Ortogonalni polinomi

Volmut, Valentina

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Valentina Volmut

Ortogonalni polinomi

Diplomski rad

Osijek, 2016.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Valentina Volmut

Ortogonalni polinomi

Diplomski rad

mentorica: izv.prof.dr.sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2016.

Sadržaj

1. Uvod

Čebiševljevi polinomi prve vrste, Čebiševljevi polinomi druge vrste, Laguerrovi polinomi, Hermiteovi polinomi i Legendreovi polinomi pripadaju skupu ortogonalnih polinoma.

Za dva polinoma reći ćemo da su ortogonalna ako je njihov skalarni produkt jednak nuli. Ortogonalni polinomi prvi put se pojavljuju krajem devetnaestog stoljeća kada je P. L. Chebyshev proučavao verižne razlomke.

Zbog niza dobrih svojstava, imaju veliku primjenu u raznim granama numeričke matematike, npr. kod Gaussovih kvadraturnih formula koriste se ortogonalni polinomi.

Upravo ovih pet tipova ortogonalnih polinoma, navedenih na početku, nazivamo klasični ortogonalni polinomi. Nastali su rješavanjem diferencijalih jednadžbi drugog reda. Definirat ćemo svaki od njih, navesti osnovna svojstva i nabrojati prvih nekoliko polinoma svake vrste.

2. Definicija i svojstva ortogonalnih polinoma

Definicija 1. *Za dva polinoma u i v reći ćemo da su ortogonalni na segmentu $[a,b]$ ako je njihov skalarni produkt, u odnosu na težinsku funkciju w, $w(x) \geq 0$ na $[a,b]$, jednak nuli tj.*

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b w(x)\, u(x)\, v(x)\, dx = 0. \tag{1}$$

Na sličan način kažemo da je niz polinoma

$$u_0, u_1, u_2, \ldots,$$

gdje je u_k polinom stupnja k, $k \in \mathbb{N}_0$, ortogonalan na segmentu $[a,b]$ ako je

$$\langle u_m, u_n\rangle = \int_a^b w(x)\, u_m(x)\, u_n(x)\, dx = 0 \tag{2}$$

za svako $m \neq n$, $m, n \in \mathbb{N}_0$, gdje je w pripadna težinska funkcija.
U nastavku ćemo od zadanog niza polinoma

$$u_0, u_1, \ldots, u_n,$$

$n \in \mathbb{N}_0$, konstruirati ortogonalni niz polinoma, ali prvo ćemo objasniti kako se računa norma polinoma.
Neka je dan otvoren interval $\langle a, b\rangle$ i na njemu težinska funkcija w. Normu polinoma v računamo na sljedeći način:

$$||v|| = \sqrt{\int_a^b w(x)\, v(x)^2\, dx}. \tag{3}$$

Neka je

$$u_0, u_1, u_2, \ldots$$

niz polinoma na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$ takav da su svi polinomi međusobno linearno nezavisni i integrabilni. Nadalje, neka je

$$d_0 = ||u_0|| = \sqrt{\int_a^b u_0(x)^2\, dx}$$

$$p_0(x) = \frac{u_0(x)}{d_0}$$

tako da je $||p_0|| = 1$. Neka je

$$\begin{aligned}
a_{1,0} &= \langle u_1, p_0 \rangle = \int_a^b u_1(x)\, p_0(x)\, dx, \\
P_1(x) &= u_1(x) - a_{1,0} p_0(x), \\
d_1 &= ||P_1|| = \sqrt{\int_a^b P_1(x)^2\, dx}, \\
p_1(x) &= \frac{P_1(x)}{d_1}.
\end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\int_a^b P_1(x)\, p_0(x)\, dx &= \int_a^b \left(u_1(x) - a_{1,0} p_0(x)\right) p_0(x)\, dx = 0, \\
\int_a^b p_1(x) p_0(x)\, dx &= \int_a^b \frac{P_1(x)}{||P_1||} p_0(x) dx = \frac{1}{||P_1||} \int_a^b P_1(x)\, p_0(x)\, dx = 0, \\
||p_1|| &= 1.
\end{aligned}$$

Općenito, neka su polinomi $p_2, p_3, \ldots$ uzastopno definirani na sljedeći način

$$\begin{aligned}
a_{n,k} &= \langle u_n, p_k \rangle = \int_a^b u_n(x)\, p_k(x)\, dx, \ \ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \\
P_n(x) &= u_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} p_k(x), \\
d_n &= ||P_n|| = \sqrt{\int_a^b P_n(x)^2\, dx}, \\
p_n(x) &= \frac{P_n(x)}{d_n}.
\end{aligned}$$

Metodom matematičke indukcije nije teško pokazati da je svaki polinom p_n ortogonalan na polinome $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ te da je svaki polinom normaliziran[1]. U ovom radu nećemo dokazivati tu tvrdnju.

Polinome koji su ortogonalni i normalizirani nazivamo ortonormiranim polinomima.

Opisani postupak za konstrukciju ortogonalnog niza polinoma iz danog niza polinoma poznat je pod nazivom Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije.

[1] Norma polinoma jednaka je jedan.

Primjer 1. *Primjenom Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije, konstruirajte ortonormirani skup polinoma za skup polinoma $\{1, x, x^2\}$ na intervalu $\langle -2, 2\rangle$.*
Neka je

$$d_0 = ||1|| = \sqrt{\int_{-2}^{2} 1^2 dx} = 2,$$

$$p_0(x) = \frac{1}{2}$$

$$||p_0|| = \sqrt{\int_{-2}^{2} (p_0(x))^2 dx} = \sqrt{\int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx} = 1$$

Nadalje,

$$a_{1,0} = \langle x, p_0\rangle = \int_{-2}^{2} x\frac{1}{2} dx = 0,$$

$$P_1(x) = x - a_{1,0}p_0(x) = x - 0 \cdot p_0(x) = x,$$

$$d_1 = ||x|| = \sqrt{\int_{-2}^{2} x^2 dx} = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{3}},$$

$$p_1(x) = \frac{x}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}x$$

tako da je

$$\int_{-2}^{2} p_1(x)\, p_0(x)\, dx = 0,$$

$$||p_1|| = \sqrt{\int_{-2}^{2} (p_1(x))^2\, dx} = 1.$$

Još nam preostaje izračunati p_2. Neka je

$$a_{2,0} = \langle x^2, p_0\rangle = \int_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{8}{3},$$

$$a_{2,1} = \langle x^2, p_1\rangle = \int_{-2}^{2} x^2 \frac{\sqrt{3}}{4} x dx = 0,$$

$$P_2(x) = x^2 - a_{2,0}p_0(x) - a_{2,1}p_1(x) = x^2 - \frac{4}{3},$$

$$d_2 = ||x^2 - \frac{4}{3}|| = \sqrt{\int_{-2}^{2} \left(x^2 - \frac{4}{3}\right) dx} = \frac{16}{3\sqrt{5}},$$

$$p_2(x) = \frac{x^2 - \frac{4}{3}}{\frac{16}{3\sqrt{5}}} = \frac{3\sqrt{5}}{80}\left(x^2 - \frac{4}{3}\right)$$

tako da je

$$\int_{-2}^{2} p_2(x)\, p_0(x)\, dx = 0,$$

$$\int_{-2}^{2} p_2(x)\, p_1(x)\, dx = 0,$$

$$||p_2|| = \sqrt{\int_{-2}^{2} (p_2(x))^2\, dx} = 1.$$

Dobili smo novi ortonormirani skup

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}x, \frac{3\sqrt{5}}{80}\left(x^2 - \frac{4}{3}\right) \right\}. \tag{4}$$

Sljedeći teorem govori nam o jedinstvenosti ortonomiranog niza na proizvoljnom segmentu $[a, b]$.

