Matematika u srednjovjekovnoj Europi

Damjanović, Miroslav

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:812901

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Miroslav Damjanović

Matematika u srednjovjekovnoj Europi

Diplomski rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Miroslav Damjanović

Matematika u srednjovjekovnoj Europi

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2017.

Sadržaj

1 Uvod

Razdoblje u Europi od pada Zapadnog Rimskog Carstva 476. godine do početka 11. stoljeća često se nazivalo mračnim dobom. To je bilo razdoblje potpune intelektualne stagnacije, kako u matematici, tako i u filozofiji i ostalim znanostima. Opća razina pismenosti bila je veoma niska, tek nekolicina plemića je znala čitati i pisati. Stoga je matematika, za društvo koje se borilo s osnovama pismenosti, bila relativno nebitna.

U prvom dijelu rada ćemo vidjeti kako se razvijao intelektualni život u Europi od 5. do 11. stoljeća. U ovom periodu Crkva je bila jedina ustanova koja je čuvala pismenost i kulturu. Dok su u većem dijelu Europe vladali nemiri, u samostanima su redovnici prepisivali grčke i latinske rukopise i na taj način sačuvali drevnu kulturu od izumiranja. Kako se obrazovni sustav na razini država u potpunosti raspao, jedini obrazovni centri u to vrijeme bile su samostanske škole. Crkva je cjelokupnom obrazovanju dala religijski karakter. Naglasak u podučavanju stavljen je na što bolje razumijevanje i tumačenje Biblije i drugih svetih tekstova. Želeći proširiti svoje znanje, učenici su se počeli okupljati oko profesora koji nisu bili povezani s Crkvom. Uz dozvolu biskupa da podučavaju, profesori su učenicima držali predavanja iz predmeta koji nisu imali mjesta u ograničenom obrazovnom sustavu Crkve. Nabavljanje latinskih prijevoda arapskih i grčkih matematičkih djela dovelo je do promjena u nastavnom planu i programu pa je tako matematika zauzela bitno mjesto u učenju.

Zatim ćemo promatrati uspon matematike i znanosti koji je započeo u 11. stoljeću. Razdoblje od 1050. do 1250. godine bilo je razdolje intelektualnog uzbuđenja i društvene dinamike. Otkriće da Arapi posjeduju velike zalihe znanja uzburkalo je Europljane pa su učenjaci išli ka onim mjestima gdje je spoj kršćanske i islamske civilizacije bio najbliži. Do kasnog 12. stoljeća bujica prevođenja djela s arapskog jezika zahvatila je Europu, a do kraja 13. stoljeća mnoga najvažnija djela grčkih matematičara bila su dostupna na latinskom jeziku. U tom periodu su djelovali i neki od najznačajnijih matematičara srednjeg vijeka s kojima ćemo se upoznati u drugom dijelu rada.

2 Europa u ranom srednjem vijeku

2.1 Uloga Crkve u očuvanju znanja

Nakon zlatnog doba antičke civilizacije uslijedilo je mračno razdoblje europske povijesti. Barbarske invazije u 5. stoljeću uzrokovale su raspad Zapadnog Rimskog Carstva što je dovelo do propadanja materijalne i intelektualne kulture. Na ruševinama propalog Carstva nastale su nove barbarske države koje nisu bile previše zainteresirane za očuvanje i širenje dotad stečenog znanja. Dolazi do opadanja pismenosti, propadanja gradova, državnih institucija, smanjenja trgovine. Početkom 7. stoljeća gotovo ništa nije ostalo od civilizacije koja je čitavo tisućljeće cvjetala mediteranskim područjem. Ovo je bio najtamniji period europskog mračnog doba.

U tom razdoblju jedini čuvar intelektualnog života bila je Crkva. Kako se Rimsko Carstvo na zapadu raspalo, Crkva se pojavila kao jedina stabilna institucija među ruševinama. Imala je organiziranost, posvećenost i obrazovane ljude koji su bili potrebni novom društvu koje se stvaralo. Nastavljajući tradiciju crkvenih očeva, težila je očuvanju onoga što je do tada bilo poznato. Samostani su bili glavna i često jedina središta naobrazbe i pismenosti u određenom području. Ipak, ne može se reći da su oni bili idealni obrazovni centri. Njihova osnovna funkcija bila je vjerska služba, a ne intelektualna. Osnovni cilj samostanskih škola bio je stvoriti crkvene vođe, tako da je intelektualni život bio manje njegovan djelima antičkih pisaca, a više djelima crkvenih očeva. U tim školama se učilo u okviru granica crkvenih interesa, učili su se osnovni elementi čitanja i pisanja latinskog jezika te su se proučavali sažetci biblijskih tekstova. Čak se i proučavanje latinske književnosti više koristilo kao sredstvo učenja latinskog jezika nego zbog samih ideja koje ona sadrži. No ipak, najvažnija djelatnost koja se razvila u samostanima bila je prepisivanje knjiga. Mnoga djela klasične književnosti sačuvana su zahvaljujući redovnicima koji su ih prepisivali u ovom periodu. Na taj su način redovnici sačuvali drevnu kulturu od izumiranja te omogućili njeno pojavljivanje u europskoj civilizaciji.

2.2 Karolinška renesansa

U vremenskom periodu počevši od kraja 8. stoljeća pa tijekom cijelog 9. stoljeća Europa je svjedočila izuzetnom preporodu svoje intelektualne snage, zahvaljujući kombinaciji povoljnih okolnosti i izvanrednih pojedinaca. Ovaj kulturni preporod često se naziva karolinškom renesansom i u tom razdoblju je došlo do porasta pismenosti, razvitka umjetnosti, kulture i arhitekture. Središte kulturne obnove bio je dvor franačkog kralja Karla Velikog (742.-814.). Na Božić 800. godine, dok se Karlo Veliki molio u St. Peteru, svećenik je iznenada stavio krunu na njegovu glavu i proglasio ga carem Svetog Rimskog Carstva. Krunidba Karla Velikoga smatra se prekretnicom u povijesti srednjega vijeka, koja označava svojevrsnu obnovu Zapadnog Rimskog Carstva, budući da je novi car vladao velikim dijelom oblasti koja se nekoć nalazila pod vlašću zapadnorimskih careva. Njegova je dominacija obuhvaćala regije sadašnje Francuske, Zapadne Njemačke, dijelove Austrije, te krajnji jug Italije do Rima.

U svojoj ranoj vladavini Karlo Veliki je shvatio da će biti neophodne drastične reforme kako bi se obnovio intelektualni život njegovog naroda. Za ovu rekonstrukciju nužan je bio novi nastavni plan i program te novi obrazovni sustav. Zbog toga Karlo Veliki na svom dvoru okuplja najučenije ljude tog vremena među kojima je najpoznatiji bio engleski redovnik Alcuin od Yorka. Alcuin je bio carev obrazovni savjetnik i bio je izuzetno uspješan u rješavanju svih zadataka koje mu je Karlo Veliki zadavao. Alcuinovi izaslanici su, u potrazi za tekstovima koji bi se mogli prepisati i dati učenicima na korištenje, slani u Irsku, Španjolsku i Italiju. Pod Alcuinovim tutorstvom dvorska škola u Aachenu je postala glavno mjesto za učenje. Prema tradiciji, i sam je kralj tamo pohađao nastavu zajedno sa svim članovima svoje obitelji te mladim plemićima koje je postavio na visoke pozicije u crkvi i državi. U tom periodu razvija se novi oblik latinskog pisma koji se zove karolinška minuskula i koji je osnova današnjeg pisma. Prednosti tog pisma su bile tako velike da je prihvaćeno od strane svih talijanskih tiskara 15. stoljeća. Slova su bila jednostavnija i proporcionalnija te su se mogla s lakoćom pisati i čitati.

Oko 789. godine Alcuin je naredio da svaka opatija i samostan u carstvu imaju svoju vlastitu školu, sa sedam slobodnih umijeća podijeljenih u kvadrivij (aritmetika, geometrija, astronomija i glazba) i trivij (gramatika, retorika i dijalektika) koji su činili temeljni dio nastavnog plana i programa. Alcuin je čak i naredio kako će se izučavati ovi predmeti tako što je napisao knjige s osnovama za svaki predmet. Međutim, malo se pozornosti davalo učenju koje se ostvarivalo u sklopu kvadrivija, pa je tako i matematika bila osjetno zanemarena u školama Karla Velikog. Stoga ne iznenađuje podatak da tijekom 9. stoljeća i "male renesanse" u kojoj je zabilježen obrazovni napredak, nisu zabilježene značajne promjene u matematičkoj klimi Europe. Od matematičkih problema, najvažniji su bili izrada crkvenog kalendara i utvrđivanje datuma Uskrsa.

