Kompleksni brojevi u nastavi matematike

Hrenek, Ivan

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski nastavnički sveučilišni studij matematike i informatike

Ivan Hrenek

Kompleksni brojevi u nastavi matematike

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski nastavnički sveučilišni studij matematike i informatike

Ivan Hrenek

Kompleksni brojevi u nastavi matematike

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2022.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučit ćemo skup kompleksnih brojeva te njegovu integraciju u proces nastave matematike. Prvo ćemo pogledati povijest kompleksnih brojeva, što je dovelo do njihovog otkrića te koje poznate matematičare i teoreme vezujemo uz kompleksne brojeve. Nakon toga ćemo proučiti dio kurikuluma za nastavu matematike vezan uz kompleksne brojeve, koji su ishodi te razradu istih koji su najzastupljeniji za sve nastavne programe matematike, a što se još nudi kao prošireni sadržaj za kompleksne brojeve. Nakon što smo proučili kurikulum pogledat ćemo kako i kada se kompleksni brojevi uvode u nastavu matematike proučavajući jedan školski udžbenik matematike. Pogledat ćemo koji su matematički pojmovi vezani uz kompleksne brojeve najzastupljeniji u nastavi, dati ćemo primjere za neke, pogledati na koji način se integriraju u nastavu matematike te usporediti uvođenje skupa kompleksnih brojeva u školama i na višim razinama obrazovanja. Proučavajući kompleksne brojeve u nastavi slijediti ćemo intuitivan učenički pristup i potrebu za proširivanjem ili uvođenjem novih pojmova u nastavi matematike s kompleksnim brojevima. Nakon toga ćemo nešto više reći o procesu metakognicije i učeničkim miskoncepcijama s kojima se učitelji matematike često susreću, a zatim ćemo dati rješenje za problem miskoncepcija u nastavi matematike s kompleksnim brojevima preko formativnog vrednovanja. Pokazat ćemo neke metode i primjere nekih metoda formativnog vrednovanja u nastavi matematike s kompleksnim brojevima kako bi kod učenika otklonili moguće miskoncepcije koje imaju s kompleksnim brojevima te procesom metakognicije došli do najviše i najtrajnije razine znanja koju učenici mogu postići. Na kraju ćemo pogledati zastupljenost kompleksnih brojeva na nacionalnom ispitu državne mature, a zatim ćemo pogledati zadatke s kompleksnim brojevima na nekim od ispitnih rokova te njihovu rješenost.

1 Kompleksni brojevi kroz povijest

Kompleksni brojevi u matematici prvi puta su uočeni još u doba renesanse, iako tada nisu dobili svoj današnji naziv, niti su definirani. Naime, talijanski matematičar, Girolamo Cardano, koji se u svom radu uvelike bavio rješavanjem kubnih jednadžbi (jednadžbi 3. stupnja) došao je do spoznaje da kubna jednadžba ima tri rješenja. Nažalost, on je bio u stanju odrediti samo realno rješenje, ali ne i kompleksna rješenja jednadžbe. Kasnije se, pojavom osnovnog teorema algebre pokušalo doći i do ostalih rješenja jednadžbe, ali to do kraja nije uspio niti jedan matematičar sve do pojave prvog potpunog dokaza osnovnog teorema algebre. Descartes je tako došao do saznanja da polinom n-tog stupnja ima n rješenja (o čemu zapravo govori i osnovni teorem algebre), ali da ta "zamišljena rješenja" ne odgovaraju nikakvoj realnoj vrijednosti.
Kompleksnim brojevima bavio se i flamanski matematičar Albert Girard koji je tvrdio da se rješenja jednadžbe n-tog stupnja nalaze u nekom većem skupu od do tada poznatih skupova brojeva. Leibniz je, umjesto prihvaćajući da osnovni teorem algebre vrijedi, pokušao dokazati da osnovni teorem algebre ne vrijedi, ali to nije uspio. Njegova greška je bila to što je pokušao zapisati broj $\sqrt{i}$ kao $\alpha + \beta i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Euler je u prvoj sredini 18. st. dokazao teorem za polinom do 6. stupnja s realnim koeficijentima, a pokušao ga je dokazati i za polinome većeg stupnja. U otprilike isto vrijeme je i d'Alembert pokušao dati konkretniji dokaz, konstruirajući niz kompleksnih brojeva koji konvergira prema nultočki polinoma, ali njegov dokaz je imao više nedostataka. Lagrange je kasnije popunio nedostatke Eulerovog dokaza, ali napravio je istu grešku kao i matematičari prije njega. Pretpostavio je da polinom ima n nultočki i dokazivao njihova svojstva. Tako je pristupio i Laplace nakon njega, ali je dao malo točniji dokaz.
Prvi pravi dokaz osnovnog teorema algebre pripisuje se Gaussu. On je u svom doktoratu 1799. dao topološki dokaz i iznio primjedbe na ranije dokaze. Dokaz je imao više nedostataka, no 1816. Gauss je iznio i drugi, točniji dokaz, utemeljen na idejama iz Eulerovog dokaza. Osim dokaza za polinome s realnim koeficijentima, Gauss je također 1849. iznio dokaz i za polinome s kompleksnim brojevima. U međuvremenu je i švicarski matematičar Robert Argand iznio svoj dokaz, koji se temeljio na d'Alambertovim pokušajima dokaza. Njemu se još pripisuje i da je uveo pojam kompleksne ravnine te dao geometrijsku interpretaciju množenja broja s i.
Nakon dokaza osnovnog teorema algebre postavilo se pitanje postoji li još veći skup brojeva, nego su to kompleksni brojevi. Gauss je tako vjerovao da postoji određena hijerarhija poopćenja kompleksnih brojeva u kojoj je "obične" kompleksne brojeve nazvao "sjenom sjena". Tu tvrdnju je opovrg-

nuo Weierstrass, dokazavši da je polje kompleksnih brojeva jedino polje koje proširuje polje realnih brojeva, tj. da nema većeg skupa od $\mathbb{C}$ koje sadrži skup $\mathbb{R}$ i koje sadržava uobičajena svojstva zbrajanja i množenja (kao u skupu $\mathbb{R}$).

2 Kompleksni brojevi u kurikulumu

2.1 O kurikulumu matematike

Primjena matematike je uvelike pridonijela brzom i boljem razvoju društva te je upravo zbog toga matematika prepoznata kao sastavni dio kurikuluma propisanog od strane Ministarstva znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske. Matematika, osim što je igrala ključnu ulogu u razvoju i napretku kroz povijest, i dalje igra bitnu ulogu u životu svakog pojedinca bez obzira na njihovu sferu interesa. Povezivanjem matematičkih domena i procesa ostvaruje se proces učenja i poučavanja u nastavi matematike. Ta dvodimenzionalnost u nastavi matematike se očituje upravo kroz ishode propisane u kurikulumu. Ishodi su podjeljeni u pet domena: brojevi, mjerenje te podaci, algebra i funkcije, oblik i prostor, statistika i vjerojatnost.

2.2 Kompleksni brojevi u kurikulumu matematike

Učenici se, prema [8], upoznaju s kompleksnim brojevima u 4. razredu srednje škole i to iz domena Brojev i Oblika i prostor. Ishodi koji se propisuju iz tih domena za nastavni program s 96 sati matematike su:

- A.4.2. Računa s kompleksnim brojevima
- A.4.3., C.4.1. Interpretira računske operacije s kompleksnim brojevima u Gaussovoj ravnini.

Propisani ishodi su jednaki za sve nastavne programe (iako su drugačije označeni za pojedini nastavni program), ali se razlikuju u svojoj razradi. Tako primjerice za nastavni program s 96 sati matematike razrada ishoda A.4.2. glasi:

- Zapisuje kompleksni broj u algebarskome i trigonometrijskome obliku.
- Zbraja, oduzima, množi i potencira kompleksne brojeve u odgovarajućemu obliku, po potrebi koristeći se De Moivreovom formulom.
- Prošireni sadržaj: Korjenuje kompleksne brojeve,

a za ishod A.4.3., C.4.1. glasi:

- Prikazuje kompleksni broj u Gaussovoj ravnini, određuje i prikazuje konjugirano kompleksni broj i modul kompleksnoga broja.
- Rješenja jednostavnih jednadžbi i nejednadžbi grafički prikazuje u Gaussovoj ravnini.

- Interpretira geometrijsko značenje zbroja, razlike ili modula razlike dvaju kompleksnih brojeva.
- Prošireni sadržaj: Rješenja jednadžbe, primjerice z^5, prikazuje u Gaussovoj ravnini.