Teorem 1. *Za svaki proizvoljno izabrani segment $[a, b]$ i težinsku funkciju w, $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$, postoji samo jedan, s točnošću do na predznak, ortonormirani niz polinoma*

$$p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$$

U dokazu ovog teorema, koji nećemo dokazivati, koristi se Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije, a zainteresirani ga mogu pogledati u [3].

U sljedećim teoremima iskazana su samo neka svojstva ortogonalnih polinoma, a detaljnije o svojstvima može se pogledati u [1], [3], [6] i [8].

Teorem 2. *Neka je $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, familija ortogonalnih polinoma na segmentu $[a, b]$, te neka je w, $w(x) \geq 0$, pripadna težinska funkcija. Ako je f polinom stupnja m, tada vrijedi*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{\langle f, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle} p_i(x).$$

Dokaz:

Neka je f proizvoljan polinom stupnja m, za neki $m \in \mathbb{N}_0$. Budući da je skup

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^m\} \tag{5}$$

baza vektorskog prostora ${P_m}^2$[2], tada f možemo zapisati u obliku sljedeće linearne kombinacije

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i.$$

Sada ćemo, koristeći Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije i metodu matematičke indukcije, dokazati da se skup monoma (5) može prikazati pomoću ortogonalnih polinoma.
Za ortogonalni polinom nultog stupnja nužno je da je konstanta različita od nule, tj.

$$p_0\left(x\right) = a_{0,0},\ a_{0,0} \neq 0,$$

što znači da se prvi monom 1 može zapisati kao

$$1 = \frac{1}{a_{0,0}} p_0(x).$$

Za polinome stupnja jedan, iz Gram-Schmitovog postupka ortogonalizacije sustava polinoma $\{1, x\}$ dobivamo

$$p_1\left(x\right) = a_{1,1}x + a_{1,0}p_0\left(x\right),\ a_{1,1} \neq 0,$$

tj. vrijedi

$$x = \frac{1}{a_{1,1}}\left[p_1\left(x\right) - a_{1,0}p_0\left(x\right)\right].$$

Nastavljajući ovaj postupak u Gram-Schmidtovom procesu na
$\left\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^m\right\}$ dobivamo

$$p_m\left(x\right) = a_{m,m}x^m + a_{m,m-1}p_{m-1}\left(x\right) + \cdots + a_{m,0}p_0\left(x\right),\ a_{m,m} \neq 0,$$

gdje su $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$ dobiveni Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije iz $\left\{1, x, x^2, \ldots, x^{m-1}\right\}$, odakle slijedi

$$x^m = \frac{1}{a_{m,m}}[p_m\left(x\right) - a_{m,m-1}p_{m-1}\left(x\right) - \cdots - a_{m,0}p_0\left(x\right)].$$

Budući da se f može prikazati kao linearna kombinacija skupa monoma (5), a pokazali smo da (5) možemo prikazati kao linearnu kombinaciju ortogonalnih

[2] Skup svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog m.

polinoma, odatle slijedi da i f možemo prikazati kao linearnu kombinaciju ortogonalnih polinoma, tj.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i p_i(x).$$

Još nam preostaje odrediti koeficijente c_i. Ako skalarno pomnožimo polinom f sa polinomom p_m dobivamo

$$\langle f, p_m \rangle = \sum_{i=0}^{m} c_i \langle p_i, p_m \rangle = c_m \langle p_m, p_m \rangle$$

zbog ortogonalnosti polinoma p_i i p_m za $i \neq m$. Odatle odmah slijedi da je

$$c_m = \frac{\langle f, p_m \rangle}{\langle p_m, p_m \rangle}$$

jer je $||p_m||^2 = \langle p_m, p_m \rangle > 0$.
Preostale koeficijente c_i, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, dobijemo na analogan način ako polinom f pomnožimo sa ortogonalnim polinomom p_i. $\square$

Prethodni teorem daje nam jedno vrlo bitno svojstvo ortogonalnih polinoma, a to je da svaki polinom stupnja m možemo zapisati kao linearnu kombinaciju ortogonalnih polinoma

$$\{p_0, p_1, \ldots, p_m\},$$

za $m \in \mathbb{N}_0$.

Ako bismo razvoj polinoma f stupnja m napisali tako da suma ide do $+\infty$ onda bi svi dodatni koeficijenti c_i, za $i > m$, bili jednaki nula, tj. $c_i = 0$ za svaki $i > m$. To nam govori sljedeći korolar.

Korolar 1. *Neka je f polinom stupnja manjeg ili jednakog $m-1$. Tada je*

$$\langle f, p_m \rangle = 0, \tag{6}$$

tj. p_m je okomit na f. Dakle ortogonalni polinom stupnja m, p_m, je okomit na sve polinome stupnja strogo manjeg od m.

Dokaz:
Prema prethodnom teoremu polinom f možemo zapisati kao linearnu kombinaciju ortogonalnih polinoma stupnja manjeg ili jednakog $m-1$, tj.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i p_i\left(x\right).$$

Množenjem prethodne jednakosti s $w\left(x\right)p_m\left(x\right)$, zatim integriranjem dobivamo

$$\langle f, p_m\rangle = \sum_{i=0}^{m-1} c_i\langle p_i, p_m\rangle = 0$$

jer općenito vrijedi $\langle p_n, p_m\rangle = 0$, za sve $n \neq m$. □

Teorem 3. *Neka je $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, familija ortogonalnih polinoma na segmentu $[a, b]$ s težinskom funkcijom w, $w\left(x\right) \geq 0$ na $[a, b]$. Tada svaki polinom p_n ima točno n različitih, jednostrukih realnih nultočaka na intervalu $\langle a, b\rangle$.*

Dokaz teorema može se pogledati u [6].

Ortogonalni polinomi mogu se prikazati pomoću rekurzivne relacije, funkcija izvodnica[3], Rodrigueosve formule i kao rješenja diferencijalnih jednadžbi. Prvo ćemo navesti općenite oblike za sve navedeno, a kasnije ćemo točno napisati kako glase rekurzivne relacije, funkcije izvodnice, Rodriguesove formule te diferencijalne jednadžbe za svaku vrstu ortogonalnih polinoma.