Za razvijanje logičkog i matematičkog razmišljanja služilo je djelo *Propozicije za izoštravanje mladenačkih umova (Propositions for Sharpening Youths)* koje je pripisano Alcuinu. To je bila kolekcija od 53 aritmetička problema od kojih su neki bili već poznati u drugim kulturama. Za rješavanje je ovih problema potreban određen talent za matematiku, no oni ne ovise o nekoj matematičkoj teoriji niti o pravilima. Najpoznatiji problem u ovom djelu jest problem o tri muškarca i njihove tri sestre koji moraju prijeći rijeku u čamcu koji može prenijeti samo dvije osobe. Kako će svi prijeći na drugu obalu rijeke ako niti jedna od sestara ne smije ostati sama s muškarcem koji nije njezin brat? Alcuin je taj problem riješio na sljedeći način, zapisujući rješenje riječima, a ne simbolima:

"*Pretpostavimo da muškarac $M1$ ima sestru $S1$, muškarac $M2$ ima sestru $S2$ i muškarac $M3$ ima sestru $S3$. Na početku, neka su svi na jednoj obali. Svaki sljedeći redak pokazuje poziciju muškaraca i sestara nakon izvršenog prelaska čamcem na drugu obalu, pri čemu je znakom " = " označen čamac.*"

$$
\begin{array}{ll}
M1, M2, M3, S1, S2, S3 & = - - - - - \\
M2, M3, S2, S3 & - - - - - = M1, S1 \\
M2, M3, S2, S3, M1 & = - - - - - S1 \\
M2, M3, M1 & - - - - - = S2, S3, S1 \\
M2, M3, M1, S1 & = - - - - - S2, S3
\end{array}
$$

$M1, S1$	$-----= M2, M3, S2, S3$
$M1, S1, M2, S2$	$=------ M3, S3$
$S1, S2$	$-----= M1, M2, M3, S3$
$S1, S2, S3$	$=------ M1, M2, M3$
$S2$	$-----= S1, S3, M1, M2, M3$
$S2, M2$	$=------ S1, S3, M1, M3$
	$------= S2, M2, S1, S3, M1, M3$

Karolinški preporod je bio kratkog vijeka, jer kada se činilo da je Karlo Veliki riješio problem europske političke razjedinjenosti, konačni val barbarske invazije je razbio karolinško carstvo. U 9. i 10. stoljeću su Vikinzi sa sjevera, Mađari s istoka i Saraceni s juga istovremeno pljačkali obale, ravnice i doline rijeka karolinškog carstva koje se raspalo u dijelove koji će jednog dana postati odvojene nacije Francuske, Njemačke i Italije. Ipak, generalno govoreći, obrazovna ostvarenja koja je Karlo Veliki postigao nastavila su funkcionirati i tijekom perioda agonije, pa su stoga uvijek postojali centri u kojima je učenje njegovano. Gubici koji nastaju usljed rušenja nekih samostanskih škola su se konstantno ispravljali zahvaljujući naporima ostalih. Nikada više Europa neće doživjeti potencijalni gubitak pismenosti koji je zaprijetio kao opasnost u 7. stoljeću. U 11. stoljeću dolazi do uspona matematike i znanosti, i to ponajviše zahvaljujući arapskoj civilizaciji koja je, nasuprot intelektualnoj tmini Europe, doživljavala svoj procvat.

3 Procvat učenja

3.1 Prenošenje arapskog učenja na zapad

Nakon smrti Muhameda 632. godine došlo je do naglog širenja islama i njegovog pretvaranja u jednu od najvećih svjetskih religija. U svojim osvajačkim pohodima Arapi su zauzeli sjevernu Afriku, Španjolsku, Bliski Istok te dijelove centralne i južne Azije. Daljnje širenje Arapa i islama u Europu spriječila je Franačka država 732. godine kada je u bitci u Poitiersu franačka vojska pod vodstvom Karla Martela (djeda Karla Velikog) porazila Arape. Poraz u Poitiersu je zaustavio daljnji prolazak Arapa prema sjeveru, ali Arapi su se zadovoljili time što je cijela Španjolska bila pod njihovom vlašću. Nakon osvajanja Španjolske pokušali su osvojiti i Carigrad, ali glavni grad Bizanta je uspio preživjeti arapske napade te na taj način sačuvati Europu od muslimanskog osvajanja preko Balkanskog poluotoka. Kao rezultat arapskog osvajanja, izniknule su tri vrlo različite civilizacije u mediteranskom području: bizantska, latino-europska i islamska. U različitoj mjeri, svaka od ove tri civilizacije je bila nasljednik propalog Rimskog Carstva.

Arapi sa sobom nisu donosili ništa što bi se moglo nazvati učenošću. Njihova znanost, umjetnost i filozofija dolazili su iz zemalja koje su osvojili. Željni da usvoje nove ideje, počeli su da prikupljati stare rukopise koji su bili prepisivani u dovoljnom broju, kako bi preživjeli ratove koji su se vodili usljed raspada Rimskog Carstva. Tako su se Arapi upoznali s idejama Aristotela, Euklida, Arhimeda i Ptolomeja. Oni su činili uslugu Europi time što su marljivo prevodili na svoj jezik ono što bi arapski pisari nazivali grčkom znanošću. Do 10. stoljeća, gotovo svi tekstovi grčke znanosti i matematike, koji su postali poznati zapadnom kršćanstvu, imali su prijevod na arapskom jeziku. Tako je oko 800. godine Euklidovo djelo *Elementi* bilo dostupno na arapskom jeziku. Ptolomejevo djelo *Megale Syntaxis* pojavilo se na arapskom jeziku 827. godine pod općeprihvaćenim nazivom *Almagest*.

Svi prijevodi antičkih djela na arapski jezik su možda i najveći doprinos islama unaprijeđenju znanja. Preuzimajući indijsku matematiku, najprije od Perzijanaca, a zatim sredinom 8. stoljeća i od Indijaca, Arapi su bili u mogućnosti da postanu najveći učenjaci tog vremena. Glavni znanstveni centar početkom 9. stoljeća postaje tzv. Kuća mudrosti u Bagdadu koja se mogla usporediti s Aleksandrijskom knjižnicom i muzejom. Tu su se nalazile ogromne biblioteke, akademije i centri za prevođenje u kojima su se vrlo kvalitetno prevodila djela grčke antike. Može se reći da je za razvoj arapske matematike u srednjovjekovnom razdoblju najzaslužniji al-Kvarizmi koji se smatra prvim velikim arapskim matematičarem. Upravo se kroz njegov rad Europa upoznala s indijsko-arapskim brojevnim sustavom.

Najveći doprinos koji su Arapi dali matematici je povezivanje dviju različitih matematika, grčke i indijske. Indijska matematika se razvijala neovisno o utjecaju grčke. Za razliku od grčke matematike koja je bila usredotočena na geometrijske aspekte, u indijskoj su dominirali aritmetički i računski aspekti. Takozvani arapski brojevi, s uvođenjem nule, sačinjavali su najvažniju matematičku ideju koju su Arapi posudili s istoka. U 12. stoljeću arapska matematika dostiže svoj vrhunac i polako počinje opadati, a u Europi započinje sustavno prevođenje najvačnijih arapskih djela.

Poticaj koji je Karlo Veliki dao obrazovanju, iako je gubio na snazi kako je vrijeme odmicalo, bio je dovoljan da se održava učenje u Europi sve do većeg preporoda koji je uslijedio u 11. i 12. stoljeću. Za razliku od karolinške renesanse, koja je vještački nametnuta od strane viših krugova, preporod 12. stoljeća se spontano rodio, zajedno s uveliko drugačijim materijalnim uvjetima. Strast prema učenju zamijenila je prijašnju intelektualnu stagnaciju, te su tako Europljani počeli nadograđivati svoje naslijeđeno znanje. Neposredni problem zapadnog učenjaka je bio saznati odakle učenje potječe. Saznanje da su mnoga remek-djela antike strogo čuvana kod Arapa uzburkalo je Europljane, pa su, kako bi iskoristili ovaj novi izvor znanja, učenjaci išli ka onim mjestima gdje je spoj kršćanske i islamske civilizacije bio najbliži.

Najočitije mjesto na kojem su se arapski sadržaji prenijeli na latinski zapad je bio Španjolski poluotok. U to je vrijeme Cordoba, sa svojih 600 džamija i bibliotekom sa 600 000 izdanja, bila glavni znanstveni centar zapadnog dijela Muhamedovog carstva, kao dvojnik Bagdada na istoku. Stoga su učenici sa zapada pohrlili ka centrima za učenje, voljni da izučavaju znanost koju su prenosili Arapi. Povratak antičke znanosti u 11. i 12. stoljeću, unaprijeđen s onim što su sami Arapi doprinijeli, označio je prekretnicu u europskoj intelektualnoj povijesti. U Toledu, koji je u tom periodu bio svježe preuzet islamskim vladarima od strane kršćana, osnovana je škola za prevođenje arapskih znanstvenih knjiga, koja je iz mnogih zemalja privlačila one koji su bili željni znanja. Ovdje su se mogla pronaći skladišta islamskih naučnih rukopisa, kao i ljudi u raskoraku između dvije kulture. Treba istaknuti židovsku zajednicu koja je bila u nastanku, a čiji su mnogi članovi tečno koristili arapski jezik.

Posao prevođenja je bio vrlo neobičan. Prvo se tekst na arapskom čitao naglas, zatim bi se prevodio na španjolski idiom, da bi ga naposljetku kršćanski prevoditelj preveo na latinski jezik. Ovaj proces nije bio brz, niti bez greške ili nesporazuma, posebice ako uzmemo u obzir zamršenost znanstvenih studija. Štoviše, srednjovjekovni latinski jezik nije još bio dovoljno bogat tehničkim terminima, pa je značenje nekih od njih na arapskom jeziku bilo nejasno i samim prevoditeljima. U najboljem slučaju, latinski prevoditelji, nalazeći se u sredini između dva potpuno drugačija jezika, su bili barem doslovni i precizni. U najgorem slučaju, kada su prevedene verzije konačno stigle do srednjovjekovnih učenika s nagomilanim greškama, blago su podjećale na originale pisane na grčkom jeziku.

3.2 Prvi prevoditelji

Jedan od najranijih prevoditelja je bio Adelard iz Batha (1075.-1160.). Većinu svog ranog života je proveo putujući kroz Francusku, Španjolsku, južnu Italiju, Siciliju i Bliski Istok, od kojih su posljednja dva mjesta obilovala arapskim studijama koje su bile lako dostupne. Adelard je oko 1142. godine napravio prvi latinski prijevod Euklidovog djela *Elementi* s arapskog jezika. Također je preveo i al-Hvarizmijeve astronomske tablice iz 1126. godine.

Nekih 150 godina nakon Adelarda, Johannes Campanus iz Novare je predstavio novi prijevod *Elemenata* , koji je zbog svoje jasnoće i potpunosti, zamijenio ranije latinske verzije. Ovaj prijevod je bio dosljedniji originalnom grčkom tekstu nego njegovi preci, ali je još uvijek bilo razlika. Ova verzija je postala osnova za prvo tiskano izdanje Euklidovog djela *Elementi* koje se pojavilo 1482. godine, kao prva bitna matematička knjiga koja je tiskana.

Robert iz Chestera je 1145. godine na latinski jezik preveo al-Kvarizmijevo djelo Algebra i na taj način predstavio Europi algebarske algoritme za rješavanje kvadratnih jednadžbi. Iste godine je Plato od Tivolia s hebrejskog jezika preveo djelo *Liber embadorum* španjolsko-židovskog matematičara Abrahama bar-Hiyyae. To je djelo također sadržavalo potpuna (pozitivna realna) rješenja kvadratne jednadžbe.