Za nastavni program od 140 sati matematike, prošireni sadržaj u navedenoj razradi ishoda postaje redovni sadržaj te se u razradi matematički procesi još nadopunjuju. Tako da, ako u programu s 96 sati učenik prikazuju rješenja jednostavnijih jednadžbi i nejednadžbi u Gaussovoj ravnini, učenik u programu sa 128 sati prikazuje rješenja složenijih jednadžbi i nejednadžbi. Za programe sa 160 sati matematike se matematički procesi u razradi tih ishoda dodatno proširuju, a kao prošireni sadržaj se navode fraktali i Mandelbrotov skup. U razradi za nastavni program od 192 sata matematike se opet prošireni sadržaj u nastavnom programu od 160 sati navodi kao sastavni dio nastavnog procesa.

3 Kompleksni brojevi u nastavi

3.1 Skup kompleksnih brojeva

Prema [4] skup kompleksnih brojeva se definira na sljedeći način:

Definicija 1. *Skup* $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = (a,b) : a, b \in \mathbb{R}$ *u kome je definirano zbrajanje:*

$$(\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2) \ (a,b) + (c,d) := (a+c, b+d) \tag{1}$$

i množenje:

$$(\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2) \ (a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc) \tag{2}$$

zovemo skup kompleksnih brojeva i označavamo s $\mathbb{C}$*, a njegove elemente nazivamo kompleksnim brojevima.*

Ovakva definicija bi mogla djelovati zbunjujuće učenicima srednje škole te se stoga i ne primjenjuje baš u nastavi. U nastavi se sistematski gradi definicija kompleksnih brojeva pa tek nakon toga kompleksnog skupa. Tako prema [6] učenici najprije definiraju **imaginarnu jedinicu**:

Definicija 2. *Imaginarna jedinica,* i*, je broj za koji vrijedi* $i^2 = -1$.

Nakon što učenici definiraju imaginarnu jedinicu definiraju **imaginarni broj** kao umnožak realnog broja i imaginarne jedinice (primjerice $4i$, $\sqrt{2}i$, πi). Na kraju se definira kompleksan broj kao zbroj imaginarnog broja i realnog broja.

Definicija 3. *Kompleksni brojevi su svi brojevi oblika*

$$z = x + yi,$$

gdje su x *i* y *realni brojevi, a* i *imaginarna jedinica. Broj* x *je* ***realni dio****, a* y *je* ***imaginarni dio*** *kompleksnog broja* z*. Pišemo* $x = \mathrm{Re}z$, $y = \mathrm{Im}z$*. Zapis* $z = x + yi$ *nazivamo standardni ili algebarski zapis kompleksnog broja* z*.*

Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 1. *Odredite realni i imaginarni dio sljedećih brojeva:*
a) $z_1 = 2$,
b) $z_2 = 3i$,
c) $z_3 = 2 - i$.

Rješenje.
a) $z_1 = 2 \Rightarrow \mathrm{Re}z_1 = 2$, $\mathrm{Im}z_1 = 0$
b) $z_2 = 3i \Rightarrow \mathrm{Re}z_2 = 0$, $\mathrm{Im}z_2 = 3$
c) $z_3 = 2 - i \Rightarrow \mathrm{Re}z_3 = 2$, $\mathrm{Im}z_3 = -1$

Kompleksni brojevi se u nastavu uvode upravo kao proširenje skupa realnih brojeva, stoga je vrlo lako zaključiti kako svi realni brojevi ujedno pripadaju i skupu kompleksnih brojeva. Nadalje, ne mora svaki kompleksni broj imati i realni i imaginarni dio (različit od 0), ali i dalje ćemo ga moći zapisati u standardnom algebarskom zapisu kompleksnog broja. Primjerice broj 2 iz prethodnog Primjera 1 mogli smo zapisati kao $2 + 0i$.
Pogledajmo algebarski zapis kompleksnih brojeva. U nastavi matematike se često govori o odnosima između brojeva pa nam se prirodno nameće pitanje kada će dva kompleksna broja biti jednaka.

Definicija 4. *Dva kompleksna broja zapisana u algebarskom zapisu kao* $z_1 = x_1 + y_1 i$ *i* $z_2 = x_2 + y_2 i$ *će biti jednaki upravo onda kada su im međusobno jednaki realni dijelovi i imaginarni dijelovi, tj. kada je* $x_1 = x_2$ *i* $y_1 = y_2$.

Ovo je vrlo bitno svojstvo koje se primjenjuje pri rješavanju zadataka s kompleksnim brojevima u nastavi te je stoga važno naučiti učenike kako ga pravilno primjenjivati. U [4] je to svojstvo zapisano na sljedeći način:

Definicija 5. *Dva kompleksna broja* $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ *onda i samo onda ako je* $a = c$, $b = d$ *i tada pišemo* $(a, b) = (c, d)$.

Vrlo je lako provjeriti da su Definicija 4 i Definicija 5 ekvivalentne. Pogledajmo sljedeći primjer:

Primjer 2. *Odredite realne brojeve* a, b *iz jednakosti* $3a + (2 - b)i = -6 - 4i$

Rješenje.
Kompleksni brojevi $z_1 = 3a + (2 - b)i$ *i* $z_2 = -6 - 4i$ *su jednaki pa primjenom Definicije 4 dobivamo:*
$3a = -6$
$2 - b = -4$, *tj.* $a = -2$, $b = 6$.

Još jedan bitan matematički pojam koji učenici nauče kada se tek krenu upoznavati s kompleksnim brojevima su **kompleksno konjugirani brojevi**.

Definicija 6. *Kompleksno-konjugirani broj broja* $z = x + yi$ *je broj* $\overline{z} = x - yi$.

3.2 Računske operacije s kompleksnim brojevima

Kako je skup kompleksnih brojeva proširenje skupa realnih brojeva dobro je zaključiti kako bi svojstva računskih operacija koja vrijede u skupu realnih brojeve vrijede trebala vrijediti i u skupu kompleksnih brojeva. Tako su, prema [6], računske operacije zbrajanja, oduzimanja i množenja kompleksnih brojeva definirane na sljedeći način:
$z_1 = x_1 + y_1 i,\ z_2 = x_2 + y_2 i$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2 =$
$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$
Primjetimo da zbrajanje (oduzimanje) kompleksnih brojeva provodimo tako da im međusobno zbrojimo (oduzmemo) realne i imaginarne dijelove. Množenje možemo poistovjetiti sa množenjem binomnih izraza (svaki član jedne zagrade množimo sa svakim članom druge zagrade). Lako je provjeriti da za ovako definirane računske operacije s kompleksnim brojevima vrijede svojstva komutativnost i asocijativnosti množenja i zbrajanja te distributivnosti množenja prema zbrajanju. Sljedeći primjer nam ilustrira to:

Primjer 3. *Pokažimo na brojevima $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - i$, $z_3 = 2 + i$ da vrijedi svojstvo distributivnost množenja prema zbrajanju.*

Rješenje.

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (1 + 2i) \cdot ((3 - i) + (2 + i)) = (1 + 2i) \cdot 5 = 5 + 10i$$

$z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 = (1 + 2i) \cdot (3 - i) + (1 + 2i) \cdot (2 + i) = (5 + 5i) + 5i = 5 + 10i$

Zaključujemo dakle, $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Iako su operacije zbrajanja i množenja prema [4] dani u samoj definiciji skupa kompleksnih brojeva možemo u sljedećem primjeru vidjeti kako će naš intuitivan pristup u nastavi mateamatike srednje škole zadovoljiti te operacije.