2.1. Tročlana rekurzija i Christoffel-Darbouxova formula

Neka je zadana familija ortogonalnih polinoma $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, na segmentu $[a, b]$ i neka su prva dva koeficijenta polinoma p_n jednaki

$$p_n\left(x\right) = A_n x^n + B_n x^{n-1} + \cdots,\ A_n \neq 0.$$

Polinom p_n možemo zapisati na sljedeći način

$$p_n\left(x\right) = A_n\left(x - x_{n,1}\right)\left(x - x_{n,2}\right)\left(x - x_{n,3}\right)\cdots\left(x - x_{n,n}\right),$$

[3]Za svaki niz (c_n) kompleksnih brojeva možemo definirati funkciju

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

koju nazivamo funckija izvodnica niza (c_n).

gdje su $x_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, nultočke ortogonalnih polinoma p_n.
Definiramo sljedeće konstante

$$\alpha_n = \frac{A_{n+1}}{A_n}, \; b_n = \langle p_n, p_n \rangle > 0, \tag{7}$$

pri čemu je $\alpha_n \in \mathbb{R}$ i $b_n \in \mathbb{R}^+$.
Vrijedi sljedeći teorem poznat pod nazivom Tročlana rekurzija.

Teorem 4. *(Tročlana rekurzija)*
Neka je $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, familija ortogonalnih polinoma na segmentu $[a, b]$ s težinskom funkcijom w, $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$. Tada za $n \geq 1$ vrijedi sljedeća relacija

$$p_{n+1}(x) = (\alpha_n x + \beta_n) p_n(x) - \gamma_n p_{n-1}(x), \tag{8}$$

gdje su β_n i γ_n definirani kao

$$\beta_n = \alpha_n \left(\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} - \frac{B_n}{A_n}\right), \; \gamma_n = \frac{A_{n+1} A_{n-1}}{A_n^2} \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}}. \tag{9}$$

Dokaz:
Promotrimo polinom

$$\begin{aligned} L(x) &= p_{n+1}(x) - \alpha_n x p_n(x) \\ &= (A_{n+1} x^{n+1} + B_{n+1} x^n + \cdots) - \frac{A_{n+1}}{A_n} x (A_n x^n + B_n x^{n-1} + \cdots) \\ &= \left(B_{n+1} - \frac{A_{n+1} B_n}{A_n} \right) x^n + \cdots . \end{aligned}$$

Stupanj polinoma L je manji ili jednak n. Prema Teoremu 2., polinom L možemo zapisati kao linearnu kombinaciju ortogonalnih polinoma stupnja manjeg ili jednakog n. Dakle,

$$L(x) = \lambda_n p_n(x) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(x) + \cdots \lambda_0 p_0(x)$$

pri čemu su λ_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, konstante.
Opet prema Teoremu 2., konstante λ_i možemo izračunati

$$\lambda_i = \frac{\langle L, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle} = \frac{1}{b_i} (\langle p_{n+1}, p_i \rangle - \alpha_n \langle x p_n, p_i \rangle).$$

Vrijede sljedeće dvije stvari:

- $\langle p_{n+1}, p_i \rangle = 0$ za sve $i \leq n$,

- $$\langle xp_n, p_i \rangle = \int_a^b w(x)p_n(x)xp_i(x)dx = 0,$$

  za $i \leq n-2$.

Prema tome možemo zaključiti da je stupanj polinoma $xp_i(x)$ manji ili jednak $n-1$. Uzevši u obzir ta dva rezultata, dobivamo $\lambda_i = 0$ za $0 \leq i \leq n-2$. Odatle slijedi da je

$$\begin{aligned} L(x) &= \lambda_n p_n(x) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(x) \\ p_{n+1}(x) &= (\alpha_n x + \lambda_n)p_n(x) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Preostaje nam još odrediti koliki su koeficijenti λ_{n-1} i λ_n. Ako iz prve od predhodne dvije jednakosti usporedimo vodeći koeficijent polinoma L s vodećim koeficijentom polinoma s desne strane onda dobivamo izraz kojem je jednaka konstanta λ_n. □

Teorem 5. *(Christoffel-Darbouxova formula)*
Neka je $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, familija ortogonalnih polinoma na segmentu $[a, b]$ s težinskom funkcijom w, $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$. Tada vrijedi sljedeća formula

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)p_k(y)}{b_k} = \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{\alpha_n b_n(x-y)} \tag{10}$$

gdje su α_n i b_n definirane jednako kao u Tročlanoj rekurziji (7).

Formula (10) se naziva Christoffel-Darbouxova formula. Prvi ju je izveo Christoffel samo za Legendreove polinome. Poopćenje za ortogonalne polinome sa proizvoljnom težinskom funkcijom dao je Darboux.
Dokaz ovog teorema je vrlo jednostavan. Temelji se na manipulaciji Tročlane rekurzije pa ćemo ga izostaviti, a zainteresirani ga mogu pogledat u [3].
Detaljnije o Christoffel-Darbouxovoj formuli može se pogledati u [8].

2.2. Još neki načini definiranja ortogonalnih polinoma

Funkcije izvodnice

Neka je $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, familija ortogonalnih polinoma na segmentu $[a, b]$ s

težinskom funkcijom w, $w(x) \geq 0$.
Opći oblik funkcija izvodnica za ortogonalne polinome je

$$g(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p_i(x) t^i,$$

gdje je (a_i) niz realnih brojeva.

Diferencijalna jednadžba

Neka je $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, familija ortogonalnih polinoma na segmentu $[a,b]$ s težinskom funkcijom w, $w(x) \geq 0$. Karakteritično za sve ortogonalne polinome je to što zadovoljavaju diferecijalnu jednadžbu

$$g_2(x)y'' + g_1(x)y' + g_0(x)y = 0, \tag{11}$$

gdje su g_0, g_1 i g_2 polinomi različiti za svaku vrstu ortogonalnih polinoma. Kasnije ćemo navesti koliko iznose g_0, g_1 i g_2 za svaku vrstu ortogonalnih polinoma, tj. reći ćemo kako glasi njihova diferencijalna jednadžba.

Rodriguesova formula

Neka je $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, familija ortogonalnih polinoma na segmentu $[a,b]$ s težinskom funkcijom w, $w(x) \geq 0$. Tada vrijedi sljedeća formula

$$p_n(x) = \frac{1}{e_n w(x)} \frac{d^n}{dx} \left\{ w(x)[g(x)]^n \right\}, \tag{12}$$

gdje su broj e_n i polinom g različiti za svaku vrstu ortogonalnih polinoma. Formula (12) se naziva Rodriguesiva formula za ortogonalne polinome. Naziv je dobila po matematičaru, Olindeu Rodriguesu, koji ju je prvi dokazao. Kada budemo obrađivali vrste polinoma, za svaku vrstu navest ćemo kako glasi njegova Rodriguesova formula.

3. Čebiševljevi polinomi prve vrste

Čebiševljevi polinomi prve vrste posebna su vrsta ortogonalnih polinoma. Najčešće se označavaju s T_n, $n \in \mathbb{N}_0$.
Čebiševljev polinom prve vrste n-tog stupnja, T_n, jedno je rješenje Čebiševljeve diferencijalne jednadžbe

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0. \tag{13}$$

Čebiševljevi polinomi prve vrste definirani su uz identitet

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta). \tag{14}$$

Uvodeći supstituciju $x = \cos\theta$ dobivamo

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \tag{15}$$

$x \in [-1, 1]$, što daje eksplicitnu formulu za računanje Čebiševljevih polinoma prve vrste.
Izvod formule (14) dosta je dugačak i složen pa ju nećemo izvoditi u ovom radu. Zainteresirani izvod mogu vidjeti u [1].

