Teorem o reziduumima i primjene

Petrinović, Matej

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Matej Petrinović

Teorem o reziduumima i primjene

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Matej Petrinović

Teorem o reziduumima i primjene

Završni rad

Voditelj: doc. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2017.

Sažetak

U ovom završnom radu upoznat ćemo se s reziduumima kompleksne funkcije kompleksne varijable i nekim njihovim primjenama. Pokazat ćemo primjenu reziduuma na realne integrale specijalnih oblika kao i na računanje beskonačnih suma. Rad također sadrži riješene primjere koji vode na primjenu reziduuma.

Ključne riječi: singulariteti, reziduumi, integrali, sume

Abstract

In this final paper residues of complex function of complex variables will be introduced along with some of their applications. The application of residues on solving real integrals and calculating value of infinity sums will be shown. This paper also contains solved examples that lead to application of residues.

Key words: singularities, residues, integrals, sums

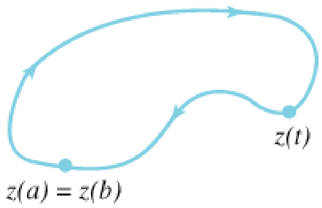
Sadržaj

1 Uvod

U ovom radu razmatramo integrale kompleksnih funkcija kompleksne varijable, posebno primjene teorema o reziduumima. U točki 2 promatramo pojam singulariteta za kompleksne funkcije. U točki 3 navodimo teorem o reziduumima i ilustriramo ga na nekoliko primjera. U točki 4 pokazujemo primjene teorema o reziduumima kod izračunavanja realnih nepravih integrala specijalnih oblika te također kod računanja beskonačnih suma.

Osnovni Cauchyjev teorem za integrale kompleksih funkcija nam kaže da je integral analitičke funkcije po zatvorenoj krivulji Γ jednak 0 tj,

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$$



Slika 1. Zatvorena krivulja

Što ako funkcija nije analitička? Izbjegavat ćemo situaciju kada funkcija "eksplodira" (ode u beskonačnost) na rubu. Tada moramo generalizirati krivuljne integrale na "neprave krivuljne integrale". No, situacija kada funkcija nije analitička u nekoj točki unutar Γ je zanimljivija. Kao generalizacija Cauchyjeve integralne formule, teorem o reziduumima je moćan alat za izračunavanje $\int_{\Gamma} f(z)dz$ kada je Γ zatvorena krivulja i kada funkcija ima izolirani singularitet unutar Γ. Također teorem o reziduumima možemo koristiti za računanje realnih integrala i suma.

2 Singulariteti

Definicija 2.1 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup. Za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da je* ***holomorfna*** *ako je derivabilna i derivacija f' je neprekidna na Ω. Za funkciju f kažemo da je* ***holomorfna u točki*** *z_0 ako postoji okolina točke z_0 na kojoj je f holomorfna.*

Definicija 2.2 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija. Kažemo da je točka $z_0 \in \Omega$* ***singularitet*** *funkcije f ako u točki z_0 funkcija f nije holomorfna ili uopće nije definirana u toj točki.*

Definicija 2.3 *Za kompleksnu funkciju kompleksne varijable $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kažemo da ima* ***izolirani singularitet*** *z_0, ukoliko postoji $\rho > 0$ takav da je funkcija f holomorfna na skupu $K^*(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \rho\}$, a da f nije holomorfna na čitavom krugu $K(z_0, \rho)$.*

Primjer 2.1 *Pogledajmo sljedeće primjere:*

1. *$z = 1, \pm i$ su izolirani singulariteti funkcije $f(z) = \frac{5}{(z-1)(z^2+1)}$*
2. *$z = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$ su izolirani singlularitetu funkcije $f(z) = \frac{e}{\sin(\frac{\pi}{z})}$*
   Uočimo kako 0 nije izlolirani singularitet ove funkcije.

Navedimo sada teorem o Laurentovom redu funkcije f oko točke z_0 na kružnom vijencu.

