Neke primjene vjerojatnosti u igrama na sreću

Bosanac, Maja

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Maja Bosanac

Neke primjene vjerojatnosti u igrama na sreću

Diplomski rad

Osijek, 2021.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Maja Bosanac

Neke primjene vjerojatnosti u igrama na sreću

Diplomski rad

Mentor:
doc.dr.sc. Danijel Grahovac

Osijek, 2021.

Sadržaj

1 Uvod

Igre na sreću su u današnje vrijeme sve popularnije. Radi se o igri u kojoj rezultat nije unaprijed poznat, a uglavnom ovisi o slučaju i sreći. Cilj igre na sreću je postići što veći dobitak koji ne mora nužno biti novčana vrijednost, a cijena za sudjelovanje u igri je igračev ulog koji također ne mora biti novčana vrijednost.
Od davnina je već uočena povezanost igre na sreću i matematike. Područje matematike koje se odnosi na problematiku igara na sreću je teorija vjerojatnosti. Kako rezultat igre nije moguće predvidjeti sa sigurnošću, istraživanjem velikog broja slučaja pokazuju se neke pravilnosti koje nam mogu pomoći u predviđanju ishoda igre.
Postoje različite klasifikacije igara na sreću. S obzirom na visinu uloga i dobitka, odnosno gubitka, razlikuju se igre s malim ulogom i ograničenim dobitkom (lutrija, tombola, bingo, loto...) i posebne – hazardne igre na sreću s visokim ulogom i dobitkom, odnosno gubitkom (rulet, baccarat, blackjack...). Uglavnom su obične igre na sreću dostupne širokom krugu igrača, dok se posebne igre ograničavaju propisima za uži krug igrača, a priređuju se u kockarnicama ili casinu, iz razloga što mogu bitno ugroziti egzistenciju igrača te izazvati niz negativnih psiholoških posljedica. Nadalje, prema broju sudionika, razlikuju se privatne igre, na osnovi ugovora na sreću zaključenog između maloga broja igrača, uglavnom su to igre kockom i igraćim kartama, i javne igre s mogućnošću sudjelovanja neograničenog broja igrača.
Cilj ovog rada je upoznati se s nekim o tih igara te vidjeti primjenu vjerojatnosti u istima. Najprije ćemo se upoznati s nekim osnovnim pojmovima iz teorije vjerojatnosti koje ćemo koristiti u radu, nakon toga ćemo nešto reći o teoriji igara. Zatim ćemo se bazirati na igre na sreću za koje ćemo navesti osnovne teoreme i navesti neke primjere takvih igara.

2 Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju ćemo navesti neke osnovne pojmove koje ćemo koristiti u nastavku rada.
Za početak, pretpostavimo da imamo prostor mjere $(\Omega, \mathcal{F}, P)$([7]-definicija 2.17), funkciju P nazivamo vjerojatnost ili vjerojatnosna mjera ako je $P(\Omega) = 1$. Tada taj prostor mjere nazivamo vjerojatnosni prostor. Neka od svojstava funkcije vjerojatnosti su monotonost, $\sigma-$subaditivnost, neprekidnost na rastući (i padajući) niz događaja i drugo (detaljnije u [1]-poglavlje 1.5).
Na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ možemo promatrati i slučajnu varijablu, to je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ za koju mora vrijediti da je $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za svaki Borelov skup $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dakle, slučajna varijabla je izmjeriva realna funkcija na skupu elementarnih događaja koja ishodima slučajnog pokusa pridružuje realne brojeve. Pri opisivanju slučajne varijable koristimo se numeričkim karakteristikama. Osnovna takva karakteristika je matematičko očekivanje slučajne varijable X (Definicija se može pronaći u [1] ili [11]). Kako ćemo u nastavku imati samo diskretne slučajne varijable, očekivanje takve varijable računamo na slijedeći način

$$E[X] = \sum_{x_i \in \mathcal{R}(X)} x_i p_i,$$

gdje je p_i vjerojatnost realizacije x_i i $\sum_i p_i = 1$. Očekivano kvadratno odstupanje slučajne varijable X od svog očekivanja nazivamo varijanca, a računamo ju kao $Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$.
Ako nas bude zanimao recimo očekivani dobitak nekog igrača ako je drugi igrač odigrao određeni potez, to računamo uvjetnim očekivanjem na način

$$E[X|Y = y] = \sum_{x_i \in \mathcal{R}(X)} xP(X = x|Y = y),$$

gdje je $P(X|Y)$ uvjetna vjerojatnost od X uz uvjet Y (Definicija se može pronaći u [1]-poglavlje 1.9 ili [11]).
U nastavku rada uvest ćemo pojam "igre" koju ćemo modelirati nizom partija te igre čije ishode ne znamo, stoga jednu partiju igre možemo smatrati diskretnom slučajnom varijablom, a cijelu igru slučajnim procesom. Slučajni proces je familija slučajnih varijabli na istom vjerojatnosnom prostoru ([10]).

3 Teorija igara

Teorija igara je grana primjenjene matematike koja se bavi analiziranjem sukoba među ljudima ili grupama ljudi, a primjenjiva je kada se sukob može riješiti inteligencijom, kao na primjer, vojne operacije, psihologija, biologiji te u igrama (šah, bridž, poker...). Tako se

pod "igrom" smatra rješavanje konfliktnih situacija prema unaprijed zadanim pravilima. Igre se razlikuju prema broju problema za rješavanje, prema vrijednosti pobjednikove nagrade, prema broju potrebnih poteza te prema količini dostupnih informacija.
Napomenimo da ovdje treba biti oprazan kada kažemo "igra" jer nisu sve igre u domeni teorije igara, neke igre mogu biti više sportkog karaktera.
Nadalje, igrači, odnosno suparnici su grupirani u različite grupe koje zajedno donose odluke i igraju protiv ostalih grupa. Na primjer, u bridžu sudjeluju četiri igrača koji čine dvije suparničke grupe. Ako imamo n igrača koji igraju svaki za sebe, kažemo da je to igra za n osoba.
Pretpostavlja se da se vrijednost igre može kvantitativno izmjeriti nekim brojem koji se naziva *nagrada*, a uglavnom se radi o novčanoj nagradi. Ako se nagrada podijeli samo među n igrača, kažemo da je se radi o igri s nultim zbrojem. Matematički, ako je ρ_i nagrada koju je osvoio $i-ti$ igrač (u slučaju da je $i-ti$ igrač izgubio, $\rho_i < 0$) to je igra u kojoj je suma svih gubitaka i dobitaka jednaka 0, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 0.$$

Igre u kojima se povećava nagrada ili se dio isplaćuje pobjedniku su igre s ne-nultim zbrojem.
Igre možemo podijeliti i na konačne i beskonačne igre. U konačnim igrama je moguć konačan broj poteza od kojih se svaki potez bira između konačnog broja alternativa. Primjer takvih igara su kružić-križić (najviše 9 mogućih poteza) i šah (najviše 5950 mogućih poteza).

3.1 Strategija

Strategija je sistem odabira poteza iz svih mogućih poteza. Može se sastojati od osobnih poteza baziranih na vlastitoj prosudbi ili strategiji protivnika, slučajnih poteza koji su određeni nekom slučajnom metodom Bernoullijevog pokusa s procjenom vjerojatnosti različitih rezultata, ili, kao u većini igara, kombinacije osobnih i slučajnih poteza.
Ako igrač **A** ima ukupno m mogućih strategija, $A_1, ..., A_m$, i igrač **B** ima $n, B_1, ..., B_n$, onda kažemo da je to $m \times n$ igra. U takvoj igri, strategija igrača **A** A_i parirala je strategiji igrača **B** B_j i nagradu označavamo s a_{ij} (prema dogovoru, dobitak igrača **A** je pozitivan, a igrača **B** negativan). Skup svih vrijednosti a_{ij} naziva se *matrica isplata* i izgleda:

		Igrač **B**			
		B_1	B_2	...	B_n
	A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
Igrač **A**	A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
	...	...	...	...	...
	A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Tablica 1: Matrica isplata

Pogledajmo primjer.

Primjer 3.1. *Pretpostavimo da igrači* **A** *i* **B** *istovremeno biraju pismo ili glava. Ako se njihovi izbori podudaraju* **A** *osvaja nagradu i obrnuto. Matrica isplata za ovu igru izgleda:*

	B_1 (Glava)	B_2 (Pismo)
A_1 (Glava)	1	-1
A_2 (Pismo)	-1	1

Tablica 2: Matrica isplata za igru podudaranja novčića

Intuitivno, najbolji tijek igre za igrača **A** *(ili* **B***) je tzv. miješana strategija u kojoj se izmijenjuju moguće strategije prema nekoj raspodijeli vjerojatnosti. Iz matrice isplata vidimo da je najbolja strategija za igrača* **A** S_A^* *koja bira* A_1 *ili* A_2 *s vjerojatnošću* $\frac{1}{2}$, *tj.*

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1^* & p_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Kažemo da je igra za dvije osobe s nultim zbrojem *pravokutna* ako u svakom potezu igrač **A** bira jednu od m strategija, a nakon njega igrač **B** bira jednu od n strategija bez znanja o izboru prvog igrača. Nakon toga jedan od igrača mora isplatiti drugom ovisno koji igrač je izgubio. Za takve igre koristimo matrice isplate.