Primjer 4. *Izračunaj $z_1 + z_2$ i $z_1 \cdot z_2$ pri čemu je $z_1 = 1 + 2i$, a $z_2 = 3 - 3i$.*

Rješenje.
$z_1 + z_2 = 1 + 2i + (3 - 3i) = 1 + 3 + (2 - 3)i = 4 - i$
$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (3 - 3i) = 3 - 3i + 6i + 6 = 9 + 3i$

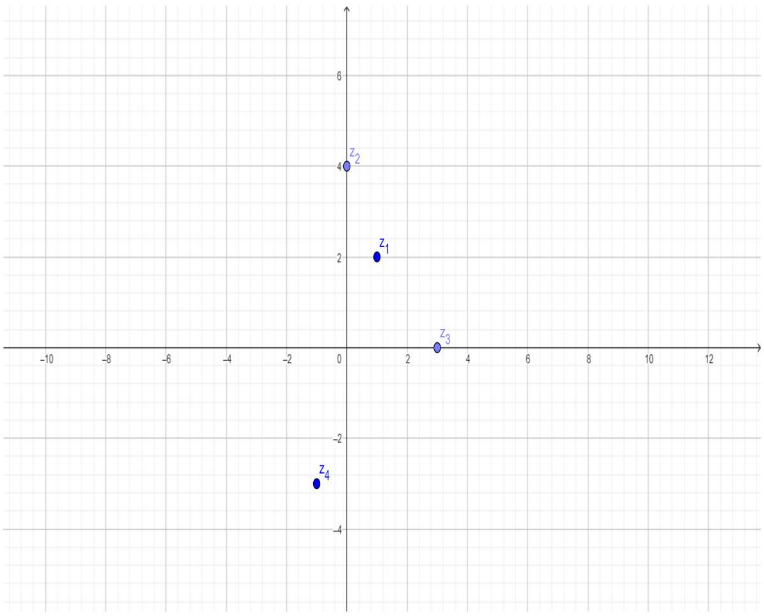
Lako možemo provjeriti da drugačijim zapisom $z_1 = (1,2), z_2 = (3,-3)$ *i primjenom definicje iz [4] dobivamo isti rezultat:*
$z_1 + z_2 = (1,2) + (3,-3) = (4,-1) = 4 - i$
$z_1 \cdot z_2 = (1,2) \cdot (3,-3) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot (-3), 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 3) = (9,3) = 9 + 3i.$

3.3 Kompleksna ravnina

Slično kao što realne brojeve prikazujemo na brojevnom pravcu i kompleksne brojeve možemo grafički prikazati. No, ovoga puta imamo 2 koordinate (realni i imaginarni dio) pa se učenicima prirodno nameće prikaz kompleksnih brojeva u pravokutnom koordinatom sustavu u ravnini.

Definicija 7. *Svaki kompleksni broj* $z = x + yi$ *možemo predočiti točkom* (x, y) *u* ***kompleksnoj*** *ili* ***Gaussovoj ravnini.*** *Os apscisa naziva se* ***realna os****, a os ordinata* ***imaginarana os.***

Primjer 5. *Prikažimo u kompleksnoj ravnini sljdeće brojeve:* $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 4i$, $z_3 = 3$, $z_4 = -1 - 3i$.
Rješenje.

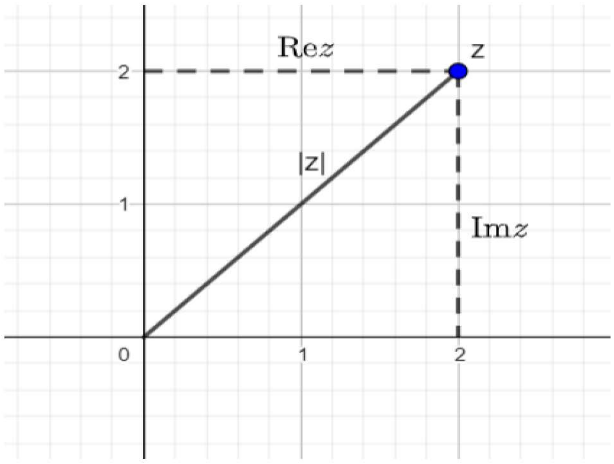


Slika 1: Primjetimo kako se kompleksni brojevi čiji su imaginarni dijelovi jednaki 0 nalaze na apscisi (što odgovara brojevnom pravcu kojim prikazujemo realne brojeve) te analogno tome brojevi čiji su realni dijelovi jednaki 0 nalaze se na osi ordinati.

Još jedan matematički pojam s kojim se učenici susreću u kompleksnoj ravnini je **modul kompleksnog broja**.

Definicija 8. *Modul kompleksnog broja z definira se kao udaljenost kompleksnog broja z od ishodišta kompleksne ravnine, a označava se $|z|$.*

Provjerimo kako računamo modul kompleksnog broja.



Slika 2: Uočimo kako je kut između realnog i imaginarnog dijela kompleksnog broja pravi kut te stoga možemo primijeniti Pitagorin poučak kako bi izračunali udaljenost kompleksnog broja od ishodišta kompleksne ravnine, tj. modul kompleksnog broja. Modul kompleksnog broja $z = x + yi$ stoga računamo kao $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ono što je apsolutna vrijednost realnom broju to je i modul kompleksnom broju te je stoga dobro zaključiti kako će i svojstva apsolutne vrijednosti u skupu realnih brojeva biti prenijeta na svojstva modula u skupu kompleksnih brojeva. Tako za umnožak, kvocijent i potenciju modula kompleksnih brojeva z_1 i z_2 imamo sljedeće formule:

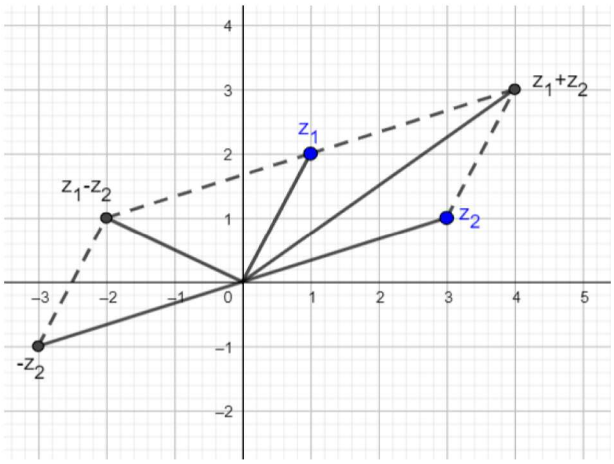
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$
$$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$$
$$|z^n| = |z|^n.$$

Kod kvocijenta modula moramo paziti da modul našeg kompleksnog broja z_2 bude različit od 0, tj. da kompleksni broj z_2 bude različit od 0.

Prema [8] kao jedan od ishoda u nastavi s kompleksnim brojevima se navodi da učenik interpretira računske operacije s kompleksnim brojevima u kompleksnoj ravnini. Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 6. *Za kompleksne brojeve* $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 + i$ *prikaži* $z_1 + z_2$ *i* $z_1 - z_2$ *u kompleksnoj ravnini.*

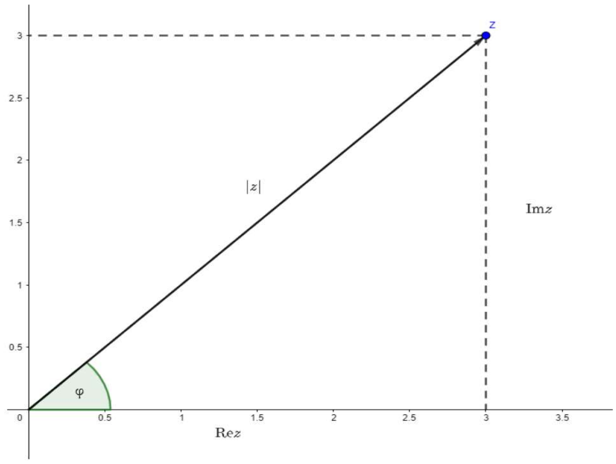
Rješenje.
Lako se vidi da je $z_1 + z_2 = 4 + 3i$, *a* $z_1 - z_2 = -2 + i$. *Prikažimo to u kompleksnoj ravnini.*



Slika 3: Vidimo kako je zbroj kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini zapravo zbroj radijvektora određenih tim kompleksnim brojevima, a razlika zapravo razlika radijvektora određenih tim kompleksnim brojevima.

3.4 Trigonometrijski zapis kompleksnog broja

Nakon što su učenici upoznati s osnovnim algebarskim operacijama s kompleksnim brojevima u algebarskom zapisu nameće se pitanje kako izračunati malo zahtjevnije izraze s kompleksnim brojevima, primjerice $(1+2i)^8 \cdot (3-i)^{17}$. Iako nije nemoguće zahtjevalo bi provođenja velikog broja računskih radnji što bi oduzelo dosta vremena. Stoga vidimo kako standardni algebarski zapis kompleksnog broja nije najbolje rješenje za računske operacije s kompleksnim brojevima. Stvara se potreba za korištenjem drugačijeg zapisa kompleksnog broja s kojim bismo mogli jednostavnije izvršiti zahtjevnije operacije. Takav zapis je upravo **trigonometrijski zapis kompleksnog broja**.Ponovo pogledajmo prikaz kompleksnog broja u kompleksnoj ravnini.



