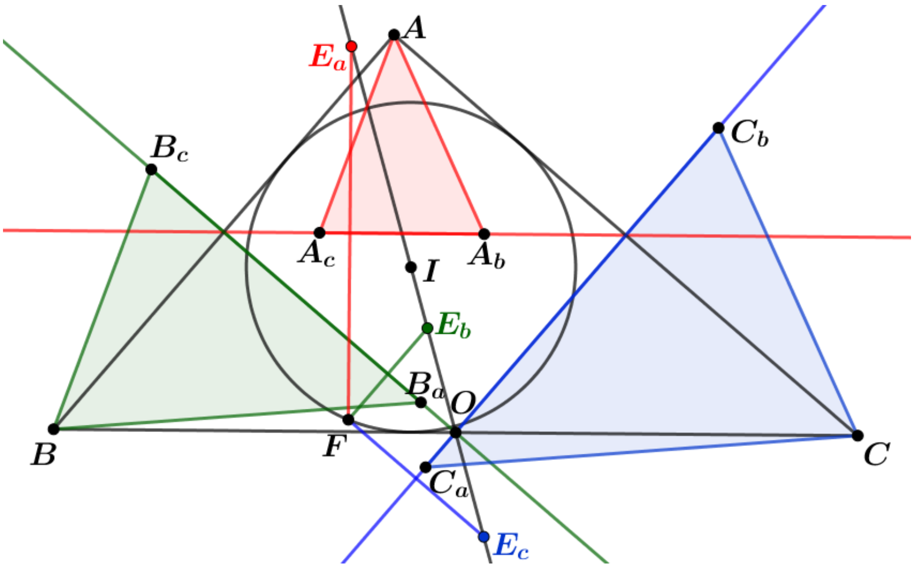
Eulerov pravac povezan je i s Eulerovom točkom simetrije koja se definira na sljedeći način:

Definicija 3. *Neka je ABC trokut. Pravci e_a, e_b i e_c simetrični Eulerovom pravcu trokuta ABC s obzirom na pravce na kojima leže stranice tog trokuta sijeku se u točki E koja leži na opisanoj kružnici tog trokuta. Točku E nazivamo Eulerova točka simetrije trokuta ABC (slika 1.12).*



Slika 1.12: Eulerova točka simetrije

Može se pokazati veza Eulerove točke simetrije, koristeći se Eulerovim pravcem, s Feuerbachovom točkom:



Slika 1.13: Eulerov pravac i Feuerbachova točka

Teorem 7. *Neka je ABC trokut i I središte upisane, a O središte opisane kružnice tog trokuta. Neka su C_a i C_b redom nožišta okomice iz točke C na simetrale kuta AI i BI. Analogno definiramo i točke A_b, A_c, B_a i B_c. Pravci simetrični Eulerovom pravcu trokuta CC_aC_b s obzirom na pravce na kojima leže stranice tog trokuta i pravac IO sijeku se u točki E_c koja je simetrična Feuerbachovoj točki trokuta ABC s obzirom na pravac C_aC_b. Slično vrijedi za trokute AA_bA_c i BB_aB_c (slika 1.13).*

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [8].

2 Simsonov pravac

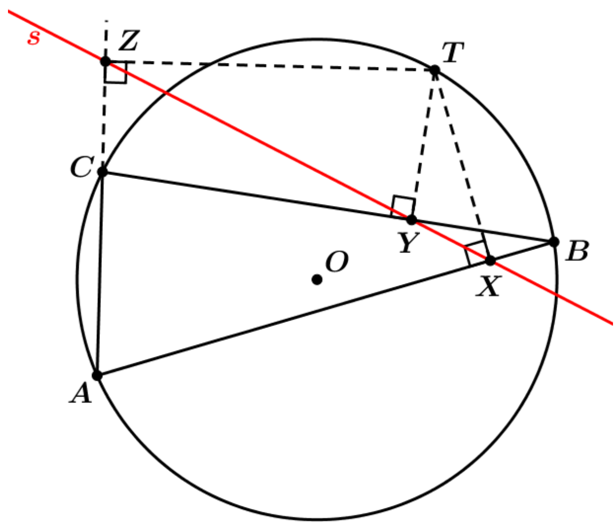
2.1 Povijest Simsonovog pravca

Robert Simson (1687.-1768.) škotski je matematičar po kojem je Simsonov pravac dobio ime, iako se među njegovim spisima nikad nije pronašlo ništa vezano uz proučavanje tog pravca, nego mu je zbog pogrešnog citiranja pripisana zasluga. Zaslužan za pronalazak ovog pravca je zapravo škotski matematičar William Wallace, koji je 1799. godine objavio teorem, poznat kao Wallaceov teorem, vezan uz taj pravac, u djelu *Mathematical Repository* Thomasa Leyboutna. Spomenuti pravac poznat je i po imenu Wallaceov pravac, nožišni ili pedalni pravac, ali najčešće korišten naziv je Simsonov pravac pa će se kroz daljnji tekst koristiti upravo taj naziv.

2.2 Razni dokazi teorema o Simsonovom pravcu

Prije nego definiramo Simsonov pravac, iskažimo teorem:

Teorem 8. ***(Wallaceov teorem)*** *Nožišta okomica povučenih iz bilo koje točke trokutu opisane kružnice na stranice trokuta (ili na njihova produženja) su kolinearna.*



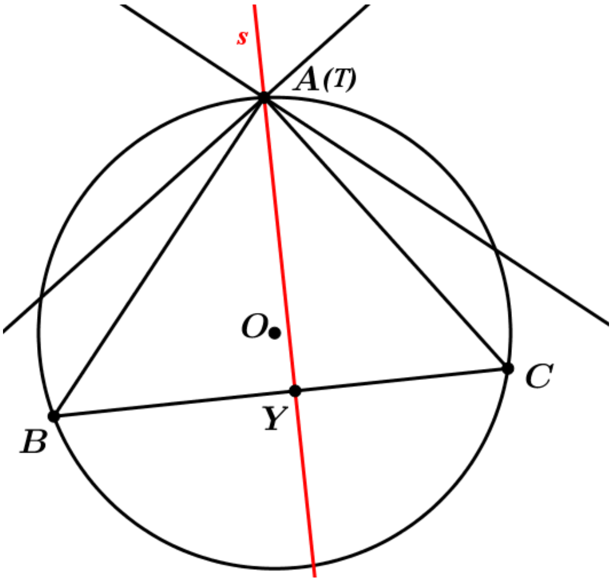
Slika 2.14: Simsonov pravac s trokuta ABC

Prije nego krenemo na dokazivanje ovog teorema, definirajmo Simsonov pravac:

Definicija 4. *Pravac s kojeg određuju nožišta okomica X, Y i Z povučenih iz bilo koje točke T na opisanoj kružnici trokuta ABC na stranice trokuta (ili na njihova produženja) zove se Simsonov pravac točke T s obzirom na trokut ABC (slika 2.14).*

Najprije promotrimo specijalan slučaj kada je promatrana točka T iz koje povlačimo okomice jedan od vrhova promatranog trokuta ABC. Kako je točka T jedan vrh promatranog trokuta, ona leži na dvije stranice tog trokuta te kada povučemo okomice kroz tu točku na te dvije stranice trokuta, okomice će sjeći te dvije stranice upravo u toj točki T. Povučemo li i treću okomicu na nasuprotnu stranicu točki T, dobit ćemo točku Y u kojoj okomica siječe tu stranicu trokuta. Dakle, ako je točka T jedan od vrhova trokuta ABC, umjesto tri nožišta okomica iz te točke na stranice trokuta, imamo samo dva nožišta te je pravac kroz točke T i Y upravo Simsonov pravac (slika 2.15).

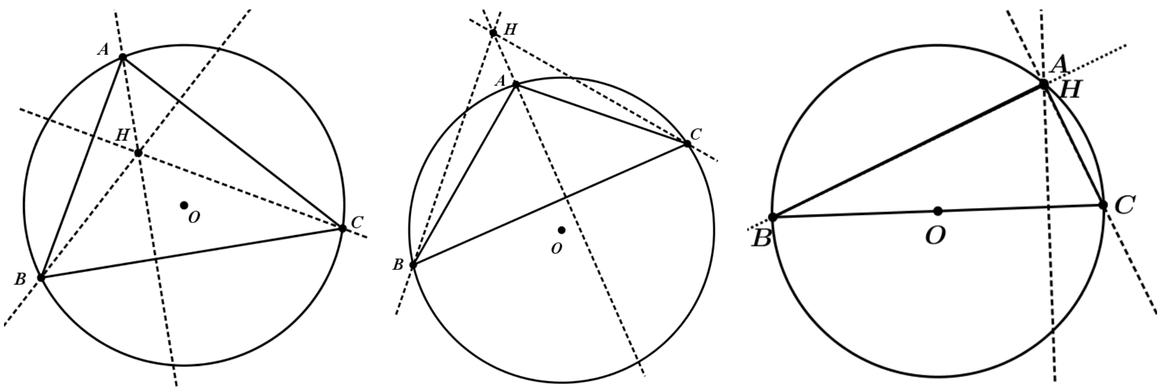
Sljedeći slučaj je taj gdje se pitamo može li točka T biti na opisanoj kružnici promatranog trokuta ABC te biti ortocentar tog trokuta. Postoje različiti slučajevi s obzirom na kutove u trokutu. Ukoliko promatramo šiljastokutan trokut, znamo da je njegov ortocentar unutar trokuta, što znači da ortocentar ne može ležati na kružnici opisanoj tom šiljastokutnom trokutu (slika 2.16 (a)).