3.1.1 Igre sa sedlastim točkama

Pogledamo li Tablicu 2 vidimo da je najmanja vrijednost igre $\alpha = -1$, a najveća $\beta = 1$. Ako se oba igrača odluče za miješanu strategiju, prosječna vrijednost igre γ se nalazi između α i β, tj. $\alpha \leq \gamma \leq \beta$. Za prethodni primjer je $\gamma = 0$ ako su miješane strategije nepredvidive.
U nekim slučajevima se može dogoditi da je $\alpha = \beta = \gamma$ i za takvu igru se kaže da ima sedlaste točke. Svaka takva igra ima rješenje koje daje optimalne strategije za sve igrače, a vrijednost igre je istovremeno njezina donja i gornja vrijednost (vidi [4]-Solutions of Games with Saddle Points i [8]).

Teorem 3.1. *Svaka matrica $[a_{ij}]$ konačne igre ima sedlaste točke ako i samo ako je*

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \gamma.$$

Dakle, postoji par indeksa i_0 i j_0 takvi da je $a_{i_0 j_0}$ istovremeno minimum tog retka i maksimum tog stupca. Sedlasta točka je element matrice isplate u kojem se nalazi vrijednost igre. Igra kojoj matrica isplate sadrži sedlastu točku naziva se još i određena igra.

Matrica igre reda 2×2 sadrži sedlastu točku ako i samo ako 2 broja na dijagonali nisu veća od preostala dva broja u matrici, to se događa s vjerojatnošću $\frac{2}{3}$. Za matrice reda 3×3 se vjerojatnost sedlastih točaka smanjuje na $\frac{3}{10}$. Općenito, neka je $P_{m,n}$ vjerojatnost da proizvoljna matrica igre reda $m \times n$ sadrži sedlastu točku, onda ona iznosi:

$$P_{m,n} = \frac{m!\, n!}{(m+n-1)!}.$$

3.1.2 Igre bez sedlastih točki

Pretpostavimo da u Primjeru 3.1 igrač **A** odabire svoju strategiju slučajno s vjerojatnosti p da će odabrati Glavu i $1-p$ Pismo. Nadalje, pretpostavimo da igrač **B** poznaje način odabira strategije igrača **A**. Očekivanje dobitka igrača **A** kada igrač **B** bira B_1 (Glava) je:

$$E[\mathbf{A}|\mathbf{B} = B_1] = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p) = 2p - 1,$$

a u slučaju kada igrač **B** bira B_2 (Pismo):

$$E[\mathbf{A}|\mathbf{B} = B_2] = (-1) \cdot p + 1 \cdot (1-p) = 1 - 2p.$$

Ako je $p > 1/2$ igrač **B** bira B_2 i očekivanje dobitka igrača **A** je negativno. Slično, ako je $p < 1/2$ igrač **B** bira B_1 i osvaja $1-2p$ jedinica po igri. Nadalje, ako igrač **A** bira A_1 i A_2 s istom vjerojatnošću, tj. $p = 1/2$, očekivanje dobitka oba igrača je 0 bez obzira na strategiju igrača **B**. Dakle, za igrača **A** je to optimalna strategija.

Općenito, za matricu igre reda $m \times n$ i neka igrač **A** igra miješanom strategijom

$$S_A(m) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots & p_m \end{pmatrix}$$

gdje je $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Analogno, miješana strategija igrača **B** je

$$S_B(n) = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_j & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_j & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

gdje je $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$. Ako oba igrača igraju miješanom strategijom, matematičko očekivanje dobitka igrača **A** uz sve moguće strategije igrača **B** označavat ćemo s $\mathcal{E}\left[S_A(m), S_B(n)\right]$, a iznosi

$$\mathcal{E}\left[S_A(m), S_B(n)\right] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i q_j .$$

Radi se o produktu matrica P, $[a_{ij}]$ i Q, gdje je

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{bmatrix} \quad i \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}.$$

Na primjer, ako imamo matricu isplate 2 i ako igrač **A** bira strategije A_1 i A_2 s vjerojatnosti $\frac{2}{5}$ i $\frac{3}{5}$, redom te igrač **B** bira B_1 i B_2 s vjerojatnostima $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$ redom. Tada očekivani dobitak igrača **A** iznosi $\mathcal{E}\left[S_A(2), S_B(2)\right] = 0.1$, to je ujedno i očekivani gubitak igrača **B**. Igrač **A** želi da taj broj bude što veći, dok igrač **B** želi da bude što manji.
Matematičko očekivanje dobitka igrača **B** računamo na analogan način, jedino što moramo napraviti je promijeniti predznake elementima matrice isplate.
Ako postoje strategije $S_A^*(m)$ i $S_B^*(n)$ za igrače **A** i **B** takve da je

$$\mathcal{E}\left[S_A(m), S_B^*(n)\right] \leq \mathcal{E}\left[S_A^*(m), S_B^*(n)\right] \leq \mathcal{E}\left[S_A^*(m), S_B(n)\right]$$

onda su to optimalne strategije i $\mathcal{E}\left[S_A^*(m), S_B^*(n)\right] = \gamma$ je vrijednost igre.
U igranju igre bez sedlastih točki, prvi korak je uklanjanje iz matrice sve duplicirane strategije i one koje su nepovoljne u odnosu na neku drugu. Pretpostavimo da nakon toga imamo matricu igre $m \times n$, nužni i dovoljni uvjet da γ bude vrijednost igre, a $S_A^*(m)$ i $S_B^*(n)$ optimalne strategije igrača **A** i **B** je:

$$\mathcal{E}\left[S_A(i), S_B^*(n)\right] \leq \gamma \leq \mathcal{E}\left[S_A^*(m), S_B(j)\right],$$

za $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$. Dakle, za rješenje matrice igre $[a_{ij}]$ moraju postojati vrijednosti p_i, q_j i γ koje zadovoljavaju:

$$\begin{aligned}
a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m &\geq \gamma \\
a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{m2}p_m &\geq \gamma \\
&\cdots \\
a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{mn}p_m &\geq \gamma \\
a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + ... + a_{1n}q_n &\leq \gamma \\
a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + ... + a_{2n}q_n &\leq \gamma \\
&\cdots \\
a_{m1}q_1 + a_{m1}q_2 + ... + a_{mn}q_n &\leq \gamma.
\end{aligned}$$

3.2 Slučajne šetnje

U praksi, većina kockarskih situacija može se formirati pomoću Bernullijeve distribucije u kojoj igrač osvaja jednu jedinicu za svaki uspjeh te gubi jednu jedinicu za svaki neuspjeh, što možemo označiti s vjerojatnosti p, odnosno $q = 1 - p$. Igračev početni kapital označavamo s x_0 i neka iznosi x, kapital se smanjuje za 1, $(x_0 - 1)$, s vjerojatnošću q i povećava za 1, (x_0+1), s vjerojatnošću p. Igra prestaje kada igrač dosegne vrijednost C ili 0. Zapravo se radi o jednostavnoj slučajnoj šetnji koja ima dvije apsorbirajuće granice, 0 i C. U kontekstu Markovljevih lanaca, ove dvije vrijednosti su apsorbirajuća stanja, definicija se može pronaći u [10]. Zanima nas vjerojatnost ispunjavanja ovih dvaju događaja. Ako igrač igra protiv beskonačno bogatog protivnika, tada postoji samo jedno apsorbirajuće stanje, a to je ono kada igračev kapital bude 0. U tom slučaju nas zanima vjerojatnost igračeve propasti.
Vremena prvog pogađanja stanja 0 i C definitat ćemo kao

$$T_0 = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = 0\}, \quad T_C = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = C\}.$$

Tada je vrijeme do apsorpcije ove slučajne šetnje $T = \min\{T_0, T_C\}$. Ako želimo povratak igračevog kapitala na početni, tada kažemo da se dogodilo *izjednačenje* ili *povratak u početnu točku* te uočimo da je to moguće samo za parni broj koraka. Nakon $2n$ koraka, potrebno je da igrač ima n pobjeda i n poraza, vjerojatnost P_{2n} (vjerojatnost n pobjeda i n poraza) iznosi:

$$P_{2n} = \binom{2n}{n} p^n q^n \approx \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.$$ [1]

Uočimo da $P_{2n} \to 0$ kada $n \to \infty$. Stoga se radi o povratnom stanju za koje je vrijeme povratka beskonačno.
Definirajmo r_j kao vjerojatnost povratka u početni kapital x_0 u $j-$toj partiji igre, tada

[1] Aproksimaciju dobivamo iz Stirlingove formule: $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

je početno stanje prolazno ako i samo ako je

$$R = \sum_{j=0}^{\infty} r_j < \infty,$$

([10]-2.7 Povratnost i prolaznost stanja Markovljevog lanca). U nastavku ćemo izračunati vjerojatnost igračeve propasti i vjerojatnost da igračev kapital dosegne vrijednost C.