Teorem 2.1 (O Laurentovom redu) *Neka je f holomorfna na kružnom vijencu $K = K(z_0; r, R)$ oko točke z_0. Tada za svaki $z \in K$ vrijedi:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{1}$$

gdje su koeficijenti dani formulom

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \ n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

a Γ je pozitivno orijetirana kružnica oko z_0 radijusa ρ, gdje je $\rho \in \langle r, R \rangle$. □

Definicija 2.4 *(*Klasifikacija izoliranih singulariteta*) Za izolirani singularitet z_0 funkcije f kažemo da je:*

(a) uklonjiv, ukoliko postoji $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

(b) pol, ukoliko je $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$

(c) bitan singularitet, ukoliko $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ ne postoji.

3 Reziduumi

U ovoj ćemo točki dokazati teorem o reziduumima, koji je vrlo koristan i teorijski i u primjenama. Neka je Γ kontura u Ω (tj, Γ je jednostavna zatvorena krivulja) i neka z_0 ne leži na Γ. Ako funkcija f ima singularitet u z_0, koliko onda iznosi vrijednost $\int_\Gamma f(z)dz$? Ukoliko u (2) stavimo $n = -1$, dobivamo $2\pi i c_{-1}$.

Definicija 3.1 *Neka f ima izolirani singularitet u točki z_0 te neka je*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

*njezin Laurentov red. Reziduumom fukcije f nazivamo koeficijent uz c_{-1}
i označavamo $c_{-1} = Res(f, z_0)$*

Teorem 3.1 *Neka je f holomorfna na $K^*(z_0, R)$ i neka je Γ bilo koja pozitivno orijentirana konturа oko z_0 koja je sadržana u $K^*(z_0, R)$. Tada je*

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i Res(f, z_0).$$

Dokaz: Iz teorema o Laurentovom redu imamo

$$Res(f, z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{(-1)+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(z)dz$$

gdje je Γ bilo koja kružnice oko z_0 radijusa manjeg od R. Zamjenja kružnice sa proizvoljnom konturom oko z_0 zahtijeva argument sličan onome koji pokazuje da se mogu koristiti krugovi bilo kojeg polumjera. ■

Primjer 3.1 *Neka je Γ jedinična kružnica pozitivno orijentirana. Izračunajmo $\oint_\Gamma \frac{e^z}{z} dz$.*
Funkcija $f(z) = \frac{e^z}{z}$ ima singularitet u 0. Razvojem u Laurentov red
$f(z) = \frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ dobivamo da je $Res(f, 0) = 1$. Primjenom Teorema 3.1 *dobivamo*

$$\oint_\Gamma \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i.$$

Teorem 3.2 (o reziduumima) *Neka je Γ jednostavna zatvorena pozitivno orijentirana kontura, neka su $z_1, z_2, \dots, z_n$ točke unutar konture Γ i neka je f analitička na Γ i njezinoj unutrašnjosti osim u točkama $z_i, i = 1, \dots, n$. Tada je*

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i) \tag{3}$$

Dokaz: Neka su $\gamma_j, j = 1, \dots, n$ pozitivno orijentirane kružnice oko z_j takve da je $\gamma_i \cap \gamma_j = \varnothing$ za $i \neq j$ i takve da je za svaki i γ_i sadržana unutar Γ. Tada po Cauchyjevom teoremu imamo:

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i)$$

■

3.1 Računanje reziduuma

Neka je z_0 izolirani singularitet funkcije $f(z)$. Ako je z_0:

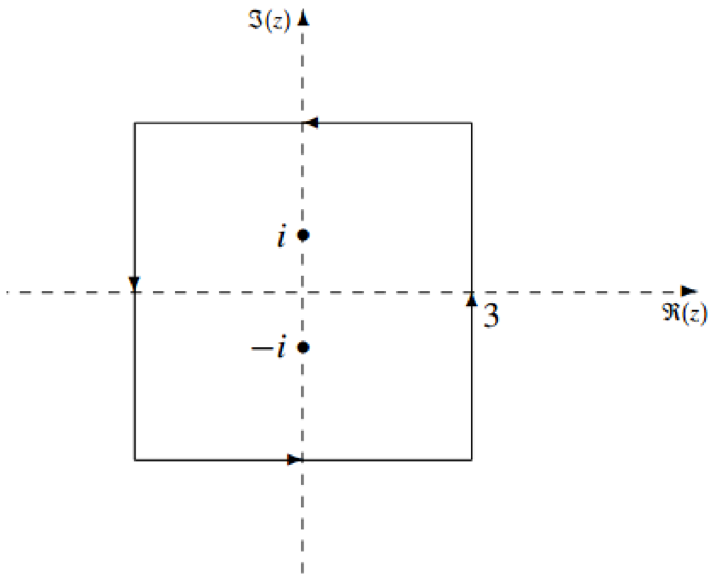
1. uklonjiv singularitet, tada je $Res(f, z_0) = 0$
2. bitan singularitet, tada funkciju f razvijamo u Laurentov red i iščitamo koeficijent c_{-1}, tj. $Res(f, z_0) = c_{-1}$
3. pol, tada
   (a) funkciju f razvijamo u Laurentov red i iščitamo koeficijent c_{-1}
   (b) ako je z_0 pol prvog reda, onda reziduum računamo po formuli
   $$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} [f(z)(z - z_0)] \tag{4}$$
   (c) ako je z_0 pol n-tog reda, onda reziduum računamo po formuli
   $$Res(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z - z_0)^n] \tag{5}$$

Napomena: Ako je z_0 pol prvog reda funkcije f i ako je funkcija f oblika $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, gdje su g, h analitičke funkcije takve da je $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ i $h'(z_0) \neq 0$, tada reziduum funkcije f u točki z_0 možemo računati kao

$$Res(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \tag{6}$$

Primjer 3.2 *Izračunajmo* $\oint_\Gamma \frac{z^2}{1+z^2}dz$ *pri čemu je* Γ *pozitivno orijentiran pravokutnik* $[-3,3] \times [-3,3]$.

Funkcija $f(z) = \frac{z^2}{1+z^2}$ *ima izolirane singularitete u* $\pm i$. *Tada po definiciji reziduuma možemo dobiti da je* $Res(f,i) = \frac{i}{2}$ *i* $Res(f,-i) = -\frac{i}{2}$. *Primjenjujući* Teorem o reziduumima *dobivamo* $\oint_\Gamma \frac{z^2}{1+z^2}dz = 2\pi i(Res(f,i) + Res(f,-i)) = 0$.



Slika 2. Pozitivno orijentiran pravokutnik $[-3,3] \times [-3,3]$

4 Primjene reziduuma

U ovoj točki ćemo pokazati primjene Teorema o reziduumima na izračunavanje realnih integrala posebnog oblika koji su teško izračunljivi drugim metodama, te pokazat ćemo primjenu reziduuma u računanju beskonačnih suma.

4.1 Računanje realnih integrala

1. Integrali oblika $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos(x), \sin(x))dx$

Neka je podintegralni izraz u gornjem integralu $R(\cos(x), \sin(x))$ racionalna funkcija od $\cos(x)$ i $\sin(x)$ tj.R je kvocijent dvaju realnih polinoma i $x \in [0, 2\pi]$. Ako uvedemo supstituciju $z = e^{ix}$, onda se nova varijabla z nalazi na jediničnoj kružnici sa središtem u $(0, 0)$, tj $z \in \{z : |z| = 1\}$ (u Gaussovoj kompleksnoj ravnini). Odatle dobivamo

$$\left.\begin{array}{l} z = e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \\ \overline{z} = e^{-ix} = cos(x) - i\sin(x) \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \cos(x) = \frac{z+\overline{z}}{2} \\ \sin(x) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \end{array}\right.$$