Najmarljiviji i najproduktivniji među prvim prevoditeljima s arapskog jezika je bio Gerard od Cremone (1114.-1187.). Iako je izučavao umjetnost u Italiji, poseban interes je pokazivao za astronomiju. Budući da mu Ptolomejeva djela nisu bila dostupna, Gerarda je privukao Toledo gdje je i naučio arapski jezik. Gerard je svoj život posvetio prevođenju znanstvenih djela s arapskog jezika, te se smatra da je više arapskih znanstvenih djela prešlo u zapadnu Europu preko njegovih ruku nego bilo kojim drugim putem. Zaslužan je za prevođenje više od 80 arapskih djela na latinski jezik. Međutim, nisu sva ova djela prevedena samo njegovom zaslugom. Poznato je da je jedan od njegovih asistenata bio Galippus, španjolski kršćanin koji je imao dozvolu da prakticira kršćanstvo pod muslimanskim pravilima, ali imena njegovih ostalih asistenata su izgubljena kroz povijest. Najznačajnije njegovo djelo je prijevod Ptolomejevog *Almagesta* s arapskog jezika kojeg je napravio 1175. godine. Među značajnijim djelima je i novi prijevod Euklidovog djela *Elementi* s arapskog jezika od Thabit ibn Qurra-a.

Do kraja 13. stoljeća su mnoga grčka djela dobila svoj prijevod na latinskom jeziku. Od svega što je dobiveno iz arapskih izvora, filozofija "novog Aristotela", tj. znanstvena Aristotelova djela *Fizika*, *Metafizika* i *Nova logika* (četiri napredna djela iz područja logike) koja prije nisu bila dostupna na latinskom jeziku, bila su najcjenjenija.

Arapski jezik je bio novi jezik znanosti, te se smatrao prestižnijim od grčkog jezika u ovom periodu. Štoviše, govorni arapski jezik je bio zastupljeniji od grčkog čije se znanje polako gubilo na Zapadu gdje se koristio latinski jezik. Zbog toga se prakticiralo da se rade prijevodi arapskih verzija grčkih djela, a ne prijevodi originalnih grčkih djela. Kada je Sicilija pala pod normandijske ruke (nakon arapske vladavine od 902. do 1091.), bio je omogućen način kojim će originalni grčki klasici pronaći svoj put do Europe. Regija je još uvijek imala značajan udio populacije koja priča arapski jezik i nikada nije prekinut trgovački odnos sa Konstantinopolom, tako da su svi uvjeti pogodovali razmjeni ideja među arapskim, grčkim i latinskim učenjacima. Stoga su se na Siciliji pojavili, osim prevođenja s arapskog, neki od najranijih prijevoda koji su se radili direktno sa grčkog jezika. Ptolomejev *Almagest* je prvi puta preveden sa grčkog jezika na latinski na Siciliji 1163. godine, nekih 12 godina prije nego je preveden na arapski od strane Gerarda u Toledu. Nažalost, ova verzija prevedena s grčkog nije bila priznata, pa je samo verzija prevedena s arapskog jezika bila dostupna u Europi sve do 15. stoljeća.

Prevoditeljski posao je bio intelektualno vrlo zahtjevan. Prevoditelji su bili vrlo slabo nagrađivani te su uživali malo ili ništa slave. Jedini motiv za njihov rad bila je predanost istini i znanju. No ipak su ostvarili veliki poduhvat. Unutar jednog stoljeća dobivene su nove spoznaje koje su višestruko nadilazile do tada dostupnu literaturu.

Prevođenjem arapskih i grčkih djela zapadna civilizacija je dobila materijale kakve nikada prije nije imala: ogromne količine antičkih znanstvenih i matematičkih radova, od jonskih filozofa i Aristotela do aleksandrijskih matematičara i Ptolomeja, koji nikada prije nisu bili prevođeni na latinski jezik.

Do sredine 13. stoljeća sve što je bilo značajno na arapskom jeziku, preneseno je u Europu zahvaljujući prevodima na latinski. Velika je sreća to što se opadanje arapske učenosti i kreativnosti nije desilo prije samog intelektualnog buđenja Europe. Kada se dogodio pravi preporod u učenju, i kada se prava renesansa dogodila u 15. stoljeću, islamska nadmoć je već opala. Ali do tada, zapadna Europa je bila spremna prihvatiti intelektualno nasljedstvo koje joj je ostavljeno iz ranijih godina.

3.3 Srednjovjekovna sveučilišta

Tijekom kasnog 12. stoljeća u Europi su se počele rađati institucije koje su imale veliki utjecaj na razvoj znanosti općenito, kao i na razvoj same matematike: sveučilišta. Ona su bila osnivana kao društva ili savezi učenika i profesora i isplivavali su na površinu kada je bilo dovoljno dostupnog učenja u zapadnoj Europi koje bi opravdalo njihovo postojanje. Razlog ovakvom udruživanju učenika i profesora bila je zaštita zajedničkih interesa i uređivanje međusobnih odnosa u obrazovnom procesu.

Profesori i učenici su se polako grupirali u četiri fakulteta: umjetnost, teologija, pravo i medicina. Među najranijim od ovih institucija jesu one u Parizu, Oxfordu, Cambridgeu i Bologni. U Parizu je sveučilište nastalo od katedralske škole Notre Dame. Iako postoje dokazi o postojanju sveučilišta u kasnom 12. stoljeću, prvi službena povelja datira iz 1200. godine. U Bologni je sveučilište započelo kao pravna škola, vjerojatno već u 11. stoljeću. Talijanski fakultet se razlikovao od svojih sjevernijih kolega. Budući da je to bio savez učenika, a ne profesora, učenici su imali glavnu riječ. Oni su organizirali sve, sami su izglasavali profesore i druge službenike. Nad bolonjskim sveučilištem, za razliku od pariškog, Crkva nikada nije uspjela uspostaviti temeljitu kontrolu. Pariško sveučilište je bilo pod vodstvom Crkve i uprava sveučilišta je bila u rukama profesora. Sveučilišta u Oxfordu i Cambridgeu su nastala prema pariškom uzoru.

Nastavni plan i program na svim sveučilištima je bio zasnovan na sedam slobodnih umijeća podijeljenih u trivij (gramatika, retorika i dijalektika) te kvadrivij (aritmetika, geometrija, glazba i astronomija). Ovakav nastavni plan i progam je omogućavao učeniku pripremu za više fakultete prava, medicine ili teologije. Dakle, najprije bi se studirao trivij i kvadrivij čime bi se postizao stupanj *baccalaureus*. Nakon toga se moglo studirati pravo, medicina ili teologija čime bi se postizao stupanj magistra. Najveći naglasak se stavlja na logičko zaključivanje i proučavanje svih aspekata prirode i društva. Primarni tekstovi su bili Aristotelova djela iz logike koja su sva do ovog perioda bila prevedena na latinski jezik. Profesori su smatrali da je logika najprikladnija za prvo područje proučavanja jer ona proučava metode za sva filozofska i znanstvena ispitivanja. Postupno su i druga Aristotelova djela dodavana u nastavni plan i program.

4 Fibonacci

Leonardo Pisano, poznatiji kao Fibonacci, smatra se najboljim europskim matematičarem srednjeg vijeka. Rođen je oko 1170. godine u Pisi i živio je otprilike do polovine 13. stoljeća. Nadimak Fibonacci potječe od *filius Bonacci* što znači sin Bonaccijev. Njegov otac je bio trgovac koji je imao velike komercijalne ugovore u gradu Bugia u sjevernoj Africi (današnji grad Bejaia u Alžiru). Tamo je Leonardo proveo većinu svog ranog života učeći arapski jezik i izučavajući matematiku uz pomoć muslimanskih profesora. Kasnije je sa svojim ocem putovao Mediteranom gdje je imao prilike upoznati djela Euklida, Arapa, Indijaca i drugih. Tijekom svojih putovanja, prepoznavao je ogromne prednosti matematičkih sustava koji su se koristili u zemljama koje je posjećivao. Fibonacci je svoja putovanja završio oko 1200. godine i tada se vratio u Pisu. Tamo će napisati svoja najvačnija djela *Liber abaci* (1202.), *Practica geometriae* (1220.), *Flos* (1225.) i *Liber quadratorum* (1225.). U ta djela je utkao sve ono što je naučio na putovanjima i ona će imati značajnu ulogu u oživljavanju drevnih matematičkih vještina.

Slika 1: Fibonacci

4.1 *Liber abaci* i upotreba arapskih brojeva u Europi

Nakon povratka u Pisu, Fibonacci je 1202. godine napisao svoje najznačajnije djelo *Liber abaci (Knjiga računanja)* koje je bilo oličenje svog znanja iz aritmetike Fibonaccijevog vremena. Kao matematičko remek-djelo srednjeg vijeka, ostalo je model i izvor u narednih nekoliko stotina godina.

Liber abaci se sastoji od 15 poglavlja. U prvom poglavlju Leonardo je objasnio prednosti indijsko-arapskog brojevnog sustava s pozicijskim označavanjem i brojem nula, nasuprot nevještog rimskog sustava koji je još uvijek bio u upotrebi u njegovoj zemlji. Prvo poglavlje u svojoj knjizi započinje rečenicom:

Ovo je devet indijskih brojeva:

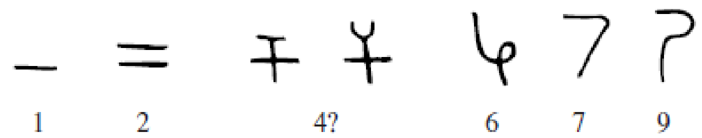
$$9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1.$$

S ovih devet brojeva, i sa znakom 0, kojeg Arapi nazivaju zephir, bilo koji broj može biti napisan, što ću vam u nastavku i pokazati.

