Vizualizacija razlomaka i operacija s njima

Hegol, Marina

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski nastavnički studij matematike i informatike

Marina Hegol

Vizualizacija razlomaka i operacija s njima

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski nastavnički studij matematike i informatike

Marina Hegol

Vizualizacija razlomaka i operacija s njima

Diplomski rad

Mentorica: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2022.

Sadržaj

Uvod

Razlomci se počinju učiti u petom razredu i učenicima su najteži dio u osnovnoškolskoj nastavi matematike, predstavljaju im izazov jer ne razumiju koncepte razlomaka. U ovom ćemo se radu baviti vizualizacijom razlomaka i operacija s njima. Važno je u nastavi koristiti vizualne modele jer tada učenici bolje razumiju sadržaj. Razlomak se definira kao broj koji opisuje jedan ili više jednakih dijelova neke cjeline. Takva nam definicija razlomka omogućuje njegovu vizualizaciju dijeljenjem neke cjeline poput cijele čokolade ili torte na manje dijelove. Rad čini pet poglavlja koja su organizirana kako slijedi. U prvom ćemo poglavlju definirati skup racionalnih brojeva te navesti svojstva zbrajanja i množenja racionalnih brojeva. U drugom će poglavlju biti navedeni različiti zapisi razlomaka i modeli za rad s razlomcima, objasnit ćemo kako se razlomci uspoređuju te proširuju i skraćuju, a zatim opisati kako zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti razlomke. Također ćemo navesti najčešće greške koje učenici rade prilikom računanja s razlomcima. U trećem će poglavlju biti prikazano kako bismo mogli učenicima vizualizirati razlomke koristeći lego kockice i poster s razlomcima. U četvrtom ćemo poglavlju provesti analizu matematičkih udžbenika za peti i šesti razred osnovne škole, različitih nakladnika i godina izdanja, kako bismo istaknuli promjene u sadržaju i zadacima nastavne jedinice Razlomci.

1 Skup racionalnih brojeva

Rad ćemo započeti navodeći motivaciju za uvođenje skupa racionalnih brojeva te navodeći njegovu preciznu matematičku definiciju.

Kako operacija dijeljenja nije uvijek moguća na skupu cijelih brojeva, uveden je skup racionalnih brojeva.

Definicija 1. *Neka je* $\sim$ *relacija ekvivalencije na skupu* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ *definirana s* $(a, b) \sim (c, d)$ *ako i samo ako je* $ad = bc$. *Skup* $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \{0\} / \sim$ *nazivamo skupom racionalnih brojeva.*

Na skupu racionalnih brojeva možemo definirati zbrajanje $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bc)$ i množenje $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$. Operacije zbrajanja i množenja racionalnih brojeva definirane su pomoću zbrajanja i množenja cijelih brojeva.

Kažemo da je neprazan skup K polje ako na tom skupu imamo definirane dvije binarne operacije, zbrajanje i množenje

$$\begin{aligned} + \quad &: \quad K \times K \to K, \quad (a, b) \to a + b \\ \cdot \quad &: \quad K \times K \to K, \quad (a, b) \to a \cdot b, \end{aligned}$$

takve da vrijede sljedeća svojstva:

1. $\forall a, b, c \in K$ vrijedi $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asocijativnost zbrajanja),
2. $\exists! 0 \in K$ takav da $\forall a \in K$ vrijedi $0 + a = a + 0 = a$ (postojanje jedinstvenog neutralnog elementa za zbrajanje),
3. $\forall a \in K\ \exists! -a \in K$ takav da vrijedi $a + (-a) = -a + a = 0$ (postojanje jedinstvenog suprotnog elementa za zbrajanje),
4. $\forall a, b \in K$ vrijedi $a + b = b + a$ (komutativnost zbrajanja),
5. $\forall a, b, c \in K$ vrijedi $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asocijativnost množenja),
6. $\exists! 1 \in K$ takav da $\forall a \in K$ vrijedi $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ (postojanje jedinstvenog neutralnog elementa za množenje),
7. $\forall a \in K \backslash \{0\}\ \exists! a^{-1} = \frac{1}{a} \in K$ takav da vrijedi $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ (postojanje jedinstvenog inverznog elementa za množenje),
8. $\forall a, b \in K$ vrijedi $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativnost množenja),
9. $\forall a, b, c \in K$ vrijedi $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributivnost množenja prema zbrajanju).

Skup racionalnih brojeva sa zbrajanjem i množenjem čini polje.

2 Razlomci

2.1 Zapis razlomaka

Ponekad smo neoprezni s načinom na koji koristimo riječ razlomak i to može uzrokovati dodatne poteškoće u komunikaciji o ionako kompliciranoj temi. Mnogi ljudi pogrešno koriste izraze razlomak i racionalan broj kao sinonime.

Prvo što bi učenici trebali naučiti je pojam cjeline koju dijelimo na jednake dijelove, kako se zapisuju ti dijelovi te kako se nazivaju. Na primjer, $\frac{1}{2}$ čitamo jedna polovina, $\frac{1}{4}$ čitamo jedna četvrtina, $\frac{1}{8}$ čitamo jedna osmina, $\frac{1}{16}$ čitamo jedna šesnaestina itd.

Učenici upoznaju pojam *dio* od cjeline već u nižim razredima osnovne škole, ali i u svakodnevnom životu. Najlakše razumiju pojam polovine jer se cjelina dijeli na dva dijela jednakih veličina te u peti razred dolaze s vizualiziranim pojmom polovine od neke cjeline. Ukoliko trebaju međusobno podijeliti čokoladu tako da svi dobiju jednaki dio, vrlo brzo će shvatiti na koliko dijelova trebaju podijeliti cijelu čokoladu.

U osnovnoj školi, učenici se upoznaju sa sljedećom definicijom razlomka.

Definicija 2. *Razlomak je broj koji opisuje jedan ili više jednakih dijelova cjeline.*

Broj koji pišemo iznad razlomačke crte naziva se brojnik, a broj koji pišemo ispod crte naziva se nazivnik. Brojnik je određen brojem jednakih dijelova koje promatramo, a nazivnik razlomka pokazuje na koliko jednakih dijelova dijelimo cjelinu. Način na koji bilježimo razlomke s gornjim i donjim brojem, te crtom između je arbitražni dogovor za predstavljanje razlomaka:

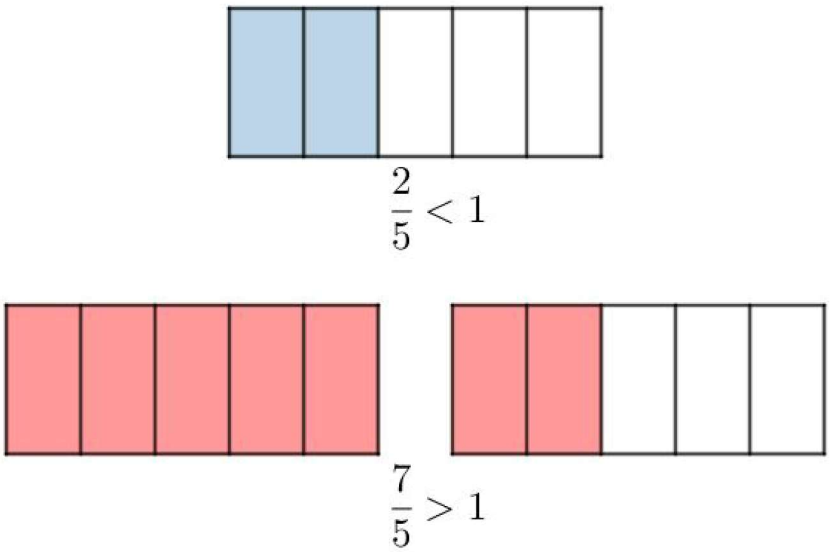
1. pravi razlomak (simbolički i riječima),
2. nepravi razlomak,
3. decimalni broj,
4. omjer,
5. kvocijent,
6. postotak,
7. promil,
8. mjerilo.

Razlomke dakle možemo zapisivati na različite načine, poput $\frac{2}{5},\ \frac{5}{2},\ 2\frac{1}{2},\ \frac{0}{5},\ 2.5,\ 2:5,\ 40\%$.

Redoslijed brojeva u zapisu razlomka je važan u što se učenici mogu jednostavno uvjeriti prikažu li na primjer razlomke $\frac{2}{5}$ i $\frac{5}{2}$ pomoću nekog modela. Nula se može pojaviti u brojniku, ali ne i u nazivniku budući da dijeljenje nulom nije definirano, odnosno cjelinu ne možemo podijeliti na nula dijelova.

Ako je brojnik manji od nazivnika, onda je razlomak manji od 1 i tada se razlomak naziva pravi razlomak. Ako je brojnik veći od nazivnika, onda je razlomak veći od 1 i tada se takav razlomak naziva nepravi razlomak. Ako su brojnik i nazivnik jednaki, razlomak je jednak broju 1. Broj zapisan pomoću prirodnog broja i pravog razlomka naziva se mješoviti broj. Svaki se mješoviti broj može napisati u obliku nepravog razlomka.

Na slici možemo vidjeti tri pravokutnika. Svaki je pravokutnik podijeljen na pet jednakih dijelova. Prvi pravokutnik prikazuje pravi razlomak, a druga dva pravokutnika prikazuju nepravi razlomak.

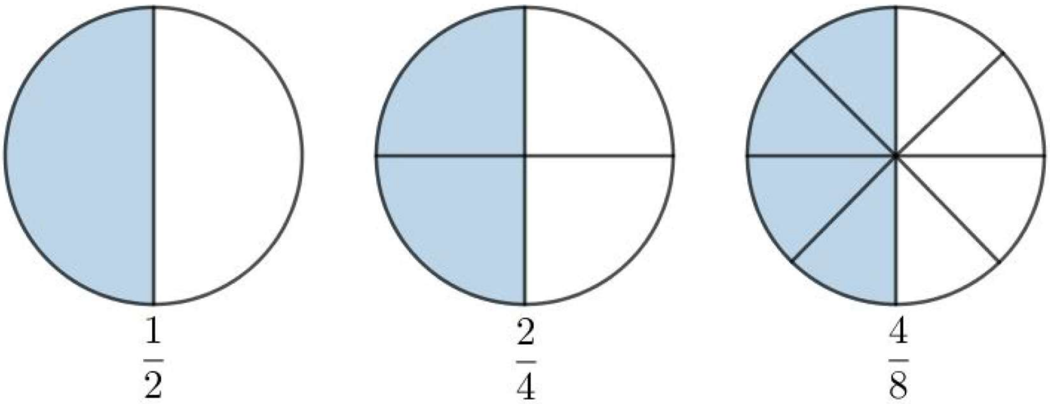


Slika 1: Vizualizacija pravog i nepravog razlomka

Količnik brojeva a i b, $b \neq 0$ nazivamo još i omjerom tih brojeva i zapisujemo $a : b$ te čitamo *a naprema b*. Vrijedi $a : b = \frac{a}{b}$.

Svi se racionalni brojevi mogu zapisati u obliku razlomka. Brojevi $\frac{2}{5}, \frac{2.2}{5.2}, \frac{\sqrt{9}}{5}$ zapisani su u obliku razlomka i racionalni su brojevi. No, nisu svi brojevi zapisani u obliku razlomka racionalni brojevi. Brojevi $\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ zapisani su u obliku razlomka, ali nisu racionalni brojevi jer brojnici tih razlomaka nisu racionalni brojevi. Ako se u nazivniku razlomka nalazi korijen broja koji nije cijeli broj, tj. iracionalan broj, razlomak je potrebno racionalizirati, tj. pomnožiti i brojnik i nazivnik pogodno odabranim brojem tako da se ukloni drugi korijen u nazivniku tog razlomka.

Racionalni broj nema jedinstven zapis u obliku razlomka, na primjer razlomci $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ i $\frac{4}{8}$ predstavljaju isti racionalni broj. Stoga kažemo da su razlomci međusobno ekvivalentni, odnosno određuju jednake dijelove cjeline. Na sljedećoj slici možemo vidjeti tri sukladna kruga. Lijevo je prikazana polovina kruga, u sredini dvije četvrtine kruga i desno četiri osmine kruga.