Slika 4: Primjetimo kako kompleksni broj s osi apscisa zatvara određeni kut, φ. Taj kut nazivamo **argument kompleksnog broja**. Upravo taj kut, zajedno s već spomenutim modulom kompleksnog broja će igrati ključnu ulogu u trigonometrijskom zapisu kompleksnog broja.

Odsada pa nadalje u trigonometrijskom zapisu kompleksnog broja ćemo modul kompleksnog broja, $|z|$, označavati s r. Korištenjem trigonometrije pravokutnog trokuta iz slike jasno možemo očitati $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ i $\sin\varphi = \frac{y}{r}$. Iz toga slijedi da je $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$. Uvrštavanjem tih jednakosti u algebarski izraz kompleksnog broja, $z = x + yi$, dobivamo **trigonometrijski zapis kompleksnog broja** $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Primjetimo kako je kut φ, tj. argument kompleksnog broja kut između 0 i 2π, tj. $\varphi \in [0, 2\rangle$.

Primjer 7. *Zapišimo broj $z = 1 + i$ u trigonometrijskom obliku.*

Rješenje.
Argument broja z možemo računati koristeći trigonometrijski identitet tg. *Tada je* $\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, *pri čemu je x realni dio broja z, a y imaginarni dio broja z tj.* $\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{1} = 1$ *iz čega slijedi da je $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ili $\varphi = \frac{5\pi}{4}$. Prisjećajući se trigonometrijske kružnice i imajući na umu da se z nalazi u 1. kvadrantu zaključujemo da je $\varphi = \frac{\pi}{4}$.*
Modul kompleksnog broja računamo po već poznatoj formuli $r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.
Kako znamo modul i argument kompleksnog broja možemo ga i zapisati u trigonometrijskom zapisu $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

Pomoću trigonometrijskih zapisa kompleksnih brojeva vrlo je lako izvesti

formule za množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva (koristeći svojstva trigonometrijskih funkcija), a formulu za potenciranje kompleksnih brojeva (koju još nazivamo **De Moivreova formula**) izvodimo pomoću matematičke indukcije poznavajući pritom formulu za množenje dva kompleksna broja u trigonometrijskom zapisu. Izvode formula možete pronaći u [6], a ovdje ćemo samo spomenuti gotove formule.
Za dva kompleksna broja $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ vrijedi sljedeće:

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))
\end{aligned}
$$

Definicija 9 (De Moivreova formula za potenciranje kompleksnih brojeva)**.** *Za kompleksni broj $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Primjer 8. *Izračunajte z^{20}, ako je $z = 1 + i$.*

Rješenje.
U prethodnom primjeru smo već odredili trigonometrijski zapis broja z pa stoga koristimo taj zapis i formulu za potenciranje kompleksnog broja u trigonometrijskom zapisu.

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

$z^{20} = (\sqrt{2})^{20}(\cos\frac{20\pi}{4} + i\sin\frac{20\pi}{4}) = 2^{10}(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = 2^{10}(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^{10}$.

Da smo u prethodnom primjeru računali pomoću algebarskog zapisa proveli bi jako velik broj operacija što bi zahtjevalo znatno više vremena. Zbog toga nam je trigonometrijski zapis kompleksnih brojeva pogodan za računske operacije s kompleksnim brojevima u nastavi matematike.
U skupu pozitivnih realnih brojeva n-ti korijen broja definiramo kao broj koji potenciran na n-tu potenciju daje taj broj. Općenito korijen broja vezujemo uz rješavanje jednadžbe, pr. $x^2 = 9$. U skupu kompleksnih brojeva n-ti korijen definiramo na sljedeći način.

Definicija 10. *n-ti korijen iz kompleksnog broja z je svaki kompleksan broj w takav da vrijedi $w^n = z$.*
Pišemo $w = \sqrt[n]{z}$.

Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 9. *Odredite* $\sqrt[3]{1}$.

Rješenje.
Neka je w *takav da je* $w^3 = 1$. *Dodavanjem* -1 *s obije strane jednadžbe imamo*

$$w^3 - 1 = 0.$$

Faktoriziramo li to dobivamo

$$(w-1)(w^2+w+1) = 0.$$

Promotrimo sada jednadžbe

$$w - 1 = 0,$$

$$w^2 + w + 1 = 0.$$

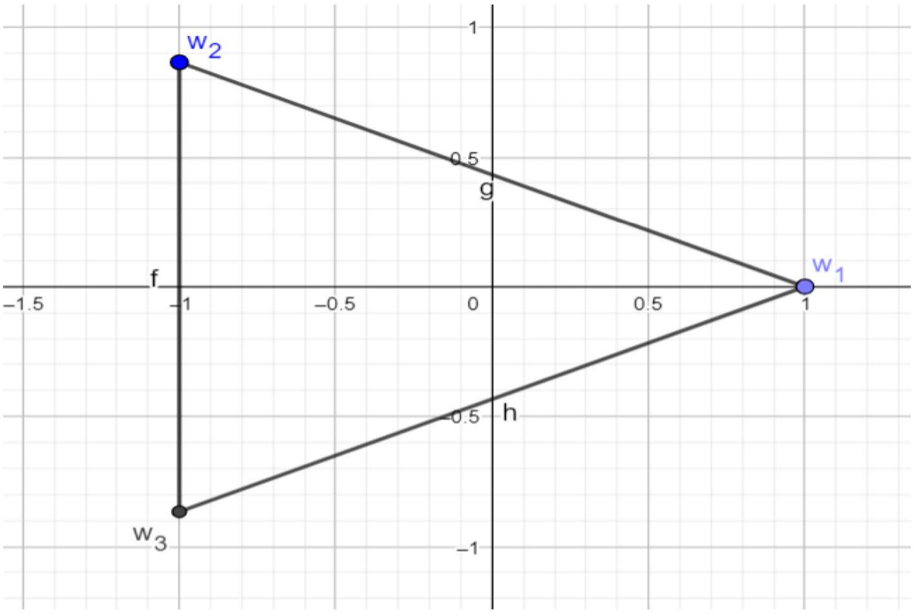
Rješenje prve jednadžbe nam je $w_1 = 1$, *a rješenja druge jednadžbe su* $w_2 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ *te* $w_3 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. w_1, w_2, w_3 *su sve korijeni broja* 1 *u skupu* $\mathbb{C}$.

Primjenjujući de Moivreovu formulu i trigonometrijski zapis kompleksnog broja dolazimo do rezultata da n-ti korijen kompleksnog broja ima n vrijednosti te formule za n-ti korijen kompleksnog broja u trigonometrijskom zapisu.

Definicija 11. *n-ti korijen kompleksnog broja* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *ima točno* n *različitih vrijednosti:*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\frac{\cos(\varphi + 2k\pi)}{n} + i\frac{\sin(\varphi + 2k\pi)}{n}\right)$$

Geometrijski, korijene kompleksnog broja interpretiramo kao vrhove pravilnog n-terokuta u kompleksnoj ravnini. Možemo to ilustrirati na prethodnom primjeru tako da nacrtamo rješenja naših jednadžbi u kompleksnoj ravnini.