Ovo označava prvu formalnu upotrebu arapskih brojeva u zapadnom svijetu. Iako arapski brojevi nisu bili potpuno novi za Europu, jer je još pola stoljeća ranije Gerard donio sustav u Europu prijevodom Ptolomejeva *Almagesta*, nijedna ranija knjiga nije pokazivala, kroz toliko bogatstvo primjera iz svakog područja, njihovu nadmoć nad tradicionalnim rimskim brojevima.

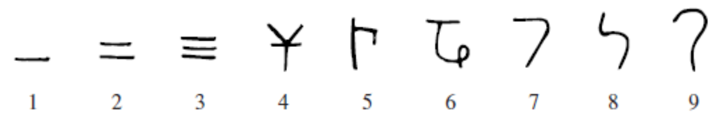
Iako smo naš sadašnji sustav brojeva nazivali arapskim, njegovi korijeni su nejasni i sporni. Teorija koja je najviše prihvaćena kaže da on potječe iz Indije, iz 3. stoljeća, da je donesen u Bagdad u 8. stoljeću, te da je naposljetku dospio u zapadnu Europu putem maurske Španjolske.

Pisani brojčani simboli su se pojavili u Indiji prije početka kršćanske ere. Jedan od najranijih sačuvanih primjera je pronađen u zapisima urezbarenim u zidove pećine na brdu Nana Ghat, u blizini Mumbaija. Ako se pravilno interpretira, to uključuje:



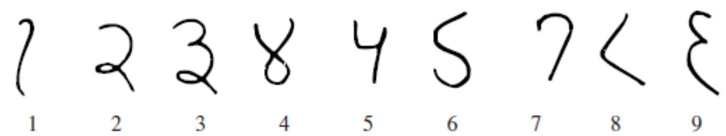
Slika 2: Indijske brojke iz 3. stoljeća prije Krista

Sljedeći važan trag o brojkama se pojavio u uklesanim natpisima u Nasiku u Indiji. Ovi Brahmi brojevi iz 2. stoljeća poslije Krista formiraju sustav sa sljedećih 9 simbola:



Slika 3: Indijske brojke iz 2. stoljeća poslije Krista

Povjesni dokazi ukazuju na to da je pozicijsko označavanje s nulom bilo poznato u Indiji do 5. stoljeća, ako ne i stoljeće ranije. Forma simbola za nulu se mijenjala od čiste točke do malog kruga. Brojevi koji su se koristili u 8. stoljeću nazvani su *Devanagari* ili *sveti brojevi*:

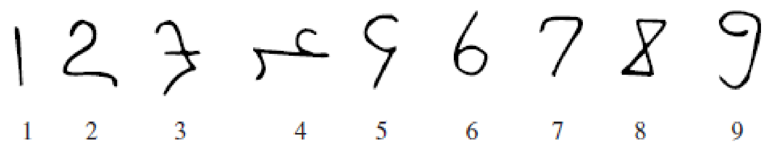


Slika 4: *Devanagari* brojevi iz 8. stoljeća

Kako i kada su ovi brojevi došli do Arapa pitanja su na koja nikada nije dan precizan i zadovoljavajući odgovor. Tijekom ranog širenja Arapa, javni pozivi su pisani na grčkom i arapskom jeziku jer su ljudi na Bliskom Istoku razumjeli grčki jezik. Vladajući kalif, kako bi promovirao svoj jezik, donio je 706. zakon kojim je zabranio upotrebu grčkog jezika u korist arapskog jezika, ali pored toga odlučeno je da se grčki abecedni sustav može koristiti pri pisanju brojeva. Ovo ukazuje na to da indijski simboli još nisu stigli do Damaska, sjedišta kalifa.

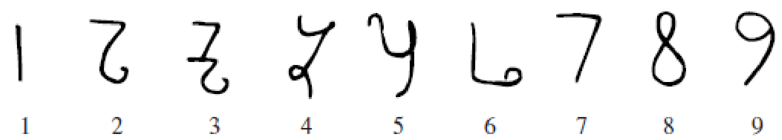
Oko 800. godine Arapi su definitivno upoznati s indijskim sustavom. Matematičar al-Kvarizmi je pripremio malu knjigu u kojoj objašnjava upotrebu indijskih brojeva, uključujući i upotrebu nule. Kada je u 12. stoljeću Adelard iz Batha ovo preveo na latinski jezik, došlo je do pogrešne pretpostavke da su ovi brojevi arapskog porijekla.

Vanjski izgled indijskih brojeva je doživio niz izmjena pri svom putovanju iz Indije, a Arapi su iz niza oblika odabrali one koji su bili najprikladniji za ručno pisanje. Simboli koji su naposljetku prihvaćeni od strane zapadnih Arapa su takozvani *Gobar* brojevi, nastali od arapske riječi za prašinu. Ovaj jedinstven naziv su dobili po običaju Arapa da, pri nedostatku drugog materijala za pisanje, posipaju bijelu prašinu po crnoj podlozi i tu pomoću iglice prave izračune. Uočljivo je koliko *Gobar* brojevi sliče našim modernim brojevima, mnogo više nego indijski brojevi:



Slika 5: *Gobar* brojevi iz 10. stoljeća

Približavajući se obilježavanju koje je danas u upotrebi, definitivno najstariji europski rukopis koji sadrži indijsko-arapske brojeve je *Codex Vigilanus*, napisan u Španjolskoj 976. godine. Devet simbola koji su se koristili bili su:



Slika 6: Zapis brojki u *Codex Vigilanusu* iz 10. stoljeća

Na početku je bio prisutan tvrdoglav otpor prema širenju novih brojeva. Grad Firenca je 1299. izdao naredbu kojom zabranjuje trgovcima koričtenje arapskih brojeva u knjigovodstvu, naredivši im da koriste ili rimske brojeve ili da pišu pune brojčane pridjeve. Ova odredba je izdana vjerojatno zbog velikog izbora oblika određenog broja što za posljedicu ima mogućnost za dvosmislenost, nesporazum i konačnu prevaru. 0 može biti promijenjena u 6 ili 9 bez problema, a s druge strane, nije tako jednostavno krivotvoriti rimske brojeve. Ako k tome dodamo i konfuziju i nesigurnost koju je nula prouzrokovala u mislima običnih ljudi (tko bi mogao razumjeti simbol koji ne znači apsolutno ništa) te nestašicu starog papira, dovoljno jeftinog da se baci nakon što se završi izračun, veoma je lako uvidjeti zašto je trebalo tako mnogo vremena da arapski brojevi dođu u opću upotrebu.

Prošlo je još nekoliko stoljeća, a arapski simboli su bili na granici da odnesu konačnu pobjedu. Računanje s računaljkama i zapisivanje rezultata rimskim brojevima je jednostavno bilo prespora procedura. Točan datum presudne pobjede nije jasno određen. Izvan Italije, zadržalo se računanje na rimskim brojevima sve do 1550. godine, a u konzervativnijim samostanima i sveučilištima čak i stotine godina duže. Nakon što su 1450. godine predstavljene tiskane knjige, standardizirala se forma arapskih brojeva. Zaista, stabilizirajući uticaj tiskanja je bio tako veliki da brojke koje imamo danas u suštini imaju isti izgled kao brojke u 15. stoljeću.

U drugom poglavlju se opisuje način množenja cijelih brojeva, koji se donekle razlikuje od današnjeg. Algoritmi za zbrajanje, oduzimanje i dijeljenje cijelih brojeva su prikazani u trećem, četvrtom i petom poglavlju. Šesto poglavlje opisuje množenje cijelih brojeva i razlomaka dok je njihovo zbrajanje, oduzimanje i dijeljenje opisano u sedmom poglavlju. Fibonacci je zaslužan za uvođenje razlomačke crte. U šestom i sedmom poglavlju se upoznajemo i s njegovim zapisivanjem mješovitih brojeva. Njegovo obilježavanje mješovitih brojeva razlikovalo se od našeg u tome što je on pravi razlomak zapisivao ispred cijelog dijela. Na primjer, njegovo obilježavanje

$$\frac{7\ \ 1}{10\ 10}8$$

trebalo se čitati kao

$$8 + \frac{1}{10} + \frac{7}{10 \cdot 10}$$

Na isti način, izraz

$$\frac{1 \;\; 5 \;\; 7}{2 \;\; 6 \;\; 10}$$

znači

$$\frac{7}{10} + \frac{5}{10 \cdot 6} + \frac{1}{10 \cdot 6 \cdot 2}.$$

Pod utjecajem Arapa imao je običaj čitati brojeve s desne strane na lijevu.

U poglavljima 8, 9, 10 i 11 nalaze se problemi usmjereni na trgovce. Ti problemi se odnose na kupovanje i prodaju robe, računanje profita, procese razmjene robe, pretvaranje valuta koje su se koristile u mediteranskim zemljama i dr. Naime, u to vrijeme Italija je imala najveću koncentraciju različitih valuta u svijetu, s 28 različitih gradova koji su izdavali vlastiti novac od kojih je čak 7 bilo u Toskani. Vrijednost i metalni sastav kovanice je znatno varirao od grada do grada. Ovakvo stanje stvari je pogodovalo mjenjačnicama i *Liber abaci* sadrži mnoštvo primjera koji opisuju probleme te vrste.

Na kraju 11. poglavlja nalazi se nekoliko verzija klasičnog problema kupovine ptica nazvanih *Fibonaccijev problem ptica.* Jedno takvo pitanje je bilo kako kupiti 30 ptica, među kojima su vrapci, grlice i golubovi, za 30 denarija ako 3 vrapca koštaju 1 denarij, 2 grlice koštaju 1 denarij i 1 golub košta 2 denarija. Suvremeni način rječavanja ovog problema bi uključivao dvije jednadžbe s tri nepoznanice. Ako s x označimo broj vrabaca, s y broj grlica i sa z broj golubova, dobit ćemo sljedeće jednadžbe:

$$x + y + z = 30 \tag{1}$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 30. \tag{2}$$

Množeći jednadžbu (1) s 2 i jednadžbu (2) sa 6, dobit ćemo sljedeće:

$$2x + 2y + 2z = 60 \tag{3}$$

$$2x + 3y + 12z = 180. \tag{4}$$

Oduzimajući od jednadžbe (4) jednadžbu (3) dobit ćemo jednadžbu $y + 10z = 120$. Kako su $10z$ i 120 djeljivi brojem 10, slijedi da je i y djeljiv s 10. Za $y = 10$ dobivamo sljedeća rješenja: $y = 10, z = 11, x = 9$. Za $y = 20$ dobivamo $z = 10$ i $x = 0$ što nije rješenje zato što moramo imati pozitivan broj svake vrste ptice. Očito, niti veći višekratnici broja 10 neće dati rješenje.