Slika 2.15: Simsonov pravac trokuta ABC određen s dvije točke

Nadalje, ukoliko promotrimo tupokutan trokut, ortocentar trokuta je izvan trokuta. Dakle, ortocentar ne može ležati na opisanoj kružnici tog trokuta (slika 2.16 (b)).

Zadnji slučaj je kada promatramo pravokutan trokut. U ovom slučaju dvije visine tog trokuta su upravo njegove katete, a treće je povučena iz vrha uz pravi kut. Sve tri visine će se sjeći u tom vrhu pri pravom kutu, kroz koji prolazi kružnica opisana tom



(a) Šiljastokutan trokut (b) Tupokutan trokut (c) Pravokutan trokut

Slika 2.16: Položaj ortocentra trokuta s obzirom na vrstu trokuta trokutu, što znači da ortocentar leži na trokutu opisanoj kružnici (slika 2.16 (c)).

2.2.1 Dokaz pomoću paralelnih pravaca

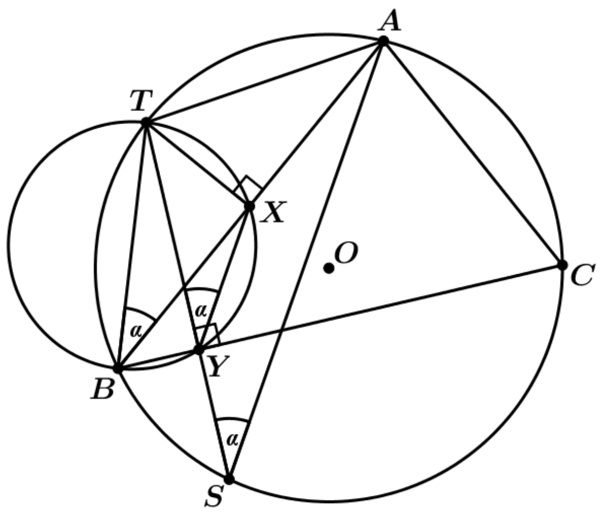
U ovom pristupu dokazivanja Wallaceovog teorema koristit ćemo se nekim općim svojstvima trokuta, kutova, paralelnih pravaca, sličnosti trokuta, te sljedećim teoremom o kružnici:

Teorem 9. ***(Kut tangente i tetive)*** *Neka su A i B točke na kružnici k i neka je t tangenta na kružnicu u točki A. Tada je kut između tangente t i tetive $\overline{AB}$ jednak obodnom kutu nad tom tetivom.*

Pretpostavit ćemo da točka T nije vrh promatranog trokuta te da nije njegov ortocentar. Dokaz ćemo promatrati za dva slučaja. Prvi slučaj je ako okomica TY siječe kružnicu u još jednoj točki, a drugi je ako je okomica TY tangenta na kružnicu u točki T.

Slučaj 1: Pretpostavimo da okomica TY nije tangenta kružnice opisane trokutu ABC u točki T. Dakle, povucimo okomice TX i TY na stranice promatranog trokuta te okomicu TY produžimo tako da kružnicu opisanu trokutu ABC siječe u još jednoj točki koju ćemo označiti sa S.

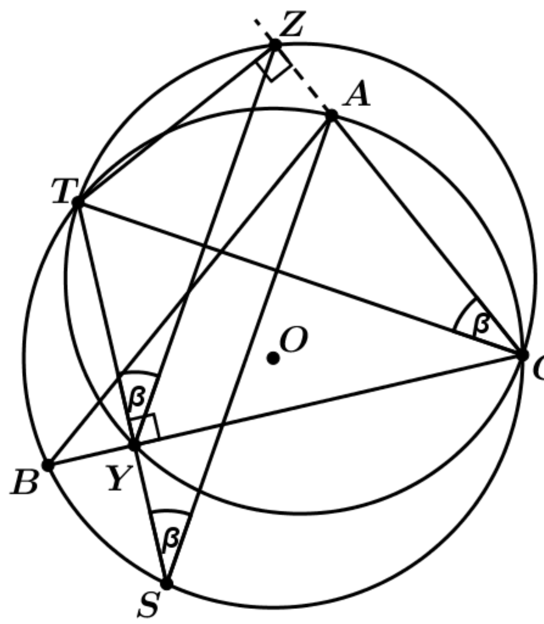
Nadalje, konstruirajmo kružnicu čiji je promjer upravo dužina $\overline{TB}$ te kako su kutovi



Slika 2.17: Paralelnost pravaca SA i XY

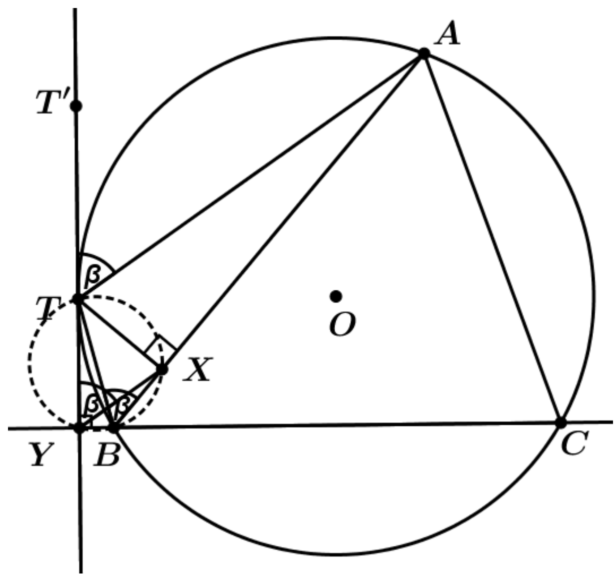
$\measuredangle TXB$ i $\measuredangle TYB$ pravi, slijedi da točke X i Y leže na toj kružnici. Promotrimo li kutove $\measuredangle TBX$ i $\measuredangle TYX$, oni se nalaze nad istim kružnim lukom $\overset{\frown}{TX}$ pa su ti kutovi sukladni. Slično se pokaže da su kutovi $\measuredangle TBA$ i $\measuredangle TSA$ sukladni jer se nalaze nad kružnim lukom $\overset{\frown}{TA}$ ukoliko promatramo kružnicu opisanu trokutu ABC. Iz toga slijedi da su i kutovi $\measuredangle TYX$ i $\measuredangle TSA$ sukladni te stoga i vrijedi paralelnost pravaca YX i SA (slika 2.17). Analogno se konstruira i kružnica s promjerom $\overline{TC}$, iz čega uspoređivanjem kutova dobijemo da su pravci YZ i SA paralelni (slika 2.18). Dakle, kako vrijedi da su pravci

YX i SA paralelni i pravci YZ i SA također paralelni, slijedi da točke X, Y i Z leže na jednom pravcu.



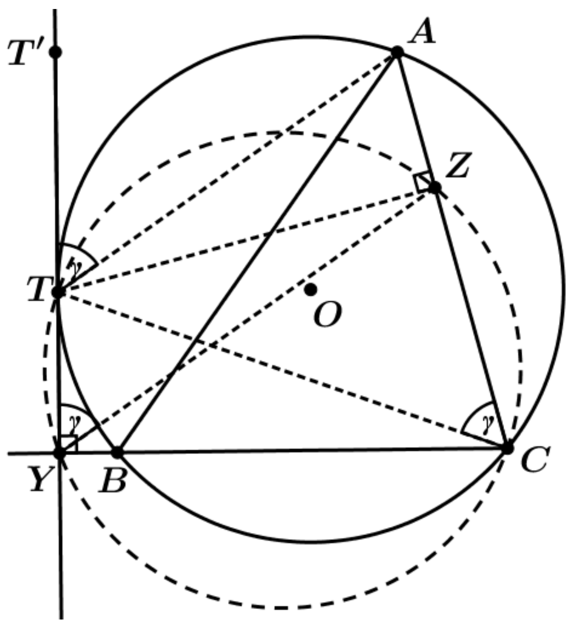
Slika 2.18: Paralelnost pravaca SA i YZ

Slučaj 2: Sada pretpostavimo da točka T nije niti jedan od tri vrha trokuta ABC te da je okomica TY tangenta trokutu ABC opisane kružnice u točki T. Kao i u prethod-



Slika 2.19: Slučaj 2a: TY je tangenta na kružnicu u točki T.

nom slučaju konstruirajmo kružnicu promjera $\overline{TB}$. Kako su kutovi $\measuredangle TXA$ i $\measuredangle TYB$ po konstrukciji pravi, slijedi da točke X i Y leže na novo konstruiranoj kružnici. Promotrimo li kutove $\measuredangle TYX$ i $\measuredangle TBX$, oni su sukladni jer se nalaze nad istim kružnim lukom $\overset{\frown}{\mathrm{TY}}$. Nadalje, ako produžimo $\overline{TY}$ preko točke T do točke T' tako da su kut $\measuredangle T'TA$,



Slika 2.20: Slučaj 2b: TY je tangenta na kružnicu u točki T

koji je kut između tetive $\overline{TA}$ i tangente TY, i kut $\measuredangle TBX$ sukladni jer je $\measuredangle TBX$ kut nad tetivom AT, a prema teoremu 9 slijedi da je kut $\measuredangle T'TA$ jednak obodnom kutu nad tetivom. Stoga imamo da su kutovi $\measuredangle T'TA$, $\measuredangle TBX$ i $\measuredangle TYX$ sukladni te da su pravci TA i YX paralelni (slika 2.19).
Slično se pokaže da su kutovi $\measuredangle T'TA$ i $\measuredangle TBA$ sukladni pa vrijedi sukladnost kutova $\measuredangle T'TA$, $\measuredangle TYZ$ i $\measuredangle TBA$.
Iz toga slijedi da su pravci YZ i TA paralelni te slijedi iz toga i prethodno dobivenog rezultata slijedi da su točke X, Y i Z kolinearne (slika 2.20).