Slika 2: Vizualizacija ekvivalentnih razlomaka

Dekadski ili decimalni razlomak je razlomak kojemu je u nazivniku dekadska jedinica. Navedimo nekoliko primjera: $\frac{8}{10}$, $\frac{25}{100}$, $\frac{777}{1000}$.

Svaki se dekadski razlomak može napisati na jednostavniji način kao decimalni broj. Decimalni se broj sastoji od cijelog i decimalnog dijela, međusobno odvojenih decimalnom točkom, pri čemu znamenke desno od decimalne točke nazivamo decimale.

Dekadski razlomak u svom decimalnom zapisu ima onoliko decimala koliko nazivnik tog razlomka ima znamenaka nula.

Decimalni broj pišemo u obliku razlomka tako da u brojnik napišemo broj bez decimalne točke, a u nazivnik dekadsku jedinicu s onoliko nula koliko decimalni broj ima decimala. Na primjer, broj 2.5 možemo zapisati u obliku razlomka kao $\frac{25}{10}$, no beskonačne decimalne brojeve ne možemo na taj način zapisati u obliku razlomka. U idućem ćemo primjeru pokazati na koji način možemo, a u potpoglavlju 2.3 prikazat ćemo vizualizaciju broja $0.7777777\ldots$ na brojevnom pravcu.

Primjer 1. *Zapišite broj* $0.7777777\ldots$ *u obliku razlomka.*
Stavimo $x = 0.7777777\ldots$.
Pomnožimo li lijevu i desnu stranu jednadžbe s 10 *dobijemo* $10x = 7.7777777\ldots$
Vrijedi $10x = 7 + 0.7777777\ldots$,
odnosno $10x = 7 + x$ *te sada lako izračunamo da je* $x = \frac{7}{9}$.

Ako se u beskonačnom decimalnom zapisu ponavlja jedna znamenka, iznad nje pišemo točkicu, a ako se ponavlja više znamenaka, pišemo točkicu iznad prve i zadnje znamenke koja se ponavlja ili crticu iznad svih znamenaka koje se ponavljaju.

Razlomak s nazivnikom 100 naziva se postotak, a razlomak s nazivnikom 1000 naziva se promil. Zapisujemo ih na sljedeći način

$$\begin{aligned} 1\% &= \frac{1}{100}, \\ 1‰ &= \frac{1}{1000}. \end{aligned}$$

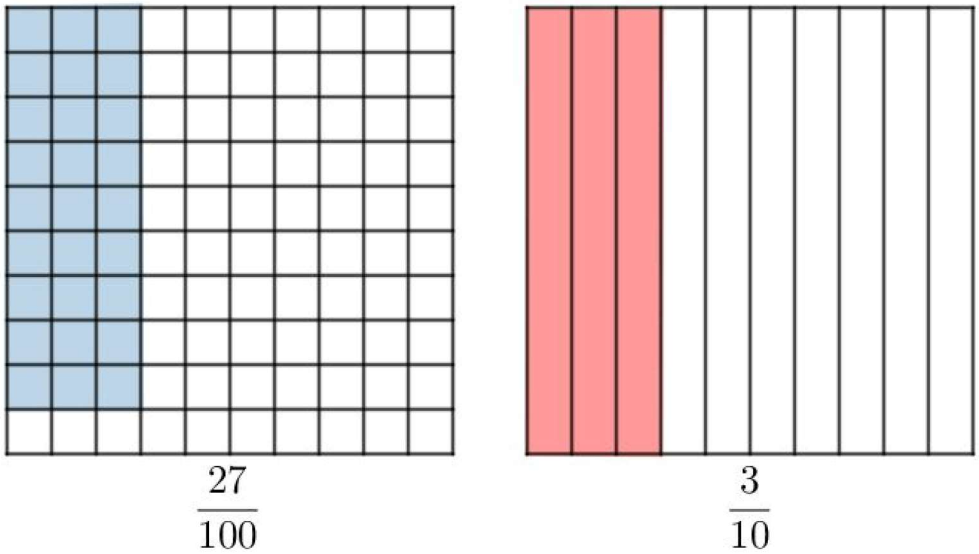
Konačni decimalni brojevi i beskonačni decimalni brojevi kojima se znamenke ponavljaju su racionalni brojevi, a beskonačni decimalni brojevi kojima se znamenke ne ponavljaju nisu racionalni brojevi, nego iracionalni brojevi.

Ključni elementi koje učenici trebaju usvojiti prilikom obrade nastavne cjeline Razlomci u petom razredu su sljedeći:

1. razumijevanje pojma razlomka i njegove primjene,
2. shvaćanje razlomka kao kvocijenta dva prirodna broja,
3. zapis razlomka,
4. usvajanje pojmova brojnik i nazivnik te njihovo značenje,
5. nazivnik ne smije biti nula,
6. ako je brojnik djeljiv nazivnikom, razlomak prikazuje prirodan broj,
7. ako je nazivnik jednak jedan, razlomak prikazuje prirodan broj,
8. svaki se prirodan broj može zapisati kao razlomak,
9. isti broj se može zapisati u obliku razlomka na različite načine.

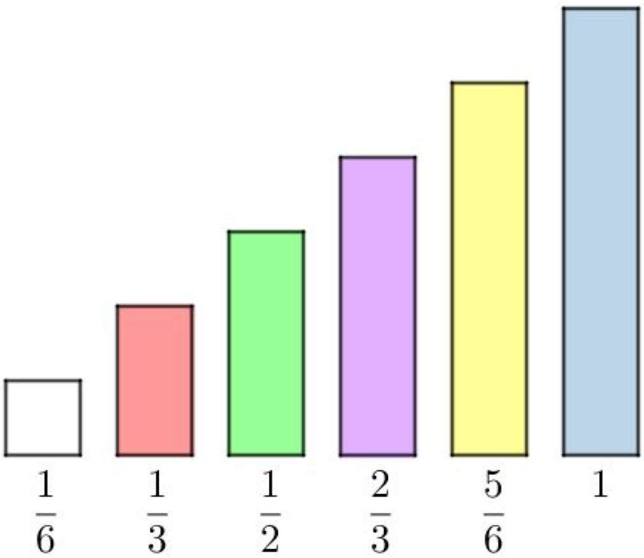
2.2 Modeli za rad s razlomcima

Učenici bolje razumiju sadržaj nastavne cjeline ako nastavnici u nastavi koriste vizualne modele za pojmove koji se uvode. Kako se razlomak definira kao dio cjeline, za vizualne modele pri obradi ovog pojma imamo šarolik izbor. Prvi model koji ćemo spomenuti je jedinični kvadrat koji je podijeljen na sto kvadratića (deset redaka i deset stupaca). Ovaj je model odličan za učenje razlomaka jer omogućava učenicima da obojaju određeni dio cjeline i time si vizualiziraju pojam razlomka. Jedinični kvadrat možemo podijeliti i na manje dijelova. Ako je potrebno obojati na primjer tri desetine kvadrata, mogli bismo kvadrat podijeliti na deset sukladnih pravokutnika. Na idućoj slici možemo vidjeti primjere.

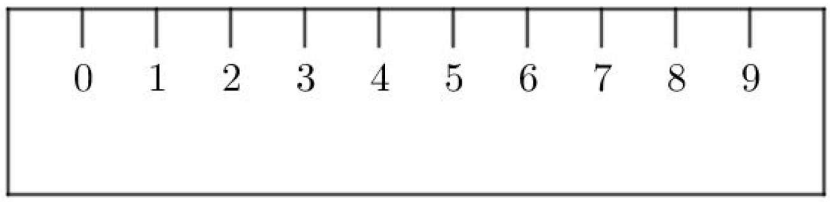


Slika 3: Vizualizacija razlomaka modelom kvadrata

Učenicima je za učenje razlomaka vrlo važno koristiti različite, prikladne modele kao što su modeli površine i modeli duljine kojima se lakše mogu usvojiti dijelovi cjeline Razlomci. Linearni modeli pokazuju učenicima da između bilo koja dva razlomka postoji još jedan. Modelima duljine se umjesto površina uspoređuju mjere i duljine. Modeli duljine su mjerni instrumenti, presavijene trake papira i Cuisenaire štapići.

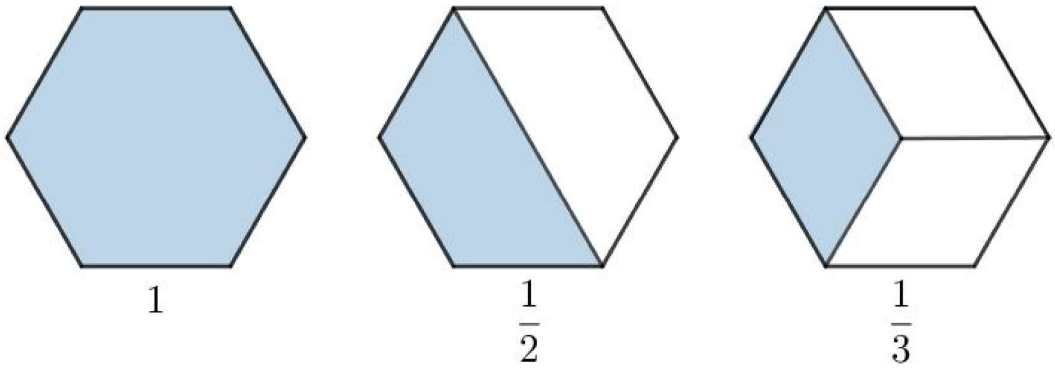


Slika 4: Primjer Cuisenaire štapića



Slika 5: Primjer mjernog instrumenta

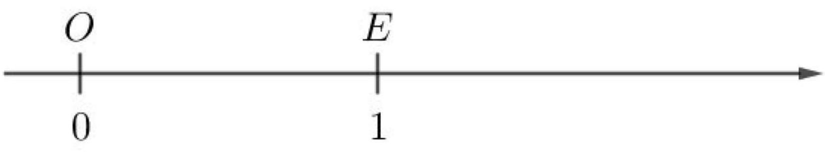
Prostorni modeli su pravokutni i kružni modeli, presavijeni papiri i uzorački dijelovi. Prostorni modeli pomažu učenicima da sagledaju dijelove cjeline, pri čemu su najčešće korišteni krugovi. Krug je jednostavno pojmiti kao cjelinu, ali ga je teško dijeliti. S druge strane, pravokutnik je jednostavno dijeliti, ali ga je teže pojmiti kao cjelinu. Trokut je teško dijeliti i teško je shvatiti predstavlja li cjelinu.



Slika 6: Primjer uzoračkih modela

2.3 Brojevni pravac

Nacrtajmo pravac i na njemu odaberimo dvije različite točke O i E. Lijevoj točki pridružimo broj 0, a desnoj točki pridružimo broj 1. Tako dobivena dužina $\overline{OE}$ naziva se jedinična dužina. Točka O je ishodište, a točka E je jedinična točka brojevnog pravca.

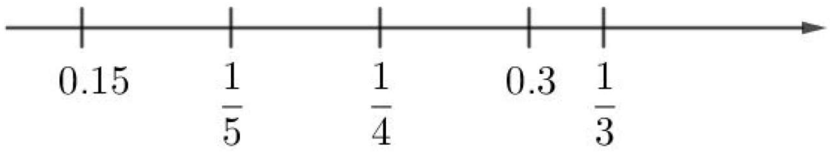


Slika 7: Brojevni pravac

Označavanjem jedinične dužine jednoznačno smo odredili položaj točaka kojima redom pridružujemo ostale prirodne brojeve. Položaj tih točaka nalazimo prenošenjem jedinične dužine desno od ishodišta.