Leonardo je ovaj problem riješio na sljedeći način: *"Prvo pretpostavimo da kupujem* 30 *vrabaca za* 10 *denarija, tako mi je ostalo još* 20 *denarija. Sada pretpostavimo da zamijenim jednog vrapca za jednu grlicu što će povećati potrošnju novca za* $\frac{1}{6}$ *denarija zato što vrabac košta* $\frac{1}{3}$ *denarija i grlica košta* $\frac{1}{2}$ *denarija što je za* $\frac{1}{6}$ *više od cijene vrapca. Zamijenim li jednog vrapca za jednog goluba, potrošnju novca ću povećati za* $\frac{5}{3}$ *denarija što je razlika između* 2 *denarija i* $\frac{1}{3}$ *denarija. Napravim li* 6 *ovakvih zamjena, potrošnju ću povećati za* 10 *denarija. Sada moram vrapce mijenjati za grlice i golubove sve dok ne iskoristim* 20 *denarija koje sam ranije zadržao. Pomnožio sam sa* 6 *i dobio sam* 120 *koje moram podijeliti na dva dijela, od kojih se jedan dio može podijeliti s* 10*, a drugi s* 1*. Ukupan iznos ova dva dijela nakon* *dijeljenja mora biti manji od* 30. *Tako prvi dio iznosi* 110, *a drugi* 10. *Zatim sam prvi dio podijelio s* 10, *a drugi s* 1. *To daje* 11 *golubova i* 10 *grlica. Kada njih oduzmemo od* 30, *ostaje nam* 9 *za broj vrabaca. Pa tako imamo* 9 *vrabaca koji koštaju* 3 *denarija,* 10 *grlica koje koštaju* 5 *denarija i* 11 *golubova koji koštaju* 22 *denarija."*

Poglavlja 12 i 13 sadrže mnogobrojne zadatke zabavne matematike. Tako se u poglavlju 12 javlja problem lava u jami: jama je duboka 50 stopa. Lav se popne $\frac{1}{7}$ stope svaki dan, a zatim se spusti $\frac{1}{9}$ stope svaku noć. Koliko vremena će mu trebati da se popne iz jame? Leonardo je najprije pretpostavio da bi odgovor mogao biti 63 dana, jer je 63 djeljivo s oba broja, i 7 i 9. Stoga, za 63 dana lav će se popeti 9 stopa i pasti 7, a razlika koja preostaje je 2 stope. Proporcionalno tome, da bi se popeo 50 stopa, lavu treba 1575 dana. Inače, Leonardov odgovor je netočan. Na kraju 1571. dana, lav će biti $\frac{8}{63}$ stope od vrha. Sljedećeg dana će doseći vrh jame.

Poglavlje 12 sadrži 259 riješenih primjera koje je Leonardo vrlo detaljno objasnio. Kao i nastavnici matematike i autori prije njega, Leonardo je znao da će većina ljudi koja želi učiti od njega imati vrlo malo interesa za apstraktne probleme. Stoga je on, kako bi što jednostavnije objasnio svoje metode, davao probleme koji su imali praktičnu upotrebu. Najčešći zadaci su bili zadaci o pronađenom novčaniku, ukupno ih je bilo 18. U ovim zadacima je Leonardo pokazao da razumije negativne brojeve. Jedan od takvih zadataka je bio: *Četvorica trgovaca su pronašli novčanik na cesti. Iznos koji posjeduje prvi trgovac zajedno s iznosom u pronađenom novčaniku je dvostruko veći od iznosa kojeg posjeduju drugi i treći trgovac. Iznos koji posjeduje drugi trgovac zajedno s iznosom u pronađenom novčaniku je trostruko veći od iznosa kojeg posjeduju treći i četvrti trgovac. Iznos koji posjeduje treći trgovac zajedno s iznosom u pronađenom novčaniku je četverostruko veći od iznosa kojeg posjeduju četvrti i prvi trgovac. Iznos koji posjeduje četvrti trgovac zajedno s iznosom u pronađenom novčaniku je peterostruko veći od iznosa kojeg posjeduju prvi i drugi trgovac. Treba odrediti koliko novca ima svaki trgovac i koliko novca je u pronađenom novčaniku.*
Uvjeti ovog zadatka vode na sustav:

$$\begin{aligned} x_1 + b &= 2(x_2 + x_3) \\ x_2 + b &= 3(x_3 + x_4) \\ x_3 + b &= 4(x_4 + x_1) \\ \underline{x_4 + b} &\underline{= 5(x_1 + x_2)} \end{aligned}$$

Leonardo je riješio ovaj problem i otkrio da je jedini način na koji se problem može riješiti taj da se dozvoli da je prvi trgovac u dugu.

U poglavlju 14 Leonardo opisuje tehnike za nalaženje kvadratnog i kubnog korijena. U ovom poglavlju Leonardo nije prezentirao ništa značajno što se već nije moglo naći u Euklidovim *Elementima.*

U svom posljednjem poglavlju Leonardo je pokazao kako riješiti jednadžbu koja se na kraju reducira na kvadratnu jednadžbu. Tehnike koje je Leonardo pokazao se mogu pronaći u ranijim al-Kvarizmijevim djelima.

Sadržaj knjige *Liber abaci* ne daje neki poseban napredak matematičkim djelima od onog koji imaju u islamskom svijetu. Ipak, najveća vrijednost djela je to što je pružilo Europi prvi opsežniji uvod u arapsku matematiku. Svojim čitateljima Leonardo je pokazao razne metode za rješavanje matematičkih problema, metode koje su bile polazne točke iz kojih je bio omogućen daljnji napredak.

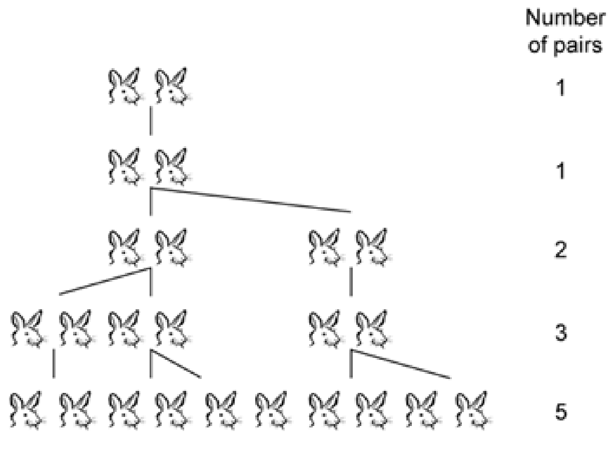
4.2 Fibonaccijev niz

Leonarda se danas ponajviše pamti zahvaljujući francuskom matematičaru iz 19. stoljeća, Edouardu Lucasu koji je Fibonaccijevo ime povezao s nizom koji se pojavio u jednostavnom problemu u knjizi *Liber abaci.* U 12. poglavlju te knjige nalazi se problem koji se bavi brojem potomaka jednog para zečeva. Leonardo nije tvorac ovog problema. On se pojavljuje još u ranijim stoljećima nove ere u radovima indijskih matematičara koji su razvili brojevni sustav koji Leonardo opisuje u svom djelu. Leonardo je, kao i njegovi indijski prethodnici, uvidio da je taj jednostavan problem idealan za pokazati kako koristiti novi brojevni sustav. Problem je postavljen ovako: *Neki čovjek je ostavio jedan par novorođenih zečeva na određeno mjesto koje je bilo potpuno ograđeno zidovima. Koliko će parova zečeva nastati u periodu od jedne godine ako će ovaj par, nakon navršena 2 mjeseca života, dobiti prvi par mladih zečeva, a nakon toga će svaki mjesec dobivati jedan novi par mladih zečeva. Pritom, svaki novi par zečeva dobiva potomke na isti način.*

Pretpostavlja se da zečevi nikad ne umiru te da se uvijek dobije jedan muški i jedan ženski zec. Dakle, na početku imamo 1 par zečeva. Na početku drugog mjeseca također imamo 1 par zečeva jer taj par može dobiti potomke tek nakon 2 mjeseca života. Na početku trećeg mjeseca imamo 2 para jer se rodio novi par mladih zečeva. Na početku četvrtog mjeseca imamo 3 para zečeva od kojih su 2 para odrasli zečevi, a 1 par su novorođeni. U petom mjesecu 2 para odraslih zečeva će dati nove članove, pa ćemo tako imati 5 parova. U svakom sljedećem mjesecu, broj parova jednak je zbroju broja parova iz prethodna dva mjeseca. Na taj način se dobiva niz

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \ldots$$

koji se zove *Fibonaccijev niz*, a njegovi članovi se zovu *Fibonaccijevi brojevi.*



Slika 7: Problem razmnožavanja zečeva

Ako s F_n označimo broj parova zečeva na početku n-tog mjeseca, tada ovaj niz možemo pisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} 2 = 1 + 1 \quad &ili \quad F_3 = F_2 + F_1 \\ 3 = 2 + 1 \quad &ili \quad F_4 = F_3 + F_2 \\ 5 = 3 + 2 \quad &ili \quad F_5 = F_4 + F_3 \\ 8 = 5 + 3 \quad &ili \quad F_6 = F_5 + F_4 \\ \vdots \qquad & \qquad\quad \vdots \end{aligned}$$

Općenito, n-ti član Fibonaccijevog niza računamo prema formuli:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geqslant 3.$$

(Na početku prvog i drugog mjeseca imamo 1 par zečeva pa je $F_1 = F_2 = 1$.)