2.2.2 Dokaz pomoću vršnih kutova

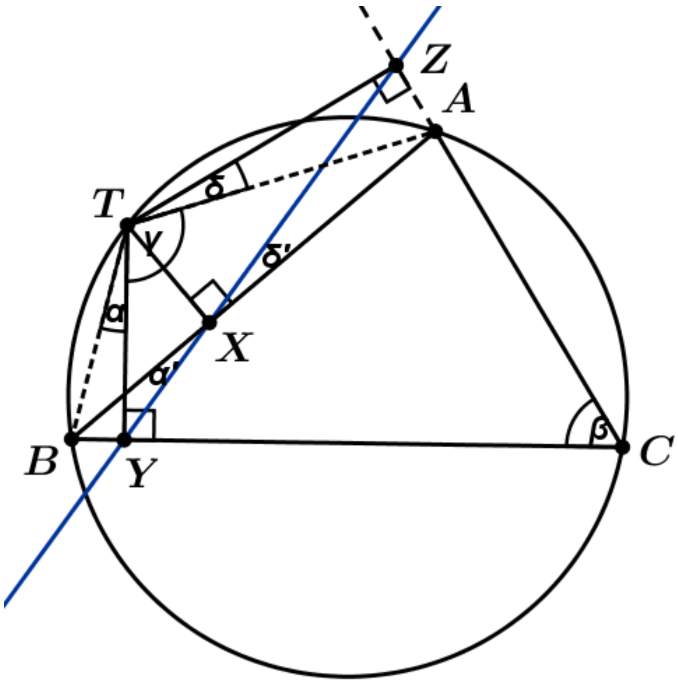
Kao i u prethodnom pristupu, pretpostavimo da točka T nije vrh trokuta. Prije dokaza iskazat ćemo propoziciju koju ćemo koristiti u ovom načinu dokazivanja Wallaceova teorema.

Propozicija 1. *Neka točka T leži na pravcu p. Ako dva polupravca s početnom točkom T leže na različitim stranama pravca p i zatvaraju kutove koji su suplementarni, onda ti polupravci leže na jednom pravcu.*

Dokažimo sada teorem 8:
Dokaz. Spojimo li točku T s vrhovima trokuta A i B imamo tetivni četverokut $ATBC$. Kut $\measuredangle YTB$ označit ćemo s α, kut $\measuredangle BCA$ s β, kut $\measuredangle ATY$ s γ i kut $\measuredangle ATZ$ s δ (slika 2.21). Kako je četverokut $ATBC$ tetivni slijedi:

$$\beta + (\alpha + \gamma) = 180^\circ. \tag{2.17}$$

Promotrimo li nadalje četverokut $CYTZ$, kako su kutovi uz vrhove Z i Y po konstrukciji pravi, slijedi da je



Slika 2.21: Dokaz teorema o Simsonovom pravcu pomoću vršnih kutova

$$\beta + 90° + (\gamma + \delta) + 90° = 360°,$$

odnosno

$$\beta + (\gamma + \delta) = 180°. \tag{2.18}$$

Sada iz (2.17) i (2.18) možemo zaključiti da su kutovi α i δ sukladni. Nadalje, označimo kut $\measuredangle YXB$ s α', a kut $\angle ZXA$ s δ'. Primjetimo da su kutovi $\measuredangle AXT$ i $\measuredangle CYT$ po konstrukciji pravi te ako konstruiramo kružnicu promjera $\overline{TB}$, točke X i Y leže na toj kružnici. Dakle, vrijedi da je $\alpha = \alpha'$ jer se nalaze nad istim kružnim lukom $\overset{\frown}{\mathrm{BY}}$. Analogno konstruiramo kružnicu s promjerom $\overline{TA}$ iz čega dobijemo da su kutovi δ i δ' također sukladni jer se nalaze nad istim kružnim lukom.
Kako su kutovi α' i δ' vršni, slijedi $\alpha' = \delta'$, a primjenimo li propoziciju 1 na pravce YX i XZ, oni leže na istom pravcu, čime je dokazan teorem o Simsonovom pravcu. □

2.2.3 Dokaz pomoću Menelajevog teorema

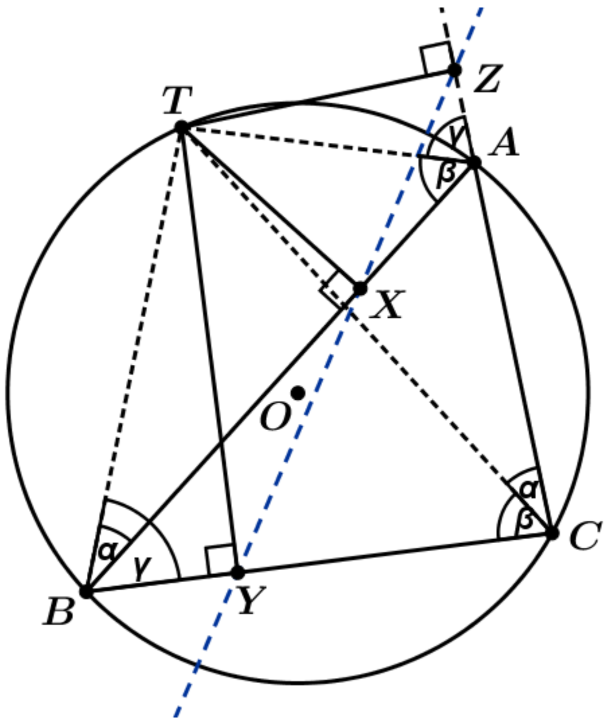
Prije dokaza teorema iskazat ćemo Menelajev teorem:

Teorem 10. ***(Menelajev teorem)*** *Neka je dan trokut ABC i neka točke X, Y i Z leže na pravcima (ili njihovim produženjima) AB, BC i CA redom. Točke X, Y i Z leže na jednom pravcu ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{|AX|}{|XB|} \cdot \frac{|BY|}{|YC|} \cdot \frac{|CZ|}{|ZA|} = 1. \tag{2.19}$$

Nakon iskaza teorema ključnog za ovaj pristup dokazivanju, dokažimo Wallaceov teorem:

Dokaz. Neka je T bilo koja točka koja leži na trokutu ABC opisanoj kružnici. Nožišta okomica na stranice trokuta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ (ili njihova produženja) iz točke T označimo točkama X, Y i Z redom (slika 2.22). Primjetimo da su kutovi $\measuredangle TBA$ i $\measuredangle TCA$



Slika 2.22: Dokaz teorema o Simsonovom pravcu pomoću Menelajevog teorema

sukladni te mjeru tih kutova označimo s α. Ukoliko promotrimo trokute TBX i TCZ, vrijedi sljedeća jednakost:

$$\frac{|BX|}{|TX|} = \operatorname{ctg}\,\alpha = \frac{|CZ|}{|TZ|},$$

iz čega dalje slijedi

$$\frac{|BX|}{|CZ|} = \frac{|TX|}{|TZ|}. \tag{2.20}$$

Analogno vrijedi da su mjere kutova $\measuredangle TAB$ i $\measuredangle TCB$ jednake te označimo mjere tih kutova s β. Promotrimo li trokute TXA i TCY vrijedi jednakost:

$$\frac{|AX|}{|TX|} = \operatorname{ctg}\,\beta = \frac{|CY|}{|TY|},$$

odakle slijedi

$$\frac{|CY|}{|AX|} = \frac{|TY|}{|TX|}. \tag{2.21}$$

Promotrimo li nadalje četverokut $ATBC$, on je upisan u kružnicu te kako su kutovi $\measuredangle TBC$ i $\measuredangle TAC$ nasuprotni u tom četverokut, vrijedi:

$$\measuredangle TBC + \measuredangle TAC = 180°.$$

Uz to, kutovi $\measuredangle TAZ$ i $\measuredangle TAC$ su suplementarni, odnosno

$$\measuredangle TAZ + \measuredangle TAC = 180°.$$

Iz prethodne dvije jednakosti slijedi jednakost:

$$\measuredangle TBC = \measuredangle TAZ.$$

Njihovu mjeru označimo s γ.
Nadalje, ukoliko promotrimo trokute TBY i TAZ, slijedi

$$\frac{|BY|}{|TY|} = \text{ctg } \gamma = \frac{|AZ|}{|TZ|},$$

iz čega vrijedi:

$$\frac{|AZ|}{|BY|} = \frac{|TZ|}{|TY|}. \tag{2.22}$$

Pomnožimo li (2.20), (2.21) i (2.22), dobivamo

$$\frac{|BX|}{|CZ|} \cdot \frac{|CY|}{|AX|} \cdot \frac{|AZ|}{|BY|} = \frac{|TX|}{|TZ|} \cdot \frac{|TY|}{|TX|} \cdot \frac{|TZ|}{|TY|} = 1.$$

Podijelimo li dobivenu jednakost s $|BX| \cdot |CY| \cdot |AZ|$, vrijedi

$$|BX| \cdot |CY| \cdot |AZ| = |CZ| \cdot |AX| \cdot |BY|,$$

odakle dobivamo

$$\frac{|AX|}{|BX|} \cdot \frac{|BY|}{|CY|} \cdot \frac{|CZ|}{|AZ|} = 1.$$

Dakle, prema teoremu 10 slijedi da točke X, Y i Z leže na jednom pravcu. □

2.3 Svojstva Simsonovog pravca

U ovom poglavlju bit će iskazani i dokazani teoremi vezani uz Simsonov pravac, ali i oni teoremi u čijem dokazu Simsonov pravac ima bitnu ulogu te će se kroz neke teoreme i dokaze doći do nekih od svojstava Simsonovog pravca.