Nadalje, ovdje je $\overline{z} = 1/z$, a kako je $1 = |z|^2 = z\overline{z}$ i $dz = ie^{ix}\,dx = iz\,dx$, slijedi da je

$$dx = \frac{dz}{iz}, \;\; \cos(x) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \;\; \sin(x) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Tada uz ove supstitucije dobivamo da je

$$I := \int\limits_0^{2\pi} R(\cos(x), \sin(x))dx = \oint_{|z|=1} \widetilde{R}(z)dz,$$

gdje je $\widetilde{R}(z)$ nova racionalna funkcija u varijabli z, $\widetilde{R}(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, P_n, Q_m polinomi reda n tj. m. Funkcija $\widetilde{R}(z)$ je analitička osim u konačno mnogo izoliranih singulariteta $\{z_1, \ldots, z_k\}, k \leq m$. Tada po teoremu o reziduumima vrijedi

$$I = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} Res(\widetilde{R}(z), z_i).$$

Primjer 4.1 *Izračunati* $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a\cos(x)}$, $|a|<1$.

Neka je $z=e^{ix}$. *Tada je*

$$I=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{az^2+2z+a} \implies R(z)=\frac{1}{az^2+2z+a}.$$

Polovi funkcije $R(z)$ *su rješenja jednadžbe* $az^2+2z+a=0 \implies z_{1,2}=-\frac{1}{a}\pm\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}$
$z_1=\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}=\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}+1}$. *Iz ovoga slijedi, kako je* $|a|<1$ *tada je* $\sqrt{1-a^2}+1>1$ *i* $|z_1|<1$. *Kako je* $|z_1z_2|=1 \implies |z_2|=\frac{1}{|z_1|}>1$, *a znači da samo točka* z_1 *leži unutar kružnice* $|z|=1$. *Po* Teoremu o reziduumima *slijedi* $I=2\pi i\frac{2}{i}Res(R(z),z_1)$. *Preostaje samo izračunati reziduum od* $R(z)$ *u* z_1. *Koristeći formulu* (4) *imamo:*

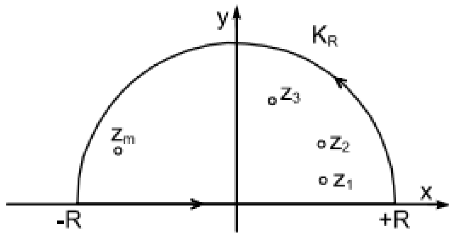
$$\begin{aligned}Res(R(z),z_1)&=\lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{az^2+2z+a}=\lim_{z\to z_1}\frac{\cancel{(z-z_1)}}{a\cancel{(z-z_1)}(z-z_2)}\\&=\frac{1}{a(z_1-z_2)}=\frac{1}{2\sqrt{1-a^2}}\end{aligned}$$

Tada dobivamo

$$I=\cancel{2}\pi\cancel{i}\frac{2}{\cancel{i}}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-a^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

2. Integrali oblika $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Računanje nepravog integrala ovog tipa provodimo tako da funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ proširimo na područje Ω koje sadrži gornju poluravninu ($\mathrm{Im}(z)>0$) osim možda u konačno točaka $z_k, k=1,\ldots,m$ (točke za koje je $\mathrm{Im}(z_k)>0$). Neka je Γ kontura koja se sastoji od orijentiranog segmenta $[-R,R]$ i orijentirane gornje polukružnice
$K_R^+ \equiv \{z:|z|=R, \mathrm{Im}(z)\geq 0\}$ i koja u svojoj nutrini sadrži sve točke $z_k,\ k=1,\ldots,m$.



Slika 3. Orijentirana gornja polukružnica

Sada je

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{K_R^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res(f,z_k). \tag{7}$$

Napravimo li granični prijelaz $R\to\infty$, prvi integral je naš polazni integral i ukoliko bi bilo $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{K_R^+} f(z)dz = 0$, račun bi bio gotov. Kako to nije uvijek tako, vrijedi sljedeća tvrdnja.