Ukoliko bismo htjeli prikazati bilo koji razlomak $\frac{a}{b}$ na brojevnom pravcu, jediničnu ćemo dužinu $\overline{OE}$ odabrati tako da udaljenost ishodišta i jedinične točke možemo jednostavno podijeliti na b jednakih dijelova, a zatim ćemo dobiveni dio jedinične dužine prenositi a puta udesno od ishodišta.

Brojevni je pravac najučinkovitiji za učenje razlomaka. On uči da između bilo koja dva razlomka postoji još jedan. Učenicima to možemo pojasniti na sljedećem primjeru. Između prirodnih brojeva 3 i 5 nalazi se samo jedan prirodan broj. Učenicima tada možemo postaviti pitanja: "Ima li razlomaka koji se nalaze između brojeva $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{5}$? Koliko je takvih brojeva te kako bismo ih mogli odrediti?" Učenicima petog razreda odgovori na ova pitanja nisu očita i laka, ali bi do njih mogli doći na nekoliko načina. Pogledajmo na primjer brojeve $\frac{3}{7}$ i $\frac{5}{7}$. Primijetimo da se između tih brojeva svakako nalazi broj $\frac{4}{7}$, što možemo zapisati na sljedeći način: $\frac{3}{7} < \frac{4}{7} < \frac{5}{7}$, odnosno broj $\frac{4}{7}$ jednako je udaljen od broja $\frac{3}{7}$ i $\frac{5}{7}$. Također broj $\frac{4}{7}$ je aritmetička sredina brojeva $\frac{3}{7}$ i $\frac{5}{7}$. Nakon prikazanog postupka zaključivanja, učenici često pomisle da se tada broj $\frac{1}{4}$ nalazi na sredini između brojeva $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{5}$. Broj $\frac{1}{4}$ nalazi se između brojeva $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{5}$, ali nije njihova aritmetička sredina.



Slika 8: Vizualizacija razlomaka na brojevnom pravcu

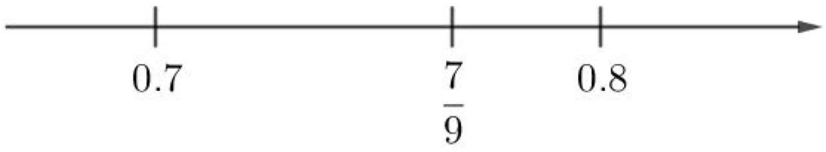
Suma se dvaju razlomaka uvijek može podijeliti s brojem 2 što znači da za svaka dva razlomka postoji razlomak koji je njihova aritmetička sredina pa smo pokazali da između bilo koja dva razlomka postoji još (barem) jedan. Postoji broj koji je aritmetička sredina dvaju razlomaka, ali postoji i broj koji je aritmetička sredina početnog broja i te aritmetičke sredine. Kako ovaj postupak nema kraja, možemo zaključiti da između bilo koja dva razlomka postoji beskonačno mnogo razlomaka. Ovo ćemo svojstvo iskazati u idućoj propoziciji.

Propozicija 1. *Za svaka dva racionalna broja postoji broj koji je između njih, tj.*

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q},\ q_1 < q_2,\ \exists q \in \mathbb{Q} \text{ takav da } q_1 < q < q_2.$$

$\mathbb{Q}$ *je gust skup.*

Pogledajmo sada kako bismo na brojevnom pravcu prikazali beskonačan decimalan broj $0.7777777\ldots$. Taj se broj nalazi između decimalnih brojeva 0.7 i 0.8, bliže broju 0.8.

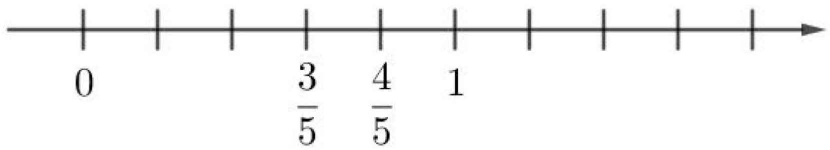


Slika 9: Vizualizacija beskonačnog decimalnog broja

2.4 Uspoređivanje razlomaka

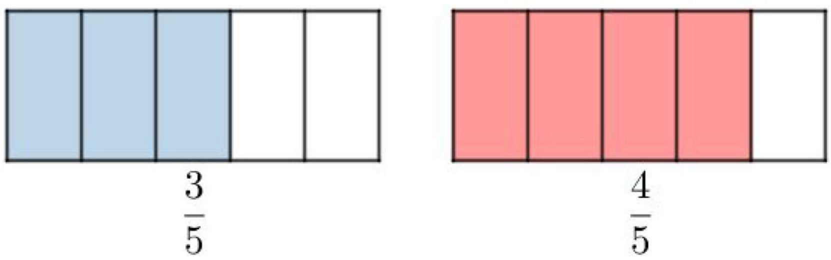
Brojevni nam pravac omogućava uspoređivanje razlomaka jednakih nazivnika i razlomaka jednakih brojnika. Pogledajmo to na idućem primjeru.

Primjer 2. *Usporedimo razlomke* $\frac{3}{5}$ *i* $\frac{4}{5}$ *te razlomke* $\frac{3}{5}$ *i* $\frac{3}{10}$.
Prikažimo razlomke $\frac{3}{5}$ *i* $\frac{4}{5}$ *na brojevnom pravcu.*



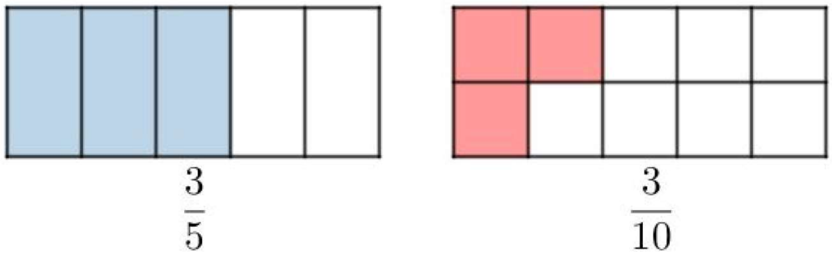
Slika 10: Uspoređivanje razlomaka jednakih nazivnika na brojevnom pravcu

Točka pridružena razlomku $\frac{4}{5}$ *nalazi se desno od točke pridružene razlomku* $\frac{3}{5}$, *što znači da je* $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$. *Isti zaključak možemo potkrijepiti i grafički, prikazujući zadane razlomke kao dijelove jednakih objekata (na primjer sukladnih pravokutnika), odnosno koristeći model površine.*



Slika 11: Uspoređivanje razlomaka jednakih nazivnika modelom površine

I na primjeru modela površine lako zaključujemo da vrijedi $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$.
Prikažimo sada grafički razlomke $\frac{3}{5}$ *i* $\frac{3}{10}$ *te ih usporedimo.*



Slika 12: Uspoređivanje razlomaka jednakih brojnika modelom površine

Iz slike lako uočavamo da vrijedi $\frac{3}{10} < \frac{3}{5}$.

Na temelju bismo ovih primjera mogli zaključiti da je od dvaju razlomaka jednakih nazivnika veći onaj koji ima veći brojnik te da je od dvaju razlomaka jednakih brojnika veći onaj koji ima manji nazivnik.

Najvažnije referentne točke za razlomke su $0,\ 1,\ \frac{1}{2}$. Ukoliko razlomci koje uspoređujemo imaju jednake nazivnike, tada promatramo brojnike, odnosno broj dijelova. Ukoliko razlomci koje uspoređujemo imaju jednake brojnike, tada promatramo nazivnike, odnosno veličine dijelova.

Razlomke različitog zapisa možemo usporediti tako da ih zapišemo u istom obliku ili zaključivanjem o vrijednosti tih razlomaka. Možemo ih usporediti s $0,\ 1$ ili $\frac{1}{2}$ te zaključiti kakav je njihov međusoban odnos.

Iduću aktivnost možemo zadati učenicima kako bismo provjerili razumijevanje postupka uspoređivanja razlomaka.

Primjer 3. *Za dane parove razlomaka, odredite koji je razlomak veći te objasnite zašto. Nemojte koristiti svođenje na zajednički nazivnik niti unakrsno množenje.*

a) $\frac{3}{4}$ *ili* $\frac{3}{8}$,

b) $\frac{6}{7}$ *ili* $\frac{5}{7}$,

c) $\frac{7}{8}$ *ili* $\frac{9}{10}$.

Kako su u a) i b) dijelu zadatku dani razlomci jednakih brojnika, odnosno jednakih nazivnika, učenici bi mogli usporediti razlomke koristeći brojevni pravac ili grafički model. Veći bi broj učenika imao problema s uspoređivanjem razlomaka iz c) dijela zadatka. Učenici bi mogli razlomke svesti na zajednički nazivnik te ih usporediti na jedan od prethodno navedenih načina.

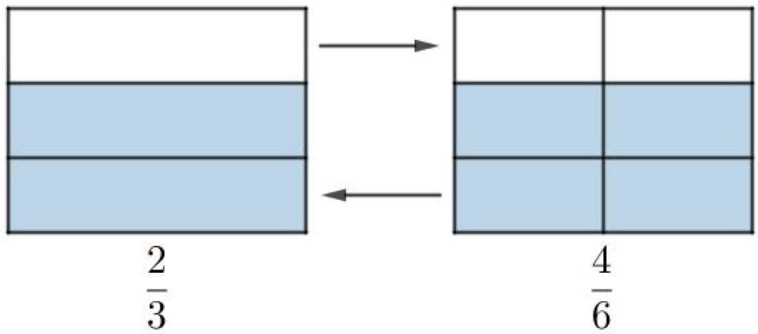
Pogrešne učeničke strategije koje se javljaju prilikom uspoređivanja razlomaka su sljedeće: veći nazivnik znači veći razlomak, manji nazivnik znači veći razlomak, veći brojnik znači veći razlomak, odvojeno poimanje brojnika i nazivnika, tj. smatranje brojnika i nazivnika zasebnim brojevima koji se zasebno i uspoređuju.

2.5 Proširivanje i skraćivanje razlomaka

Razlomak se proširuje tako da se brojnik i nazivnik pomnože istim prirodnim brojem. Prošireni razlomak jednak je početnom razlomku.

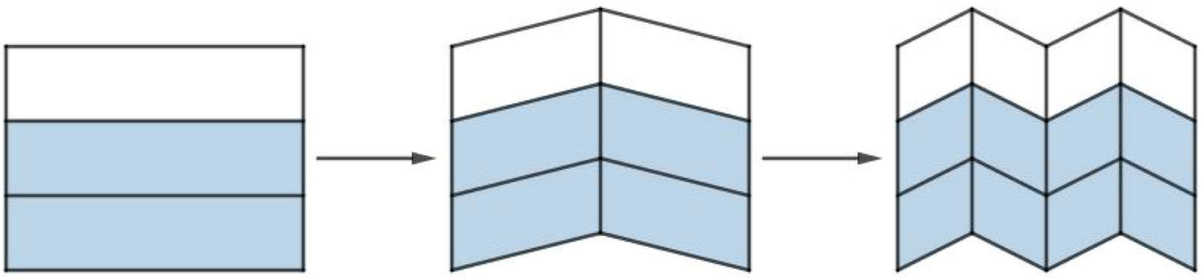
Razlomak se skraćuje tako da se brojnik i nazivnik podijele istim prirodnim brojem. Taj broj stoga mora biti njihov zajednički djelitelj. Skraćeni razlomak vrijednosno je jednak početnom. Razlomak se može skraćivati i više puta dok postoji zajednički djelitelj brojnika i nazivnika (različit od 1). Razlomak koji se više ne može skratiti naziva se neskrativi razlomak. Razlomak koji se može skratiti naziva se skrativi razlomak. Što su veći brojevi kojima skraćujemo, to je skraćivanje do neskrativog razlomka brže.

Osnovna ideja proširivanja i skraćivanja razlomaka:



Slika 13: Profinjenje i ukrupnjavanje podjele

Kako bismo to učenicima mogli pokazati? Uzmemo komad papira i počnemo ga presavijati po pola.