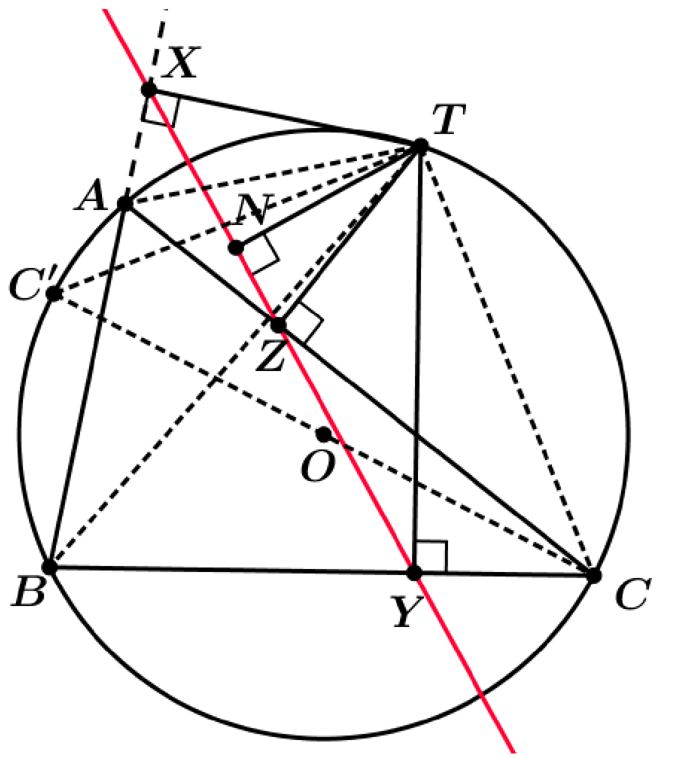
Teorem 11. *Za nožišta X, Y i Z (na Simsonovom pravcu s) okomica povučenih iz točke T na opisanoj kružnici trokuta ABC vrijedi:*

$$|TA| \cdot |TY| = |TB| \cdot |TZ| = |TC| \cdot |TX| = 2Rd,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice, a d udaljenost točke T od Simsonovog pravca s.

Dokaz. Neka je T točka na opisanoj kružnici trokuta ABC. Nadalje, s X označimo nožište okomice povučene iz točke T na stranicu $\overline{AB}$, s Y nožište okomice na stranicu $\overline{BC}$ te sa Z nožište okomice povučene na stranicu $\overline{AC}$. S N označimo nožište okomice iz točke T na Simsonov pravac s (slika 2.23).

Promotrimo trokute TBX i TCZ. Nad istim kružnim lukom $\widehat{AT}$ dobivamo da su kutovi $\measuredangle TBA$ i $\measuredangle TCA$ sukladni. Nadalje, promotrimo li kutove $\measuredangle TBA$ i $\measuredangle TBX$, oni



Slika 2.23: Svojstvo Simsonovog pravca iskazano teoremom 10

su sukladni jer točka X leži na pravcu AB. Analogno, kako je točka Z na pravcu AC, vrijedi da su kutovi $\measuredangle TCA$ i $\measuredangle TCZ$ također sukladni. Iz toga dobivamo sukladnost kutova $\measuredangle TBC$ i $\measuredangle TCZ$. Kako su točke X i Z nožišta okomica iz točke T na stranice trokuta $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, slijedi da su kutovi $\measuredangle TXB$ i $\measuredangle TZC$ pravi. Kako promatrani trokuti TBX i TCZ imaju sve kutove jednakih veličina i kako slijedi da su ta dva trokuta slična, vrijedi sljedeći omjer:

$$\frac{|TB|}{|TC|} = \frac{|TX|}{|TZ|},$$

odnosno, iz toga slijedi

$$|TB| \cdot |TZ| = |TC| \cdot |TX|. \tag{2.23}$$

Nadalje, promotrimo trokute TAZ i TBY. Na analogan način pokažemo da vrijedi sukladnost kutova $\measuredangle TAZ$ i $\measuredangle TBY$ te kako su kutovi $\measuredangle TYB$ i $\measuredangle TZA$ pravi, slijedi da su ti trokuti slični. Iz toga slijedi:

$$\frac{|TB|}{|TA|} = \frac{|TY|}{|TZ|},$$

odnosno

$$|TB| \cdot |TZ| = |TA| \cdot |TY|. \tag{2.24}$$

Sada iz (2.23) i (2.24) dobivamo:

$$|TA| \cdot |TY| = |TB| \cdot |TZ| = |TC| \cdot |TX|. \tag{2.25}$$

Označimo s d udaljenost od točke T do pravca s, $d = |TN|$. Promotrimo sada trokute TNX i TZA. Prema konstrukciji imamo da su kutovi $\measuredangle TNX$ i $\measuredangle TZA$ pravi. Konstruirajmo sada kružnicu promjera $\overline{TA}$. Kako točke T, X, A i Z leže na toj kružnici, vrijedi sukladnost kutova $\measuredangle TAZ$, $\measuredangle TXZ$ i $\measuredangle TXN$, jer su kutovi $\measuredangle TAZ$ i $\measuredangle TXZ$ obodni nad kružnim lukom $\overset{\frown}{\mathrm{TZ}}$, a treći kut im je sukladan jer se točka N nalazi na Simsonovom pravcu s. Stoga zaključujemo da su trokuti TNX i TZA slični, tj. vrijedi sljedeći omjer:

$$\frac{|TX|}{|TA|} = \frac{|TN|}{|TZ|},$$

odnosno, iz toga slijedi

$$|TX| \cdot |TZ| = |TA| \cdot |TN|. \tag{2.26}$$

Nadalje, s C' označimo centralno simetričnu sliku točke C s obzirom na središte kružnice opisane trokutu ABC, a kako smo polumjer te kružnice označili s R, slijedi da je $|CC'|$=$2R$.

Promotrimo sada trokute $C'TC$ i TYB. Kako je kut $\measuredangle CTC'$ nad promjerom kružnice opisane trokutu, slijedi da je on pravi kut. Nadalje, kako je točka Y nožište okomice iz točke T, vrijedi da je i $\measuredangle BYT$ pravi kut. Budući da točke T, C', B i C leže na kružnici opisanoj trokutu ABC, slijedi da su kutovi $\measuredangle TC'C$ i $\measuredangle TBC$ sukladni, a kako je točka Y na pravcu BC, vrijedi da je i kut $\measuredangle TBY$ sukladan kutovima $\measuredangle TC'C$ i $\measuredangle TBC$. Iz toga dalje slijedi da su trokuti $C'TC$ i TYB slični, zbog čega nam vrijedi sljedeći omjer:

$$\frac{|TB|}{|CC'|} = \frac{|TY|}{|TC|},$$

odnosno

$$|TB| \cdot |TC| = |CC'| \cdot |TY|$$

što možemo zapisati na sljedeći način:

$$|TB| \cdot |TZ| = 2R \cdot |TY|. \tag{2.27}$$

Pomnožimo li jednakosti (2.26) i (2.27), dobivamo

$$|TX| \cdot |TZ| \cdot |TB| \cdot |TC| = |TA| \cdot |TN| \cdot 2R \cdot |TY|, \text{ tj.}$$
$$|TB| \cdot |TZ| \cdot |TC| \cdot |TX| = |TA| \cdot |TY| \cdot 2R \cdot |TN|.$$

Ranije smo pokazali da vrijedi $|TB| \cdot |TZ|$=$|TA| \cdot |TY|$ te $|TC| \cdot |TX|$=$|TA| \cdot |TY|$. Uvrstimo li to u prethodnu jednakost, vrijedi

$$|TA| \cdot |TY| \cdot |TA| \cdot |TY| = |TA| \cdot |TY| \cdot 2R \cdot |TN|.$$

Podijelimo li prethodnu jednakost s $|TA| \cdot |TY|$, imamo:

$$|TA| \cdot |TY| = 2R \cdot |TN|,$$

a iskoristimo li jednakosti (2.25) i $|TN|$=d, dobije se tražena jednakost:

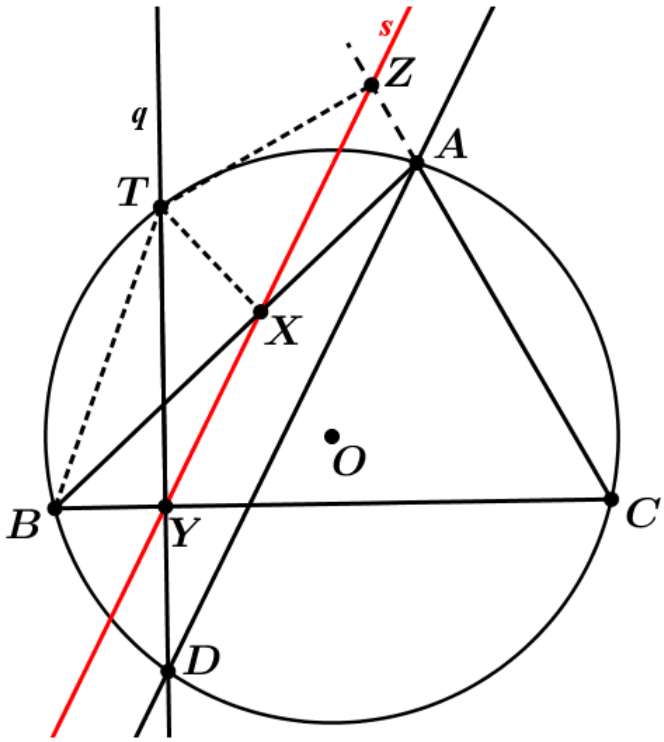
$$|TA| \cdot |TY| = |TB| \cdot |TZ| = |TC| \cdot |TX| = 2Rd.$$

Analogno dokazujemo i u ostalim slučajevima. $\square$

Kroz sljedeće teoreme promatrat ćemo pravac paralelan Simsonovom pravcu te odnos dva Simsonova pravca.