Lema 4.1 *Ako za analitičko proširenje $f:\Omega\to\mathbb{C}$ postoje pozitivni realni brojevi R_0, M, δ takvi da za sve točke z za koje je $|z|>R_0$ vrijedi $|f(z)|\leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$, onda integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ konvergira i vrijedi*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res(f,z_k). \tag{8}$$

Dokaz: Računamo

$$\left|\int_{K_R^+} f(z)dz\right| \leq \int_{K_R^+} |f(z)||dz| < \frac{M\pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{\pi M}{R^{\delta}} \to 0 \text{ za } R\to\infty.$$

Odatle i iz (7) dobiva se da vrijedi (8). ■

Primjer 4.2 *Izračunati* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Promotrimo $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$. *Kako je*

$$1 + z^4 = 0 \implies z^4 = -1 = e^{i\pi} \implies z_k = e^{i\frac{(2l+1)\pi}{4}}, \ l = 0, 1, 2, 3$$

u gornjoj poluravnini leže točke $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ *i* $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ *i to su polovi prvog reda analitičkog proširenja* f. *Nadalje, za točke* z *za koje je* $|z| > R_0 = 2$, *uz* $M = 1$ *i* $\delta = 2$ *imamo* $\left|\frac{1}{1+z^4}\right| < \frac{1}{|z|^{1+2}}$, *pa su uvjeti prethodne leme (*Lema 4.1*) ispunjeni. Računajući reziduume u točkama* z_0, z_1 *po formuli* (6) *dobivamo* $Res(f, z_0) = -\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}i\right)\sqrt{2}$, *te* $Res(f, z_1) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}i\right)\sqrt{2}$. *Sada ponovno po prethodnoj lemi (*Lema 4.1*) dobivamo*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

3. Integrali oblika $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx, \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Potrebno je pronaći analitičko proširenje $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcije f na područje Ω koje sadrži gornju poluravninu osim možda konačno točaka $z_k, k = 1, \ldots, m$ u gornjoj poluravnini. Sada postupamo analogno kao u prethodnom slučaju računajući integral funkcije $e^{iaz} f(z)$ po konturi Γ (koja je jednaka kao i u prethodnom slučaju):

$$\int\limits_{-R}^{R} e^{iax} f(x) dx + \int_{K_R^+} e^{iaz} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res(f, z_k).$$

Ponovno je potrebno pronaći uvjete za koje je $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{K_R^+} e^{iaz} f(z) dz = 0$.

Lema 4.2 (Jordanova lema) *Neka je* Ω *područje koje sadrži gornju poluravninu osim možda konačno točaka* $z_k, k = 1, \ldots, m$ *u gornjoj poluravnini. Ako analitička funkcija* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *uniformno konvergira ka nuli obzirom na argument* $\arg(z)$ *kada* $|z| \to \infty$, *onda je za* $a > 0$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{K_R^+} e^{iaz} f(z) dz = 0$$

gdje je K_R^+ *gornja centralna polukružnica radijusa* R.

Dokaz Jordanove leme se može vidjeti u [4] na stranici 127.

Napomena: Jordanova lema se može formulirati i na način uz dane oznake:

$$\text{ako je } \max_{z\in K_R^+}|f(z)| \leq M(R) \text{ i } \lim_{R\to+\infty} M(R) = 0, \text{ onda je } \int_{K_R^+} e^{iaz} f(z)dz = 0$$

Teorem 4.3 *Ako se funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ može analitički proširiti na područje Ω tako da proširenje f zadovoljava uvjete* Jordanove leme, *onda integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)dx$ konvergira za $a > 0$ i vrijedi*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res(F, z_k),$$

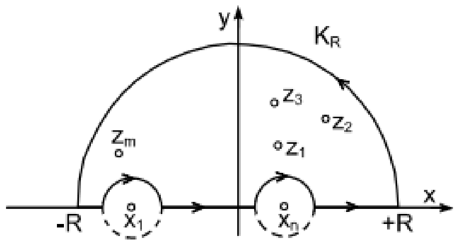
gdje je $F(z) = e^{iaz} f(z)$, a $z_k, k = 1, \ldots, m$ su singularne točke od funkcije F u otvorenoj gornjoj poluravnini.