Slika 14: Presavijanje papira

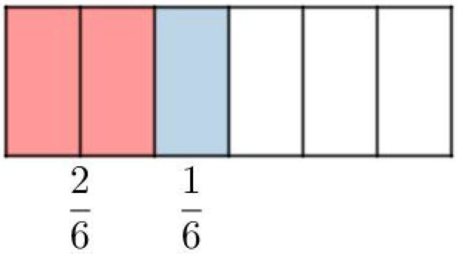
Obojana površina najprije iznosi $\frac{2}{3}$, zatim $\frac{4}{6}$ i na kraju $\frac{8}{12}$ ukupne površine papira.

Pojmovi proširivanja i skraćivanja u svakodnevnom se jeziku razlikuju od matematičkog jezika. U svakodnevnom životu s pojmom proširivanja povezujemo ideju širenja, a s pojmom skraćivanja povezujemo ideju smanjenja. No, u matematici, iako se skraćivanjem i proširivanjem mijenja izgled razlomka, vrijednost razlomka ostaje nepromijenjena.

2.6 Zbrajanje i oduzimanje razlomaka

Zbrajanje razlomaka istih nazivnika bismo mogli poučavati koristeći model pravokutnika. Idući bi primjer nastavnici mogli dati učenicima kako bi samostalno zaključili o zbroju i razlici razlomaka jednakih nazivnika.

Primjer 4. *Dječak i djevojčica su podijelili čokoladu na šest jednakih dijelova. Dječak je pojeo dva komada, a djevojčica samo jedan. Koliki je dio čokolade pojeo dječak, a koliki djevojčica? Osjenčajte te dijelove na modelu čokolade (pravokutnika) različitim bojama. Kako određujemo ukupan dio pojedene čokolade? Kako određujemo ukupan dio čokolade koji nije pojeden? Što možete zaključiti o zbroju i razlici dva razlomka s istim nazivnicima?*



Slika 15: Dijelovi čokolade koje su pojeli dječak i djevojčica

Učenici bi mogli zaključiti da su od šest dijelova čokolade dječak i djevojčica zajedno pojeli $\frac{2}{6} + \frac{1}{6}$ *čokolade. No, do rješenja bi mogli doći i tako da od površine cijelog pravokutnika oduzmu površinu koja predstavlja dio čokolade koji su dječak i djevojčica zajedno pojeli.*

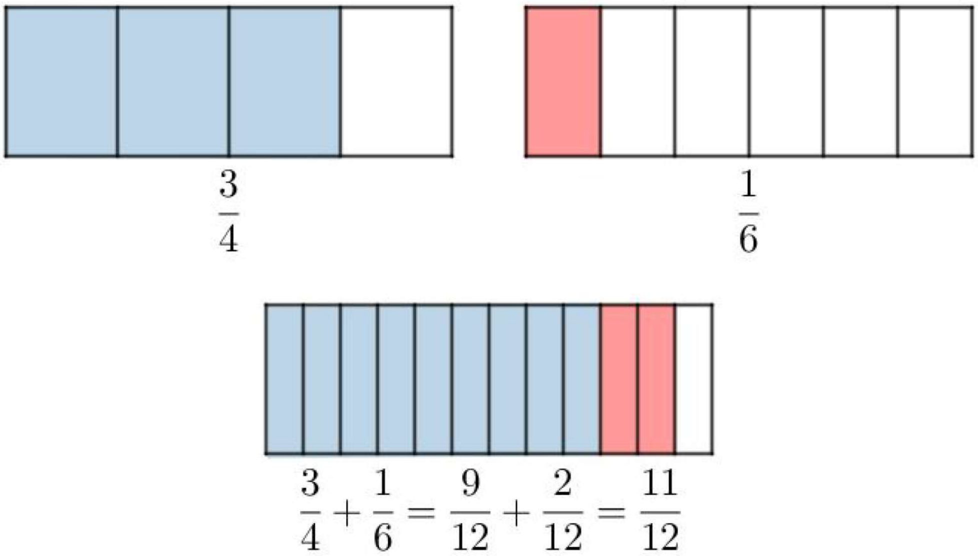
Razlomke jednakih nazivnika zbrajamo tako da brojnike zbrojimo, a nazivnik prepišemo, tj.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

Razlomke jednakih nazivnika oduzimamo tako da oduzmemo brojnik od brojnika, a nazivnik prepišemo, tj.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

Razlomke različitih nazivnika zbrajamo tako da ih proširivanjem svedemo na zajednički nazivnik, zatim brojnike zbrojimo, a nazivnik prepišemo. Razlomke različitih nazivnika oduzimamo tako da ih proširivanjem svedemo na zajednički nazivnik, zatim oduzmemo brojnik od brojnika, a nazivnik prepišemo. Na idućoj slici vidimo kako bismo učenicima mogli prikazati zbrajanje razlomaka različitih nazivnika. Za primjer smo uzeli brojeve $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{6}$.

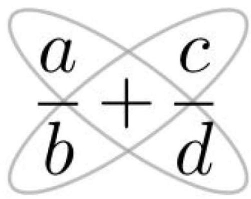


Slika 16: Vizualizacija zbrajanja razlomaka različitih nazivnika

Nakon što zbrojimo odnosno oduzmemo razlomke, ako je moguće rezultat moramo skratiti do neskrativog razlomka, tj. razlomka čiji su brojnik i nazivnik relativno prosti brojevi te ga zapisati u obliku mješovitog ili prirodnog broja.

Još jedan odličan model za zbrajanje i oduzimanje razlomaka je krug jer učenici mogu razviti mentalne slike veličina različitih dijelova kruga. Brojevni pravac, iako zahtjevniji od modela kruga, također može pomoći pri zbrajanju ili oduzimanju razlomaka bez pronalaženja zajedničkog nazivnika. Na primjer, ukoliko bi htjeli zbrojiti $5\frac{1}{2}$ i $3\frac{1}{2}$, učenici bi na brojevnom pravcu prvo morali pronaći vrijednost jednog razlomka, a zatim se pomaknuti u desno za vrijednost drugog razlomka.

Zadnji model za zbrajanje i oduzimanje razlomaka koji ćemo spomenuti je model leptira. Ovaj model ne odnosi se na vizualizaciju samih razlomaka, nego na lako pamtljivu mentalnu sliku postupaka zbrajanja, odnosno oduzimanja razlomaka. Pri tome učenici mogu na ovaj način zapamtiti postupak računanja zbroja, odnosno razlike dva razlomka i točno ga provesti, ali da zapravo ne znaju prikazati zbroj, odnosno razliku tih razlomaka pomoću ranije predstavljenih modela.



Slika 17: Zbrajanje razlomaka modelom leptira

Brojnik zbroja dobijemo tako da pomnožimo brojeve unutar svakog od krila leptira te dobivene umnoške zbrojimo, a nazivnik dobijemo tako da pomnožimo nazivnike pribrojnika. Analognim postupkom možemo izračunati razliku dva razlomka.

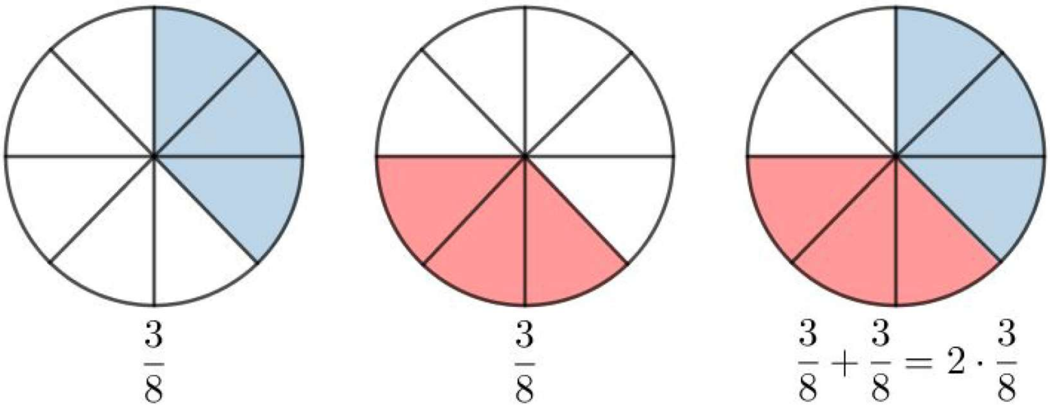
Navedimo najčešće učeničke pogreške prilikom zbrajanja i oduzimanja razlomaka:

1. zbrajanje brojnika s brojnikom, nazivnika s nazivnikom
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d},$$
2. oduzimanje brojnik od brojnika, nazivnik od nazivnika
$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d},$$
3. zbrajanje prirodnog broja i razlomka kao da se zbrajaju razlomci jednakih nazivnika
$$n+\frac{a}{b}=\frac{n+a}{b},$$
4. oduzimanje prirodnog broja i razlomka kao da se oduzimaju razlomci jednakih nazivnika
$$n-\frac{a}{b}=\frac{n-a}{b},$$
5. ispravno određivanje zajedničkog nazivnika, ali ne i brojnika
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b\cdot d},$$
6. množenje umjesto zbrajanja
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

2.7 Množenje razlomaka

Prije nego započnu s koracima množenja razlomaka, neophodno je da učenici razviju konceptualno razumijevanje množenja razlomaka. Učenici bi trebali moći vizualizirati množenje i znati što znači pomnožiti razlomak s prirodnim brojem ili razlomkom.

Učenicima bismo mogli množenje prirodnog broja i razlomka predočiti koristeći model kruga. Na primjer, obojamo tri osmine jednog kruga i tri osmine drugog kruga. Njihov je zbroj jednak dvostrukoj vrijednosti jednog razlomka, tj. mogli bismo zapisati $\frac{3}{8} + \frac{3}{8}$ $= 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$.



Slika 18: Vizualizacija množenja prirodnog broja i razlomka

Prirodan broj n i razlomak množimo tako da brojnik pomnožimo tim prirodnim brojem, a nazivnik prepišemo, odnosno mogli bismo reći da ćemo razlomak zbrojiti samim sobom n puta, tj.

$$n \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots + \frac{a}{b} = \frac{a + a + \ldots + a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}.$$

Učenicima je prilično teško razumjeti primjenu množenja dvaju razlomaka, no mi im možemo pomoći da vizualiziraju ovaj koncept kroz sljedeću zanimljivu i jednostavnu aktivnost savijanja papira koju možemo vidjeti na slici 18. Uzmimo za primjer razlomke $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$. Učenici bi trebali slijediti ove korake:

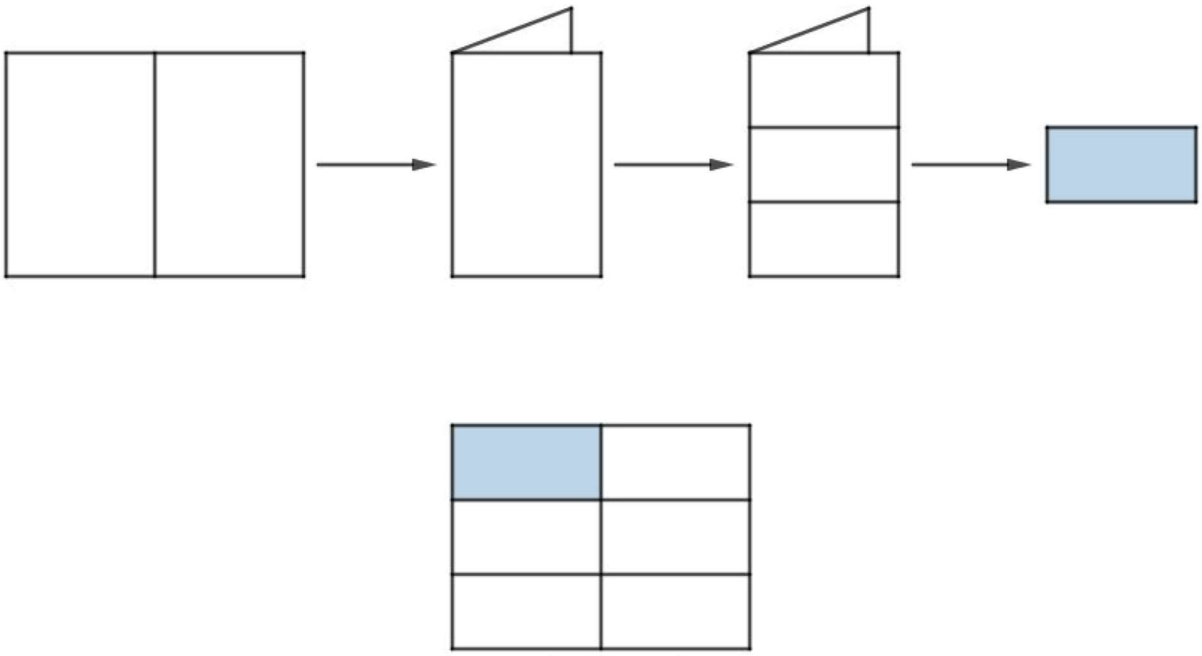
1. uzmite pravokutni list papira i presavijte ga na pola,

2. preklopite polovicu na tri jednaka dijela,

3. obojite jednu od presavijenih strana tako da vidite jednu trećinu polovice,

4. ponovno otvorite list,

5. odredite koji dio cjeline predstavlja osjenčani dio.