4 Odlučivanje i korisnost u teoriji igara na sreću

U ovom poglavlju ćemo vidjeti kako se teorija odlučivanja i korisnosti primjenjuje u igrama na sreću i koliko je ona važna ako želimo pobijediti u igri.
U igri je važno donositi što bolje odluke kako bi, u najboljem slučaju, pobijedili ili smanjili svoj gubitak. Odlučivanjem se odabire jedna akcija ili alternativa iz skupa svih mogućih akcija. Uz odlučivanje, između ostalog, vežemo preferencije i korisnost, a zajedno nadopunjuju teoriju igara na sreću.
Odluke se često donose s obzirom na to koliko odlučitelj poznaje stanja svijeta pa imamo

- Odluke uz sigurnost u kojem odlučitelj točno zna posljedice svojih odluka, zapravo se pretpostavlja da imamo samo jedno stanje svijeta
- Odluke uz djelomičnu nesigurnost (uz rizik) u kojima odlučitelj poznaje stanja svijeta i posljedice u svakom od njih, odnosno zna vjerojatnosti svakog stanja svijeta
- Odluke uz jaku nesigurnost(uz potpuno neznanje) u kojima odlučitelj poznaje stanja svijeta, ali ne zna ništa o posljedicama u njima, tj. ne zna ništa o vjerojatnostima.

U teoriji igara na sreću prvenstveno se radi o odlukama uz rizik. Pod određenim kriterijima, svaka akcija može se procijeniti prema ukusu ili željama igrača i dodjeljuje im se korisnost koja definira mjeru efikasnosti akcije. Za razliku od korisnosti, preferencije ne moraju biti numeričkog karaktera, dovoljno ih je izraziti u prirodnom poretku. Recimo, igrač preferira alternativu A nad alternativom B, dakle, alternativi A je dodijeljena veća korisnost i obrnuto.

4.1 Aksiomi teorije korisnosti

Ovdje ćemo navesti četiri aksioma koja su korisna za igre na sreću. Za početak definirajmo lutriju L kao $L = (p_1, A_1; p_2 A_2, ..., p_n A_n)$ pri čemu je $p_i \geq 0$ vjerojatnost dobivanja nagrade A_i za $i = 1, ...n$ te vrijedi $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Nagrada se može interpretirati i kao pravo na sudjelovanje u sljedećoj lutriji.
Uvedimo još oznake, $A\mathbf{p}B$ znači da igrač preferira A u odnosu na B, zatim $A\mathbf{e}B$ znači da je igrač indiferentan između A i B te $A\mathbf{q}B$ znači da igrač slabo preferira alternativu A

nad alternativom B, odnosno igrač ili preferira A u odnosu na B ili je indiferentan između A i B. Definicije se mogu pronaći u [6].
Navedimo sada aksiome.

Aksiom 4.1 (I.a. Usporedivost). *Svake dvije alternative su usporedive relacijom* $\mathbf{q}$, *tj. za svake dvije alternative* A_i *i* A_j *vrijedi* $A_i\mathbf{q}A_j$ *ili* $A_j\mathbf{q}A_i$ *ili oboje.*

Aksiom 4.2 (I.b. Tranzitivnost). *Relacija* $\mathbf{q}$ *je tranzitivna, tj. ako vrijedi* $A_i\mathbf{q}A_j$ *i* $A_j\mathbf{q}A_k$ *onda je* $A_i\mathbf{q}A_k$, *za svake tri alternative* A_i, A_j, A_k *iz skupa svih alternativa.*

Zajedno ova dva aksioma čine relaciju potpunog uređaja skupa alternativa $A_1, ..., A_n$, što znači da su svake dvije alternative usporedive relacijom $\mathbf{q}$.

Aksiom 4.3 (II.a. Neprekidnost). *Ako je* $A_i\mathbf{p}A_j\mathbf{p}A_k$ *tada postoji postoji nenegativan realan broj* r_j, $0 < r_j < 1$, *takav da je igrač indiferentan između nagrade* A_j *i lutrije* L *u kojoj je vjerojatnost dobivanja nagrade* A_i *jednaka* r_j, *a vjerojatnost dobivanja nagrade* A_k *je* $1 - r_j$, *tj.* $A_j\mathbf{e}L = (r_j, A_i; (1 - r_j), A_k)$.

Ako je r, $0 \leq r < r_j$, vjerojatnost dobivanja nagrade A_j, tada više preferiramo nagradu A_j od lutrije, i obrnuto, ako je $r_j < r \leq 1$ tada više preferiramo lutriju nego A_j.

Aksiom 4.4 (II.b. Supstitucija). *U svakoj lutriji s poretkom vrijednosti nagrada definiranih s* $A_i\mathbf{p}A_j\mathbf{p}A_k$, *lutrija* $(r_j, A_i; (1 - r_j), A_k)$ *je zamjenjiva nagradom* A_j *s potpunom indiferentnosti.*

Aksiom 4.5 (III. Monotonost). *Vrijedi* $(r, A_i; (1 - r), A_k)$ $\mathbf{q}$ $(r_j, A_i; (1 - r_j), A_k)$ *ako i samo ako je* $r \geq r_j$.

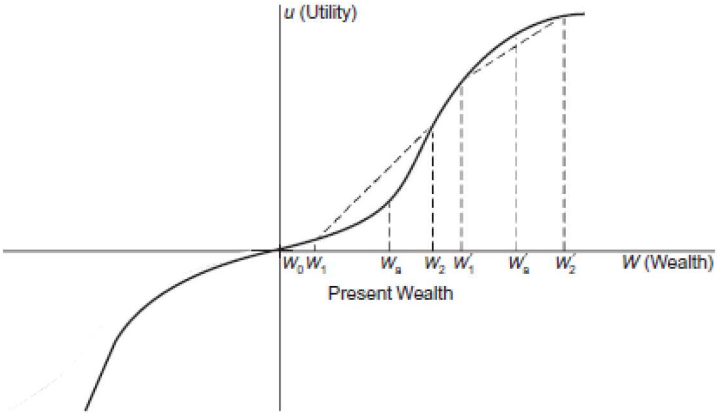
Dakle, između lutrija s istim nagradama preferiramo onu koja ima veću vjerojatnost dobivanja željene nagrade.

Aksiom 4.6 (IV. Nezavisnost). *Među skupovima nagrada* $A_1, A_2, ..., A_n$ *i* $B_1, B_2, ..., B_n$ *takvih da je* $A_i\mathbf{q}B_i$, $\forall i$, *tada jednaka šansa za dobivanje* A_1 *ili* A_2, *itd. je slabo preferirana nad jednakom šansom za dobivanjem* B_1 *ili* B_2, *itd.*

Prethodni aksiom je ključan za maksimizaciju očekivane korisnosti.
Pomoću ova četiri aksioma bilo koji donositelj odluke može riješiti bilo koji problem odlučivanja, bez obzira na njegovu složenost.

4.2 Funkcija korisnosti

Koristeći Aksiom I (aksiome 4.1 i 4.2), svakoj lutriji L možemo dodijeliti broj $u(L)$ u skladu s preferencijama lutrija, tj. $u(L_i) \geq u(L_j)$ ako i samo ako je L_i $\mathbf{q}$ L_j. Racionalno ponašanje u donošenju odluka, odnosno u igri je sada jasno definirano. U nastavku pretpostavljamo da je naš igrač racionalan to znači da ako on preferira alternativu A nad alternativom B i B nad C, tada zbog tranzitivnosti preferira A nad C, tj. ne pokazuje subjektivne preferencije prema nekoj alternativi. Kada racionalni igrač donosi odluke, odnosno igra pod rizikom, igra tako da maksimizira očekivanu vrijednost svoje korisnosti. Najreprezentativniji primjer funkcije korisnosti je dan sljedećom slikom.