Prvih sedam Čebiševljevih polinoma prve vrste su

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1,\\
T_1(x) &= x,\\
T_2(x) &= 2x^2 - 1,\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x,\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1,\\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x,\\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.
\end{aligned}$$

Čebiševljevi polinomi prve vrste mogu se prikazati pomoću funkcija izvodnica

$$\begin{aligned}
g_1(t,x) &= \frac{1-t^2}{1-2xt+t^2}\\
&= T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n
\end{aligned}$$

i

$$g_2(t,x) = \frac{1-xt}{1-2xt+t^2}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n,$$

gdje su $|x| \leq 1$ i $|t| < 1$.

Rodriguesova formula za Čebiševljeve polinome prve vrste glasi

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}\sqrt{(1-x^2)}}{2^n \left(n-\frac{1}{2}\right)!} \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\right].$$

3.1. Ortogonalnost Čebiševljevih polinoma prve vrste

Čebiševljevi polinomi prve vrste su ortogonalni na segmentu $[-1,1]$ s obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

tj.,

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0, \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

Za dokaz ove tvrdnje potrebno je izračunati

$$I = \int_0^{\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,dt, \tag{16}$$

gdje su $m, n \in \mathbb{Z}$.

Prvo ćemo upotrijebiti trigonometrijsku formulu za transformaciju umnoška u zbroj[4] i tada dobivamo

$$I = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \cos((m+n)\,t)\,dt + \int_0^{\pi} \cos((m-n)\,t)\,dt\right]. \tag{17}$$

Ako pretpostavimo da je $m \neq n$ tada je

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin((m+n)\pi) - \frac{1}{m+n}\sin 0 + \frac{1}{m-n}\sin((m-n)\pi) - \frac{1}{m-n}\sin 0\right].$$

[4] $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + cos(x-y)\right]$

Kako su $m, n \in \mathbb{Z}$, tada su $m+n$ i $m-n$ također cijeli brojevi. Osim toga, znamo da je $\sin k\pi = 0$, za svaki $k \in \mathbb{Z}$, pa je konačno rješenje integrala (16) nula za $m \neq n$.
Pretpostavimo da je $m = n = 0$. Tada je izraz (16)

$$I = \int_0^\pi \cos 0 \cos 0 \; dt = \int_0^\pi dt = \pi.$$

Promotrimo još treći slučaj kada je $m = n \neq 0$. Tada je (17) jednak

$$I = \int_0^\pi \cos(mt)\cos(mt)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2mt)\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Ako uvedemo supstituciju $t = \arccos x$ tada je integral (16) postaje

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

čime smo dokazali ortogonalnost Čebiševljevih polinoma prve vrste.

Prema Teoremu 3. Čebiševljevi polinomi prve vrste imaju n različitih realnih nultočki

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{n}\frac{\pi}{2}\right), \; k = 1, \ldots, n \tag{18}$$

koje leže na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Detaljnije o tome može se pogledati u [3] i [5].

3.2. Rekurzivna relacija

Budući da vrijedi

$$\begin{aligned}
\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha &= \cos(n\alpha + \alpha) + \cos(n\alpha - \alpha) \\
&= \cos n\alpha \cos\alpha - \sin n\alpha \sin\alpha + \cos n\alpha \cos\alpha \\
&+ \sin n \sin\alpha \\
&= 2\cos n\alpha \cos\alpha
\end{aligned}$$

i ako uvedemo supstituciju $\alpha = \arccos x$, tada dobijamo

$$\cos((n+1)\arccos x) + \cos((n-1)\arccos x) = 2\cos(n \arccos x)\cos(\arccos x).$$

Prethodni izraz daje nam rekurzivnu relaciju Čebiševljevih polinoma prva vrste koji glasi

$$T_{n+1}\left(x\right)-2xT_{n}\left(x\right)+T_{n-1}\left(x\right)=0, \tag{19}$$

uz početne uvjete $T_0\left(x\right)=1$ i $T_1\left(x\right)=x$.

3.3. Čebiševljev problem

1854. godine Čebiševljev je postavio sljedeći problem:
Odredite realne koeficijente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *tako da izraz*

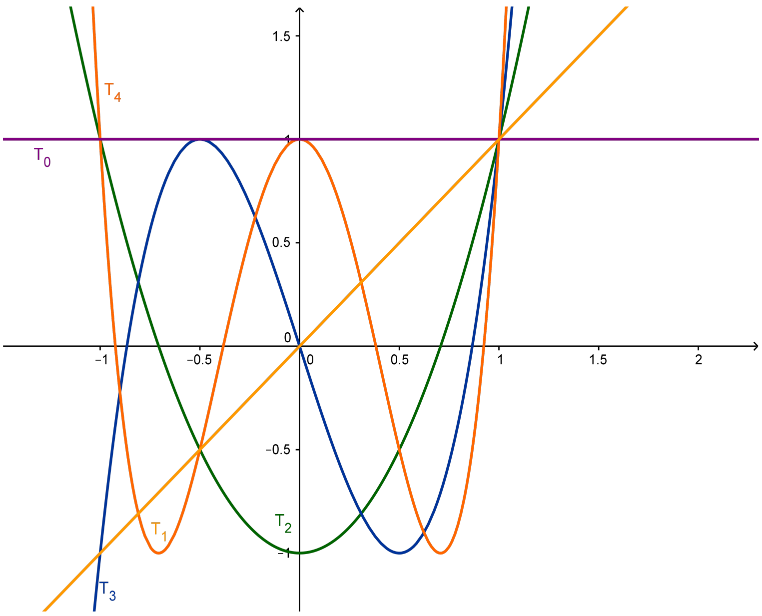
$$\max_{-1\leq x\leq 1}\left|x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\right| \tag{20}$$

bude minimalan.

Do rješenja ovog problema došao je 1857. godine. Rješenje je glasilo da je jedini polinom

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

sa realnim koeficijentima za koji je izraz (20) minimalan upravo $2^{-n+1}T_n$, gdje je T_n n-ti Čebiševljev polinom prve vrste.
Dokaz ovog rješenja može se pronaći u [1].



Slika 1: Prvih pet Čebiševljevih polinoma prve vrste

Još detalja vezanih za Čebiševljeve polinome prve vrste može se pronaći u [1], [3], [7], [8] i [9].

4. Čebiševljevi polinomi druge vrste

Rješenje diferencijalne jednadžbe

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0 \tag{21}$$

je upravo n-ti Čebiševljev polinom druge vrste, U_n, za kojeg vrijedi

$$U_n(x) = \frac{\sin\left((n+1)\arccos(x)\right)}{\sin\left(\arccos(x)\right)}, \tag{22}$$

$x \in \langle -1, 1\rangle$ i $n \in \mathbb{N}_0$.