$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Slika 19: Aktivnost presavijanja papira za razumijevanje množenja razlomaka

Razlomak množimo razlomkom tako da brojnik pomnožimo brojnikom, a nazivnik nazivnikom, tj.

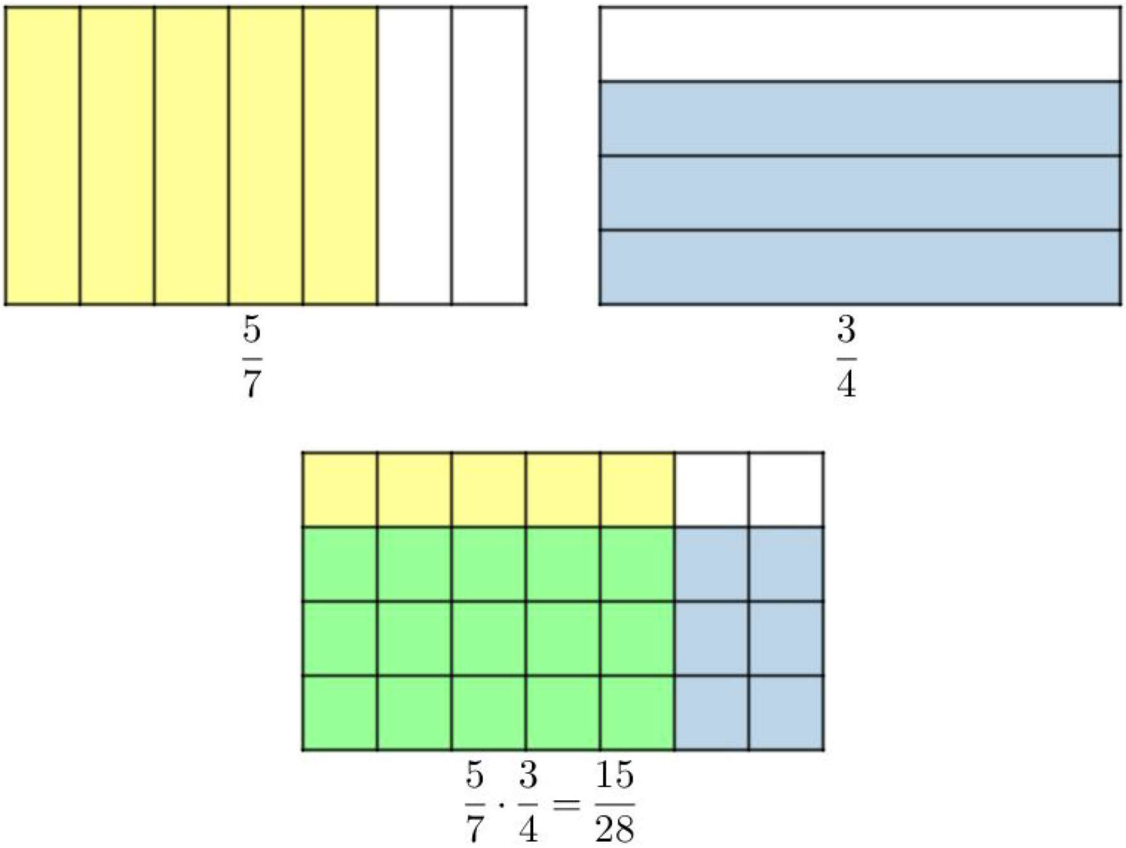
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Ako množimo dva razlomka kod kojih je brojnik prvog razlomka jednak nazivniku drugog, a nazivnik prvog jednak brojniku drugog, umnožak je uvijek jednak broju 1. Za dva broja, čiji je umnožak jednak 1, kažemo da su recipročni brojevi, tj.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Recipročan broj broja 1 je broj 1, pa kažemo da je broj 1 recipročan sam sebi. Broj 0 nema recipročnog broja i nije recipročan broj niti jednom broju.

Pokažimo sada na primjeru kako modelirati dva razlomka u jednom modelu. Neka to budu $\frac{5}{7}$ i $\frac{3}{4}$. Potrebno je nacrtati jedan pravokutnik, podijeliti ga jednakim horizontalnim dužinama na onoliko sukladnih pravokutnika koliki je nazivnik prvog razlomka i obojati dijelove koji predstavljaju prvi razlomak. Zatim je potrebno nacrtati isti model, podijeliti ga jednakim vertikalnim dužinama na onoliko sukladnih pravokutnika koliki je nazivnik drugog razlomka i obojati dijelove koji predstavljaju drugi razlomak. Traženi se umnožak nalazi u sjecištu tih dviju obojanih površina.



Slika 20: Vizualizacija množenja razlomka razlomkom

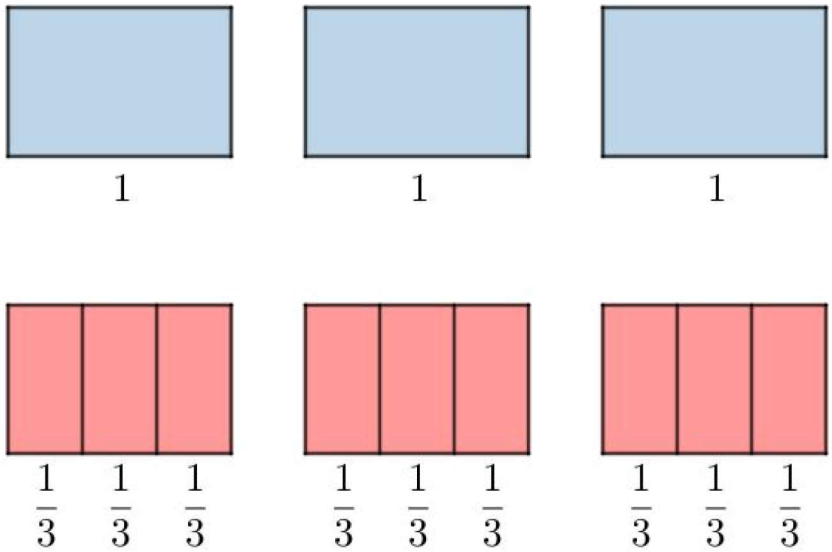
Navedimo najčešće učeničke pogreške prilikom množenja razlomaka:

1. unakrsno množenje
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c},$$
2. ispravno množenje različitih brojnika, ali ne i jednakih nazivnika
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b},$$
3. ispravno množenje različitih brojnika, ali ne i jednakih nazivnika
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b + b},$$
4. množenje i brojnika i nazivnika prirodnim brojem
$$n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b},$$
5. ispravno množenje različitih nazivnika, ali ne i jednakih brojnika
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c} = \frac{a}{b \cdot c}.$$

2.8 Dijeljenje razlomaka

Operaciju dijeljenja prirodnog broja razlomkom bismo učenicima mogli predstaviti idućim primjerom.

Primjer 5. *Dječak želi tri litre vode pretočiti u boce od $\frac{1}{3}$ litara. Koliko mu je boca potrebno?*
Učenici bi si mogli vizualizirati tri boce pomoću tri sukladna pravokutnika, u svakoj boci po jedna litra vode. Za jednu su litru dječaku potrebne tri boce, što znači da mu je za tri litre potrebno devet boca.



$$3 : \frac{1}{3} = 9$$

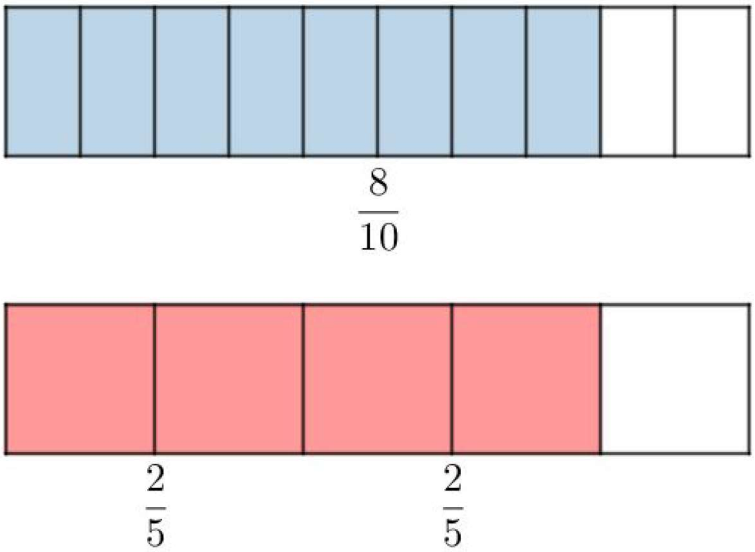
Slika 21: Vizualizacija dijeljenja prirodnog broja i razlomka

Prirodan broj dijelimo razlomkom tako da ga pomnožimo recipročnim brojem razlomka, tj.

$$n : \frac{a}{b} = n \cdot \frac{b}{a} = \frac{n \cdot b}{a}.$$

Operaciju dijeljenja razlomka razlomkom bismo učenicima mogli predstaviti idućim primjerom.

Primjer 6. *Dječak želi $\frac{8}{10}$ litara vode pretočiti u boce od $\frac{2}{5}$ litara. Koliko mu je boca potrebno?*
U jednu bocu dječak može pretočiti $\frac{4}{10}$ litara vode jer je $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ pa će mu za $\frac{8}{10}$ litara vode biti potrebne dvije boce.



$$\frac{8}{10} : \frac{2}{5} = 2$$

Slika 22: Vizualizacija dijeljenja razlomka razlomkom

Razlomak dijelimo razlomkom tako da djeljenik pomnožimo recipročnim brojem djelitelja, tj.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

2.9 Primjena računanja s razlomcima

U ovom ćemo potpoglavlju navesti nekoliko primjera primjerenih učenicima petog razreda osnovne škole u kojima se mora primijeniti računanje s razlomcima. Razlomcima često prikazujemo dio cjeline izražene mjernom jedinicom. Pri rješavanju zadataka najprije trebamo procijeniti rješenje, zatim riješiti te nakraju provjeriti je li naš rezultat smislen. Navedimo primjer.

Primjer 7. *Koliko je lipa* $\frac{1}{10}$ *kune, centimetara* $\frac{1}{4}$ *metara i sati* $\frac{1}{6}$ *dana?*
Kako je $1\ kn = 100\ lp$*, znači da je* $\frac{1}{10}\ kn = \frac{100}{10}\ lp = 10\ lp$*. Nadalje, kako je* $1\ m = 100\ cm$*, znači da je* $\frac{1}{4}\ m = \frac{100}{4}\ cm = 25\ cm$*. Kako je* $1\ dan = 24\ h$*, znači da je* $\frac{1}{6}\ dana = \frac{24}{4}\ h = 6\ h$*.*

Razlomke možemo naći i u geometrijskim zadacima. Postupak rješavanja takvih tipova zadataka svodi se na primjenu odgovarajuće formule i odgovarajuće računske operacije s razlomcima. Također nam kod rješavanja može pomoći skica zadanog geometrijskog lika. Navedimo primjer.