Na prvi pogled moglo bi se pretpostaviti da su svi Fibonaccijevi brojevi F_n, $n > 2$, prosti. Međutim, u ranoj fazi se utvrđuje da pretpostavka nije točna jer vrijedi:

$$F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113.$$

Ne samo da ne postoji način za predviđanje koji su Fibonaccijevi brojevi prosti, nego također nije poznato postoji li beskonačno mnogo prostih Fibonaccijevih brojeva. S druge strane, svaka dva uzastopna Fibonaccijeva broja su relativno prosti.

1843. godine Binet je izveo formulu za eksplicitno računanje Fibonaccijevih brojeva:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right),$$

za sve $n \geqslant 0$.

4.3 Ostala Leonardova djela

Svoje drugo djelo *Practica geometriae* Leonardo je napisao 1220. godine. Djelo sadrži veliku kolekciju geometrijskih zadataka s teoremima temeljenim na Euklidovim *Elementima* te Heronovim i Arhimedovim djelima. Zadaci su većinom vezani uz računanje površine geometrijskih likova. U dijelu u kojem se bavi krugom, Leonardo je odredio aproksimaciju broja π. Koristeći Arhimedovu proceduru, odredio je da vrijednost broja π približno iznosi $\frac{864}{275} \approx 3.1418$. Naime, otkrio je da omjer opsega pravilnog 96-erokuta opisanog krugu i promjera kruga iznosi $1440 : 458\frac{1}{5}$, a omjer opsega upisanog pravilnog 96-erokuta i promjera kruga iznosi $1440 : 458\frac{4}{9}$. Primijetivši da je $458\frac{1}{3}$ približno na pola puta između $458\frac{1}{5}$ i $458\frac{4}{9}$, on izjavljuje da je omjer opsega i promjera kruga približno $1440 : 458\frac{1}{3} = \frac{864}{275} \approx 3.1418$.

Fibonacci je 1225. godine sastavio još jedno djelo od svojih zapisa, *Liber quadratorum (Knjiga kvadrata)* kojim se pokazao kao vrhunski poznavatelj teorije brojeva. Iako knjiga *Liber abaci* sadrži nekoliko diofantskih problema, knjiga *Liber quadratorum* je potpuno posvećena diofantskim jednadžbama drugog reda. U posveti, Fibonacci pripovijeda o tome kako je bio predstavljen caru Svetog Rimskog Carstva Frederiku II. na dvoru i da je jedan od članova Frederikove pratnje, John iz Palerma, tom prilikom iznio nekoliko problema kako bi testirao Fibonaccijeve matematičke vještine. Jedan od problema je zahtijevao od njega da pronađe kvadrat od kojeg, kada mu se doda ili oduzme broj pet, ponovno dobijemo novi kvadrat. Treba naglasiti da ovaj problem ne potječe izvorno od Johna iz Palerma. Taj problem su istraživali arapski pisci s kojima je Fibonacci bio nesumnjivo upoznat. Razmatranje ovog problema, a i drugih sličnih problema, Fibonaccija je dovelo do toga da napiše *Liber quadratorum.*

Dakle, problem je zahtijevao pronalaženje x, y i z za koje vrijedi $x^2+5=y^2$ i $x^2-5=z^2$ ili $y^2-x^2=x^2-z^2=5$. Da bi riješio ovaj problem, Leonardo uvodi nešto što je nazvao *congruum.* To su brojevi oblika $ab(a+b)(a-b)$ kada je $a+b$ paran broj, a oblika $4ab(a+b)(a-b)$ kada je $a+b$ neparan broj. Pokazao je da su ovi brojevi uvijek djeljivi s 24 te da za x i c takve da su x^2+c i x^2-c potpuni kvadrati vrijedi da je c *congruum.* Također je pokazao da cjelobrojna rješenja jednadžbi $x^2+n=y^2$ i $x^2-n=z^2$ postoje samo ako je n *congruum.* Kako 5 to nije, početni problem nije moguće riješiti u skupu cijelih brojeva. Za $a=5$ i $b=4$ vrijedi $n=720=5\cdot 12^2$, a taj broj je *congruum.* Sada treba odrediti x, y i z iz $y^2-x^2=x^2-z^2=720$. Leonardo određuje da vrijedi $2401-1681=1681-961=720=5\cdot 12^2$, odnosno, $49^2-41^2=41^2-31^2=5\cdot 12^2$. Dijeljenjem ovog izraza s 12^2, Leonardo je za rješenje problema dobio $x=\frac{41}{12}, y=\frac{49}{12}, z=\frac{31}{12}$, odnosno, vrijedi:

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2+5=\left(\frac{49}{12}\right)^2, \left(\frac{41}{12}\right)^2-5=\left(\frac{31}{12}\right)^2.$$

U ovom djelu Leonardo je također istraživao metode za pronalaženje Pitagorinih trojki. Napisao je sljedeće: *Ako želim pronaći dva kvadratna broja čiji je zbroj također kvadratni broj, uzmem bilo koji neparni kvadratni broj i pronađem drugi kvadratni broj zbrajanjem svih neparnih brojeva manjih od prvog kvadratnog broja. Na primjer, uzmem* 9 *kao jedan kvadratni broj. Drugi kvadratni broj će se dobiti zbrajanjem svih neparnih brojeva ispod* 9*. To su* $1, 3, 5$ *i* 7 *čiji je zbroj* 16*, također kvadratni broj koji zbrajanjem s* 9 *daje* 25*, također kvadratni broj.*

Upečatljiv prikaz Fibonaccijeve sposobnosti jest njegovo opažanje da klasifikacija iracionalnih brojeva po Euklidu, koju je napravio u djelu *Elementi* u *Knjizi X*, ne sadrži sve iracionalne brojeve. Ovo stoji u maloj studiji nazvanoj *Flos* (procvat, cvijet). Kada je poslana caru Frederiku II., studija *Flos* je stimulirana matematičkom raspravom koja se odvijala u prisustvu samog cara u Pisi oko 1224. godine. To je bila analiza 15 neodređenih problema, uključujući dva ili tri problema koje je postavio John iz Palerma. Treba spomenuti da John iz Palerma nije bio autor ovih problema. On ih je preuzeo iz knjige Omara Khayyama.

Za prvi problem koji je uključivao jednadžbe $x^2+5=y^2$ i $x^2-5=z^2$ je samo predstavljeno rješenje. Taj problem je detaljno razmatran u djelu *Liber quadratorum.* Fibonacci je izjavio da je drugi izazov koji je postavljen ispred njega bio pronaći kub koji bi, s 2 kvadrata i 10 korijena, trebao biti jednak broju 20. Drugim riječima, problem je bio riješiti jednadžbu

$$x^3+2x^2+10x=20.$$

Ova jednadžba se može napisati sljedećom formulom:

$$10\left(x+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{10}\right)=20$$

tako da rješenje mora zadovoljavati

$$x+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{10}=2.$$

Da bismo uvidjeli zašto x ne može biti racionalan broj, koristimo Fibonaccijev argument. Pretpostavimo da je x racionalan broj, recimo $x=\frac{a}{b}$, gdje je $(a,b)=1$. Izraz

$$\frac{a}{b}+\frac{a^2}{5b^2}+\frac{a^3}{10b^3}=\frac{a(10b^2+2ab+a^2)}{10b^3}$$

neće biti cijeli broj ukoliko b^3 (a samim tim i b) ne dijeli $10b^2+2ab+a^2$. Međutim, to znači da b mora dijeliti razliku

$$(10b^2+2ab+a^2)-(10b^2+2ab)=a^2,$$

što dovodi do zaključka da b dijeli a. Ovo proturječi uvjetu $(a,b)=1$, pa stoga racionalno rješenje polazne kubne jednadžbe ne postoji.

Ispitujući svaki slučaj, Fibonacci pokazuje da rješenje jednadžbe ne može biti predstavljeno niti jednom Euklidovom iracionalnom magnitudom

$$a\pm\sqrt{b},\sqrt{a}\pm\sqrt{b},\sqrt{a\pm\sqrt{b}},\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$$

u kojoj a i b označavaju racionalne brojeve.

Fibonacci je zadovoljio svoje vlastite kriterije time što je izračunao aproksimaciju rješenja polazne jednadžbe koju je predstavio u seksagezimalnom zapisu na jednostavan način izjavljujući da je

$$x=1.22.7.42.33.4.40$$

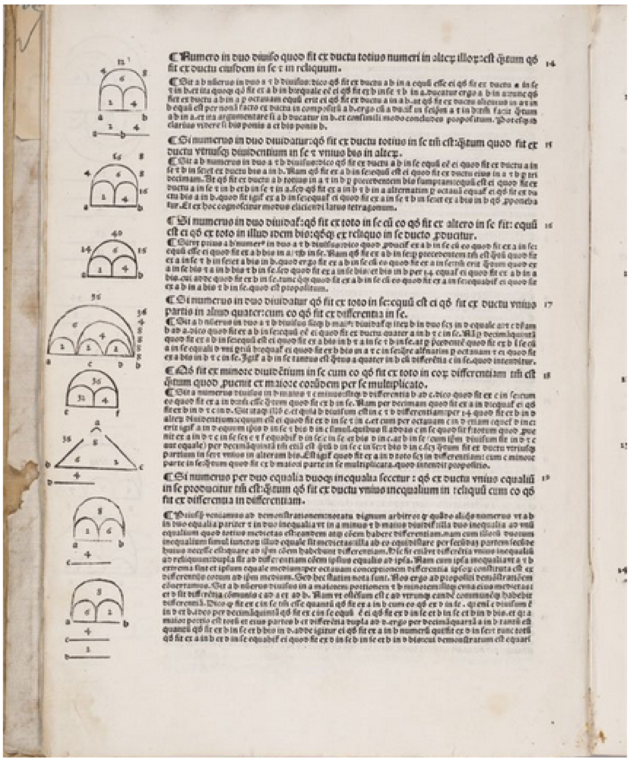
(ovo je zapisano u brojevnom sustavu s bazom 60 i iznosi $1+\frac{22}{60}+\frac{7}{60^2}+\frac{42}{60^3}+\cdots$) čija vrijednost u decimalnom zapisu iznosi 1.3688081075. Ovo je bio veoma bitan izračun jedinog pravog rješenja kubne jednadžbe ispravnog na devet decimala, a to je također bila i najpreciznija europska procjena iracionalnog rješenja jednadžbe koja će postojati narednih 300 godina. Nije otkriveno kako je Fibonacci došao do rješenja. Iako Fibonacci nije nikada otkrio svoje izvore, ne može se eliminirati opcija da je on došao do rješenja kroz svoja putovanja. Isti problem se javlja u algebri velikog perzijskog pjesnika i matematičara Omara Khayyama.