Čebiševljevi polinomi druge vrste ortogonalni su na segmentu $[-1,1]$ s težinskom funkcijom

$$w\left(x\right) = \sqrt{1-x^2},$$

tj.,

$$\int_{-1}^{1} U_m\left(x\right) U_n\left(x\right) \sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0. \end{cases} \tag{23}$$

Dokaz ortogonalnosti analogan je onom za Čebiševljeve polinome prve vrste, samo se ovdje kreće od integrala

$$I = \int_0^{\pi} \sin\left(mt\right) \sin\left(nt\right) dt,$$

stoga ga nećemo napraviti u ovom radu.

Prvih sedam Čebiševljevih polinoma druge vrste su

$$\begin{aligned}
U_0\left(x\right) &= 1,\\
U_1\left(x\right) &= 2x,\\
U_2\left(x\right) &= 4x^2 - 1,\\
U_3\left(x\right) &= 8x^3 - 4x,\\
U_4\left(x\right) &= 16x^4 - 12x^2 + 1,\\
U_5\left(x\right) &= 32x^5 - 32x^3 + 6x,\\
U_6\left(x\right) &= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1.
\end{aligned}$$

Funkcija izvodnica za Čebiševljeve polinome druge vrste je

$$\begin{aligned}
g(t,x) &= \frac{1}{1-2xt+t^2}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n,
\end{aligned}$$

za $|x| < 1$ i $|t| < 1$, a Rodriguesova formula glasi

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\left(n+\frac{1}{2}\right)!\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x^2\right)^{n+\frac{1}{2}}\right].$$

4.1. Rekurzivna relacija

Krećemo od identiteta

$$\sin\left(n+1\right)\alpha + \sin\left(n-1\right)\alpha = 2\sin n\alpha \cos\alpha.$$

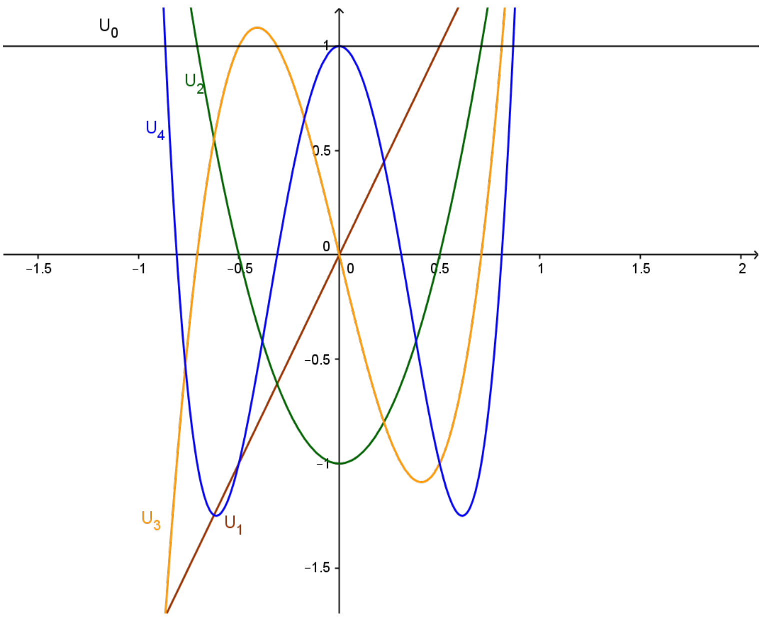
Zatim uvodimo supstituciju

$$\alpha = \arccos x$$

i dobivamo rekurzivnu relaciju za Čebiševljeve polinome druge vrste

$$U_{n+1}\left(x\right) - 2xU_n\left(x\right) + U_{n-1}\left(x\right) = 0 \tag{24}$$

uz početne uvjete $U_0\left(x\right) = 1$ i $U_1\left(x\right) = 2x$.



Slika 2: Prvih pet Čebiševljevih polinoma druge vrste

Čebiševljevi polinomi prve i druge vrste povezani su sljedećim relacijama

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= U_n(x) - xU_{n-1}(x), \\
T_n(x) &= xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \\
T_n(x) &= \frac{1}{2}\left(U_n(x) - U_{n-2}(x)\right), \\
U_{n-1}(x) &= \frac{1}{1-x^2}\left[xT_n(x) - T_{n+1}(x)\right].
\end{aligned}$$

Još detalja o Čebiševljevim polinomima druge vrste može se pronaći u [1], [3], [7], [8] i [9].

5. Laguerrovi polinomi

Sljedeći na redu su Laguerrovi polinomi. Najčešće se označavaju s L_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Laguerrovi polinomi mogu se definirati kao

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k. \tag{25}$$

Za njih vrijedi formula

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x} \right), \tag{26}$$

čiji se dokaz može pronaći u [1].
Prvih sedam Laguerrovih polinoma su

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1, \\
L_1(x) &= -x + 1, \\
L_2(x) &= \frac{1}{2} \left(x^2 - 4x + 2 \right), \\
L_3(x) &= \frac{1}{6} \left(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6 \right), \\
L_4(x) &= \frac{1}{24} \left(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24 \right), \\
L_5(x) &= \frac{1}{120} \left(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x - 120 \right), \\
L_6(x) &= \frac{1}{720} \left(x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720 \right).
\end{aligned}$$

5.1. Ortogonalnost Laguerrovih polinoma

Laguerrovi polinomi ortogonalni su na intervalu $[0, \infty\rangle$ s težinskom funkcijom

$$w(x) = e^{-x}.$$

Promotrimo integral

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x)\, dx. \tag{27}$$

Pretpostavimo da je $m \leq n$ tada izraz (27) možemo zapisati koristeći formulu (26) kao

$$I = \int_0^{+\infty} L_m(x) \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x} \right) dx. \tag{28}$$

U računanju ovog integrala koristit ćemo metodu parcijalne integracije[5]. Neka je

$$I = \int_0^{+\infty} L_m(x) \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right) dx = \left| u = L_m(x) \;\; dv = \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right) dx \right|.$$

Tada je

$$I = \left[L_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^n e^{-x}\right) \right]_{x=0}^{x\to+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{dL_m(x)}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^n e^{-x}\right) dx.$$

Izraz

$$\begin{aligned} &L_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^n e^{-x}\right) = \\ &= (-1)^n e^{-x} L_m(x) \left\{ -(x^n) + \binom{n-1}{1}(x^n)' - \cdots + (-1)^n (x^n)^{(n-1)} \right\} \end{aligned}$$

teži ka nuli kada $x \to +\infty$. Kada je $x = 0$ prethodni izraz također je jednak nuli pa je

$$I = -\int_0^{+\infty} \frac{dL_m(x)}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^n e^{-x}\right) dx.$$

Primjenimo li $m-1$ puta parcijalnu integraciju na posljednji izraz dobivamo da je

$$I = (-1)^m \int_0^{+\infty} \frac{d^m L_m(x)}{dx^m} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left(x^n e^{-x}\right) dx. \tag{29}$$