Primjer 8. *Duljina je osnovice jednakokračnog trokuta* $2\frac{3}{5}$ *centimetara. Kolika je duljina kraka tog trokuta, ako je opseg* $7\frac{3}{4}$ *centimetara?*
Učenici bi se za rješavanje ovog zadatka trebali prisjetiti formule za opseg jednakokračnog trokuta $o = a + 2b$*. Iz zadatka je poznato da je* $a = 2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$ *cm i* $o = 7\frac{3}{4} = \frac{31}{4}$ *cm. Uvrštavanjem tih vrijednosti u formulu za opseg, jedino što preostaje je riješiti jednadžbu kako bi dobili duljinu kraka* b*.*

U zadacima iz svakodnevnog života, prvo moramo zadatak pročitati s razumijevanjem (ukoliko je potrebno i nekoliko puta), zatim zapisati na papir što nam je u zadatku zadano te prepoznati koje računske operacije je potrebno koristiti. Nakon što završimo s rješavanjem zadatka, potrebno je pogledati ima li rješenje smisla. Navedimo primjer.

Primjer 9. *Mama je odlučila napraviti fini sok od bazge. Planira ga uliti u boce obujma* $\frac{3}{4}$ *litara. Kad je završila s pripremom, dobila je* 40 *litara soka. Koliko će joj boca biti potrebno kako bi prelila sav sok?*
Učenici bi mogli ovaj zadatak riješiti tako da crtaju boce u koje stane tri četvrtine litara soka te ih zbrajati dok ne dođu do 40*. Jednostavniji je način izračunati* $40 \cdot \frac{3}{4} = 30$*. Mami će za* 40 *litara soka biti potrebno* 30 *boca obujma* $\frac{3}{4}$ *litara.*

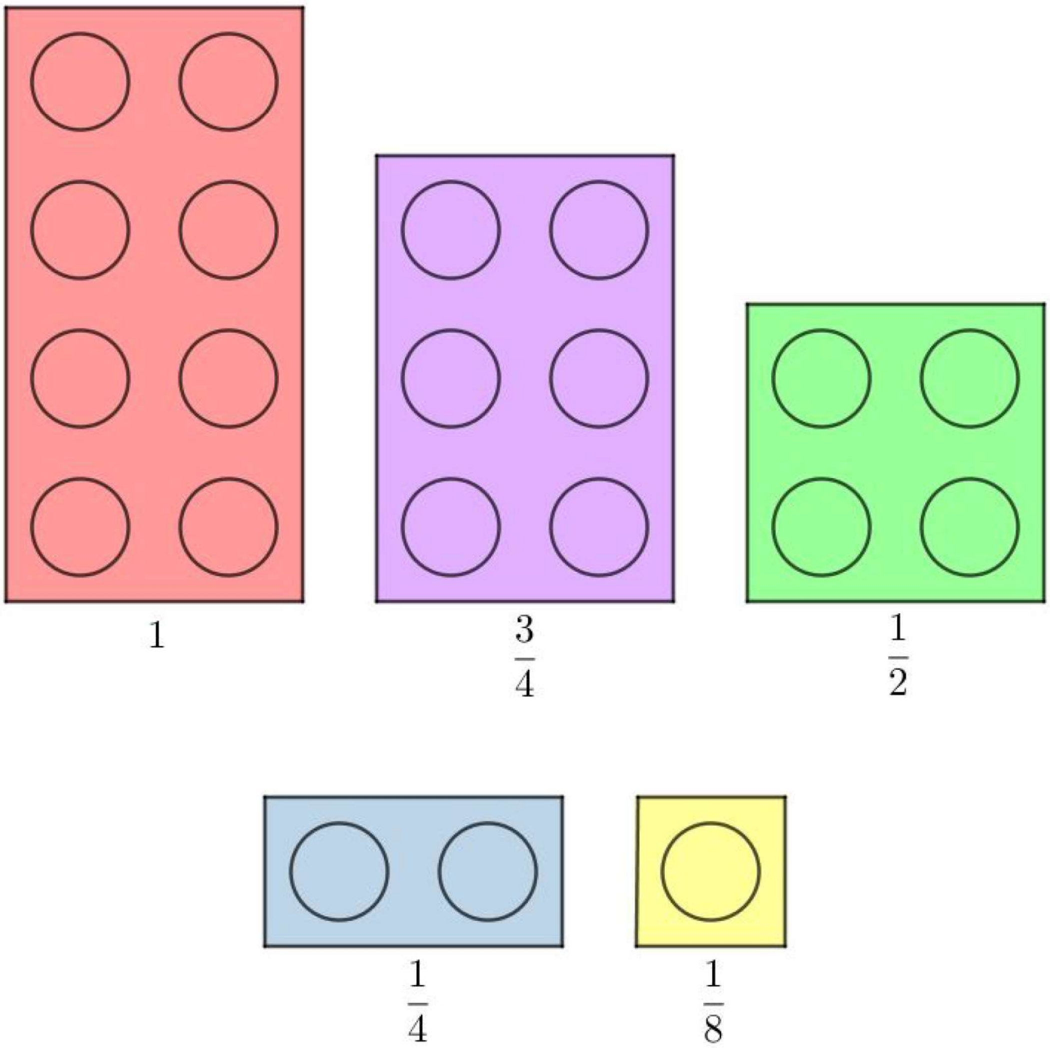
Razlomci su svuda oko nas. Kako bi ih učenici što bolje razumjeli i uspješno primijenili u svakodnevnom životu, trebali bi riješiti što više zadataka s njihovom primjenom u matematici.

3 Pomoćna sredstva za učenje razlomaka

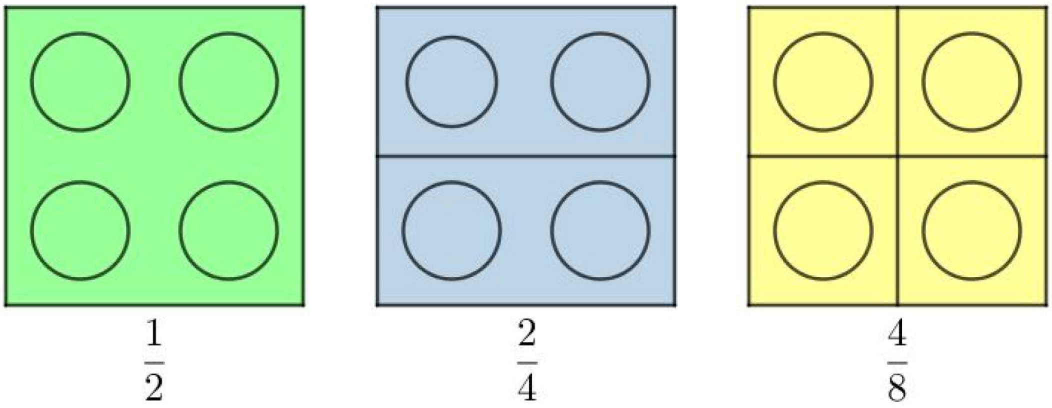
3.1 LEGO kocke

Tvorac slavnih kockica Ole Kirk Kristiansen 1934. osmislio je ime LEGO kao složenicu izraza *leg godt* što na danskom znači *dobro se igraj*. Lego je vrsta igračaka koja se sastoji od malih plastičnih dijelova koji se mogu međusobno spajati. Šarene Lego kocke privlače i zadržavaju pažnju učenika, a to je u svojoj metodi iskoristila učiteljica iz New Yorka Alisa Zimerman. Ona je pomoću Lego kockica učenicima jednostavno objasnila osnovne matematičke pojmove.

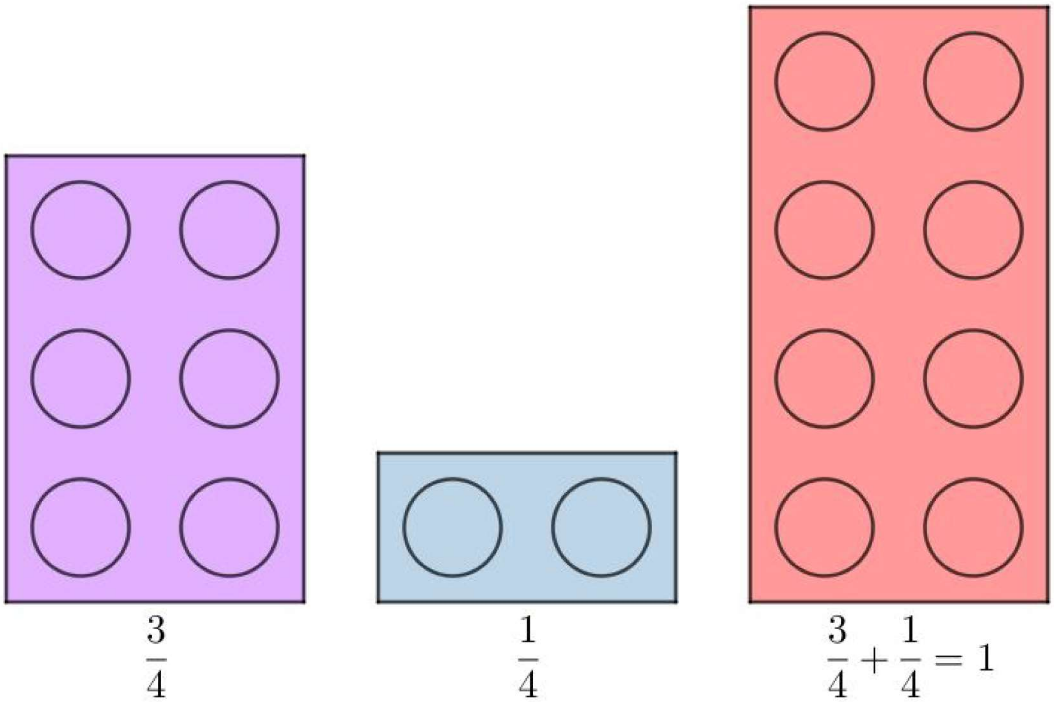
Osim što potiču razvoj logičkog zaključivanja, matematičkog razmišljanja, kreativnost, upornost i rješavanje problema, Lego kocke mogu se koristiti kao didaktičko sredstvo u osmišljavanju nastave. Na idućim je slikama prikazano kako bismo mogli pomoću Lego kockica učenicima prikazati odnose među razlomcima, ekvivalentne razlomke i zbrajanje razlomaka.