Primjer 4.3 *Izračunati* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + a^2} dx,\ a > 0$

Uočimo kako je $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + a^2} dx = Re \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + a^2} dx \right)$
Proširenje funkcije glasi $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$ *i ta je funkcija analitička u gornjoj poluravnini te jedini singularitet joj je* $z_1 = ia$. *Kako je* $\max\limits_{z\in K_R^+} |f(z)| = \max\limits_{z\in K_R^+} \frac{1}{|z^2+a^2|} \leq \frac{1}{R^2+a^2}$ *što teži prema 0 za* $R \to \infty$, *vrijedi* $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{K_R^+} e^{iaz} f(z)dz = 0$, *pa imamo* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2+a^2} dx = 2\pi i\ Res(F(z), z_1)$.
Računajući reziduum funkcije $F(z)$ *u točki* z_1 *po formuli* (6) *dobivamo* $Res(F(z), z_1) = \frac{e^{-\alpha a}}{2ai}$, *te uvrštavajući dobivamo vrijednosti integrala* $I = Re\left(\frac{\pi}{a} e^{-\alpha a}\right) = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha a}$.

Neka sada f ima singularitete $z_k, k = 1, \ldots, m$ u gornjoj poluravnini i polove prvog reda $z_l = x_l, l = 1, \ldots, n$ na realnoj osi. Neka je Γ kontura koja se sastoji od gornje polukružnice K_R, dijelova segmenta $[-R, R]$ i polukružnica γ_i kao na slici i pretpostavimo da vrijedi $\int_{K_R^+} f(z)dz = 0$. Tada vrijedi (vidi [4] str. 129)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res(F, z_k) + \pi i \sum_{l=1}^{n} Res(F, x_l) \tag{9}$$



Slika 4. Kontura Γ

Primjer 4.4 *Izračunati* $\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x(x^2+b^2)} dx,\ a, b > 0$

Za $f(z) = \frac{1}{z(z^2+b^2)}$ *su* $z_1 = 0$ *i* $z_{2,3} = \pm ib$ *polovi prvog reda.*

Vrijedi $\left|\frac{1}{z(z^2+b^2)}\right| \leq \frac{1}{R(R^2+b^2)} \to 0$ *za* $R \to \infty$, *pa je* $\int_{K_R^+} f(z)dz = 0$.

Dakle, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 2\pi i\ Res(f, bi) + \pi i\ Res(f, 0)$.

Kako je, po (6), $Res(f, bi) = -\frac{e^{-ab}}{2b^2}$ *i* $Res(f, 0) = \frac{1}{b^2}$.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x(x^2+b^2)} dx = \frac{1}{2} Im \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}\, dx}{x(x^2+b^2)} \right) = \frac{1}{2} Im \left(2\pi i \frac{-e^{-ab}}{2b^2} + \pi i \frac{1}{b^2} \right) = \frac{\pi}{2b^2}(1 - e^{-ab})$$

4.2 Računanje suma

Definicija 4.1 *Za funkciju f kažemo da je* ***meromorfna*** *na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ako ima samo uklonjive singularitete i polove, i ako skup singulariteta nema gomilište u Ω.*

Neka je f meromofna na $\mathbb{C}$ koja nema singulariteta oblika $n\pi$. Funkcije $f(z)\text{ctg}(\pi z)$ i $\dfrac{f(z)}{\sin(\pi z)}$ su meromorfne i imaju izolirane singularitete u $z = n \in \mathbb{N}$. Ukoliko izračunamo reziduume tih funkcija u $z = n$ dobit ćemo

$$Res(f(z)\text{ctg}(\pi z), n) = \frac{f(n)}{\pi}, \; Res\left(\frac{f(z)}{\sin(\pi z)}, n\right) = \frac{(-1)^n f(n)}{\pi}.$$