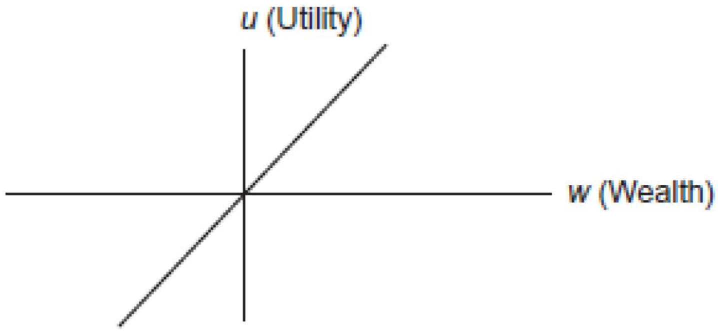
Slika 1: Korisnost kao funkcija bogatstva (izvor: [4]-str. 46)

Općenito, funkcija korisnosti je konkavna za odlučitelja koji je nesklon riziku, a konveksna za onoga koji je sklon riziku ([6]-Propozicija 5.17). Uočavamo da je na prethodnoj slici funkcija konkavna za mala povećanja bogatstva i konveksna za velika povećanja. S druge strane, za smanjivanje bogatstva je prvo konvesknа, a zatim konkavna. U oba slučaja je točka refleksije trenutna vrijednost bogatstva. Općenito, $u(W)$ brže opada sa smanjivanjem bogatstva, nego što raste s povećanjem.

Sa slike 1 možemo odrediti hoćemo li prihvatiti imovinu W_a ili više preferiramo dobiti iznos W_2 uz rizik da ćemo izgubiti iznos W_1. Dok pravac kroz točke $(W_2, u(W_2))$ i $(W_1, u(W_1))$ prolazi iznad točke $(W_a, u(W_a))$, očekivana korisnost igre je stoga veća od korisnosti $u(W_a)$, stoga preferiramo lutriju. Slično, ako možemo birati između W_a' i dobivanja W_2' ili pada na W_1', nacrtamo pravac kroz točke $(W_2', u(W_2'))$ i $(W_1', u(W_1'))$ koji sada prolazi ispod točke $(W_a', u(W_a'))$. Stoga preferiramo W_a' jer je vrijednost funkcije korisnosti veća od očekivane korisnosti. Ovakva funkcija korisnosti implicira da kako se sadašnje bogatstvo smanjuje postoji tendencija preferiranja igara u kojima su velike šanse za mali gubitak naspram one u kojoj su male šanse za veliki dobitak.

4.2.1 Objektivna funkcija korisnosti

Iz prethodnih razmatranja vidimo da je funkcija korisnosti uvelike utječe na odabir alternative i da je ona subjektivne prirode te ovisi o igraču i sadašnjem bogatstvu. Za razvoj jednostavnije teorije igrara na sreću uvodimo objektivnu funkciju korisnosti koju vidimo na slijedećoj slici.

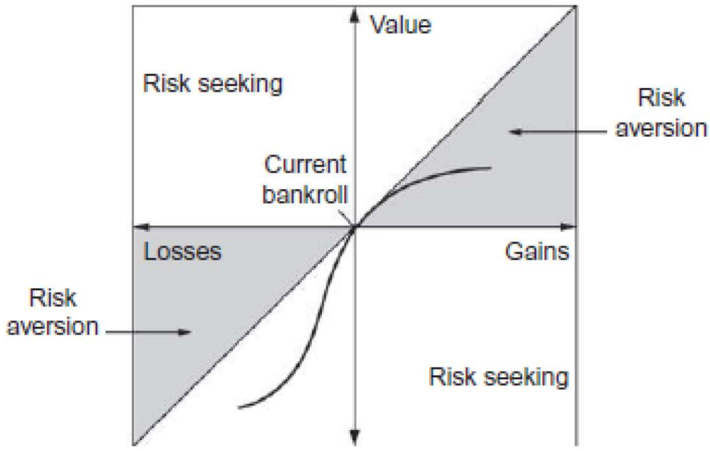


Slika 2: Objektivna funkcija korisnosti (izvor: [4]-str. 47)

Objektivan model pretpostavlja da je funkcija korisnosti proporcionalna s bogatstvom i odluke su neovisne o nevjerojatnosnim razmatranjima.
Za razliku od ranije navedene funkcije korisnosti, objektivna funkcija je primjenjiva za igranje velikog broja partija igre.
U okviru definicije ovoga modela, igraču je na raspolaganju nekoliko opcija tako on može igrati beskonačno dugo, igrati određeni broj partija ili igrati dok ne osvoji/izgubi određeni iznos. Općenito, cilj igrača nije samo povećati svoje bogatstvo, nego on želi maksimizirati nagradu po partiji, ovisno o vjerojatnosti gubitka određenog iznosa ili želi postići određeni iznos bogatstva. Njegovi ciljevi određuju iznos koji treba riskirati i koliki stupanj rizika prihvatiti, a to može vidjeti iz objektivnog modela funkcije korisnosti.

4.3 Teorija perspektiva

Teorija perspektiva opisuje načine na koje pojedini igrači procjenjuju dobitke i gubitke, što je suprotno racionalnom ponašanju u kojem se odluke donose u uvjetima neizvjesnosti. Tako neki ovu teoriju nazivaju "iracionalnim" ponašanjem.
Za razliku od teorije očekivane funkcije korisnosti prema kojoj donositelji odluke biraju alternativu koja ima maksimalnu korisnost, prema ovoj teoriji ne moraju birati takvu alternativu jer im je možda nešto važnije od korisnosti pri donošenju odluka. Recimo, donose odluke na temelju percipiranih dobitaka.
U teoriji perspektiva su izbori poredani prema određenoj heuristici, tako da se vrijednosti dodjeljuju subjekivno dobicima i gubitcima, a ne konačnoj imovini. Funkcija vrijednosti se definira odstupanjem od referentnih točaka, a možemo ju vidjeti na sljedećoj slici.



Slika 3: Funkcija vrijednosti u teoriji perspektiva (izvor: [4]-str. 49)

Možemo vidjeti da je funkcija vrijednosti za dobitke konkavna, tada kažemo da postoji nesklonost riziku ("risk aversion"). Funkcija je konveksna za gubitke, u tom slučaju postoji sklonost riziku ("risk seeking"). Također, funkcija je strmija za gubitke nego za dobiti, a to nazivamo averzija prema gubitku ("loss aversion"). Averzija prema gubitku znači da nastojimo izbjeći gubitak prije svega, osim ako je vrlo atraktivan za pobjedu. Tako postupamo jer nas rizična opcija ponašanja može dovesti do većih troškova nego koristi. Detaljnije o ovoj teoriji u [4]-str.49.

4.4 Kriteriji za donošenje odluka

Kako igre na sreću uključuju donošenje odluka uz rizik potrebno je odrediti kako najbolje donijeti odluku. Postoje različiti kriteriji pa spomenimo neke.

Za početak promotrimo *Bayesov kriterij.* Ovaj kriterij sugerira da minimiziramo prosječan rizik s obzirom na postupak odlučivanja Δ. Možemo minimizirati prosječan rizik i s obzirom na neku *a priori* distribuciju na temelju prethodnog iskustva. Takva metoda se naziva restringirana Bayesova metoda, a primjenjiva je u procesima odlučivanja u kojima maksimalni rizik nije veći od minimalnog za određeni iznos. Ova metoda nije prikladna za primjenu u igrama na sreću zbog subjektivne dodjele vjerojatnosti, koju želimo izjegavati.

Jedan od kriterija je *Waldov kriterij maksimalnog povrata ulaganja.* Smatra se pesimističnim kriterijem jer maksimizira siguran dobitak. Definiramo razinu sigurnosti s_i alternative A_i kao najgori mogući ishod u slučaju te alternative, tj. $s_i = \min\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}$, gdje je a_{ij} element na poziciji (i, j) matrice isplate definirane u poglavlju 3.1. Tada s_i predstavlja siguran dobitak za alternativu A_i. Alternativu A_k biramo tako da je $s_k = \max\limits_{i=1,\dots,m} s_i$.