Slika 5: Korijeni broja 1 u skupu $\mathbb{C}$

4 Metakognicija i miskoncepcije

U revidiranoj Bloomovoj taksonomiji razlikujemo četiri dimenzije znanja. To su činjenično, konceptualno, proceduralno i metakognitivno znanje.
Činjenično znanje obuhvaća poznavanje i reprodukciju činjenica, temeljnih pojmova, ideja i principa te načina na koji su ti pojmovi povezani. Konceptualno znanje obuhvaća uopćene predodžbe, strukture koje služe u organizaciji i reorganizaciji te pojmovnom povezivanju. Proceduralno znanje je znanje o tome kako se rješavaju problemi, a obuhvaća opis metoda i postupaka za rješavanje problema. Metakognitivno znanje je najviša dimenzija znanja, može se definirati kao znanje o vlastitom mentalnom funkcioniranju, daje uvid u vlastito znanje.
U procesu učenja matematike kod učenika se ponekad javljaju pogrešne interpretacije nekih matematičkih koncepata. Te interpretacije možemo podijeliti konceptualne pogreške, pretjerane generalizacije, predodžbe i djelomične koncepcije. U pretjeranoj generalizaciji informacije o matematičkim konceptima su proširene što dovodi do njihove krive upotrebe. Primjerice, ako učenik pretpostavi da je svaki mnogokut pravilan te koristi formulu za unutarnje kutove pravilnog mnogokuta pri rješavanju zadatka gdje nije navedeno da je mnogokut pravilan. Djelomične koncepcije nastaju zbog poteškoća pri generalizaciji ili poznavanju pojmova. Tako npr. učenici pri rješavanju jednadžbe većeg stupnja dosta često napišu samo realna rješenja, izostave kompleksna rješenja. Konceptualne greške nastaju kada učenici nekom matematičkom pojmu daju vlastito značenje zbog loše interpretacije učiteljevog tumačenja. To bi bilo, primjerice, kada učenici koriste formulu za opseg kvadrata u zadatku u kojem se traži površina kvadrata. Neke miskoncepcije se mogu svrstati u više kategorija, nisu nužno vezani uz samo jednu od ove četiri kategorije.
U nastavi matematike vrlo je teško izbjeći kriva učenička tumačenja koja mogu nastati kao rezultat više faktora. Zadatak svakog učitelja matematike je pronaći kriva učenička tumačenja i procesom metakognicije natjerati učenike na ispravno tumačenje. Kao što je već navedeno metakognitivno znanje je najviši oblik znanja, nudi najtrajnije i najbolje poznavanje matematičkih pojmova i koncepata, a može se postići tako da učenici uče na vlastitim greškama. Pronaći sve miskoncepcije nije nimalo lak zadatak, dosta često je vrlo teško pronaći sva kriva tumačenja kod učenika, ponekad i nemoguće, no svaki učitelj se mora truditi kako bi učenici postigli najvišu razinu znanja. U nastavi s kompleksnim brojevima (a i općenito u matematici) u tome nam pomažu različite metode koje možemo provesti procesom formativnog vrednovanja.

5 Formativno vrednovanje

5.1 Vrednovanje

Sudionicima odgojno-obrazovnog procesa u matematici vrednovanje daje povratnu informaciju o usvojenosti matematičkih znanja i vještina. Sastavni je dio procesa učenja i poučavanja te zajedno s kurikulumom čini jedan cjelovit, povezan sustav. Vrednovanje učitelju i učenicima daje informaciju o razini usvojenosti odgojno-obrazovnih ishoda, ali može motivirati i usmjeriti učenike za učenje i napredak. U odgojno-obrazovnom procesu razlikujemo tri oblika vrednovanja: dijagnostičko, sumativno i formativno vrednovanje. Dijagnostičko vrednovanje se provodi prije početka procesa učenja i poučavanja, najčešće na početku školske godine, te pomoću rezultata dijagnostičkog vrednovanja učitelj može prilagoditi proces učenja i poučavanja. Formativno vrednovanje se provodi tijekom procesa učenja i poučavanja te daje uvid u učenički napredak, ali također i manjkavosti u učeničkom napretku, a također može pomoći i učiteljima kako bi prilagodili svoje nastavne metode da budu što djelotvorniji. Sumativno vrednovanje se provodi na kraju procesa učenja i poučavanja, daje uvid u učenička postignuća i razinu ostvarenosti ishoda, a najčešće rezultira numeričkom ocjenom.
Osim oblika vrednovanja razlikujemo i tri pristupa vrednovanju, a to su: vrednovanje za učenje, vrednovanje kao učenje i vrednovanje naučenog. Vrednovanje za učenje se odvija tijekom procesa učenja i poučavanja, a provodi se različitim metodama kojima se utvrđuje učeničko trenutno stanje u odnosu na odgojno-obrazovne ishode. Vrednovanje za učenje služi za formativne svrhe, najčešće ne rezultira ocjenom, već kvalitativnom povratnom informacijom. Vrednovanje kao učenje je pristup vrednovanju utemeljen na ideji da učenici vrednovanjem uče, tj. učenici sami analiziraju uspješnost ostvarenosti odgojno-obrazovnih ishoda. Vrednovanje naučenoga podrazumijeva procjenu razine postignuća učenika nakon procesa učenja i poučavanja.

5.2 Formativno vrednovanje u nastavi s kompleksnim brojevima

U nastavi matematike za praćenje učenikovog napretka, ali također i za praćenje i poboljšavanje vlastitih metoda rada učiteljima je najkorisniji formativni oblik vrednovanja. Formativno vrednovanje se može provoditi na različite načine te različitim strategijama, a daje učiteljima korisnu kvalitativnu informaciju o odnosu učenika i odgojno-obraznovih ishoda u nastavi matematike. Kako se skup kompleksnih brojeva uvodi kao potpuno novi pojam u 4. razredu matematike za što bolji napredak učenika, ali također i učiteljevih metoda rada, bilo bi dobro provesti neki oblik formativnog vrednovanja kroz različite strategije formativnog vrednovanja. Također bi se na taj način mogle otkloniti miskoncepcije koje bi mogle nastati pri uvođenju pojma kompleksnih brojeva.

5.2.1 Slažem se, ne slažem se, ovisi

Učenici ovom strategijom provjeravaju točnost danih tvrdnji. Prvo odabiru slažu li se s nekom tvrdnjom ili ne ili im je možda potrebno više informacija, a onda trebaju prikazati svoj proces razmišljanja koji ih je naveo na takav odgovor. Ova strategija pomaže u razvoju metakognicije i matematičkog mišljenja, a dobro ju je koristiti na početku procesa poučavanja kako bi učitelji mogli utvrditi s kojim matematičkim konceptima i pojmovima učenici imaju najviše problema te kako bi se tome više mogli posvetiti u nastavi matematike. Strategija se provodi tako da učitelji odaberu konkretne tvrdnje, najčešće one koje se nalaze u [8], te od učenika traže da odaberu slažu li se s tvrdnjom ili ne, a ako se slažu kada se slažu. Najbolje je uvijek odabrati jednu tvrdnju koja je točna, jednu koja je netočna i jednu za koju nije dano dovoljno informacija. Ako se učenici ne slažu s nekom tvrdnjom dobro je od njih tražiti protuprimjer kojim će tu tvrdnju opovrgnuti. Time se također može potaknuti razvoj matematičkog mišljenja kod učenika. Nakon što su se učenici odlučili za svoje odgovore dobro bi ih bilo i podjeliti u manje grupe kako bi se potakla argumentirana rasprava među njima gdje možda dođu do novih ideja ili zajedno ispitaju neke ideje koje nisu mogli samostalno. Na kraju učenici sami dolaze do odgovora uz smjernice učitelja (kroz primjere, protuprimjere, itd. . .).
U nastavi s kompleksnim brojevima ovu strategiju bilo bi dobro provesti odmah na početku poučavanja o kompleksnim brojevima, nakon što se učenici tek upoznaju s kompleksnim brojevima. Ključno je da odmah na početku učenici usvoje temeljne tvrdnje za aksiomatsku izgradnju skupa kompleksnih brojeva kako bi kasnije mogli s njima računati, prikazivati ih u kompleksnoj ravnini itd. . . Ispod se nalazi primjer nastavnog listića za ovu strategiju. Prva tvrdnja bi trebala učenicima doći prirodno jer se skup kompleksnih brojeva u nastavi matematike upravo uvodi kao proširenje skupa realnih brojeva. Druga tvrdnja bi zahtjevala učeničko poznavanje standardnog algebarskog zapisa kompleksnog broja. Treća tvrdnja se odnosi na jednakost kompleksnih brojeva, a trebala bi učenike natjerati na razmišljanje. Za proces metakognicije je ova tvrdnja upravo najjača. Učenici bi ispitivali vlastite ideje i znanja, davali primjere i protuprimjere kako bi utvrdili je li ova tvrdnja točna i kada te uz koje uvjete. Četvrta tvrdnja traži od učenika poznavanje pojma kompleksno konjugiranog broja.

Tvrdnja				Obrazloženje
Skup kompleksnih brojeva je podskup skupa realnih brojeva.	Slažem se.	Ne slažem se.	Ovisi.	Ovo je točno. Svaki realan broj mogu zapisati kao kompleksan broj u standardnom algebarskom zapisu. Pr. 2=2+0i.
U standardnom algebarskom zapisu kompleksnog broja razlikujemo realne dijelove kompleksnog broja.	Slažem se.	Ne slažem se.	Ovisi.	Ovo je netočno. Standardni algebarski zapis kompleksnog broja glasi z=x+yi, gdje je x realni dio, a y imaginarni dio kompleksnog broja.
Dva kompleksna broja su jednaki ako su im jednaki njihovi imaginarni dijelovi.	Slažem se.	Ne slažem se.	Ovisi.	Dva kompleksna broja su jednaka ako su im međusobno jednaki imaginarni i realni dijelovi. Ako im je jednak samo imaginarni dio, mogu, ali ne moraju biti jednaki. Pr. 2+2i i 3+2i imaju jednak imaginarni dio, ali nisu jednaki.
Kompleksno konjugirani brojevi su kompleksni brojevi kojima su realni dijelovi međusobno jednaki, a imaginarni dijelovi se razlikuju samo u predznaku.	Slažem se.	Ne slažem se.	Ovisi.	Ovo je točno. Pr. Broju 2+2i je 2-2i kompleksno konjugiran.