1228. godine Leonardo je napisao drugo izdanje djela *Liber abaci* koje je nadopunio novim materijalom. Nakon ove godine o Leonardovu životu se ne zna gotovo ništa, osim da mu je republika Pisa 1240. godine dodijelila stipendiju kao nagradu za usluge koje je pružio gradu, najčešće u području računovodstva.

Pri istraživanju Fibonaccijevog rada, na njega se može gledati kao na začetnika preporoda matematike na kršćanskom zapadu. U matematičkom smislu, njegov rad ne nadmašuje radove njegovih arapskih predaka. Ipak, daleko od toga da je Leonardo bio puki imitator drugih. Iznova je razmotrio antičko znanje i samostalno ga unaprijedio. Mnogi njegovi dokazi su originalni, te su, u nekim slučajevima, i sami rezultati također originalni. Fibonaccijevo djelo prikazuje kombinaciju inventivnog genija i temeljnog znanja iz matematike od ranijih pisaca.

5 Jordanus de Nemore

Jednim od najboljih matematičara srednjeg vijeka, uz Fibonaccija, smatra se i Jordanus de Nemore ili Jordanus Nemorarius. Praktički, ne postoje čvrsti dokazi o njegovom životu niti o njegovom identitetu. Njegovo ime se četiri puta pojavljuje u knjizi *Biblionomia*, bibliotekarskom katalogu sastavljenom oko 1250. godine, pa je stoga razumno pretpostaviti da je stvarao tijekom prvog dijela 13. stoljeća. Rukopis koji se često pripisuje Jordanusu sadrži marginalnu bilješku: *"Ovo je sasvim dovoljno za reći učenicima u Toulouseu"*, otuda se može zaključiti da je mogao predavati na sveučilištu u Toulouseu koji je osnovan 1229. godine. Jedan je od prvih matematičara koji je postigao neki napredak u odnosu na Leonardovo djelo. Njegovo stvaralaštvo uključuje nekoliko djela iz aritmetike, geometrije, astronomije, mehanike i algebre. Postoji 6 matematičkih djela koja se pripisuju Jordanusu. Djelo *Demonstratio de algorismo* opisuje upotrebu arapskog brojevnog sustava, dok se djelo *Demonstratio de minutiis* bavi razlomcima. *Liber phylotegni de triangulis* možda na najbolji način opisuje srednjovjekovnu latinsku geometriju. U ovom djelu je dokazana Heronova formula za površinu trokuta. *Demonstratio de plana spera* je specijalan rad iz geometrije koji proučava stereografsku projekciju. Dva najvažnija Jordanusova djela su *Arithmetica* i *De numeris datis*.



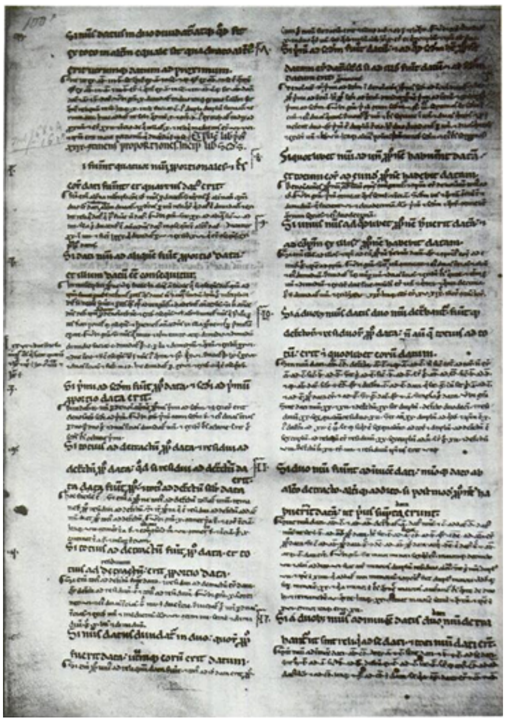
Slika 8: *Arithmetica*

Arithmetica sadrži više od 400 propozicija podijeljenih u deset knjiga koje su postale standardni izvor teorijske aritmetike u srednjem vijeku. Jordanus je *Arithmeticu* napisao po uzoru na Euklidove *Elemente* iako se dokazi često razlikuju. Međutim, u knjizi se razmatra dosta gradiva koje se ne može pronaći u Euklidovim djelima. U *Knjizi VI* Jordanus je riješio problem koji je gotovo jednak glavnom problemu Leonardove knjige *Liber quadratorum*. Problem je zahtijevao traženje 3 kvadratna broja čije su međusobne razlike jednake. Suvremenim zapisom, Jordanus je htio odrediti y^2, x^2 i z^2, tako da je $y^2 - x^2 = x^2 - z^2$. Njegovo rješenje je:

$$y = \frac{a^2}{2} + ab - \frac{b^2}{2}, \ \ x = \frac{a^2 + b^2}{2}, \ \ z = \frac{b^2}{2} + ab - \frac{a^2}{2},$$

gdje a i b imaju istu parnost. Nasuprot Leonarda, Jordanus se zanimao samo za cjelobrojna rješenja, ali nije dao niti jedan primjer.

De numeris datis je najveće i najimpresivnije Jordanusovo djelo. To je rad o naprednoj algebri koji upotpunjuje arapsko učenje al-Kvarizmija i Abu Kamila. Sadrži 115 problema podijeljenih u četiri knjige. U ovom djelu Jordanus opisuje rješenja kvadratne jednadžbe koja su slična rješenjima koje je dao al-Kvarizmi. Za razliku od djela *Arithmetica*, Jordanus u ovom djelu daje numeričke primjere za većinu svojih teorijskih rezultata. Također koristi slova alfabeta za prikazivanje proizvoljnih brojeva, ali njegov simbolizam nije bio suvremeni. Koristio je slova po abecednom redu, bez ikakve razlike između slova koja predstavljaju poznate iznose i onih koji predstavljaju nepoznanice te nije koristio simbole za računske operacije. Ponekad je jedan broj bio predstavljen s dva slova. U nekom trenutku bi mu slova ab predstavljala neki broj, dok bi sljedeći put predstavljala zbroj brojeva a i b. Ipak, ideja o simbolima, koja je bila neophodna za bilo kakav veći napredak u algebarskoj tehnici, pronađena je, barem u nerazvijenom obliku, u Jordanusovom djelu. No, ova praksa je bila zanemarena od strane nadolazećih pisaca u algebri još nekih 350 godina.



Slika 9: *De numeris datis*

Format pisanja se obično sastoji od formalnog iznošenja problema, dokaza koji se najčešće iznosi u vidu niza instrukcija (svodi se na pisanje jednadžbe), te na specifičnu brojčanu ilustraciju. Osnovne aritmetičke operacije su uvijek pisane riječima. Ni Jordanus nije koristio nove indijsko-arapske brojeve. Brojevi koji se pojavljuju u primjerima su napisani nezgrapnim rimskim brojevima. Da bismo shvatili Jordanusov doprinos, razmotrit ćemo samo neke od više od 100 propozicija raspoređenih u četiri knjige.

Propozicija 1 - I: Ako je zadani broj podijeljen na dva dijela, i dana je njihova razlika, onda se oba dijela mogu odrediti.

Jordanusov dokaz je jednostavan: *Naime, manji dio i razlika čine veći broj. Stoga manji dio sam sa sobom i razlika čine zadani broj. Oduzmi razliku od zadanog broja i ostati će dvostruko veći broj od manjeg dijela. Kada taj iznos podijelimo s dva, dobili smo manji dio, a samim tim i veći dio. Na primjer, neka je* 10 *podijeljeno na dva dijela čija je razlika* 2. *Kada se ta razlika oduzme od* 10*, ostaje* 8*, čija je polovica* 4 *što je manji dio. Stoga drugi dio je* 6.
Suvremenim zapisom Jordanusov problem iskazuje se rješenjem dvije jednadžbe $x + y = a$ i $x - y = b$. Jordanus je koristio ovu propoziciju u mnogim preostalim problemima u *Knjizi I*.

Kroz cijelo djelo Jordanus je koristio vlastite metode. Čak i u njegovim rješenjima problema u *Knjizi I*, koja su ekvivalentna čistim kvadratnim jednadžbama, koristi metode koje su drugačije od standardnih metoda koje su koristili islamski algebristi. No ipak, numerički primjeri su dosta slični. Zapravo, svaka propozicija u *Knjizi I* se bavi brojem koji je podijeljen na dva dijela i u svakom primjeru taj broj je 10.

Mnoge propozicije u preostale tri *Knjige* Jordanusove rasprave bave se brojevima u određenoj proporciji. One predstavljaju njegovo perfektno poznavanje pravila za proporciju koja se nalaze u *Knjizi V* i *Knjizi VII* Euklidovog djela *Elementi*, od kojih se većina može pronaći i u njegovom djelu *Arithmetica*.

Propozicija 18 - II: Ako je zadani broj podijeljen u proizvoljno mnogo dijelova čije su međusobne proporcije zadane, tada se svaki od dijelova može odrediti.

Iz razloga što Jordanus, baš kao i njegovi suvremenici, nije imao način da iskaže proizvoljno mnogo dijelova, u svojim dokazima bavio se brojem podijeljenim na tri dijela: $a = x+y+z$. Tada su $x : y = b$ i $y : z = c$ poznati omjeri. Jordanus je istaknuo da je omjer $x : z$ također poznat. Iz toga slijedi da je poznat omjer $x : (y + z)$, a stoga je poznat i omjer $a : x$. Budući da je a poznat, onda se mogu odrediti x, y i z. Njegov primjer nam omogućuje praćenje njegovog verbalnog opisivanja. Broj 60 je podijeljen na tri dijela, od kojih je prvi dio dvostruko veći od drugog dijela, a drugi dio je trostruko veći od trećeg dijela. Tada je $x + y + z = 60, x = 2y, y = 3z$. Onda je $x = 6z$, i stoga je $y + z = \frac{2}{3}x$. Pa je $60 = \left(1\frac{2}{3}\right)x$, te $x = 36, y = 18$ i $z = 6$.