Slijedeći kriterij je *Savageova minimizacija gubitka.* Ova metoda je namijenjena igraču koji želi minimizirati razliku između nagrade (dobitak ili gubitak) koju osvoji zadanom strategijom i nagrade koju bi mogao dobiti ako su protivnikove namjere poznate una-

prijed. Definiramo gubitak po stupcima tako da se iz matrice isplate svaki a_{ij} zamijeni razlikom maksimuma stupca i a_{ij}, odnosno s $\max_i(a_{ij}) - a_{ij}$. Najveći gubitak u alternativi A_i je $\rho_i = \max_j(\max_i(a_{ij}) - a_{ij})$, a kako najveći očekivani gubitak želimo minimizirati biramo alternativu A_k takvu da je $\rho_k = \min_i \rho_i$.
Nadalje imamo *Hurwitzov optimistično-pesimistički indeks* u kojemu se uvodi tzv. razina optimizma $O_i = \max_{j=1,..,n} a_{ij}$ te neka je $O_k = \max_{i=1,...,m} O_i$. Ovaj kriterij pokušava pronaći sredinu između ekstrema koje postavljaju optimistični i pesimistični kriteriji uvođenjem parametra α, $0 \leq \alpha \leq 1$, koji se naziva koeficijent optimizma. Alternativu A_k biramo tako da tražimo $\max_{i=1,...,m}\{\alpha s_i + (1-\alpha)O_i\} = \alpha s_k + (1-\alpha)O_k$. Uočimo da je za $\alpha = 1$ pesimistični kriterij, dok je za $\alpha = 0$ optimistični.
Želimo li objektivno donošenje odluka tada trebamo koristiti minimax princip. Kako objektivni model korisnosti nalaže da je najbolja objektivna definicija najbolje strategije, koristeći minimax princip možemo postići najveću objektivnost. Želimo minimizirati postupak odlučivanja Δ s obzirom na maksimalni rizik $\sup_\Theta F(\Theta)$, tj. $\min_\Delta \max_\Theta F(\Theta)$. Glavni nedostatak minimax kriterija je što je konzervativan. Zbog nedostatka prihvatljivijeg kriterija koristimo minimax princip i smatramo ga temeljnim u teoriji igara.
Detaljnije o kriterijima odlučivanja može se pronaći u [4],str. 49-51 i [6], poglavlje 3.2.

5 Osnovni teoremi teorije igara na sreću

U ovom poglavlju navodimo osnovne teoreme i pripadne korolare teorije igara na sreću, vidi [4]-The basic theorems. Teoremi su primjenjivi u slučaju stacionarnih vremenskih nizova i igara s nultim zbrojem. Ukoliko nije drukčije naglašeno, svaki teorem pretpostavlja da niz igara čini uzastopne nezavisne događaje.

5.1 Sistemi klađenja

Teorem 5.1. *Ako igrač riskira konačan kapital u velikom broju partija igare u kojima je vjerojatnost pobjede, poraza te neriješene partije konstanta, tada svi sistemi klađenja vode u konačnici do istog matematičkog očekivanja dobitka po jedinici uloženog iznosa.*

Sistem klađenja je varijacija veličine uloga kao funkcije dobitka prethodnih igara. U $i-$toj partiji igre, igrač ulaže β_i jedinica, on može osvojiti $k\beta_i$ s vjerojatnosti p (gdje je k kvota za isplatu), može izgubiti β_i s vjerojatnosti q te partija može biti neriješena s vjerojatnosti $1 - p - q$.
Općenito, sistemi se mogu podijeliti na aditivne, multiplikativne te sisteme za linearno klađenje. Svaki se sistem temelji na ulaganju novca određen prethodnim partijama čime se ignorira pretpostavka nezavisnosti partija igre.

5.1.1 Martingalna strategija

Najpoznatiji sistem klađenja je martingalna strategija ili udvostručenje. U vjerojatnosti, martingal je familija slučajnih varijabli takva da je u svakom promatranom trenutku očekivana sljedeća vrijednost jednaka trenutnoj vrijednosti pri čemu su nam poznate sve prethodne vrijednosti procesa, uključujući i sadašnju. Formalno, kažemo da je slučajni proces $X = (X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ na filtriranom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ martingal u diskretnom vremenu ako zadovoljava sljedeće zahtjeve: (vidi [11] i [10])

(i) $E[|X_n|] < \infty$, za sve $n \in \mathbb{N}_0$,

(ii) X je $\mathbb{F}-$adaptiran slučajni proces,

(iii) $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$, za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

Prema ovoj strategiji svaki je ulog određen samo prethodnim ulogom. U slučaju gubitka u $(i-1)-$voj partiji, $\beta_i = 2\beta_{i-1}$, dok u slučaju pobjede $\beta_i = \beta_1$. Radi se o tome da se duplicira ulog nakon izgubljene partije, u slučaju pobjede ulog se vraća na početni i igrač je na dobitku za jednu jedinicu. Nedostatak ovog sistema je nagli rast uloga u slučaju niza velikog broja promašaja.

Primjer 5.1. *Pretpostavimo da igrač ima veliko bogatstvo, da je igra poštena i da on igra prema martingalnoj strategiji. Neka mu je početni ulog jedna jedinica, ako izgubi, u iduću partiju ulaže dvije jedinice. Ako izgubi u prvih n partija, u iduću ulaže 2^n. Igrač će prestati s igrom nakon što pobijedi u jednoj partiji, pretpostavimo da je to u partiji T. Profit koji tada ostvaruje iznosi*

$$2^T - (1 + 2 + 4 + ... + 2^{T-1}).$$

Nadalje, ako s X_n označimo iznos koji igrač posjednuje nakon $n-$te partije igre, tada je $X_0 = 0$ i $X_n \leq 1 + 2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$. Ako je igrač prestao s igrom u trenutku $n+1$ tada je $X_{n+1} = X_n$, a inače

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 2^n & s \ vjerojatnosti \ \frac{1}{2} \\ X_n + 2^n & s \ vjerojatnosti \ \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Kako X_{n+1} ovisi samo o X_n vrijedi $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$, gdje je $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ i $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ filtracija. Dakle, slučajni proces $X = (X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ je martingal s obzirom na danu filtraciju.

Pretpostavimo sada da slučajna varijabla T broji partije igre prije pobjede, ona ima geometrijsku distribuciju s parametrom $\frac{1}{2}$, tj. $P(T = n) = (\frac{1}{2})^{n-1}(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^n$, $n \geq 1$. U *trenutku T igrač osvaja 2^{T-1} jedinica, a do tog trenutka je ukupno uložio(izgubio)*

$$\sum_{k=1}^{T-1} 2^{k-1} = 2^{T-1} - 1.$$

Prema tome, na dobitku je samo jednu jedinicu. Očekivani ukupni ulog do dobitka iznosi

$$E[2^{T-1} - 1] = E[2^{T-1}] - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} P(T = n) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} - 1$$

gdje prva suma divergira. Ovim primjerom vidimo da ova strategija ima smisla samo ako je igrač beskonačno bogat, što, naravno, nije realna situacija pa u stvarnosti igrač ne ostvaruje profit igrajući ovom strategijom.

Budući da martingali isključuju ostvarivanje profita na temelju informacija o povijesti igre, najbolje su primjenjivi u poštenim igrama ($p = q = \frac{1}{2}$). No, i u takvim igrama postoji problem kao što je navedeno u [4](str. 53), dakle, s kapitalom 1000 puta većim od pojedinačnog uloga, igrač nakon 1000 odigranih partija ima vjerojatnost dobitka samo 0.6. U pravoj casino igri s $p < q$ ta vjerojatnost je još manja te model smislen za takvu igru je supermartingal. U igri koja ide u prilog igraču smisleni model je submartingal. Definicija supermartingala i submartingala se može pronaći u [10].

5.1.2 Labouchère sistem

Sistem "Labouchère" ili "precrtavanje" je poznati primjer aditivnog sistema klađenja. Aditivne sisteme karakterizira funkcija koja povećava ulog za neki specifičan iznos. U sistemu precrtavanja imamo niz brojeva $a_1, a_2, ..., a_n$, a ulog je zbroj a_1 i a_n. U slučaju pobjede brojevi a_1 i a_n se izbacuju iz niza i zbroj a_2 i a_{n-1} je novi ulog, dok u slučaju gubitka $a_1 + a_n$ formira novi član niza a_{n+1} i zbroj a_1 i a_{n+1} je novi ulog. Cilj ovog sistema je da se prekriže (izbace) svi brojevi iz niza, nakon čega se počinje s novim nizom. Uobičajena implementacija ovog niza počinje s $1, 2, 3$ što je ekvivaletno slučajnoj šetnji s apsorbirajućim granicama $+6$ i $-C$, gdje je C igračev kapital. Pogledajmo na primjeru zašto su $+6$ i $-C$ apsorbirajuća stanja.

Primjer 5.2. *(a) Pretpostavimo da imamo sljedeću situaciju:*

Niz	*Ulog*	*Ishod partije*	*Dobit*
$1, 2, 3$	4	*pobjeda*	$+4$
2	2	*pobjeda*	$+6$
Kraj	*Ukupni kapital*		$+6$

Radi se o uobičajenoj implementaciji niza i situaciji u kojoj igrač pobijedi u dvije partije. Na ovaj način se precrtaju svi elementi niza te igra prestaje u trenutku kada igračev kapital iznosi 6 jedinica. Dakle, $+6$ je jedno apsorbirajuće stanje.