Slika 23: Vizualizacija odnosa među razlomcima korištenjem Lego kockica



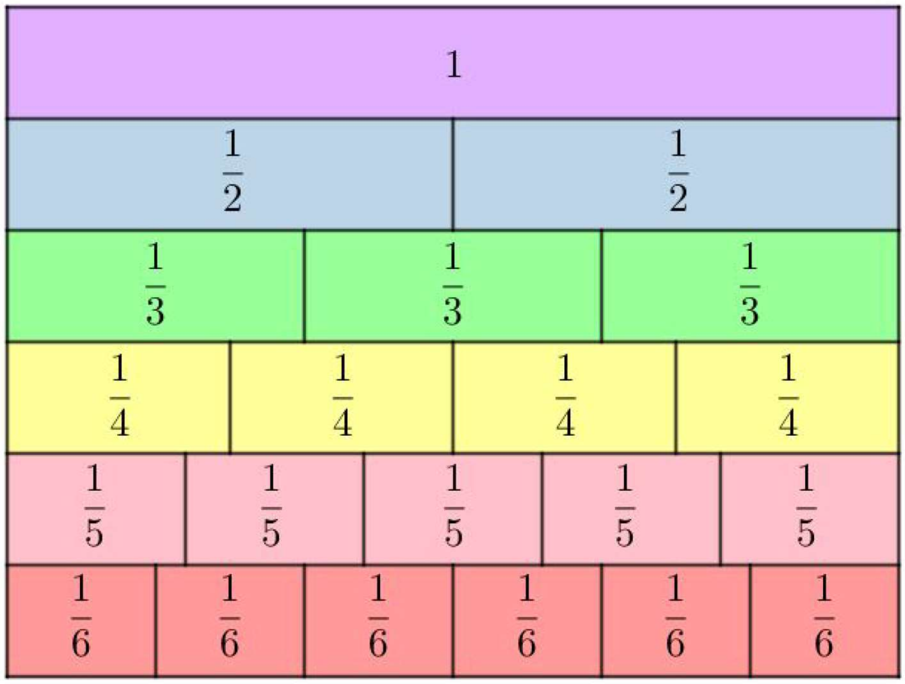
Slika 24: Vizualizacija ekvivalentnih razlomaka korištenjem Lego kockica



Slika 25: Vizualizacija zbrajanja razlomaka korištenjem Lego kockica

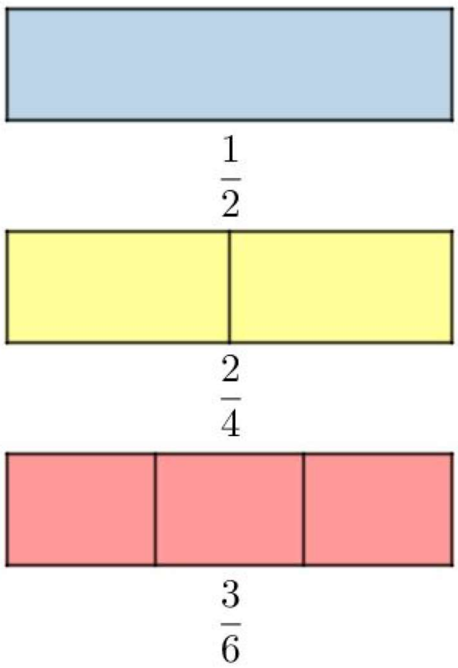
3.2 Poster s razlomcima

Poster s razlomcima koristan je kod učenja razlomaka jednakih 1 te kod uspoređivanja i pravilnog pisanja razlomaka. Odličan je za uspoređivanje razlomaka jednakih vrijednosti. Također, daje vizualnu potporu učenicima kako bi uočili koji su razlomci veći, a koji manji.



Slika 26: Poster s razlomcima

Na idućoj je slici prikazano kako bismo mogli pomoću postera s razlomcima učenicima prikazati ekvivalentne razlomke.



Slika 27: Vizualizacija ekvivalentnih razlomaka korištenjem postera s razlomcima

4 Analiza udžbenika

Udžbenik je temeljno nastavno sredstvo namijenjeno učenju i stjecanju znanja. "Dobro koncipiran i izrađen udžbenik treba udovoljiti zahtjevima za informativnošću, korelacijom među odgojno-obrazovnim sadržajima, jezičnom normom, likovnim, grafičkim i tehničkim oblikovanjem te tiskarskom izvedbom", [9].

Analizom ćemo ovih matematičkih udžbenika vidjeti kako su, radi poboljšanja obrazovanja, promjene u razinama obrazovnog sustava utjecale na sadržaj i zadatke nastavne jedinice Razlomci. Razlomci se uvode u petom razredu osnovne škole. Nakon što učenici usvoje skupove prirodnih i cijelih brojeva, počinju učiti skup racionalnih brojeva.

Za potrebe ćemo ovog diplomskog rada analizirati sljedeće udžbenike iz matematike za peti i šesti razred osnovne škole:

1. V. Draženović Žitko, I. Golac Jakopović, B. Goleš, Z. Lobor, M. Marić, T. Nemeth, G. Stajčić, Z. Šikić, M. Vuković, *Matematika 5, udžbenik iz matematike za peti razred osnovne škole, 2. dio*, Profil Klett, Zagreb, 2020.

2. V. Draženović Žitko, I. Golac Jakopović, B. Goleš, Z. Lobor, M. Marić, T. Nemeth, G. Stajčić, Z. Šikić, M. Vuković, *Matematika 6, udžbenik iz matematike za šesti razred osnovne škole, 2. dio*, Profil Klett, Zagreb, 2020.

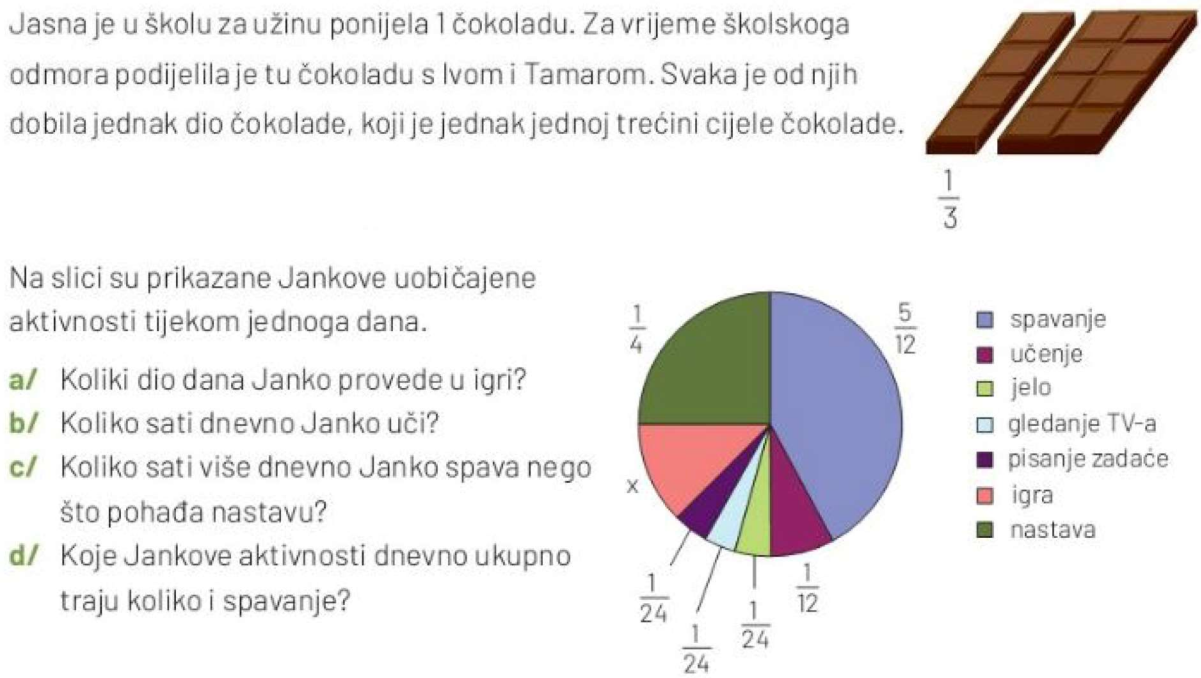
3. S. Eberling, N. Grbac, S. Janeš, I. Mrkonjić, *Moja matematika 5, udžbenik za učenike petog razreda*, Alka Script, Zagreb, 2018.

4. S. Eberling, N. Grbac, S. Janeš, I. Mrkonjić, *Moja matematika 6, udžbenik za učenike šestog razreda*, Alka Script, Zagreb, 2018.

Ovom analizom želimo vidjeti koliko se i u čemu razlikuju udžbenici, sadrže li slike te jesu li zadaci algoritamski ili od učenika zahtijevaju logičko razmišljanje.

4.1 Analiza udžbenika *Matematika 5*

Udžbenik *Matematika 5*, [2] sastoji od dva dijela. Nastavna cjelina Razlomci nalazi se u drugom dijelu udžbenika. Prva je lekcija Osnovno o razlomcima, a započinje pitanjem: "Znaš li da je približno tri četvrtine Zemljine površine prekriveno vodom, a da pustinje zauzimaju petinu kopna?". Nakon toga, učenicima je navedeno nekoliko primjera iz svakodnevnog života u kojima se koriste modeli za rad s razlomcima (pizza i čokolada). Primjeri su primjereni učenicima petih razreda osnovne škole. U drugoj lekciji učenici uče o mješovitim brojevima i prikazivanju razlomaka na brojevnom pravcu. Vizualizaciji razlomaka posvećeno je dovoljno prostora, a najzastupljeniji modeli za vizualizaciju razlomaka su kvadrat i krug. Na kraju se svake nastavne teme nalaze pitanja za ponavljanje i zadaci za vježbu. Zadaci su uglavnom algoritamski i ne traže previše zaključivanja. Nakon ove cjeline učenici bi morali moći zapisati razlomak, razlikovati brojnik i nazivnik te povezati pravi, nepravi i mješoviti broj sa slikovnim prikazom.


Jasna je u školu za užinu ponijela 1 čokoladu. Za vrijeme školskoga odmora podijelila je tu čokoladu s Ivom i Tamarom. Svaka je od njih dobila jednak dio čokolade, koji je jednak jednoj trećini cijele čokolade.

Na slici su prikazane Jankove uobičajene aktivnosti tijekom jednoga dana.

a/ Koliki dio dana Janko provede u igri?
b/ Koliko sati dnevno Janko uči?
c/ Koliko sati više dnevno Janko spava nego što pohađa nastavu?
d/ Koje Jankove aktivnosti dnevno ukupno traju koliko i spavanje?

Slika 28: Uvodni primjer i zadatak u kojima su korišteni modeli

4.2 Analiza udžbenika *Matematika 6*

Udžbenik *Matematika 6*, [3] također se sastoji od dva dijela, a nastavna cjelina Razlomci nalazi se u drugom dijelu udžbenika. Kako su učenici u petom razredu naučili zapisivati razlomke i prikazivati ih na brojevnom pravcu, sada počinju učiti proširiti i skratiti te usporediti razlomke. Prva je lekcija Proširivanje i skraćivanje razlomaka koja započinje jednim zadatkom: "Boris, Jana i Ana naručili su tri jednake pizze. Boris je pojeo jednu polovinu svoje pizze, Jana je pojela dvije četvrtine svoje pizze, Ana je pojela četiri osmine svoje pizze. Tko je pojeo najviše? Tim su uvodnim primjerom uvedeni pojmovi proširivanja razlomaka i ekvivalentnih razlomaka. Primjeri su primjereni učenicima šestih razreda osnovne škole. Iduća lekcija je Zapisi pozitivnih racionalnih brojeva, a zatim slijede lekcije Svođenje razlomaka na zajednički nazivnik i Uspoređivanje razlomaka.

Nakon ove cjeline učenici bi morali moći svesti razlomke na najmanji zajednički nazivnik, odabrati prikladan zapis pri rješavanju brojevnih izraza i problemskih situacija, usporediti razlomke, razlomcima pridružiti točke pravca te poredati razlomke po veličini. U idućoj cjelini učenici uče računske operacije s razlomcima, a lekcije su, Zbrajanje i oduzimanje razlomaka, Množenje razlomaka i Dijeljenje razlomaka. Svaka se lekcija u ovom udžbeniku nadovezuje na prethodno usvojeno gradivo, a time se potiče učenike da povezuju stečena znanja s novim pojmovima. Modeli za vizualizaciju razlomaka koji se koriste u udžbeniku su krug i pravokutnik, no puno je manje vizualizacije nego u udžbeniku za peti razred. Na idućoj slici možemo vidjeti kako je u udžbeniku objašnjeno množenje i dijeljenje razlomka razlomkom.

Razlomak se množi razlomkom tako da se brojnik pomnoži brojnikom, a nazivnik nazivnikom.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (b \neq 0, d \neq 0)$$

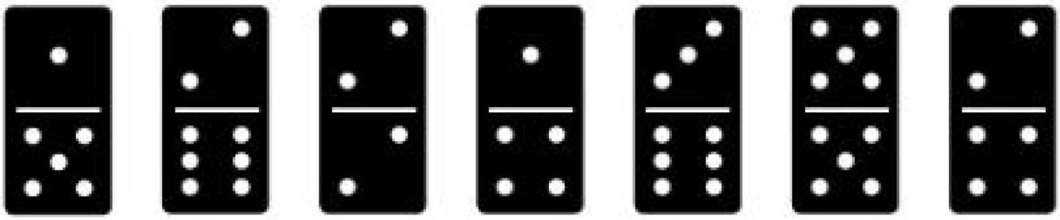
Umnožak dvaju razlomaka jest razlomak.