Slika 6: Primjer rješenog listića (ne nužno točnog) za strategiju Slažem se, ne slažem se, ovisi.

5.2.2 Uvijek, ponekad, nikada

Strategiju provodimo tako da se učenicima nabroji par matematičkih tvrdnji i od njih traži da odgovore vrijede li te tvrdnje uvijek, ponekad ili nikad ne vrijede te da svoj odgovor obrazlože. Ova strategija učenicima pomaže pri razvoju metakognicije, a također potiče razvoj matematičkog mišljenja (ako bi učenici smišljali primjere i protuprimjere kako bi dali svoje odgovore). Strategija se može provoditi na početku procesa učenja kako bi potaknula razvoj učeničkih ideja o matematičkoj temi, ali se također može provoditi i na kraju procesa učenja kako bi se provjerila ostvarenost ishoda za određenu temu. Strategiju provodimo tako da učenici samostalno ili u paru / grupi riješe listić sa konkretnim matematičkim tvrdnjama te uz raspravu navedu primjere ili protuprimjere koji potkrepljuju njihove tvrdnje. Na kraju zajedno s učiteljem navode primjere kojih se još nisu mogli sjetiti, a koji bi mogli potkrijepiti ili opovrgnuti njihove odgovore. Učenici na kraju sami dolaze do zaključaka vrijedi li određena tvrdnja te ako vrijedi uz koje uvjete. U nastavi s kompleksnim brojevima ovu strategiju bilo bi zgodno provesti nakon obrade računskih operacija s kompleksnim brojevima (u standardnom algebarskom zapisu). Ispod se nalazi primjer listića za ovu strategiju.

Tvrdnja	Obrazloženje
Kompleksne brojeve zapisane u standardnom zapisu množimo tako da im pomnožimo odgovarajuće realne dijelove i imaginarne dijelove. **Uvijek.** **Ponekad.** **Nikada.**	Kompleksne brojeve množimo slično kao što množimo i polinome, tj. množimo svaki dio sa svakim, npr. (2-i)(4+i)=8+2i-4i+1=9-2i.
Umnožak kompleksnog broja i njegovog kompleksno konjugiranog para je realan broj. **Uvijek.** **Ponekad.** **Nikada.**	Da, zato što kada množimo kompleksni broj sa svojim konjugiranim parom, imamo zapravo razliku kvadrata pa se imaginarni dio izgubi.
Zbroj dva kompleksna broja u svom standardnom zapisu sadrži imaginarni dio. **Uvijek.** **Ponekad.** **Nikada.**	Zbroj dva kompleksna broja ne mora uvijek sadržavati imaginarni dio. Npr. (2+i) + (7-i) = 9.
Parna potencija imaginarne jedinice je jednaka -1. **Uvijek.** **Ponekad.** **Nikada.**	Da, zato što je i na kvadrat jednako -1.

Slika 7: Primjer rješenog listića (ne nužno točnog) za strategiju Uvijek, ponekad, nikada.

Prva tvrdnja služi kako bi provjerila znaju li učenici množiti dva kompleksna broja. Učenici bi tijekom poučavanja trebali biti upoznati da se operacija množenja kod kompleksnih brojeva može poistovjetiti s operacijom množenja kod binomnih izraza te bi se tako trebale otkloniti miskoncepcije gdje bi oni operaciju množenja kompleksnih brojeva mogli provoditi na analogni način kao operaciju zbrajanja i oduzimanja kompleksnih brojeva. Druga tvrdnja bi od učenika tražila poznavanje gradiva matematike iz prethodnih razreda kako bi mogli povezati matematički pojam razlike kvadrata sa tvrdnjom o množenju kompleksno konjugiranih brojeva. Tu bi učenici također mogli pisati razne primjere te i tako doći do zaključka. Treća tvrdnja očito vrijedi iz same definicije zbrajanja kompleksnih brojeva, ali bi učenici trebali razmisliti vrijedi li ona uvijek ili ponekad. To bi ih potaklo na razvoj matematičkog mišljenja gdje bi pokušali smisliti protuprimjere kako tvrdnja ne bi vrijedila. Četvrta tvrdnja također očito vrijedi, ali učenici bi se trebali zapitati vrijedi li ona uvijek ili ponekad. Inače, četvrta tvrdnja je također miskoncepcija u nastavi. Stoga bi bilo dobro tijekom procesa poučavanja, a i za vrijeme provođenja ove strategije ispisati potencije od i te vidjeti je li to uvijek -1 na konkretnim primjerima.

5.2.3 Četiri kuta

Strategiju se provodi tako da se učenicima postavi pitanje, ponude odgovori od kojih je samo jedan točan te se od njih očekuje da se opredijele za jedan odgovor i svoj odabir obrazlože. Nakon što su svoj odgovor obrazložili mogu se grupirati s ostalim učenicima koji su odabrali isti odgovor. Idealno bi bilo da se ponude četiri odgovora na pitanje kako bi svaka grupa koja se zalaže za pojedini odgovor mogla zauzeti jedan kut u učionici. U grupi bi učenici mogli još međusobno raspravljati, davati primjere ili protuprimjere što bi potaknulo matematičko razmišljanje. Učitelj onda, davanjem konkretnih primjera i / ili matematičkih tvrdnji usmjerava učenike koji su se opredjelili za krivi odgovor da promjene mišljenje, a također i svoju poziciju u učionici (kut). Na kraju dolazi do procesa metakognicije, učenici uviđaju svoje krive načine razmišljanja i miskoncepcije koje su imali te dolaze do valjanog zaključka i točnog odgovora.
U nastavi s kompleksnim brojevima ovu strategiju je dobro provesti kada se učenici upoznaju s pojmom kompleksne ravnine. Strategiju je dobro provesti i prije nego se učenici upoznaju s trigonometrijskim zapisom kompleksnog broja jer je poznavanje kompleksne ravnine ključno za trigonometrijski zapis kompleksnog broja. Važno je da učenici mogu prikazati kompleksni broj u kompleksnoj ravnini (to je jedan od ishoda iz [8], neovisno o nastavnom programu). Ispod se nalazi primjer nastavnog listića za ovu strategiju. Sva pitanja ispituju učeničko poznavanje kompleksne ravnine (gdje se nalazi imaginarni dio kompleksnog broja, gdje realni dio, što ako se kompleksni broj nalazi na koordinatnoj osi,...).

Pitanje 1. Broj z se nalazi u kompleksnoj ravnini u 1. kvadrantu. To znači da je:	$a)\ Imz < 0, Rez < 0$ $b)\ Imz > 0, Rez < 0$ $c)\ Imz > 0, Rez > 0$ $d)\ Imz < 0, Rez > 0$	Odabirem odgovor pod c) jer sigurno moraju oba dijela biti veća od 0 ako se nalazi u 1. kvadrantu.
Pitanje 2. Broj z se nalazi u kompleksnoj ravnini u 3. kvadrantu. To znači da je:	$a)\ Imz < 0, Rez < 0$ $b)\ Imz > 0, Rez < 0$ $c)\ Imz > 0, Rez > 0$ $d)\ Imz < 0, Rez > 0$	Odabirem odgovor pod a) jer sigurno moraju oba dijela biti manja od 0 ako je u 3. kvadrantu.
Pitanje 3. Broj z se nalazi u kompleksnoj ravnini na osi ordinata iznad ishodišta. To znači da je:	$a)\ Imz = 0, Rez < 0$ $b)\ Imz = 0, Rez > 0$ $c)\ Imz > 0, Rez = 0$ $d)\ Imz < 0, Rez = 0$	Odabirem odgovor pod b) jer realni dio gledamo na osi ordinata a kako je u b) imaginarni dio jednak 0 znači da je on tamo. Nadalje, nalazi se iznad ishodišta te je stoga realni dio veći od 0.