(b) *Pretpostavimo sada da je igračev početni kapital* 9 *jedinica i da imamo sljedeću situaciju:*

Niz	*Ulog*	*Ishod partije*	*Dobit*
$1, 2, 3$	4	*Poraz*	-4
$1, 2, 3, 4$	5	*Poraz*	-9
Kraj	*Ukupan kapital*		0

Igra je završila jer je igrač izgubio cijeli kapital. Dakle, -9 *je apsorbirajuće stanje.*

Nedostatak ovog sistema je porast visine uloga u slučaju niza gubitaka. Međutim, budući da igrač sam određuje veličinu niza i koji brojevi će biti u nizu, on može utjecati na rizik. Ako želi smanji rizik, na početak niza treba upisati nekoliko jedinica i time se u slučaju poraza ulozi neće znatno povećavati. Ovaj sistem je primjenjiv za rulet, blackjack ili baccarat.

5.1.3 d'Alembertov sistem

"d'Alembertov" sistem ili jednostavna progresija je poznati primjer linearnih sistema, a definiran je kao

$$\beta_i = \beta_{i-1} \pm K,$$

$+K$ je u slučaju kada $(i-1)-$va igra rezultira porazom, u suprotnom je $-K$. Ako je $(i-1)-$va partija neriješena, igrač treba ostati pri istom ulogu. Za razliku od martingalne strategije, ulog se ne udvostručuje nego se povećava i smanjuje u jednakom omjeru. Igrač sam bira iznos K za koji se ulog mijenja. Pozitivno kod ovog sistema je što igrač može ostavariti profit i u slučaju da ima više poraza nego pobjeda. U situaciji kada je broj gubitaka veći ili jednak broju pobjeda, neto dobit možemo računati po formuli

$$Neto\ dobit = W - (L-W) \cdot \frac{(L-W)+1}{2},$$

gdje W označava broj pobjeda, a L broj poraza. Tako, na primjer, u slučaju 50 pobjeda i 59 poraza igrač ostvaruje profit od $5K$ jedinica.
Nedostatak ovog sistema je što igrač u slučaju lošeg niza može ostavriti veliki gubitak, pogledajmo primjer.

Primjer 5.3. *Pretpostavimo da igrač igra poštenu igru d'Alembertovom strategijom u kojoj je izabrao* $K = 5$ *i da imamo sljedeću situaciju:*

Broj partije	*Ulog*	*Ishod partije*	*Dobit*
1.	5	*poraz*	-5
2.	10	*poraz*	-15
3.	15	*poraz*	-30
4.	20	*poraz*	-50

U samo četiri partije igre igrač je izgubio $10K$ *svog kapitala, što možemo dobiti i po prethodnoj formuli.*

Postoje i drugi sistemi klađenja kao što su obrnuti martingali ili Paroli, obrnuti Labouchère sistem, obrnuti d'Alembert sistem i drugi (više u [4]-str. 55).

5.2 Teoremi o podnizu igara i matematičkom očekivanju dobitka

U nekim sistemima se ulaže samo na pojedinim elementima niza igre, na primjer, u parnom broju partija. To možemo opravdati sljedećim teoremom i pripadnim korolarom.

Teorem 5.2. *Nema prednosti u procesu klađenja samo na neki podniz niza nezavisnih partija igre koji tvore cijeli niz igre.*

Neki igrači smatraju da postoji veća šansa za pobjedu ako igru prekidaju nakon određenog broja partija. Kako je ishod $i-$te partije nezavisan od ishoda $(i-1)-ve$ partije, prethodni teorem kaže da je potpuno svejedno hoće li igrač igrati više igara s manjim brojem partija ili jednu igru s više partija. Ako ishode $(i-1)-$ve i $i-$te partije označimo kao (X_{i-1}, X_i), tada zbog nezavisnosti vrijedi da je $P(X_{i-1}, X_i) = P(X_{i-1})P(X_i)$, što možemo i poopćiti (vidi [11]-Nezavisnost slučajnih varijabli). Dakle, vjerojatnost realizacije određenog ishoda partije igre će biti jednaka kladio se igrač samo na podniz igre ili na cijeli niz igre.

Korolar 5.1. *Kockar nema nikakvu prednost u smislu matematičkog očekivanja ako igru prekida nakon svake partije.*

Tvrdnja slijedi iz svojstva linearnosti matematičkog očekivanja. Pogledajmo primjer.

Primjer 5.4. *Pretpostavimo da igrač baca nepravilno izrađen novčić kod kojega se relizacija pisma događa se s vjerojatnošću* 0.7*. Ako padne pismo osvaja jednu jedinicu, u suprotnom gubi jednu jedinicu. Odigrat će tri nezavisne partije. Očekivanje dobiti nakon odigrane igre iznosi* $E[X_{uk}] = 1 \cdot 3 \cdot 0.7 + (-1) \cdot 3 \cdot 0.3 = 1.2$*, dok je očekivanje dobiti nakon svake odigrane partije* $E[X_i] = 0.7 - 0.3 = 0.4$*. Ako igru prekidamo nakon svake od partija ukupna očekivana dobit iznosi* $3 \cdot 0.4 = 1.2$*. Dakle, matematičko očekivanje dobiti se nije promijenilo kada je igrač prekidao igru nakon svake partije.*

Kako nema promjene u matematičkom očekivanju igre, nastavljamo s određivanjem očekivanja i varijance serije igara. Po definiciji svake igre postoje vjerojatnost p da će se igračev kapital povećati za α jedinica, vjerojatnost q da će se smanjiti za β jedinica ($\alpha = k\beta$) i vjerojatnost $r = 1-p-q$ da nema promjene u kapitalu. Tada je ulog u svakoj igri β jedinica.

Teorem 5.3. *Za n partija neke igre, matematičko očekivanje dobitka iznosi $n(\alpha p - \beta q)$, a varijanca $n\left[\alpha^2 p + \beta^2 q - (\alpha p - \beta q)^2\right]$*

Ovaj izraz za očekivanje vodi do definicije poštene igre. Očito je da $E\left[X_n\right] = 0$ uvjet da nema prednosti među igračima. U općem slučaju poštena igra znači da je

$$\alpha p = \beta q.$$

Igre u kojima je $E\left[X_n\right] > 0$ ili $\alpha p > \beta q$ nazivamo pozitivne igre, i obrnuto, igre u kojima je $E\left[X_n\right] < 0$ ili $\alpha p < \beta q$ nazivamo negativne igre.
Uspoređujući očekivanja i varijance općenitih igara uočavamo da kako očekivanje odstupa od 0, varijanca se smanjuje i približava se 0 kako se p ili q približava 1. Obrnuto, varijanca je maksimalna za poštenu igru. Varijanca igre pomaže igraču u odluci hoće li nastaviti igru i kako će igrati. Ako neka igra ima malu varijancu, vjerojatnije je da će ishodi biti bliži očekivanju stoga je cilj smanjiti varijancu. Zbog velike varijance nastupaju događaji koji su izvan očekivanja igrača. Možemo reći da je varijanca zapravo rizik u igri jer veća varijanca smanjuje predvidljivost ishoda igre.

5.3 Teoremi o vjerojatnosti propasti i trajanju igre

Prethodna razmatranja vode do sljedeća dva teorema, od kojih je prvi poznat je kao "kockarov kraj".

Teorem 5.4. *U igri, u kojoj igrač ulaže β jedinica u svakoj partiji kako bi dobio α jedinica s vjerojatnosti p po partiji, može izgubiti β jedinica s vjerojatnosti q ili može biti bez promjene kapitala s vjerojatnosti $r = 1 - p - q$, koju je igrač započeo s kapitalom z i nastavio igrati dok se kapital ili poveća na $\alpha \geq z + \beta$ ili smanji za manje od β (točka propasti), vjerojatnost propasti P_z ograničena je s*

$$\lambda^z \frac{\lambda^{a-z-(a-1)} - 1}{\lambda^{a-(\alpha-1)} - 1} \leq P_z \leq \lambda^{z-(\beta-1)} \frac{\lambda^{a-z} - 1}{\lambda^{a-(\beta-1)} - 1},$$

gdje je λ rješenje eksponencijalne jednadžbe $p^{\lambda^{a+\beta}} - (1-r)\lambda^\beta + q = 0$.

Početni kapital protivnika iznosi $a - z$, stoga je a ukupni kapital u igri.