Ako je $m < n$ tada na posljednji izraz ponovo treba primjeniti metodu parcijalne integracije. Tada se dobiva

$$\begin{aligned} I = (-1)^m &\left[\frac{d^m L_m(x)}{dx^m} \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}\left(x^n e^{-x}\right) \right]_{x=0}^{x\to+\infty} + \\ (-1)^{m+1} &\int_0^{+\infty} \frac{d^{m+1} L_m(x)}{dx^{m+1}} \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}\left(x^n e^{-x}\right) dx. \end{aligned}$$

Izraz u zagradi u predhodnom integralu jednak je nuli za $x = 0$ i $x \to +\infty$. Osim toga i drugi dio tog izraza jednak je nuli jer je

$$\frac{d^{m+1} L_m(x)}{dx^{m+1}} = 0.$$

[5] $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

U slučaju da je $m = n$ tada izraz (28) iznosi

$$\begin{aligned}
I &= (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \frac{d^n Ln\,(x)}{dx^n} dx \\
&= n! \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \\
&= \left[-n! e^{-x} \left(x^n + n x^{n-1} + n\,(n-1)\,x^{n-2} + \cdots + n! \right] \right._{x=0}^{x \to +\infty} \\
&= (n!)^2 .
\end{aligned}$$

Ovime smo pokazali ortogonalnost Laguerrovih polinoma na intervalu $[0, +\infty\rangle$ uz težinsku funkciju $w\,(x) = e^{-x}$, tj. pokazali smo da vrijedi

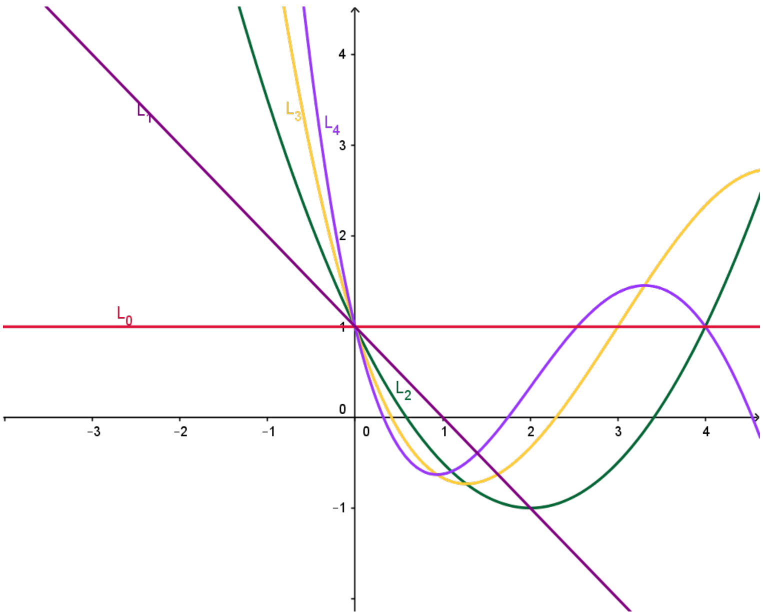
$$\int_0^{+\infty} e^{-x} L_m\,(x)\, L_n\,(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ (n!)^2\,, & m = n. \end{cases}$$

5.2. Rekurzivna relacija Laguerrovih polinoma

Laguerrovi polinomi zadovoljavaju sljedeću rekurzivnu relaciju

$$(n+1)\, L_{n+1}\,(x) - (-x + 2n - 1)\, L_n\,(x) + n L_{n-1}\,(x) = 0 \qquad (30)$$

uz početne uvjete $L_0\,(x) = 1$ i $L_1 = -x + 1$, čiji se dokaz može vidjeti u [3].



Slika 3: Prvih pet Laguerrovih polinoma

Između ostalog, n-ti Laguerrov polinom, L_n, rješenje je diferencijalne jednadžbe

$$xy'' + (1-x)\,y' + ny = 0. \tag{31}$$

Laguerrove polinome možemo zapisati pomoću sljedeće funkcije izvodnice

$$\begin{aligned} g(x,t) &= \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} \\ &= 1 + (-x+1)t + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\right)t^2 + \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1\right)t^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n, \end{aligned}$$

a Rodriguesova formula glasi

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right).$$

Još detaljnije o svojstvima Laguerrovih polinoma može se pogledati u [1], [3], [8] i [9].

6. Hermiteovi polinomi

Hermiteovi polinomi također pripadaju skupu ortogonalnih polinoma. Najčešće se označavaju s H_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Hermiteovi polinomi su ortogonalni na intervalu $\langle -\infty, +\infty \rangle$ obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Za njih vrijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n. \end{cases}$$

Dokaz ove ortogonalnosti vrlo je sličan onom za Laguerrove polinome tako da ga nećemo dokazivati u ovom radu, a zainteresirani ga mogu proučiti u [3].

Hermiteovi polinomi zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \tag{32}$$

uz početne uvjete $H_0(x) = 1$ i $H_1(x) = 2x$.

Prvih sedam Hermiteovih polinoma su

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1, \\
H_1(x) &= 2x, \\
H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\
H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\
H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, \\
H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x, \\
H_6(x) &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120.
\end{aligned}$$

N-ti Hermiteov polinom, H_n, rješenje je diferencijalne jednadžbe

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0. \tag{33}$$

Hermiteovi polinomi se također mogu prikazati pomoću funkcije izvodnice na sljedeći način

$$g(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}.$$

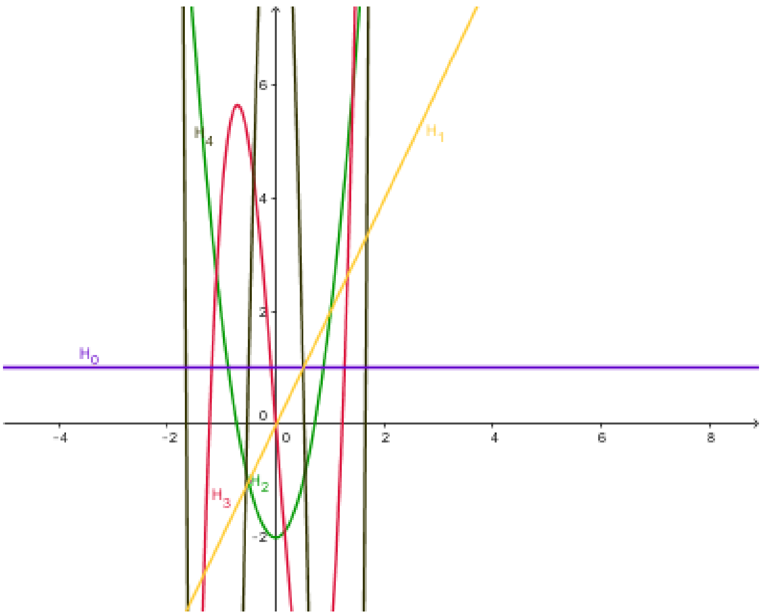
Rodrigeuseova formula za Hermiteove polinome glasi

$$H_n(x) = \frac{1}{(-1)^n e^{-x^2}} \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{-x^2} \right].$$

Bez poteškoće mogu se provjeriti relacije,

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} L_n^{-\frac{1}{2}}(x^2)$$
$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} x L_n^{\frac{1}{2}}(x^2),$$

koja povezuje Hermiteove i Laguerreove polinome.