Teorem 12. *Neka je s Simsonov pravac točke T koja leži na trokutu ABC opisanoj kružnici te neka je q pravac koji prolazi točkom T i koji je okomit na stranicu $\overline{BC}$ te siječe kružnicu opisanu trokutu u točki D. Tada je pravac AD paralelan s pravcem s.*

Dokaz. S X, Y i Z označimo nožišta okomica povučenih iz točke T na opisanoj kružnici trokuta ABC na stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ (ili njihova produženja) redom (slika 2.24). Ono što trebamo pokazati kako bi dobili paralelnost naznačenih pravaca je da su kutovi $\measuredangle TYX$ i $\measuredangle TDA$ sukladni jer imaju jedan krak zajednički, a pravci na kojima leže druga dva kraka moraju biti paralelni.
Promotrimo četverokut $BYXT$. On je tetivni četverokut jer su kutovi $\measuredangle TYB$ i $\measuredangle TXB$ pravi pa su ti kutovi nad promjerom $\overline{BT}$ kružnice opisane tom četverokutu. Promo-



Slika 2.24: Paralelnost pravaca AD i s

trimo li kutove $\measuredangle TBX$ i $\measuredangle TYX$ vrijedi

$$\measuredangle TBX = \measuredangle TYX, \tag{2.28}$$

jer su oni obodni kutovi nad istim kružnim lukom $\widehat{\text{TX}}$.
Također, promotrimo li kutove $\measuredangle TDA$ i $\measuredangle TBA$, oni su obodni nad istim kružnim

lukom $\widehat{TA}$ te kako točka X leži na pravcu AB, vrijedi

$$\measuredangle TDA = \measuredangle TBA = \measuredangle TBX. \tag{2.29}$$

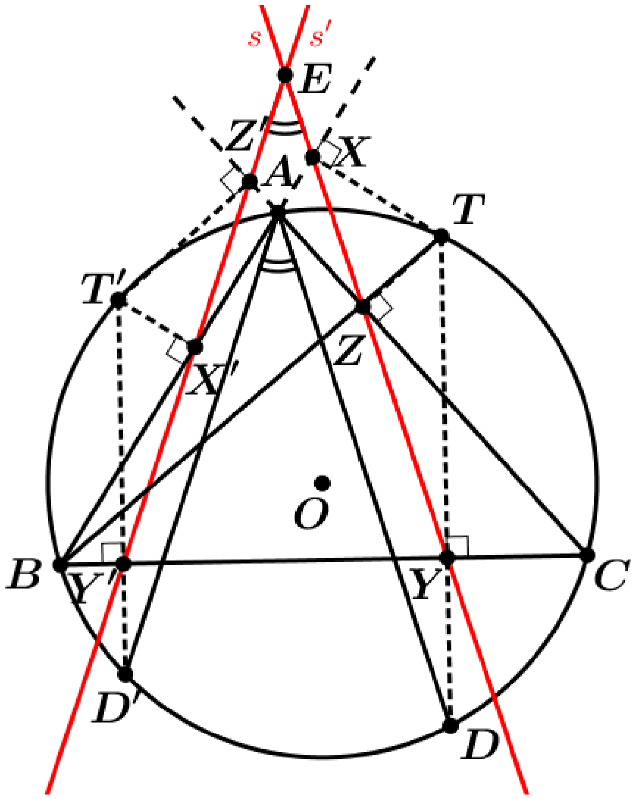
Sada iz jednakosti (2.28) i (2.29) slijedi

$$\measuredangle TYX = \measuredangle TDA,$$

čime smo pokazali da su pravci AD i s paralelni. $\square$

Teorem 13. *Neka su T i T' dvije različite točke na kružnici opisanoj trokutu ABC koje određuju dva Simsonova pravca s i s'. Tada je kut između Simsonovih pravaca s i s' jednak polovini središnjeg kuta nad kružnim lukom $\widehat{TT'}$.*

Dokaz. Neka su točke T i T' na različitim kružnim lukovima. S X, Y i Z označimo nožišta okomica iz točke T te s X', Y' i Z' nožišta okomica iz točke T' na stranice trokuta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ redom. Presjek pravca TY i kružnice opisane trokutu ABC



Slika 2.25: Odnos dva Simsonova pravca

označimo s D. Analogno, s D' označimo presjek pravca $T'Y'$ i kružnice opisane trokutu ABC. Nadalje, s E označimo presjek Simsonovih pravaca s i s' (slika 2.25). Konstruiramo li kružnicu promjera BX, kako su kutovi $\measuredangle TXB$ i $\measuredangle TYB$ pravi, X i Y leže na toj kružnici. Kako su kutovi $\measuredangle XYT$ i $\measuredangle XBT$ nad istim kružnim lukom, slijedi:

$$\measuredangle XYT = \measuredangle XBT. \tag{2.30}$$

Analogno vrijedi i za obodne kutove nad lukom $\widehat{\mathrm{AT}}$ kružnice opisane trokutu:

$$\measuredangle XBT = \measuredangle ABT = \measuredangle ADT. \tag{2.31}$$

Sada iz jednakosti (2.30) i (2.31) slijedi da su kutovi $\measuredangle XYT$ i $\measuredangle ADT$ sukladni te stoga vrijedi da su pravci YX i AD paralelni. Slično se pokaže da su i pravci $Y'X'$ i AD' paralelni.

Promotrimo sada kut koji zatvaraju Simsonovi pravci s i s', odnosno kut $\measuredangle Y'EY$ te kut koji zatvaraju pravci AD i AD', odnosno $\measuredangle D'AD$. S obzirom da smo pokazali da vrijede prethodne dvije jednakosti, slijedi da su navedeni kutovi zapravo kutovi s paralelnim kracima te da su kutovi $\measuredangle Y'EY$ i $\measuredangle D'AD$ sukladni. Nadalje, vrijedi da je kut $\measuredangle D'AD$ jednak polovini kuta $\measuredangle D'OD$, pri čemu je O središte trokutu opisane kružnice. Kako su pravci TD i $T'D'$ okomiti na stranicu $\overline{BC}$ trokuta ABC, slijedi da je pravac TD paralelno s $T'D'$ te vrijedi

$$\measuredangle D'OD = \measuredangle TOT',$$

odnosno

$$\measuredangle D'AD = \frac{1}{2}\measuredangle TOT'.$$

Konačno, iz tih jednakosti vrijedi da je

$$\measuredangle Y'EY = \frac{1}{2}\measuredangle TOT',$$

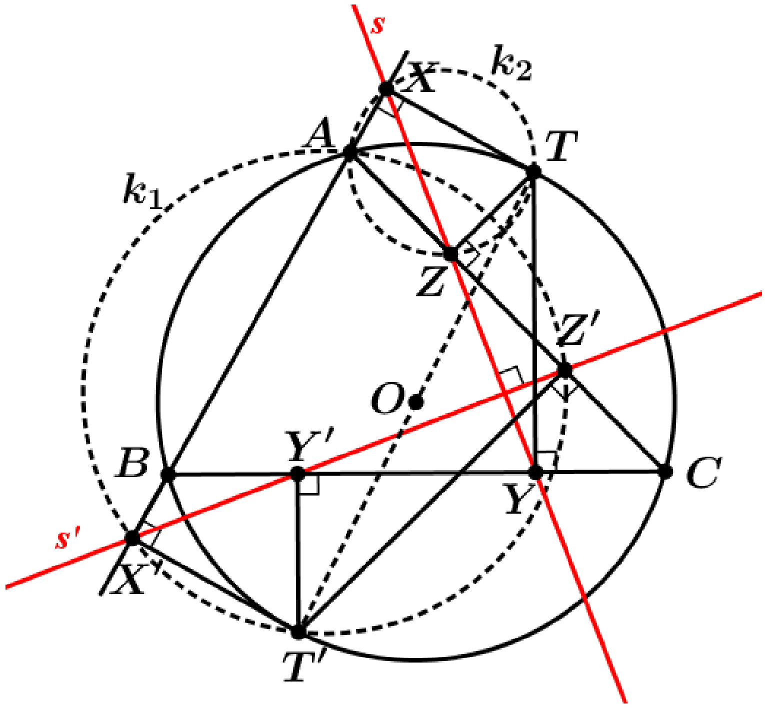
što smo i trebali pokazati. □

Teorem 14. *Neka su T i T' dijametralno suprotne točke na kružnici opisanoj trokutu ABC. Simsonovi pravci s i s' takvih točaka međusobno su okomiti.*

Dokaz. Najprije s X, Y i Z označimo nožišta okomica iz točke T te s X', Y' i Z' nožišta okomica iz točke T' na stranice trokuta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ redom. Promotrimo nadalje četverokute $TZAX$ i $AZ'T'X'$ (slika 2.26). Konstruirajmo kružnicu k_1 promjera AT'. Kako su kutovi $\measuredangle AZ'T'$ i $\measuredangle T'X'A$ pravi prema konstrukciji, vrijedi da točke X' i Z' leže na toj kružnici k_1. Analogno konstruirajmo kružnicu k_2 promjera $\overline{AT}$ te vrijedi da točke X i Z leže na toj kružnici. Dakle, navedeni četverokuti su tetivni. Prema konstrukciji možemo uočiti da su stranice tih četverokuta u parovima međusobno okomite te stoga možemo zaključiti da su dijagonale u parovima međusobno okomite, a kako su dijagonale tih tetivnih četverokuta upravo Simsonovi pravci s i s', slijedi da su oni okomiti. □

Iskažimo i dokažimo nekoliko teorema u čijim se dokazima koristi Simsonov pravac.