Ako imamo poštenu igru, $E[X_n] = 0$, možemo granice od P_z zapisati kao

$$\frac{a - z - (\alpha - 1)}{a - (\alpha - 1)} \leq P_z \leq \frac{a - z}{a - (\beta - 1)}.$$

Uz daljnje pojednostavljenje $\alpha = \beta = 1$, kao što je u većini igara na sreću, vjerojatnost propasti svodi se na:

$$P_z = \frac{(q/p)^a - (q/p)^z}{(q/p)^a - 1}, \quad za \;\; p \neq q.$$

Ako sa $\overline{P_z}$ označimo vjerojatnost povećanja igračevog kapitala sa z na a, tada ona iznosi

$$\overline{P}_z = 1 - P_z = \frac{(q/p)^z - 1}{(q/p)^a - 1}, \quad za \;\; p \neq q.$$

Za poštenu igru, $p = q = 1/2$, lako je pokazati da vrijedi:

$$P_z = \frac{a - z}{a}$$

i

$$\overline{P}_z = \frac{z}{a}.$$

Uočimo da je $P_z + \overline{P}_z = 1$ pa igra završava s vjerojatnosti 1. Pogledajmo i vjerojatnost igračeve propasti ako igra protiv beskonačno bogatog protivnika. Pustimo li a u ∞ u izrazu za P_z, vidimo da ako je $q < p$, tada izraz teži ka $(q/p)^z$, a ukoliko je $q > p$, izraz teži ka 1. Na ovaj način smo izračunali vjerojatnosti iz dijela 3.2.
Nadalje, uočimo da izraz P_z vrijedi i ako uvedemo treći ishod, a to je da igra bude neriješena s vjerojatnosti r. Naime, kako je $p + q = 1 - r$ vjerojatnost da partija završi pobjedom ili porazom, možemo uvesti oznake $p' = \frac{p}{p+q}$ i $q' = \frac{q}{p+q}$ te na taj način ignoriramo partije koje završavaju neriješeno. Naime, uvrstimo li p' i q' u formulu za P_z, dobivamo isti izraz.

Pogledajmo koliko iznosi očekivano trajanje igre.

Korolar 5.2. *Očekivano trajanje igre D_z je očekivano vrijeme do apsorbcije slučajne šetnje koja kreće iz stanja z. Posebno,*

$$D_z = \left| \frac{z}{q - p} - \frac{q}{q - p} \cdot \frac{(1 - q/p)^z}{(1 - q/p)^a} \right|, \quad za \;\; p \neq q.$$

Očekivano vrijeme do apsorbicije slučajne šetnje koja starta iz stanja $i \in \mathbb{N}_0$ je $g_i = E\left[T | X_0 = i\right]$, gdje je T vrijeme do apsorbcije. Detaljnije se može pronaći u [10]-poglavlje 2.7.
Za $p = q$ izraz D_z iz prethodnog korolara postaje neodređen i u tom slučaju razlomak $\frac{z}{q-p}$

zamijenimo sa z^2 što nam daje

$$D_z = z(a - z)$$

Izvod formula se može pronaći u [2].
Ilustrativno, ako imamo dva igrača s kapitalom od 100 NJ i svaki ulaže 1 NJ za svako bacanje pravilnog novčića, tada možemo očekivati trajanje od 10000 bacanja prije nego dođe do propasti jednog od igrača.
Ako imamo i treći ishod igre, tj. igra može biti neriješena s vjerojatnosti r, tada se očekivano trajanje igre povećava na

$$\frac{D_z}{1-r}.$$

Primjer 5.5. *Pretpostavimo da igrač igra igru u kojoj može osvojiti* 5 *jedinica, početni kapital je* 2 *jedinice te ulaže po* 1 *jedinicu koju ili gubi ili osvaja* 1 *uz povrat svog uloga. Neka su vjerojatnosti $p = 0.45$, $q = 0.40$ i $r = 0.15$. Tada će igrač očekivano odigrati* 43 *partije prije kraja igre. Očekivano će odigrati* 37 *partija u kojima ishod nije neriješen. Pod istim pretpostavkama neka su $p = 0.55$, $q = 0.45$ i $r = 0$, tada će igrač očekivano odigrati* 18 *partija prije kraja igre.*

U povoljnoj igri protiv beskonačno bogatog protivnika, igra traje beskonačno dugo.

Teorem 5.5. *Igrač s početnim kapitalom z, kojem je cilj povećati kapital za iznos $a - z$, ima očekivani dobitak kao funkciju njegove vjerojatnosti propasti (ili uspjeha). Štoviše, vjerojatnost propasti je funkcija sistema za klađenje. Za igre u kojima je $p \leq q$, poštene ili nepovoljne igre, optimalna strategija je maksimalna smjelost ("maximum boldness"), dok je za povoljne igre ($p > q$) optimalna strategija je minimalna smjelost ("minimal boldness") ili "promišljenost".*

Prema strategiji maksimalne smjelosti igrač treba uložiti što je moguće veći iznos s obzirom na njegov cilj i trenutni kapital. Primjenjuje se kada su p i q približno jednaki. Cilj ove strategije je udvostručiti kapital u jednom ulogu što je moguće ako uložimo cijeli kapital i pobijedimo. Igrati ovom strategijom ima smisla samo u negativnim igrama, dok u pozitivnim igrama treba igrati startegijom minimalne smjelosti. Prema toj startegiji igrač treba uložiti najmanji mogući iznos koji je dopušten pravilima igre.
Pogledajmo to na primjeru.

Primjer 5.6. *Koristeći formulu za vjerojatnost igračeve propasti ćemo izračunati je li bolje ulagati* 1 *jedinicu ili* 10 *jedinica u igri koju započinjemo s kapitalom* 10 *i želimo postići* 100. *Neka su $p = 0.49$ i $q = 0.51$.*
Vjerojatnost osvajanja 100 *jedinica ako ulažemo* 1 *jedinicu iznosi*

$$\overline{P_{10}} = \frac{(0.51/0.49)^{10} - 1}{(0.51/0.49)^{100} - 1} = 0.0092.$$

Vjerojatnost osvajanja 100 *jedinica ako ulažemo* 10 *jedinica je*

$$\overline{P_1} = \frac{(0.51/0.49) - 1}{(0.51/0.49)^{10} - 1} = 0.0829.$$

Zaključujemo da imamo veću šansu za osvajanje željenog dobitka ako ulažemo 10 *jedinica.*
Neka je sada $p = 0.51$, *a* $q = 0.49$. *Na analogan način dobijemo da vjerojatnost osvajanja* 100 *jedinica ukoliko ulažemo* 1 *iznosi* 0.3358, *a kada ulažemo* 10 *vjerojatnost se smanji na* 0.1189.
Dakle, kao što i prethodni teorem kaže, u nepovoljnim igrama je bolje ulagati veći iznos, a u povoljnim igrama manji.

5.3.1 Kellyjev sistem klađenja

Prethodnim razmatranjima dolazimo do ovog sistema klađenja koji se koristi u povoljnim igrama. Kellyjev sistem klađenja dugoročno dovodi do povećanja kapitala većeg od onog u bilo kojem drugom sistemu. U tom sistemu se maksimizira eksponencijalna stopa rasta igračevog kapitala G definirana s:

$$G = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{x_n}{x_0},$$

gdje je x_0 početni kapital, a x_n kapital nakon odigranih n partija igre.
Ako igrač ulaže udio f od svog kapitala u svakoj partiji, tada x_n ima vrijednost

$$x_n = (1+f)^w (1-f)^{l-w} x_0,$$

gdje je w broj pobjeda, a l broj poraza u n partija. Eksponencijalna stopa rasta je tada

$$G = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{w}{n} \log_2(1+f) + \frac{n-w}{n} \log_2(1-f)\right] = p\log_2(1+f) + q\log_2(1-f).$$

Maksimizacijom G s obzirom na f dobija se

$$G_{max} = (1-r)\log_2 2 + p\log_2 p + q\log_2 q - (1-r)\log_2(1-r)$$

koja se za $r = 0$ reducira na $G_{max} = 1 + p\log_2 p + q\log_2 q$.
Formula po kojoj se određuje koliki udio kapitala treba uložiti igru je

$$f = P_w - \frac{1-P_w}{k},$$

gdje je P_w vjerojatnost pobjede, k je kvota $k : 1$, a f traženi udio. Na primjer, ako je kvota $3 : 1$, igrač ima kapital 30 jedinica i vjerojatnost pobjede je 0.7, tada igrač mora uložiti 60% svog kapitala što je 18 jedinica.