Dijeliti broj razlomkom znači množiti taj broj recipročnim razlomkom.

$$\square : \frac{a}{b} = \square \cdot \frac{b}{a}$$

Slika 29: Definicije iz udžbenika *Matematika 6*, [3]

Na idućoj slici možemo vidjeti domino pločice koje bismo mogli iskoristiti da učenicima objasnimo odnose među razlomcima.



Slika 30: Domino pločice koje prikazuju razlomke

Nakon ove cjeline učenici bi morali moći zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti razlomke, računati vrijednosti jednostavnih algebarskih izraza i rješavati probleme iz svakodnevnog života primjenjujući računanje s razlomcima.

4.3 Analiza udžbenika *Moja matematika 5*

U udžbeniku *Moja matematika 5*, [4] cjelina Razlomci jedanaesta je po redu. U njoj se obrađuju lekcije Uvođenje razlomaka, Brojevni prikazi razlomaka, Razlomci i brojevni pravac te Primjena razlomaka. Razlomci se uvode sljedećim primjerom: "Majka želi podijeliti jednu čokoladu između svoje dvoje djece tako da svako dijete dobije jednako."

Udžbenik *Moja matematika 5* razlikuje se od prethodnih po tome što je zastupljeniji vizualni pristup pri pojašnjavanju gradiva, tj. korišteni su vizualni prikazi razlomaka. Svaki dio započinje motivacijskom pričom koja učenike uvede u novo gradivo. Nakon uvodnog je primjera učenicima riješeno još nekoliko primjera, a zatim slijede zadaci za samostalno rješavanje. Svi su zadaci grupirani prema razinama usvojenosti u četiri skupine koje su obilježene bojama: crvena - zadovoljavajuća razina, žuta - dobra razina, zelena - vrlo dobra razina i plava - iznimna razina. Na idućoj slici možemo vidjeti po jedan zadatak iz svake skupine.

6. Zapiši razlomak:

a) jedna trećina b) tri četvrtine c) dvije petine.

12. Nacrtaj pravokutnik kojemu su duljine stranica 6 cm i 1 cm. Oboji $\frac{1}{6}$ tog pravokutnika. Koliki dio pravokutnika nije obojen?

15. Nacrtaj kvadrat, razdijeli ga na jednake dijelove i oboji dio zapisan razlomkom:

a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{7}{9}$, c) $\frac{5}{16}$, d) $\frac{1}{10}$.

31. Dnevno spavamo prosječno 8 sati. Zapiši razlomkom, na dva načina, koliki dio dana spavamo.

Slika 31: Primjeri zadataka po skupinama

Za vizualizaciju pravih, nepravih i mješovitih razlomaka koriste se krugovi, kvadrati i pravokutnici, a u zadacima primjene razlomaka koristi se čokolada i brojevni pravac. U udžbeniku je navedeno da bi učenici nakon cjeline Razlomci morali moći povezivati različite zapise broja pomoću razlomaka, razlomcima pridruživati točke brojevnog pravca i primjenjivati razlomke za rješavanje problemskih zadataka.

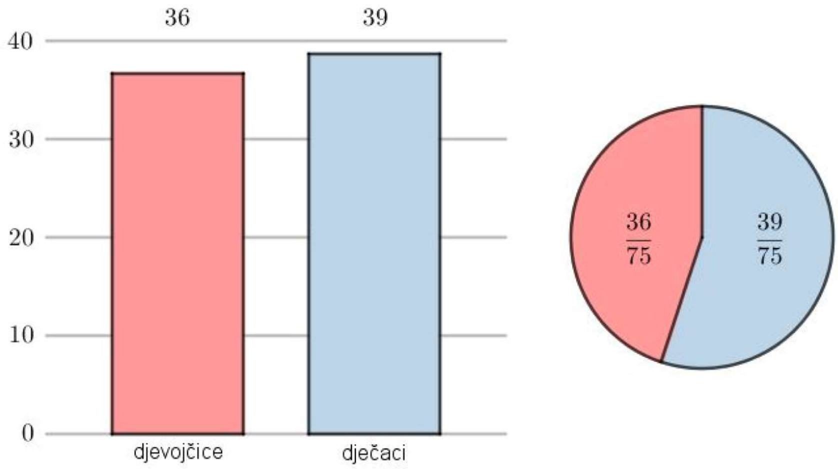
4.4 Analiza udžbenika *Moja matematika 6*

U udžbeniku *Moja matematika 6*, [5] razlomci se obrađuju kroz tri cjeline. Prva je Skup nenegativnih racionalnih brojeva u kojoj se obrađuju lekcije Skup nenegativnih racionalnih brojeva, Zajednički djelitelji i zajednički višekratnici, Proširivanje i skraćivanje razlomaka, Uspoređivanje u skupu $\mathbb{Q}_0^+$ i Brojevni pravac. U drugoj se cjelini obrađuje Zbrajanje i oduzimanje, a u zadnjoj Množenje i dijeljenje te postotni račun. Modeli koji se koriste za vizualizaciju razlomaka su pravokutnik i krug, ali ima puno manje vizualizacije nego u udžbeniku za peti razred. Zadaci su više računski i algoritamski. U ovom je udžbeniku navedeno da bi učenici nakon ove tri cjeline morali moći proširivati i uspoređivati razlomke, zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti razlomke i primjenjivati svojstva računskih operacija.

Na idućoj slici možemo vidjeti primjer kojim se učenike uvede u skup nenegativnih racionalnih brojeva koristeći model kruga.

Učenici šestog razreda dobili su zadatak raspitati se o broju djevojčica i dječaka koji su pohađali šesti razred prošle školske godine. Učenici su podatke prikazali na različite načine.

Što možemo iščitati iz tih prikaza? Prikazuju li oni iste podatke?



Broj djevojčica jednak je $\frac{36}{75}$ ukupnog broja učenika šestog razreda.

Broj dječaka jednak je $\frac{39}{75}$ ukupnog broja učenika šestog razreda.

Slika 32: Primjer kojim se uvodi skup nenegativnih racionalnih brojeva

4.5 Zaključak analize

Analizom ovih udžbenika mogli smo primijetiti kako se u petom razredu osnovne škole uče različiti zapisi razlomaka te kako razlomcima pridružiti točke brojevnog pravca, dok se u šestom razredu uče svojstva za rad s razlomcima. Udžbenici nakladnika Profil Klett sadržavaju uglavnom algoritamske zadatke, ne traže puno razumijevanja i zaključivanja. Udžbenici nakladnika Alka Script sadržavaju zadatke po razinama, od zadovoljavajuće do iznimne. Primjeri su predočeni raznim modelima, od kojih je najzastupljeniji model pravokutnika, odnosno čokolada. Udžbenici su primjereni učenicima petih i šestih razreda, no u njima bi se trebalo nalaziti više zadataka kojima se razvija logičko zaključivanje.

Zaključak

Iako se racionalni brojevi i razlomci počinju učiti već u petom razredu osnovne škole, a i dio su naše svakodnevice, učenicima predstavljaju probleme. Kako bi učenici što bolje razumjeli i savladali razlomke i operacije s njima, u nastavi je potrebno koristiti vizualne modele. Brojevni je pravac najučinkovitiji za učenje razlomaka. On uči da između bilo koja dva razlomka postoji još jedan. Za shvaćanje koncepata razlomaka važno je da učenici znaju objasniti kako su došli do rezultata. U poučavanju razlomaka naglasak bi trebao biti na razvijanju razumijevanja i povezivanju s problemima iz svakodnevnog života te poticanju procjenjivanja i aktivnostima koje od učenika traže razmišljanje. Zadaci ne bi smjeli biti strogo algoritamski jer rješavanjem takvih zadataka učenici ne razvijaju logičko zaključivanje i apstraktno razmišljanje.

Literatura

[1] Ž. Brčić, *Između dvaju razlomaka*, Matka: časopis za mlade matematičare 19/75 (2011.), 163-164

[2] V. Draženović Žitko, I. Golac Jakopović, B. Goleš, Z. Lobor, M. Marić, T. Nemeth, G. Stajčić, Z. Šikić, M. Vuković, *Matematika 5, udžbenik iz matematike za peti razred osnovne škole, 2. dio*, Profil Klett, Zagreb, 2020.

[3] V. Draženović Žitko, I. Golac Jakopović, B. Goleš, Z. Lobor, M. Marić, T. Nemeth, G. Stajčić, Z. Šikić, M. Vuković, *Matematika 6, udžbenik iz matematike za šesti razred osnovne škole, 2. dio*, Profil Klett, Zagreb, 2020.

[4] S. Eberling, N. Grbac, S. Janeš, I. Mrkonjić, *Moja matematika 5, udžbenik za učenike petog razreda*, Alka Script, Zagreb, 2018.

[5] S. Eberling, N. Grbac, S. Janeš, I. Mrkonjić, *Moja matematika 6, udžbenik za učenike šestog razreda*, Alka Script, Zagreb, 2018.

[6] S. Lamon, *Teaching fractions and ratios for understanding, essential content knowledge and instructional strategies for teachers, 4. edition*, Routledge, New York, 2020.

[7] I. Katalenac, T. Soucie, *Matematika 5: Razlomci i decimalni brojevi*
`https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/8ca807ad-1e1d-443a-8d79-a2476244e7e2/html/203_razlomci_i_decimalni_brojevi.html`

[8] T. Brešćanski, T. Soucie, *Matematika 6: Razlomci*
`https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/20de11be-7247-43b7-b6a7-39a0eaecedaa/html/246_razlomci.html`

[9] *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021.
`https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=62968`

[10] *How to multiply and divide fractions: Steps with visual models*
`https://www.splashlearn.com/blog/how-to-multiply-divide-fractions-steps\-with-visual-models/#first-step-visual-modelling`

[11] *Basic math with Legos: Addition, subtraction, fun math games*
`https://www.youtube.com/watch?v=zkvYpT0JJB8`

Sažetak

Razlomak se u osnovnoškolskim knjigama definira kao broj koji opisuje jedan ili više jednakih dijelova neke cjeline. U radu su dane mnoge vizualizacije razlomaka i operacija s njima koje bi nastavnici mogli koristiti u nastavi kako bi učenici bolje razumjeli sadržaj. Naveli smo različite zapise razlomaka, modele za rad s razlomcima, opisali smo kako se razlomci uspoređuju, skraćuju i proširuju, zbrajaju, oduzimaju, množe i dijele te smo istaknuli najčešće učeničke greške. Predstavljena je analiza udžbenika različitih izdavača u kojima se obrađuje nastavna cjelina Razlomci.

Ključne riječi: racionalan broj, razlomak, operacije s razlomcima, brojevni pravac, modeli razlomaka, vizualizacija

Title: Visualization of fractions and operations with them

Summary

In textbooks for elementary school a fraction is defined as a number that describes one or more equal parts of the whole. In this work are given many visualizations of fractions and operations with them that teachers could use in class to help students better understand the content. We listed different notations of fractions, models for working with fractions, we described how to compare fractions, shorten and expand, add, subtract, multiply and divide and we pointed out the most common student mistakes. In work is presented the analysis of the textbooks of different publishers in which the teaching unit Fractions is covered.

Keywords: rational number, fraction, operations with fractions, number line, models fractions, visualization

Životopis

Rođena sam 8. kolovoza 1996. u Osijeku, a trenutno živim u Cretu Bizovačkom. Završila sam osnovnu školu Bratoljuba Klaića u Bizovcu te srednju školu III. gimnaziju u Osijeku. Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, završila sam 2019. završnim radom na temu *Generalizirani inverzi matrica* pod mentorstvom izv.prof.dr.sc. Darije Marković. 2020. sam upisala Sveučilišni diplomski nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku. Zaposlena sam u osnovnoj školi Matije Petra Katančića Valpovo.