Slika 8: Primjer listića za strategiju Četiri kuta.

5.2.4 Popis terminologije

Ova strategija se provodi pomoću kratkih upitnika na kojima učenici odabiru jesu li tj. koliko su upoznati s nekim matematičkim terminom. Ako tvrde da su upoznati s nekim terminom od njih se traži i opis tog termina kako bi se dobio uvid u njihovo konceptualno shvaćanje tog termina. Strategija se najčešće provodi na kraju procesa poučavanja kako bi se utvrdilo koliko dobro su učenici upoznati s matematičkom terminologijom za određenu nastavnu cjelinu (jedinicu). Neki učenici mogu biti upoznati s terminom na razini prepoznavanja, ali možda neće biti u stanju taj matematički termin opisati, dok će s druge strane neki učenici taj termin moći i opisat i objasniti drugim učenicima. Rezultate ove strategije učitelj može koristiti kako bi poboljšao ili prilagodio uvođenje nove matematičke terminologije.
U nastavi s kompleksnim brojevima ovu strategiju bi bilo dobro provesti nakon obrade trigonometrijskog zapisa broja. Trigonometrijski zapis kompleksnog broja je također jedan od ishoda prema [8] te je stoga ključno provjeriti koliko su učenici upoznati s njime. U tu svrhu bi trebalo odabrati termine vezane uz trigonometrijski zapis kompleksnog broja (modul i argument kompleksnog broja) te ispitati samo poznavanje termina trigonometrijskog zapisa kompleksnog broja. Kako su to potpuno novi matematički pojmovi za

učenike u 4. razredu srednje škole nastavnik će dobiti povratnu informaciju koliko dobro su ih učenici usvojili te će prema tome moći ubuduće planirati uvođenje istih.

Modul kompleksnog broja	**Argument kompleksnog broja**	**Trigonometrijski zapis kompleksnog broja**
• Nikad nisam čuo/la za taj termin. • Čuo/la sam za taj termin, ali nisam siguran/na što to znači. • Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti. • <u>Znam što taj termin znači i mogu ga opisati.</u> Modul kompleksnog broja $z = x + yi$ definiramo kao udaljenost kompleksnog broja od ishodišta u Kompleksnoj ravnini. Označavamo ga sa $\|z\|$ i računamo kao $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.	• Nikad nisam čuo/la za taj termin. • Čuo/la sam za taj termin, ali nisam siguran/na što to znači. • Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti. • <u>Znam što taj termin znači i mogu ga opisati.</u> Argument kompleksnog broja $z = x + yi$ u oznaci $argz = \varphi$ je kut koji se nalazi u intervalu $[0,2\pi >$, a računamo ga pomoću jednakosti $tg\varphi = \frac{y}{x}$, pritom pazeći u kojem kvadrantu kompleksne ravnine se nalazi broj z.	• Nikad nisam čuo/la za taj termin. • Čuo/la sam za taj termin, ali nisam siguran/na što to znači. • Imam neke ideje što bi taj termin mogao značiti. • <u>Znam što taj termin znači i mogu ga opisati.</u> Trigonometrijski zapis kompleksnog broja z glasi $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$, gdje je r modul od broja z, a φ argument kompleksnog broja z.

Slika 9: Primjer listića za strategiju Popis terminologije.

5.2.5 Frayerov model

Ova strategija je vrlo slična prethodnoj strategiji jer kod učenika provjerava poznavanje i razumijevanje matematičkih termina. Provodi se na način tako da učenicima bude ponuđen dijagram s matematičkim terminom u sredini, a od njih se očekuje da popune dijagram s definicijom i karakteristikama tog matematičkog termina te primjerima i protuprimjerima. Prije samog provođenja ove strategije dobro bi bilo učenicima pokazati način na koji bi popunjavali tablicu s nekim terminom s kojim su već dobro upoznati, ako se prvi puta susreću s ovom strategijom. Nakon što učenici popune svoju tablicu mogu kroz argumentiranu raspravu s drugim učenicima vidjeti jesu li dobro popunili te ako nisu kako mogu poboljšati svoje poznavanje matematičkog termina i uvidjeti koje miskoncepcije još imaju za taj termin. Strategija se može provesti i tako da se od učenika traži da prepoznaju o kojem je matematičkom terminu riječ ako im je poznata definicija, karakteristike, primjer i protuprimjeri ili nešto od toga. U pravilu se strategija provodi nakon procesa poučavanja, ali može se provoditi i prije upoznavanja s novom terminologijom kako bi učitelj uočio moguće prepreke s kojima će se učenici susretati u

procesu učenja.
U nastavi s kompleksnim brojevima ovu strategiju bi bilo dobro provoditi nakon upoznavanja s trigonometrijskim zapisom kompleksnog broja jer, kao što je već spomenuti, trigonometrijski zapis kompleksnog broja je jedan od sastavnih pojmova iz [8]. Ispod je dan primjer listića za ovu strategiju.

Definicija Trigonometrijski zapis kompleksnog broja z je: $z = r(cos(\varphi) + isin(\varphi))$.	**Karakteristike** • $r = \lvert z \rvert$ je modul kompleksnog broja z • kut $\varphi \in [0, 2\pi >$ nazivamo argument kompleksnog broja z
TRIGONOMETRIJSKI ZAPIS KOMPLEKSNOG BROJA	
Primjeri $2(cos(\frac{4\pi}{5}) + isin(\frac{4\pi}{5}))$ $4(cos(\frac{4\pi}{3}) + isin(\frac{4\pi}{3}))$ $cos(\frac{\pi}{3}) + isin(\frac{\pi}{3})$	**Protuprimjeri** $2 + i$ $3i$ 2

Slika 10: Primjer listića za strategiju Frayerov model.

5.2.6 Strategija 3-2-1

Strategija se najčešće provodi nakon obrađene nastavne jedinice,a provodi se tako da se od učenika traže pisani odgovori na tri refleksivna. Odgovaraju na pitanja sa šest odgovora (tri na prvo, dva na drugo, jedan na zadnje pitanje) u kojima opisuju što su naučili u nastavnoj jedinici. Učenici u pravilu daju tri nove činjenice koje su naučili za određeni matematički pojam, dvije činjenice s kojima se muče i jednu strategiju koja im pomaže rješiti problem. Strategija 3-2-1 prikazuje učeničku refleksiju, a također pruža učenicima mogućnost dijeljenja svog uspjeha pri savladavanju novih matematičkih pojmova s drugim učenicima. Učiteljima, s druge strane, ova strategija pruža uvid u informacije i spoznaje koje učenici smatraju ključnima za određenu nastavnu jedinicu. Također je moguće dobiti povratnu informaciju o ostvarenosti odgojno-obrazovnih ishoda za nastavnu jedinicu.

U nastavi s kompleksnim brojevima ovu strategiju bi bilo dobro provesti nakon obrade modula kompleksnog broja. Kako je modul jedan od ključnih pojmova koji se primjenjuje u nastavi s kompleksnim brojevima važno je provjeriti učeničko razumjevanje i poznavanje istog. Ispod je dan primjer jednog rješenog listića za ovu strategiju.

Modul kompleksnog broja

3 nove činjenice koje sam naučio/la:
- modul kompleksnog broja je udaljenost kompleksnog broja od ishodišta u Gaussovoj ravnini
- modul kompleksnog broja je uvijek pozitivan
- računa se kao zbroj kvadrata realnog i imaginarnog dijela kompleksnog broja

2 činjenice s kojima se još mučim:
- svojstva modula kompleksnog broja
- udaljenost dva kompleksna broja

1 strategija koja mi pomaže:
- formula za udaljenost 2 točke u koordinatnom sustavu

Slika 11: Primjer listića za strategiju 3-2-1.