Teorem 15. *Neka je dan trokut ABC i pravac p. Neka su p_a, p_b i p_c pravci simetrični pravcu p s obzirom na pravce BC, AC, AB redom. Nadalje, neka je A' presjek pravaca p_b i p_c, B' presjek pravaca p_a i p_c te C' presjek pravaca p_a i p_b. Svi tako dobiveni trokuti $\triangle A'B'C'$, za različite pravce p, su međusobno slični.*



Slika 2.26: Okomitost dva Simsonova pravca

Prije dokaza ovog teorema, iskažimo lemu koju ćemo koristiti pri dokazivanju.

Lema 3. *Kompozicija dvije osne simetrije o_1 i o_2, kojima se osi s_1 i s_2 sijeku u točki S, je rotacija $r = s_1 \circ s_2$ s centrom u točki S i s kutom rotacije 2φ, pri čemu je φ orijentirani kut što ga zatvaraju pravci s_1 i s_2.*

Dokažimo sada prethodno iskazan teorem.

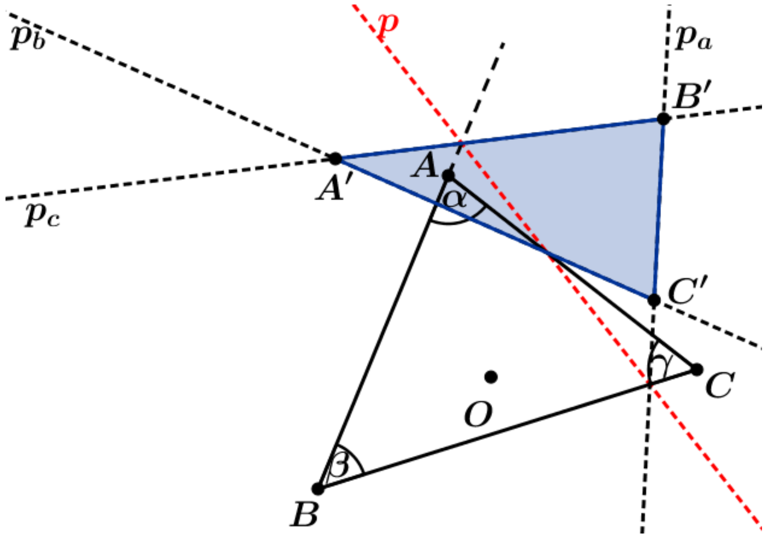
Dokaz. Pravac p_a preslikajmo osnom simetrijom s obzirom na pravac BC te dobiveni pravac označimo s p. Zatim pravac p preslikamo osnom simetrijom s obzirom na pravac CA te dobijemo pravac p_b (slika 2.27). Promotrimo slučaj kompozicije osne simetrije s obzirom na pravac BC i osne simetrije s obzirom na pravac CA. Kako se ta dva pravca, BC i CA sijeku u točki C te ukoliko unutarnji kut trokuta ABC pri vrhu A označimo s α, pri vrhu B s β i pri vrhu C s γ, promatrana kompozicija je rotacija oko centra C za kut 2γ koja pravac p_a preslika u pravac p_b.

Analogno pravac p_b preslikamo osnom simetrijom s obzirom na pravac CA te dobijemo pravac p. Zatim pravac p osnom simetrijom s obzirom na pravac AB preslikamo u pravac p_c. Ponovo promotrimo kompoziciju dvije osne simetrije koja je rotacija s centrom u točki A za kut 2α koji pravac p_b preslika u pravac p_c.

Na isti način dobijemo rotaciju za kut 2β oko centra B koja pravac p_c preslika u pravac p_a.

Iz ovoga slijedi da kutovi trokuta $A'B'C'$ ne ovise o položaju pravca p nego samo o pravcima kojima pripadaju stranice trokuta, odnosno o kutovima danog trokuta ABC.

□

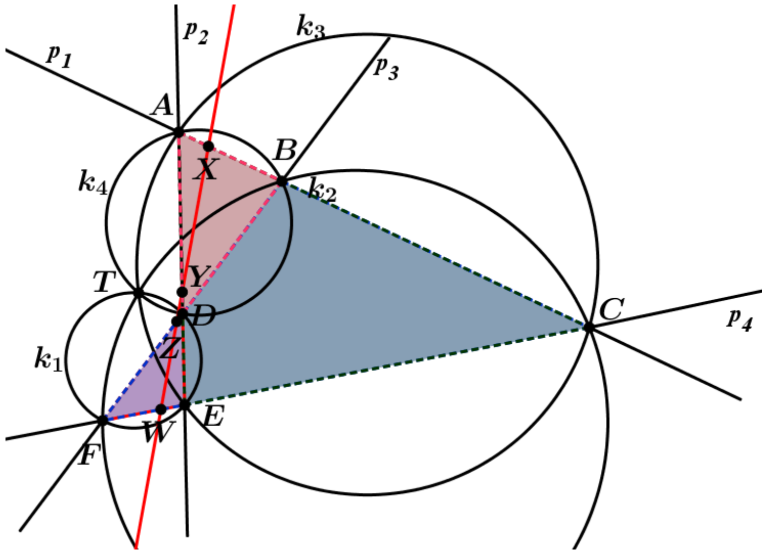


Slika 2.27: Trokut $A'B'C'$

Teorem 16. *Neka su dana četiri pravca p_1, p_2, p_3 i p_4 od kojih se nikoja tri ne sijeku. Svaka trojka od tih pravaca određuje jedan trokut čiji su vrhovi sjecišta tih pravaca, a stranice trokuta pripadaju tim pravcima. Neka je A presjek pravaca p_1 i p_2, B presjek pravaca p_1 i p_3, C presjek pravaca p_1 i p_4, D presjek pravaca p_2 i p_3, E presjek pravaca p_2 i p_4, F presjek pravaca p_3 i p_4. Tada kružnice opisane trokutima DEF, BCF, ACE i ABD prolaze jednom točkom T te ravnine.*

Dokaz. Kružnicu opisanu trokutu DEF označimo s k_1, s k_2 označimo kružnicu opisanu trokutu BCF, kružnicu opisanu trokutu ACE označimo s k_3, a s k_4 označimo kružnicu opisanu trokutu ABD. Neka je točka T sjecište kružnica k_3 i k_4. Konstruirajmo okomice iz točke T na pravce p_1, p_2, p_3 i p_4 te s X, Y, Z i W označimo nožišta tih okomica tako da je točka X nožište okomice na pravcu p_1, Y na pravcu p_2, Z na pravcu p_3 i W na pravcu p_4 (slika 2.28).
Nadalje, promotrimo trokut ABD. Nožišta okomica X, Y i Z iz točke T pripadaju pravcima p_1, p_2, p_3 na kojima leže stranice trokuta tog trokuta i te tri točke leže na istom pravcu, odnosno na Simsonovom pravcu točke T s obzirom na promatrani trokut.

Nadalje, promotrimo trokut ACE. Nožišta okomica X, Y i W iz točke T pripadaju pravcima p_1, p_2, p_4 na kojima leže stranice trokuta tog trokuta te su te tri točke kolinearne, odnosno leže na Simsonovom pravcu točke T s obzirom na promatrani trokut. Dobili smo da su točke X, Y i Z kolinearne, pri čemu kolinearnost vrijedi i za točke X, Y i W te možemo zaključiti da su sva četiri nožišta okomica povučenih iz točke T kolinearne, tj. da pripadaju Simsonovom pravcu točke T s obzirom na trokute ABD i ACE.
Analogno dobijemo i za stranice trokuta DEF koje pripadaju pravcima p_2, p_3 i p_4 te za trokut BCF čije stranice leže na pravcima p_1, p_3 i p_4. Iz toga nam slijedi da nožišta okomica iz točke T leže na Simsonovom pravcu točke T s obzirom na trokute DEF i BCF.
Dakle, možemo zaključiti da sva četiri nožišta okomica X, Y, Z i W povučenih iz točke



Slika 2.28: Kružnice opisane trokutima koje određuju četiri pravca prolaze istom točkom T

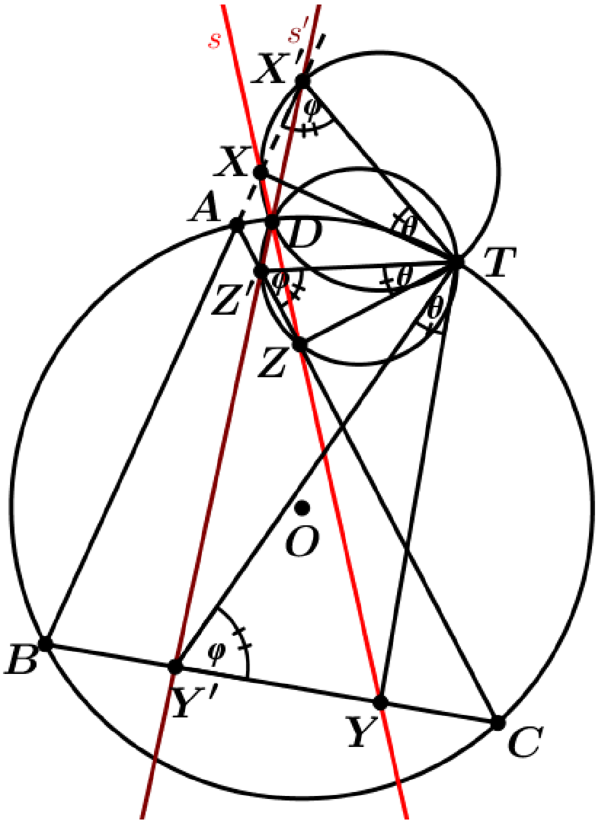
T na dane pravce p_1, p_2, p_3 i p_4 pripadaju Simsonvom pravcu točke T s obzriom na sva četiri trokuta, odnosno točka T leži na sve četiri kružnice opisane trokutima DEF, BCF, ACE i ABD. □

2.4 Poopćeni Simsonov pravac

U ovom poglavlju razmotrit ćemo poopćenje Simsonovog pravca.
Povucimo okomice na stranice trokuta ABC ili njihova produženja iz točke T koja leži na kružnici opisanoj trokutu ABC te ih rotiramo oko točke T u jednom smjeru za proizvoljni kut $\theta \neq 90°$. Rotirani pravci sijeku odgovarajuće stranice danog trokuta pod nekim kutom $\varphi = 90° - \theta$. Navedena sjecišta označit ćemo redom točkama X', Y' i Z' (slika 2.29).
Sljedećim teoremom definirat ćemo poopćeni Simsonov pravac, odnosno dokazat ćemo tvrdnju da takav pravac sadrži točke X', Y' i Z', pri čemu su te točke definirane na prethodno navedeni način.