Slika 4: Prvih pet Hermiteovih polinoma

Detaljnije o Hermiteovim polinomima može se pogledati u [1], [3], [8] i [9].

7. Legendreovi polinomi

Posljednja vrsta ortogonalnih polinoma, u ovom diplomskom radu, su Legendreovi polinomi. Obično se označavaju s P_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Dobili su naziv Legendrovi polinomi jer je n-ti Legendreov polinom, P_n, rješenje Legendreove diferencijalne jednadžbe

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + n\left(n + 1\right) y = 0. \tag{34}$$

Legendreovi polinomi ortogonalni su na segmentu $[-1, 1]$ obzirom na težinsku funkciju

$$w\left(x\right) = 1,$$

tj.

$$\int_{-1}^{1} P_m\left(x\right) P_n\left(x\right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

Dokaz ortogonalnosti dosta je dugačak pa ga nećemo izvoditi u ovom radu,a može se pogledati u [3].
Oni zadovoljavaju sljedeću rekurzivnu relaciju

$$\left(n + 1\right) P_{n+1}\left(x\right) - \left(2n + 1\right) xP_n\left(x\right) + nP_{n-1}\left(x\right) = 0, \tag{35}$$

uz početne uvjete $P_0\left(x\right) = 1$ i $P_1\left(x\right) = x$.

Prvih sedam Legendreovih polinoma su

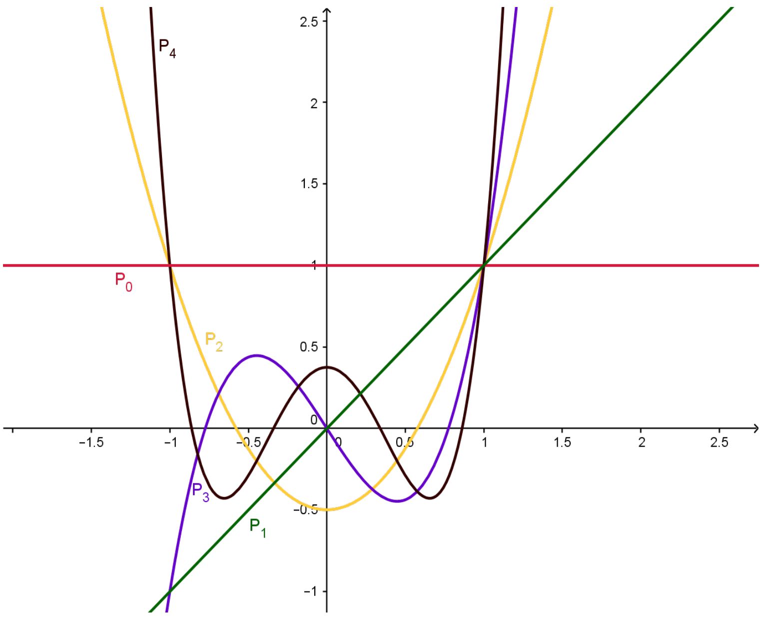
$$\begin{aligned}
P_0\left(x\right) &= 1, \\
P_1\left(x\right) &= x, \\
P_2\left(x\right) &= \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right), \\
P_3\left(x\right) &= \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right), \\
P_4\left(x\right) &= \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right), \\
P_5\left(x\right) &= \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right), \\
P_6\left(x\right) &= \frac{1}{16}\left(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5\right).
\end{aligned}$$

Kao svi dosad navedeni ortogonalni polinomi tako se i Legendreovi polinomi mogu zapisati pomoću funkcije izvodnice

$$\begin{aligned} g(t,x) &= \left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \end{aligned}$$

te i za njih vrijedi sljedeća Rodriguesova formula

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n.$$



Slika 5: Prvih pet Legendreovih polinoma

Više o Legendreovim polinomima može se vidjeti u [1], [3], [8] i [9].

8. Primjene ortogonalnih polinoma

8.1. Gaussove kvadraturne formule

Neka je dana neprekidna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, te neka je F njena primitivna funkcija. Tada Riemanov integral na segmentu $[a, b]$ možemo izračunati primjenom Newton-Leibnizove formule

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Kod integriranja se može dogoditi da primitivnu funkciju F nije moguće dobiti elementarnim metodama ili da je podintegralna funkcija poznata samo u konačno mnogo točaka.
Dakle, jedino što nam preostaje je približno računanje takvih integrala.
Osnovna ideja je izračunavanje integrala $I(f)$ korištenjem vrijednosti funkcije f na nekom konačnom skupu točaka.
Opća formula je

$$I(f) = \int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) + E \tag{36}$$

pri čemu su λ_j težinski koeficijenti, x_j čvorovi integracije i E pripadni ostatak. Formule oblika (36) nazivaju se kvadraturne formule.

U ovom radu proučavat ćemo Gaussove kvadraturne formule. One se koriste kako bi se postigao maksimalan stupanj egzaknosti formule.
Reći ćemo da je kvadraturna formula stupnja egzaknosti m ako je ostatak $E = 0$ za sve polinome stupnja manjeg ili jednakog m.
Osnovna ideja je da za čvorove uzmemo nultočke ortogonalnih polinoma, a težinske koeficijente λ_j računamo kao

$$\lambda_j = \int_a^b w(x)l_j(x)dx, \tag{37}$$

pri čemu je l_j Lagrangeov interpolacijski polinom[6]. Dokaz ove formule može se pogledati u [5].
Pokazat ćemo da postoji jednostavniji način računanja težinskih koeficijenata, λ_j, pomoću ortogonalnih polinoma.

[6] $l_i = \prod_{j=1,\ j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

Neka je $\{p_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, familija ortogonalnih polinoma na segmentu $[a, b]$ s težinskom funkcijom w, $w(x) \geq 0$, te neka su α_n i b_n definirani kao u Tročlanoj rekurziji (7).
Ako u Christoffel-Darbouxovom identitetu (10) uvedemo supstituciju $y = x_j$ gdje je x_j nultočka ortogonalnog polinoma p_n, tada dobivamo

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k(x)p_k(x_j)}{b_k} = -\frac{p_n(x)p_{n+1}(x_j)}{\alpha_n b_n(x - x_j)}. \tag{38}$$

Zatim prethodnu jednakost pomnožimo s $w(x)p_0(x)$. Zbog ortogonalnosti dobivamo

$$\frac{p_0(x_j)}{b_0} b_0 = -\frac{p_{n+1}(x_j)}{\alpha_n b_n} \int_a^b w(x) \frac{p_0(x)p_n(x)}{x - x_j} dx. \tag{39}$$