6 Kompleksni brojevi na državnoj maturi

Osim nastave, učenici se s kompleksnim brojevima mogu sresti i na državnoj maturi. Državna matura je nacionalni ispit koji u Republici Hrvatskoj organizira Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje i obrazovanje. Polaganjem državne mature smatra se polaganje ispita državne mature. Ispit državne mature sastoji se od dva dijela, obveznog i izbornog dijela. Obvezni dio državne mature trenutno je podijeljen na dvije razine, višu i nišu razinu (A i B). Ispit iz matematike trenutno se nalazi na obveznom djelu državne mature, stoga je polaganje ispita matematike obavezno za položenu državnu maturu. Položenim ispitom se smatra zadovoljen minimalni prag bodova iz tog ispita. Minimalni prag bodova se utvrđuje naknadno, nakon provedbe ispita.
Područja ispitivanja i ishodi koji se ispituju iz tih područja za predmet matematike su dani u ispitnom katalogu za državnu maturu (koji izlazi prije provedbe ispita). Slično kao i u kurikulumu nastavnog predmeta matematike, ispit državne mature iz matematike, podijeljen je u pet domena: brojevi, algebra i funkcije, oblik i prostor, mjerenje te podaci statistika i vjerojatnost. U ispitnom katalogu za državnu maturu 2022. /2023. godine kompleksni brojevi se svrstavaju u domenu brojeva. Zastupljenost te domene na ispitu državne mature koji će biti na ljeto 2023. iznosti će 20%. Ishodi vezani uz kompleksne brojeve koji će se ispitivati na tom ispitu su:

- MAT SŠ A.4.2. Računa s kompleksnim brojevima.
- MAT SŠ A.4.3., C.4.1. Interpretira računske operacije s kompleksnim brojevima u Gaussovoj ravnini.

Trenutno su ovi ishodi navedeni samo za višu razinu ispita iz matematike.

6.1 Pregled ispitnih rokova

Zadaci koji se nalaze na ispitu državne mature iz matematike podijeljeni su prema načinu rješavanja na tri tipa zadataka: zadatke višestrukog izbora, zadatke kratkog odgovora i zadatke produženog odgovora. Osim što će i ove godine biti na državnoj maturi, kompleksni brojevi su se i prije našli na ispitu matematike na državnoj maturi. Tako je primjerice za školsku godinu 2018./2019. na ljetnom roku zadan zadatak višestrukog izbora u kojemu se tražilo poznavanje trigonometrijskog zapisa kompleksnog broja i argumenta. Iako nema podataka o rješenosti konkretno ovog zadatka, aritmetička sredina rješenosti ispita matematike na ovom roku je iznosila 42.08%.
2019./2020. na ljetnom ispitnom roku se nalazi zadatak kratkog odgovora

9. Koliki je argument kompleksnoga broja $z = \frac{-i+1}{i}$?

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{3\pi}{2}$

D. $\frac{5\pi}{4}$

Slika 12: 9. zadatak na ljetnom ispitnom roku 2018. /2019.

vezan uz kompleksne brojeve. Maksimalni mogući broj bodova postignut iz ovog zadatka je bio 2. Prema statističkoj analizi NCVVO-a 47% pristupnika ovom roku ostvarilo je 0 bodova iz tog zadatka, 6% je ostvarilo 1 bod, a 7% 2 boda. 40% pristupnika nije odgovorilo na zadatak. Na ljetnom ispitnom roku

29. Riješite zadatke.

29.1. Kompleksni broj $z_1 = -5\sqrt{3} + 5i$ jedno je rješenje jednadžbe $z^3 = w$ gdje je w kompleksni broj. Napišite preostala dva rješenja te jednadžbe.

Slika 13: 29.1. zadatak na ljetnom ispitnom roku 2019. /2020.

2020./ 2021. su se pronašla tri zadatka, sva tri zadatka kratkog odgovora.

16. Riješite zadatke.

16.1. Riješite jednadžbu $(4x+1)^2 = (8x+3)(2x-1)-10$.

Odgovor: $x =$ ________________________

16.2. Odredite rješenja jednadžbe $x^4+35x^2-36=0$ koja **nisu** realni brojevi.

Odgovor: ________________________

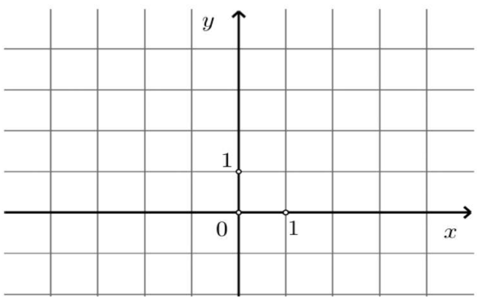
Slika 14: 16.2. zadatak na ljetnom ispitnom roku 2020. /2021. Maksimalno je bilo moguće ostvariti 1 bod. 53% pristupnika ostvarilo je 1 bod, 36% je ostvarilo 0 bodova, a 11% nije odgovorilo.

23. Riješite zadatke.

23.1. Izračunajte apsolutnu vrijednost kompleksnoga broja $w = \dfrac{2-i}{i^{2021}}$.

Odgovor: $|w| =$ ________________________

23.2. Prikažite u kompleksnoj ravnini skup svih kompleksnih brojeva $z = x + yi$ za koje vrijedi $\operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z = 0$.



Slika 15: 23.1. i 23.2. zadatak na ljetnom ispitnom roku 2020. /2021. Mogući maksimalan broj bodova oba zadatka je bio 1. 1 bod za 23.1. zadatak je ostvarilo 59% ispitanika, 0 bodova 27%, a nije odgovorilo 14%. 1 boz za 23.2. zadatak je ostvarilo 40%, 0 bodova 26%, a nije odgovorilo 34%.

Zaključak

Iako su otkriveni prije otprilike 170 godina kompleksne brojeve možemo i dalje smatrati relativno novim pojmom u matematici, a tako i u nastavi matematike. U nastavi matematike učenici se susreću sa četiri temeljna pojma vezana uz kompleksne brojeve. To su skup kompleksnih brojeva, računske operacije s kompleksnim brojevima, kompleksna ravnina i trigonometrijski zapis kompleksnog broja. Učenici, nakon procesa poučavanja kompleksnih brojeva, moraju znati provesti računske operacije s kompleksnim brojevima (u prikladnom zapisu) te ih moraju znati interpretirati u kompleksnoj ravnini. Kompleksni brojevi se u nastavu matematike uvode kao potpuno novi pojam, a osim u nastavi matematike nalaze se i na nacionalnom ispitu državne mature iz matematike, te je stoga važno kod učenika otkloniti sve moguće miskoncepcije koje mogu stvoriti o kompleksnim brojevima primjenjujući različite metode formativnog vrednovanja.

Literatura

[1] F. M. Bruckler, Povijest matematike 2, Sveučilište J. J. Strossmayera, Osijek, 2010.

[2] F. M. Bruckler, Povijest matematike 1, Sveučilište J. J. Strossmayera, Osijek, 2014.

[3] M. Hunjek, Vrednovanje kao strategija učenja matematike, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2015.

[4] D. Jukić, R. Scitovski, Matematika 1, Sveučilište J. J. Strossmayera, Osijek, 2017.

[5] I. Kladušić, Dijagnostičko vrednovanje u nastavi matematike, Sveučilište J. J. Strossmayera, Osijek, 2021.

[6] I. Matić, Lj. J. Matić, M. Zelčić, T. Srnec, M. Šujansky, T. Vukas, Ž. Dijanić, Matematika 4, udžbenik matematike u 4. razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[7] I. Matišić, Formativno vrednovanje u nastavi matematike, Sveučilište J. J. Strossmayera, Osijek, 2017.

[8] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2., Zagreb, 2019.

Sažetak

Kompleksni brojevi se uvode u 4. razredu srednje škole kao potpuno novi matematički pojam učenicima. Učenici se susreću s različitim pojmovima vezanim uz kompleksne brojeve tijekom svog školovanja, a njihovo reproduciranje znanja i vještina koje moraju steći iz tog područja je propisano kurikulumom nastavnog premdeta matematike. U nastavi s kompleksnim brojevima često dolazi do različitih miskoncepcija pa se stoga provode različite metode formativnog vrednovanja kako bi ih otklonili. Važno je otkloniti miskoncepcije koje učenici mogu izgraditi o kompleksnim brojevima jer, osim što se nalaze u nastavi matematike, također se nalaze i na nacionalnom ispitu državne mature iz matematike.

Ključne riječi: kompleksni broj, kompleksna ravnina, trigonometrijski zapis kompleksnog broja, miskoncepcije, formativno vrednovanje

Complex numbers in math class

Summary

Students are introduced to complex numbers as a completely new mathematical term in 4th grade of their secondary school. They are also introduced with different terms regarding complex numbers and their reproduction of knowledge and skills they need to acquire from that area is given by curriculum of maths. It can often come to different misconceptions while teaching complex numbers so therefore, various methods of formative evaluation are implemented to remove those misconceptions. It is very important to remove any misconceptions students can have about complex numbers, because not only are they part of math class, but also part of national math state graduate exam.

Keywords: complex number, complex plain, trigonometric notation of complex number, misconceptions, formative evaluation