Neka $\Gamma_{m,n}$ označava pozitivno orijentiranu konturu čija nutrina sadrži polove $-m, -m+1, \ldots, 0, 1, \ldots, n,\; n, m \in \mathbb{N}_0$. Tada vrijedi

$$\oint_{\Gamma_{m,n}} f(z)\text{ctg}(\pi z)dz = 2i \sum_{k=-m}^{n} f(k) + \delta_1 \quad \text{i} \quad \oint_{\Gamma_{m,n}} \frac{f(z)}{\sin(\pi z)} dz = 2i \sum_{k=-m}^{n} (-1)^k f(k) + \delta_2$$

pri čemu su δ_1 i δ_2 odgovarajući izrazi sa sumom reziduuma u polovima funkcije $f(z)$, koji su unutar konture $\Gamma_{m,n}$.
Tada za $m, n \to +\infty$ dobivamo izraze $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)$ i $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k f(k)$, tj. ukoliko $m = 0$ i $n \to \infty$ dobivamo $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f(k)$ i $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k f(k)$.

Teorem 4.4 (o sumaciji) *Neka je $f(z)$ analitička na $\mathbb{C}$ osim u konačno mnogo izoliranih singulariteta. Tada vrijedi*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\sum_{i=1}^{l} Res(\pi f(z)\text{ctg}(\pi z), z_i) \tag{10}$$

pri čemu su $z_i,\; i = 1, \ldots, l$ polovi funkcije f

Dokaz Teorema o sumaciji se može vidjeti u [1] na stranici 5.

Teorem 4.5 *Neka je $f(z)$ analitička na $\mathbb{C}$ osim u konačno mnogo izoliranih singulariteta. Tada vrijedi*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^k f(n) = -\sum_{i=1}^{l} Res\left(\frac{\pi f(z)}{\sin(\pi z)}, z_i\right). \tag{11}$$

Primjer 4.5 *Izračunati* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)^2}$.

Neka je $f(z) = \frac{4}{(2z-1)^2}$. *Funkcija* f *ima pol drugog reda u* $z = \frac{1}{2}$. *Računamo reziduum funkcije* $\frac{4\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{(2z-1)^2}$ *u* $z = \frac{1}{2}$ *prema formuli* (5) *i on iznosi* $-\pi^2$. *Po* Teoremu o sumaciji *imamo*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)^2} = \pi^2.$$

Primjer 4.6 *Dokazati* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Neka je $f(z) = \frac{1}{z^2}$. *Funkcija* $\frac{\pi \operatorname{ctg}(z)}{z^2}$ *ima pol trećeg reda u* $z = 0$. *Računamo reziduum funkcije* $\frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2}$ *u* $z = 0$ *po formuli* (5) *i dobivamo* $\frac{-\pi^2}{3}$. *Prema* Teoremu o sumaciji *imamo* $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$ *te kako je* $(-n)^2 = n^2$ *dobivamo* $2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$ *iz čega dijeljenjem s* 2 *slijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Primjer 4.7 *Izračunati* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, *gdje je* $n \neq 0$.

Neka je $f(z) = \frac{1}{z^2}$. *Funkcija* $\frac{\pi}{z^2 \sin(\pi z)}$ *ima pol trećeg reda u* $z = 0$, *te reziduum te funkcije, primjenujući* (5), *u* 0 *iznosi* $\frac{\pi^2}{6}$. *Po* Teoremu 4.5 *slijedi da je*

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Literatura

[1] Noah A.Hughes, Infinite Series and the Residue Theorem, 2013

[2] Christian Berg, Complex Analysis, Department of Mathematical Sciences, Copenhagen, July 2012

[3] Pawel Hitczenko, Some Applications of the Residue Theorem, Department of Mathematics, Drexel University, 2005

[4] Branko Červar, Kompleksna analiza, Skripta, PMF - matematički odjel, Sveučilište u Splitu, 2012

[5] Šime Ungar, Kompleksna analiza, Skripta, PMF - matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2009

[6] Alexei Rybkin, Mathematical Physics, University of Alaska, Fairbanks