Među propozicijama u *Knjizi IV* nalaze se tri propozicije koje daju tri standardna oblika kvadratne jednadžbe, od kojih je svaki predstavljen s algebarskim dokazom. Međutim, za ove probleme Jordanus je koristio standardne islamske algoritme, ali s vlastitim simbolizmom.

Propozicija 6 - IV: Ako je poznat količnik dva broja, zajedno sa zbrojem njihovih kvadrata, onda je poznat svaki od njih.

Jordanus je ovu propoziciju dokazao na sljedeći način: *Neka je poznat količnik od x i y. Neka je d kvadrat od x, a c kvadrat od y. Tada je zbroj $d + c$ poznat. Količnik brojeva d i c je kvadrat količnika x i y. Stoga, prvobitno je poznato. Slijedi, d i c su poznati.*
Ovo se može predstaviti modernim algebarskim zapisom na sljedeći način: Poznato je $\frac{x}{y} = a$ i $x^2 + y^2 = b$. Vrijedi $\frac{x^2}{y^2} = a^2$. Kako je $x^2 + y^2 = b$, vrijedi $y^2\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) = b$. Tada je $y^2(a^2 + 1) = b$ pa je $y = \sqrt{\frac{b}{a^2+1}}$. Nakon što je iznio svoj dokaz, Jordanus navodi primjer $\frac{x}{y} = 2$ i $x^2 + y^2 = 500$. Po njegovim pravilima, rezultat glasi $y = \sqrt{\frac{500}{2^2+1}} = \sqrt{100} = 10$, pa je $x = 20$.

Među drugim kvadratnim problemima koje je Jordanus riješio u *Knjizi IV* nalaze se sustavi $xy = a, x^2 + y^2 = b$ i $xy = a, x^2 - y^2 = b$. U ovom slučaju, kao i svim prethodnim, rješenje zadanog primjera je pozitivan cijeli broj. Dok je Jordanus često koristio razlomke kao dijelove svog rješenja, pažljivo je postavljao pitanja kako bi konačni rezultati uvijek bili cijeli brojevi.

Dvije centralne ličnosti iz svijeta matematike u europskom srednjem vijeku, Fibonacci i Jordanus, nisu imali neke značajne nasljednike u narednih 200 godina. Iako izučavanje matematike nije bilo potpuno zanemareno u ovom, tzv. sušnom periodu, predmet je bio u rukama manje talentiranih osoba koje nisu doprinijele nikakvim radom trajnog značaja. Za mnoge od njih, matematika je bila samo sporedno zanimanje pored aktivnosti koje su se ticale crkve. Matematika se bavila praktičnim stvarima tijekom ovog perioda pa je interes za naprednju algebru koju su promovirali Fibonacci i Jordanus oslabio. Suvremeni učenjaci sa zapada, skloniji teoriji i metafizici, nisu se previše trudili da ulože napor neophodan za naučiti matematiku. Ubrzo ćemo vidjeti da će ideje Fibonaccija i Jordanusa oživjeti talijanski algebraičari u periodu koji dolazi i naziva se renesansa.

6 Herman Dalmatin

Jedini poznati hrvatski matematičar u srednjem vijeku bio je Herman Dalmatin. Uz Adelarda iz Batha, Gerarda iz Cremone i Plata iz Tivolia, smatra se najvažnijim prevoditeljem djela s arapskog jezika na latinski. Zahvaljujući njihovim prijevodima, Europa se u 12. stoljeću upoznala s temeljnim arapskim i grčkim djelima. Osim prijevoda koji su u srednjem vijeku bili izuzetno cijenjeni, Herman Dalmatin je napisao i jedno izvorno djelo *De essentiis (O bitcima)*, koje je zauzelo bitno mjesto u srednjovjekovnoj europskoj filozofiji. Uz filozofiju, najveći trag je ostavio i u astronomiji, astologiji i matematici.

Herman Dalmatin je rođen oko 1110. godine u središnjoj Istri. Školovanje je započeo oko 1130. godine u katedralskoj školi u Chartresu koja je u to vrijeme bila jedna od vodećih obrazovnih institucija u Europi. Nakon završetka školovanja 1135. godine sa svojim prijateljem Robertom iz Chestera putuje na Bliski Istok gdje se upoznaje s arapskom znanošću. 1138. godine dolaze u Španjolsku gdje započinju prevoditeljski posao. Herman je najprije prevelo astrološko djelo Saul ben Bishre koje se zvalo *Fatidica*. U njemu se govorilo o utjecaju nebeskih tijela na čovjeka i njegovu okolinu. Oko 1140. godine je preveo Abu Ma'sharovo djelo koje je nazvao *Uvod u astronomiju*. Ovo djelo je imalo veliku ulogu u upoznavanju Europe s aristotelizmom. Zahvaljujući tom djelu, Herman je dospio među naistaknutije znanstvenike 12. stoljeća. 1142. godine Petar Časni je Hermanu i Robertu povjerio prevođenje islamskih vjerskih tekstova preko kojih se Europa upoznala s osnovama islamske vjere. Među ovim djelima je bio i *Kuran*. 1143. godine je preveo Ptolomejevo djelo *Planisphera* koje je sadržavalo stereografske projekcije nebeske sfere na ravninu. Ono pokazuje kako se na ravnoj plohi može prikazati položaj zvijezda i planeta i na temelju ove knjige su Arapi napravili astrolab, spravu za određivanje položaja zvijezda. Također, vrlo je vjerojatno da je Herman autor djela *De usu astrolabii (O upotrebi astrolaba)*.

Herman se također bavio i matematikom, iako ne u tolikoj mjeri koliko se bavio filozofijom i astronomijom. Matematika mu je bila potrebna radi astrologije i astronomije, kako bi dokazao svoje tvrdnje. Da bi proveo matematičke dokaze, bili su mu potrebni Euklidovi *Elementi*, pa je zbog toga i počeo proučavati Adelardov prijevod, koji je bio prvi prijevod ovog djela s arapskog jezika na latinski. 1140. godine je napravio reviziju Adelardovog prijevoda *Elemenata* te reviziju Adelardovog prijevoda astronomskih tablica koje je sastavio al-Kvarizmi. Hermanova matematička znanja je također moguće uočiti i u njegovom izvornom djelu *O bitcima* koje je napisao 1143. godine. U ovom djelu je matematičke tvrdnje dokazivao po uzoru na Euklidove *Elemente*.

7 Zaključak

Za matematiku u Europi srednji vijek je predstavljao prijelazno razdoblje između zlatnog antičkog vremena i renesanse. Na početku razdoblja, u ranom srednjem vijeku je došlo do intelektualnog zastoja, ponajviše zbog barbarskih osvajanja. Nedostatak pisanih izvora i opadanje pismenosti karakterizira ovaj period. Ipak, intelektualno nasljedstvo antike je uspjelo preživjeti zanemarenost ovog razdoblja i omogućiti napredak znanosti u 12. stoljeću u kojem Europa doživljava vrlo dinamičan intelektualni uzlet. U tom periodu, zahvaljujući sustavnom prevođenju djela s arapskog jezika na latinski, Europljani se upoznaju s izgubljenom grčkom tradicijom u matematici i znanosti.

Najvažnija stvar koja se dogodila u europskoj matematici u srednjem vijeku je uvođenje indijsko-arapskog brojevnog sustava. Taj sustav će zamijeniti nevješt rimski brojevni sustav koji se do tada tradicionalno koristio u Europi. S vremenom će arapske brojke omogućiti značajan razvitak matematike. Iako u matematici Europe u srednjem vijeku nije otkriveno ništa novo što već dotad nije bilo poznato, ovo razdoblje je veoma važno jer je postavilo temelje novovjekovnoj matematici.

Literatura

[1] M. BORIĆ, *Herman Dalmatin - prvi hrvatski znanstvenik*, Poučak, **59**(2014), 5–11.

[2] D.M. BURTON, *The History of Mathematics: An Introduction, Sixth Edition*, The MacGraw - Hill Companies, 2007.

[3] V.J. KATZ, *A History of Mathematics: An Introduction*, Pearson Education, 2009.

Sažetak

Glavna tema ovog diplomskog rada je razvoj matematike u Europi u srednjem vijeku. U radu smo se najprije upoznali sa stanjem u Europi u ranom srednjem vijeku te s razvojem znanosti u tom razdoblju. Nakon toga smo se bavili arapskim utjecajem na europsku matematiku u 12. stoljeću. Drugi dio rada je usmjeren na djela dvojice najznačajnijih europskih matematičara u srednjem vijeku, Fibonaccija i Jordanusa de Nemorea. Na kraju smo se kratko osvrnuli i na jedinog poznatog hrvatskog matematičara u srednjem vijeku, Hermana Dalmatina.

Summary

The main theme of this diploma thesis is the development of mathematics in Medieval Europe. In this work we firstly met with the situation in Europe in the early Middle Ages and with the development of science in this period. After that we deal with the Arab influence on European mathematics in the 12th century. The second part of work is focused on the works of the two most important European mathematician of the Middle Ages, Fibonacci and Jordanus de Nemore. At the end, we briefly reviewed the only known Croatian mathematician of the Middle Ages, Herman Dalmatin.

Životopis

Zovem se Miroslav Damjanović. Rođen sam 22. veljače 1991. godine u Brčkom u Bosni i Hercegovini. Živim u Tolisi, selu u općini Orašje. Osnovnoškolsko obrazovanje sam stekao u Osnovnoj školi fra Ilije Starčevića u Tolisi. Srednjoškolsko obrazovanje sam nastavio u Srednjoj školi fra Martina Nedića u Orašju gdje sam završio opću gimnaziju. 2010. godine sam upisao integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Trenutno sam zaposlen kao nastavnik matematike u Osnovnoj školi fra Ilije Starčevića u Tolisi.