Teorem 17. *Sjecišta X', Y' i Z' su kolinearne točke. Pravac s' na kojemu leže ta sjecišta X', Y' i Z' zvat ćemo poopćenim Simsonovim pravcem.*

Dokaz. Neka je T točka na kružnici te neka su točke X, Y i Z nožišta okomica povučenih iz točke T na stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC redom (slika 2.29). Nadalje, te okomice rotirajmo oko točke T za kut θ i njihova sjecišta sa stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC (ili njihovim produženjima) označimo s X', Y' i Z'.
Konstruirajmo sada kružnice s promjerima $\overline{TX'}$ i $\overline{TZ'}$. One se sijeku u dvije točke te je jedna od tih točaka presjeka točka T, a drugu označimo s D. Prvo pokažimo da su točke X', D i Z' kolinearne, odnosno da je kut $\measuredangle Z'DX'$ ispružen. Dakle, kako bismo



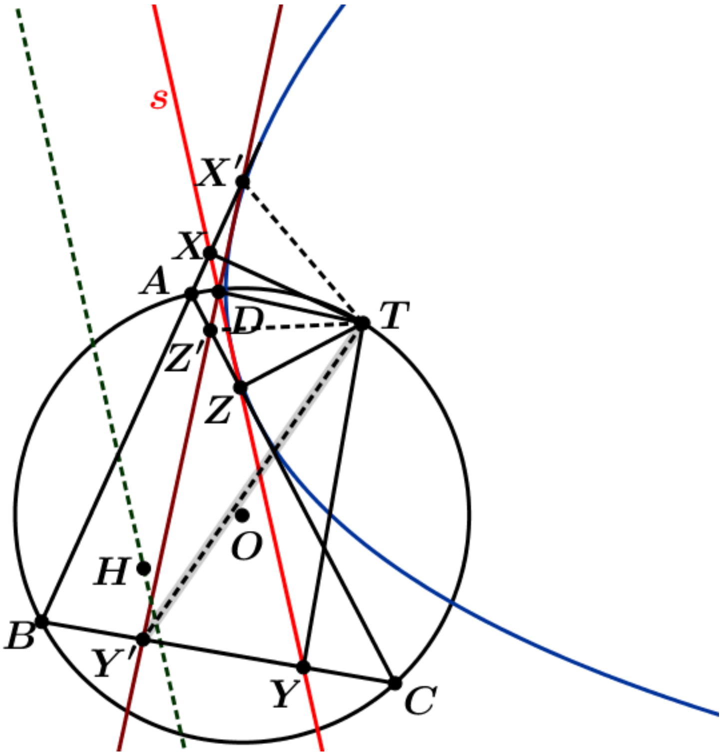
Slika 2.29: Poopćeni Simsonov pravac

to pokazali, promotrimo kutove $\measuredangle Z'DT$ i $\measuredangle TDX'$. Kako točke T, D i Z' leže na istoj kružnici promjera $\overline{TZ'}$ pa vrijedi da je kut $\measuredangle Z'DT$ pravi. Analogno tome dobijemo da je kut $\measuredangle TDX'$ pravi jer je obodni nad promjerom kružnice $\overline{TX'}$. Dakle, slijedi da su kutovi $\measuredangle Z'DT$ i $\measuredangle TDX'$ pravi, odnosno da je kut $\measuredangle Z'DX'$ ispružen, čime smo pokazali da su točke X', D i Z' kolinearne.
Konstruirajmo sada kružnicu promjera $\overline{TY'}$ i uočimo da se sve tri konstruirane kružnice sijeku u točkama T i D. Ono što ostaje pokazati je da su točke Y', D i X' kolinearne, odnosno da je $\measuredangle Y'DX'$ ispružen. Promotrimo kružnice promjera $\overline{TY'}$ i $\overline{TX'}$ te analogno kao i u prethodnom slučaju zaključujemo da su kutovi $\measuredangle TDX'$ i $\measuredangle Y'DT$ pravi te da je stoga kut $\measuredangle Y'DX'$ ispružen, čime smo pokazali da su točke Y', D i X' kolinearne. Iz navedene kolinearnosti te iz kolinearnosti točaka X', D i Z' slijedi da su i točke X', Y' i Z' kolinearne, što smo i trebali pokazati. □

Ovaj teorem vrijedi za svaki kut $\theta \neq 90°$, odnosno za svaki kut φ. Dakle za različite vrijednosti tih kutova dobijemo različite poopćene Simsonove pravce. Sljedeći teorem govori o skupu svih Simsonovih pravaca.

Teorem 18. *Skup svih poopćenih Simsonovih pravaca za neku točku T na opisanoj kružnici danog trokuta ABC omataju parabolu kojoj je točka T žarište, Simsonov pravac s tjemena tangenta, a paralela h s tom tangentom koja prolazi ortocentrom H trokuta ABC je ravnalica (slika 2.30).*

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [3].



Slika 2.30: Parabola koju omata skup Simsonovih pravaca

2.5 Veza između Simsonovog pravca i Eulerove kružnice trokuta

Neka svojstva Simsonovog pravca već su spomenuta, no kao i Eulerov pravac, on je povezan s Eulerovom kružnicom trokuta koja je prethodno spomenuta te zbog toga možemo iskazati i dokazati još neka njegova svojstva.

Teorem 19. *Simsonov pravac s neke točke T koja leži na trokutu ABC opisanoj kružnici k siječe dužinu $\overline{TH}$ u njezinu polovištu S, pri čemu je H ortocentar trokuta ABC. Pri tome točka S leži na Eulerovoj kružnici trokuta ABC.*

Prije nego dokažemo prethodno iskazan teorem, iskazat ćemo korolar i lemu koje ćemo koristiti u tom dokazu.

Lema 4. *Točke H_1, H_2 i H_3 koje su simetrične ortocentru H s obzirom na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ danog trokuta ABC, leže na opisanoj kružnici tog trokuta.*

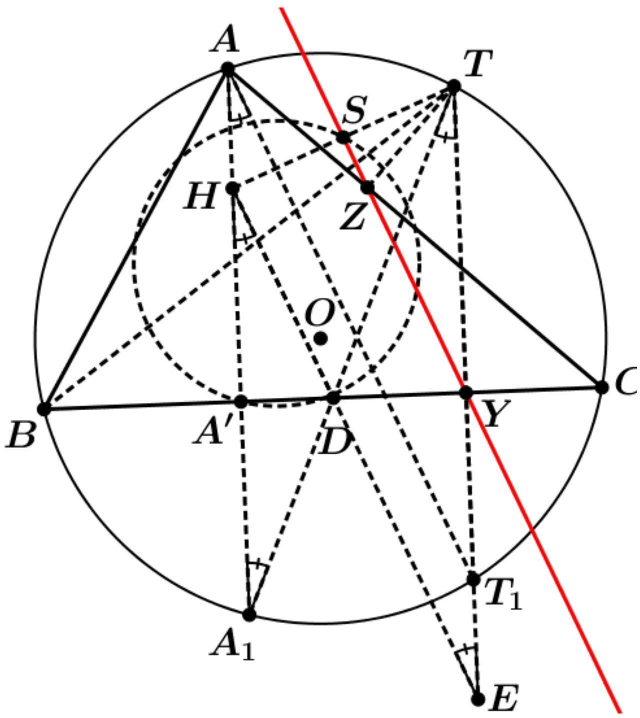
Korolar 1. *Neka je H ortocentar trokuta ABC. Za bilo koju točku T koja leži na kružnici opisanoj trokutu ABC, polovište dužine $\overline{HT}$ leži na Eulerovoj kružnici tog trokuta.*

Dokažimo sada teorem 19.

Dokaz. S A' označimo nožište visine povučene iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ promatranog trokuta ABC, a s A_1 označimo sjecište pravca na kojem leži ta visina s trokutu opisanom kružnicom. S Y i Z označimo nožišta okomica povučenih iz točke T na stranice $\overline{BC}$

i $\overline{AC}$ redom. Sjecište pravca TY i kružnice opisane trokutu ABC označimo s T_1. S D označimo presjek pravca A_1T i stranice $\overline{BC}$, a s E presjek pravaca DH i TT_1 (slika 2.31).