Iz definicije Lagrangeovog interpolacijskog polinoma dobivamo

$$l_j(x) = \frac{p_n(x)}{(x - x_j)p'_n(x_j)}. \tag{40}$$

Koristeći (37), (40) i činjenicu da je p_0 konstanta, (39) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{p_{n+1}(x_j)}{\alpha_n b_n} \int_a^b w(x) \frac{p_n(x)}{x - x_j} dx \\ &= -\frac{p_{n+1}(x_j)p'_n(x_j)}{\alpha_n b_n} \int_a^b w(x) l_j(x) dx \\ &= \frac{-p_{n+1}(x_j)p'_n(x_j)}{\alpha_n b_n} \lambda_j. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\lambda_j = \frac{-A_{n+1} b_n}{A_n p_{n+1}(x_j) p'_n(x_j)}, \tag{41}$$

za $j = 1, 2, \ldots, n$, što je puno lakše izračunati nego koristeći izraz (37).
Ostatak E se računa kao

$$E = \frac{b_n}{A_n^2 (2n)!} f^{(2n)}(\eta), \tag{42}$$

gdje je $\eta \in \langle a, b \rangle$.
Detaljnije o formuli (42) može se pogledati u [5].
Gauss-Čebiševljeva kvadraturna formula je oblika

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} f(x) dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) + E, \tag{43}$$

gdje su x_j nultočke polinoma T_n, težinski koeficijenti

$$\lambda_j = -\frac{\pi}{T_n'(x_j)T_{n+1}(x_j)}$$

i ostatak

$$E = \frac{2\pi}{2^{2n}(2n)!}f^{(2n)}(\eta),$$

za $\eta \in \langle -1, 1\rangle$.

Gauss-Laguerrova kvadraturna formula je

$$\int_0^\infty e^{-x}f(x)dx = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j) + E,$$

gdje su x_j nultočke polinoma L_n, težinski koeficijenti

$$\lambda_j = \frac{(n!)^2}{L_n'(x_j)L_{n+1}(x_j)}$$

i ostatak

$$E = \frac{(n!)^2}{(2n)!}f^{(2n)}(\eta),$$

za $\eta \in \langle 0, \infty\rangle$.

Gauss-Hermiteova kvadraturna formula je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}f(x)dx = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j) + E,$$

gdje su x_j nultočke polinoma H_n, težinski koeficijenti

$$\lambda_j = -\frac{2^{n+1}n!\sqrt{\pi}}{H_n'(x_j)H_{n+1}(x_j)}$$

i ostatak

$$E = \frac{n!\sqrt{\pi}}{2^n(2n)!}f^{(2n)}(\eta),$$

za $\eta \in \langle -\infty, +\infty\rangle$.

Gauss-Legendreova kvadraturna formula je

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j) + E,$$

gdje su x_j nultočke polinoma P_n, težinski koeficijenti

$$\lambda_j = \frac{-2}{(n+1)P_{n+1}(x_j)P_n'(x_j)}$$

i ostatak

$$E = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\eta),$$

za $\eta \in \langle -1, 1 \rangle$.

Detaljnije o kvadraturnim formulama može se pogledati u [5].

Još o primjenama ortogonalnih polinoma može se pogledati u [4], [5], [6] i [8].

9. Zaključak

U radu smo naveli neka osnovna svojstva ortogonalnih polinoma. Pokazali smo da od zadanog skupa polinoma, pomoću Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije, možemo dobiti ortonormirani skup polinoma. Dokazali smo da se svaki polinom može zapisati kao linearna kombinacija ortogonalnih polinoma.

Obradili smo pet vrsta klasičnih ortogonalnih polinoma: Čebiševljevi polinomi prve i druge vrste, Laguerrovi polinomi, Hermiteovi polinomi i Legendreovi polinomi. Navedeni polinomi mogu se zapisati pomoću rekurzivne relacije, funckija izvodnica, Rodriguesove formule i kao rješenja diferencijalnih jednadžbi.

Osim toga, obradili smo primjenu ortogonalnih polinoma na Gaussove kvadraturne formule.

Literatura

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Function*, Dover Publications, New York, 1964.

[2] R. El Attar, *Special Functions and Orthogonal Polynomials*, Lulu Press, USA, 2006.

[3] D. Ž. Đoković, D. S. Mitrović, *Specijalne funkcije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1964.

[4] V. I. Krylov, *Approximate Calculation and Integrals*, Dover Publication, INC, 2006.

[5] P. Rabinowitz, A. Raltoson, *A first course in numerical analysis*, Dover Publications, New York, 2001.

[6] M. Rogina, S. Singer, S. Singer, *Numerička matematika*, Sveučilište u Zagrebu, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2008., (javno dostupno: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_mat/`)

[7] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Sveučilište u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2004.

[8] G. Szego, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, Rhoe Island, 1991.

[9] The world of Matematical equations, *Special Functions and Orthogonal Polynomials*, (javno dostupno: `http://eqworld.ipmnet.ru/en/auxiliary/aux-specfunc.htm`)

10. Sažetak

Ortogonalni polinomi su posebna vrsta polinoma koji su otrkiveni prilikom rješavanja određenih diferecijalnih jednadžbi. Cilj ovog diplomskog rada je dati pregled klasičnih ortogonalnih polinoma kao što su: Čebiševljevi polinomi prve i druge vrste, Laguerrovi polinomi, Hermiteovi polinomi i Legendreovi polinomi.
Osim definicija, za sve ortogonalne polinome navedene su pripadne funkcije izvodnice i rekurzivne relacije.
Završni dio rada posvećen je primjenama ortogonalnih polinoma kod približnog računanja određenih integrala, odnosno kod Gaussovih kvadraturnih formula koje imaju veliku primjenu u numeričkoj matematici.
Ključne riječi. Ortogonalni polinomi, Čebiševljevi polinomi prve vrste, Čebiševljevi polinomi druge vrste, Laguerrovi polinomi, Hermiteovi polinomi, Legendreovi polinomi, Gaussove kvadraturne formule.

11. Summary

Orthogonal polynomials are special type of polynomials which are discovered by solving determinate differencial equations. As a main point of this masters thesis is to represent classical orthogonal polynomials like: Chebyshev Polynomials of the First Kind, Chebyshev Polynomials of the Second Kind, Laguerre Polynomials, Hermite Polynomials and Legendre Polynomials.
For this orthogonal polynomials are listed related generating functions and recurrence relations, apart from definitions.
Concluding part of this masters thesis is to dedicate application of orthogonal polynomials at approximation calculating definite integral, apropos Gaussian quadrature formulas which have big application in numerical mathematics.
Key words. Orthogonal polynomials, Chebyshev Polynomials of the First Kind, Chebyshev Polynomials of the Second Kind, Hermite Polynomials, Laguerre Polynomials, Legendre Polynomials, Gaussian quadrature formulas.

12. Životopis

Rođena sam 13. prosinca 1992. godine u Osijeku, Hrvatska. Godine 2007. završila sam Osnovnu školu Miroslava Krleže, Čepin. Iste godine upisala sam III. Gimnaziju Osijek (prirodoslovno-matematički program). Srednju školu završila sam 2011. godine kada sam upisala Nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Osijeku. Osim toga, od 2009. godine aktivna sam članica Kulturno umjetničkog društva "Ivan Kapistran Adamović" iz Čepina. Od 2012. sam odbojkaški sudac, a 2015. godine položila sam za nacionalnog suca.