Promotrimo sada trokute $HA'D$ i $A_1A'D$. Kutovi $\measuredangle DA'H$ i $\measuredangle A_1A'D$ su pravi te im je



Slika 2.31: Polovište S dužine $\overline{TH}$ leži na Eulerovoj kružnici trokuta ABC

stranica $\overline{A'D}$ zajednička. Prema lemi 4 vrijedi da su duljine dužina $\overline{HA'}$ i $\overline{A'A_1}$ jednake te stoga imamo da su promatrani trokuti $HA'D$ i $A_1A'D$ sukladni. Iz toga slijedi

$$\measuredangle A'HD = \measuredangle A'A_1D. \tag{2.32}$$

Promotrimo li kutove $\measuredangle A_1TT_1$ i $\measuredangle A_1A'D$, jedan njihov krak leži na pravcu A_1T, a drugi leže na pravcima koji su međusobno paralelni te stoga imamo da vrijedi

$$\measuredangle A_1TT_1 = \measuredangle A'A_1D. \tag{2.33}$$

Nadalje, promotrimo li kutove $\measuredangle A_1TT_1$ i $\measuredangle A_1AT_1$, oni su obodni kutovi nad istim kružnim lukom pa vrijedi

$$\measuredangle A_1TT_1 = \measuredangle A_1AT_1. \tag{2.34}$$

Sada iz (2.32), (2.33) i (2.34) slijedi

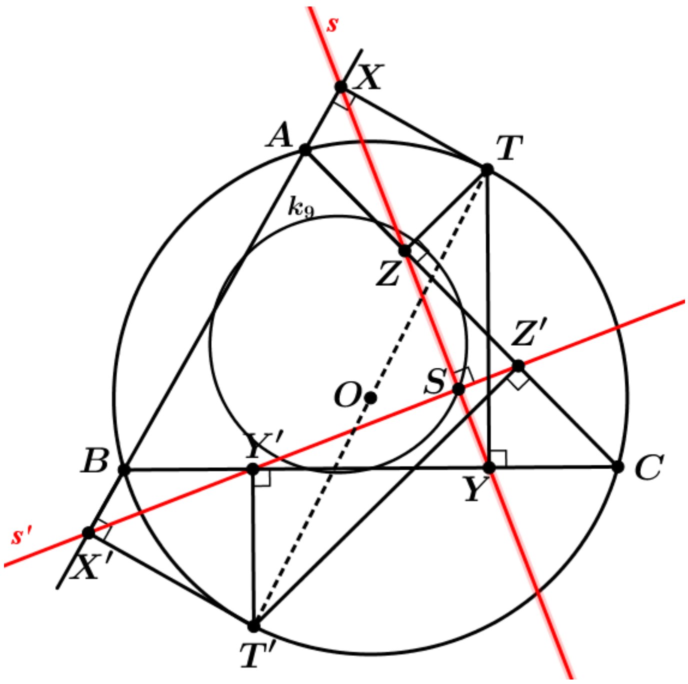
$$\measuredangle A'HD = \measuredangle A_1AT_1.$$

Kako ta dva kuta imaju po jedan krak koji leži na istom pravcu i kako su oni sukladni, vrijedi da pravci na kojima leže druga dva kraka moraju biti paralelni, odnosno da su pravci HE i AT_1 paralelni. Prema teoremu 12 vrijedi da je Simsonov pravac paralelan s pravcem AT_1 pa imamo da je Simsonov pravac s paralelan i s pravcem HE.

Nadalje, promotrimo trokute HA_1D i TED. Oni su slični jer im odgovarajuće stranice leže na međusobno paralelnim pravcima. Kako je A' polovište dužine $\overline{HA_1}$, onda je i Y polovište dužine $\overline{TE}$. Promotrimo li trokut THE, znamo da je Simsonov pravac s paralelan s pravcem HE te da siječe dužinu $\overline{TE}$ u točki Y koja je polovište te dužine pa stoga siječe i dužinu $\overline{HT}$ u njezinu polovištu S. Time je dokazano da je točka S polovište dužine $\overline{HT}$, a prema korolaru 1 slijedi da ona leži na Eulerovoj kružnici trokuta ABC. □

Sljedeći teorem je proširenje teorema 14, a njime je iskazana veza između Simsonovog pravca i Eulerove kružnice:

Teorem 20. *Neka su T_1 i T_2 dijametralno suprotne točke koje leže na opisanoj kružnici trokuta ABC. Simsonovi pravci s i s' takvih točaka međusobno su okomiti pravci te se sijeku u točki S koja leži na Eulerovoj kružnici k_9 trokuta ABC (slika 2.32).*



Slika 2.32: Sjecište dva Simsonova pravca s i s' trokuta ABC

Prije samog dokaza, iskazat ćemo teorem na koji ćemo se pozvati u dokazu.

Teorem 21. *Za dani trokut ABC su njegova Eulerova kružnica i njemu opisana kružnica homotetične kružnice sa središtem homotetije u ortocentru H trokuta ABC i koeficijentom $k=\frac{1}{2}$.*

Dokažimo sada teorem 20.

Dokaz. Prvi dio teorema da su Simsonovi pravci s i s' međusobno okomiti već je dokazan kod teorema 14. Ostaje pokazati da sjecište ta dva pravca leži na Eulerovoj kružnici. Sa S označimo sjecište pravaca s i s', a s Q_1 i Q_2 označimo polovišta dužina $\overline{T_1H}$ i $\overline{T_2H}$, pri čemu je H ortocentar trokuta ABC. Prema teoremu 19 točke Q_1 i Q_2 leže na pravcu s, odnosno s' te leže na Eulerovoj kružnici trokuta ABC.

Sada prema teoremu 21 postoji homotetija h s centrom u točki H i koeficijentom $k=\frac{1}{2}$ koja opisanu kružnicu trokutu ABC preslika u Eulerovu kružnicu tog trokuta. Ta homotetija će preslikati i promjer $\overline{TT'}$ opisane kružnice u promjer $\overline{Q_1Q_2}$ Eulerove kružnice. Kako je dokazano da su pravci s i s' međusobno okomiti, slijedi da točka S leži na kružnici čiji je promjer Q_1Q_2, odnosno Eulerovoj kružnici. $\square$

3 Zaključak

Postoje različiti značajni skupovi točaka u geometriji trokuta. U ovom diplomskom radu su promatrani značajni pravci pridruženi trokutu. Dokazana je tvrdnja o kolinearnosti tri trokutu pridružene točke. Pravac na kojem leži ortocentar, težište i središte trokutu opisane kružnice zove se Eulerov pravac. Poznata su brojna svojstva ovog pravca. U radu su spomenute neke od njih te dani različiti dokazi ove tvrdnje.
Promatran je i pravac na kojem leže nožišta okomica povučenih iz točke na opisanoj kružnici trokuta. Ovaj pravac je u literaturi poznat pod imenom Simsonov pravac, dok neki izvori koriste termin Wallaceov pravac. Dokazane su tvrdnje o značajnim svojstvima ovog pravca.

Sažetak

Eulerov pravac trokuta je pravac na kojem leže ortocentar, težište i središte trokutu opisane kružnice. U literaturi postoje brojni dokazi tvrdnje o kolinearnosti ove tri točke trokuta. U ovom diplomskom radu predstavljen je dokaz pomoću vektora i dokaz korištenjem homotetije. Razmatrana je veza Eulerovog pravca i Eulerove kružnice trokuta. Dokazane su tvrdnje o vezama između ovih pojmova.
Simsonov, odnosno Wallaceov pravac trokuta je pravac na kojem leže nožišta okomica povučenih iz neke točke na trokutu opisanoj kružnici na stranice tog trokuta. U radu je dokazana tvrdnja o spomenutoj kolinearnosti nožišta okomica. Dokazan je i niz tvrdnji o različitim svojstvima ovog pravca te istražene veze s Eulerovom kružnicom trokuta.

Ključne riječi: Trokut, kružnica, karakteristične točke trokuta, Eulerov pravac, Simsonov pravac.

Summary

The orhocenter, the centroid of a triangle and the center of the circumscribed circle of a triangle lie on one line, the so called Euler line. The proof of this statement is given in this work. The properties of Euler line are also considered, especially the connection between the Euler line and the Euler circle of a triangle. The feet of the perpendiculars to the sides of triangle from a point on its circumscribed circle are collinear. This line is called Simson (Simson-Wallace) line. A number of statements about this concept is proved. The connection between Simson line and Euler circle is also considered in this work.

Keywords: Triangle, circle, characteristic points of triangle, Euler line, Simson's line.

Literatura

[1] D. Bakoš, Z. Kolar-Begović, *Eulerova kružnica*, Matematičko fizički list **273** (2009), 23–29.

[2] H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, Washington, 1967.

[3] F.M. Eccles, *The Euler line and nine-point-circle theorems*, The Matematics Teacher, **1**(1999), 50–54.

[4] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[5] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[6] A.S. Posamantier, *Advanced Euclidean Geometry*, Key Collage Publishing, 2002.

[7] M. Riegel, *Simson's Theorem*, dostupno na: https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/riegelmj.pdf. (preuzeto: rujan 2017.)

[8] N. Schaumberger, *The Euler Line: A Vector Approach* , The Two-Year Collage Mathematics Journal, **5**(1982), 329–331.

[9] J. Vonk, *The Feuerbach Point and reflection od the Euler line*, dostupno na: http://forumgeom.fau.edu/FG2009volume9/FG200905.pdf (preuzeto: prosinac 2017.)

Životopis

Rođena sam 25. svibnja 1993. godine u Vinkovcima. Živim u obiteljskoj zajednici s ocem, majkom te trojicom braće u mjestu Privlaka. Osnovnu školu Stjepana Antolovića u Privlaci upisala sam 2000. godine. Nakon završetka osnovne škole 2008. godine uspisujem se u Gimnaziju Matije Antuna Reljkovića, usmjerenje prirodoslovno-matematička gimnazija, u Vinkovcima. 2012. godine upisujem integrirani nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.