Objasnimo što predstavljaju kvote. To je omjer vjerojatnosti pobjede i vjerojatnosti poraza. Ako imamo igru bacanja novčića u kojoj se kladimo da će pasti glava. Ako glava padne s vjerojatnosti $2/3$, imamo $\frac{2/3}{1/3} = \frac{2}{1}$, tj. kvota je $2:1$. U slučaju pobjede protivnik nam mora isplatiti dvostruko od našeg uloga.
Kellyjev sistem nastoji odrediti optimalni iznos koji je potrebno uložiti tako da taj iznos bude najveći moguć uz povećanje stope rasta kapitala. Originalno je sistem napravljen za igre u kojima se partije stalno ponavljaju i vjerojatnost pobjede je jednaka u svakoj od njih. Može se dogoditi da prethodnom formulom dobijemo negativan f, u tom slučaju nećemo ništa uložiti. Radi se o igrama s negativnim očekivanjem.
Nedostak ovog sistema je što moramo dobro znati (ili procijeniti) vjerojatnost pobjede u partijama kako bi mogli izračunati veličinu uloga. Još jedan nedostatak je što kriterij može biti vrlo agresivan, odnosno može predložiti udio kapitala koji je poprilično veliki, što vidimo u ranijem primjeru u kojem je $f = 0.6$.
Suprotno sistemima opisanih u kontekstu teorema 5.1, ovaj sistem ne ovisi o prethodnim ulozima. Sistemi u kojima ulozi ovise samo o trenutnom kapitalu i sadašnjoj vjerojatnosti uspjeha nazivaju se *Markovljevi sistemi klađenja* (niz vrijednosti igračevog kapitala tvore Markovljev proces). Kažemo da proces ima Markovljevo svojstvo ako su uvjetno na poznatu sadašnjost, budućnost i prošlost procesa međusobno nezavisne. Procese u diskretnom vremenu s diskretnim skupom stanja koje imaju to svojstvo nazivamo Markovljeni lanci. Sljedi formalna definicija.

Definicija 5.1. *Neka je S diskretan skup stanja. Slučajni proces $X = (X_n : n \in \mathbb{N}_0)$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s vrijednostima u S je Markovljev lanac ako jednakost*

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ i za sve $i, j, i_{n-1}, ..., i_0 \in S$ za koje su uvjetne vjerojatnosti dobro definirane.

Dakle, jednakost iz prethodne definicije nazivamo Markovljevo svojstvo. Više u [10]-poglavlje 2-Markovljevi lanci u diskretnom vremenu.
Također, možemo uočiti da ovakvi sistemi klađenja, s malim udjelom kapitala u kojima ulažemo f, čine negativni sistem. Nedostatak ovog sistema, kao i svakog drugog u kojem se ulog povećava nakon pobjede i smanjuje nakon poraza, je što bilo koji niz od n pobjeda i n poraza dovodi do smanjenja imetka B na

$$B\big(1 + \frac{1}{m}\big)^n \big(1 - \frac{1}{m}\big)^n = B\big(1 - \frac{1}{m^2}\big)^n$$

pri ulogu $1/m$ svog kapitala u svakoj partiji igre. Detaljnije u [4]-str. 62.

Za povoljne igre koje traju beskonačno dugo i igraju se protiv beskonačno bogatog protivnika bolja strategija je optimizirati "povrat ulaganja", odnosno neto dobit po jedinici vremena podijeljena s ukupnom kapitalom potrebnim za postupak klađenja. U tim uvjetima povećali bismo pojedinačni ulog $\beta(t)$ kako se povećava naš kapital $z(t)$ održavajući povrat ulaganja R fiksnim po formuli

$$R = \frac{(p-q)\beta(t)}{z(t)}.$$

No, za takve igre je realnije uspostaviti razinu značajnosti u postizanju određene dobiti u kapitalu, a zatim pogledati za koji iznos uloga se postiže ta razina za određene $p > q$.

Teorem 5.6. *U igri povoljnoj za igrača postoji ulog β definiran s*

$$\begin{aligned} \beta &\approx \left[\frac{-z}{\log \overline{Q_z}} - \frac{\overline{P_z}(\overline{Q_z})^{a/z} z^2}{a(\log \overline{Q_z})^2 \overline{Q_z}^{a/z} \overline{P_z} - z\overline{Q_z}(\log \overline{Q_z})^2} \right] \log(p/q)^{-1} \\ &\approx \frac{-z}{\log \overline{Q_z}} \log(p/q)^{-1} \quad za \ \ \overline{P_z} > 0.5 \ \ i \ \ a \gg z, \end{aligned}$$

gdje je $\overline{Q_z} = 1 - \overline{P_z}$. Stoga, konstantno ulaganje β jedinica ili manje u svakoj partiji igre daje pouzdanu razinu od $\overline{P_z}$ ili više u povećanju igračevog kapitala s početne vrijednosti z na konačnu vrijednost a.

Za povoljne igre je karakteristično da za $a \gg z$ optimalni ulozi postaju neovisni o cilju a ([4]-str. 64).
Općenito, u povoljnim igrama veličinu uloga povećavamo kako bismo smanjili broj partija koje je potrebno odigrati za postizanje cilja.
Također možemo odreditit vjerojatnost propasti i uspjeha za određeni broj partija igre, što je iskazano u sljedećem teoremu.

Teorem 5.7. *U $n-$toj partiji igre, igrač s kapitalom z, koji ulaže jedinične uloge i igra protiv protivika s kapitalom $a-z$, ima vjerojatnost propasti danu s*

$$P_{z,n} = \frac{(q/p)^a - (q/p)^z}{(q/p)^a - 1} - \frac{2\sqrt{pq}(q/p)^{z/2}}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\sin(\pi j/a)\sin(\pi z j/a)[\cos(\pi j/a)]^n}{1 - 2\sqrt{pq}\cos(\pi j/a)},$$

gdje su p i q vjerojatnosti igračeve pobjede, odnosno poraza u jednoj partiji igre.

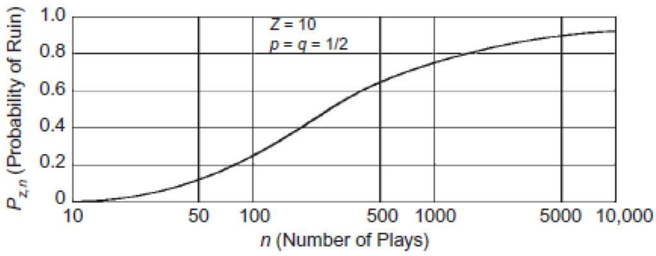
Ilustracija formule $P_{z,n}$ se može pronaći u [4] str. 64.
Primjetimo da kako se broj partija povećava, $n \to \infty$, $P_{z,n}$ se približava vjerojatnosti P_z.
Pogledajmo situaciju u kojoj igrač igra protiv beskonačno bogatog protivnika, ili protivnika s dovoljno velikim kapitalom, takvim da u n partija u kojima igrač ulaže 1, ne može doći do njegove propasti.

Korolar 5.3. *U $n-$toj partiji igre, igrač s kapitalom z koji ulaže jedinične uloge i igra protiv beskonačno bogatog protivnika, ima vjerojatnost propasti danu s*

$$P_{z,n} = q^z \left[1 + zpq + \frac{z(z+3)/(pq)^2}{2!} + ... + \frac{z(z+k+1)\cdots(z+2k-1)/(pq)^k}{k!} \right]$$

gdje je $k = \frac{n-z}{2}$, odnosno $k = \frac{n-z-1}{2}$ kad je $|n-z|$ paran, odnosno neparan.

Slijedeća slika prikazuje vjerojatnost $P_{z,n}$ iz prethodnog korolara za $z = 10$ i $p = q = 1/2$.



Slika 4: Vjerojatnost propasti u n partija poštene igre protiv beskonačno bogatog protivnika (izvor: [4]-str. 65)

Uočavamo da s povećanjem broja partije n, vjerojatnost $P_{z,n}$ se približava jedinici. Dakle, kako $n \to \infty$ vjerojatnost propasti igrača je sve veća.
Možemo promatrati i očekivani broj partija $E(n)_z$ prije propasti igrača s kapitalom z:

$$E(n)_z = \frac{z}{(q-p)} - \frac{a[1-(q/p)^z]}{(q-p)[1-(q/p)^a]}, \quad p \neq q.$$

Za poštene igre, $p = q$, gornji izraz postaje $E(n)_z = z(a-z)$. Izvod formula se može pronaći u [9]-Tvrdnja 3.
U slučaju da igrač igra protiv beskonačno bogatog protivnika, $a \to \infty$, slijedi da $E(n)_z \to \frac{z}{q-p}$. Kada je $p < q$ vrijedi da je $E(n)_z \leq \frac{z}{(q-p)}$. Dok u slučaju kada je $p > q$ očekivano vrijeme protiv beskonačnog bogatog protivnika je besmislen pojam. Za $p = q$ slijedi da $E(n)_z \to \infty$, a to znači da ako će igrač igrati dok ne ostane bez kapitala, igrat će beskonačno dugo.
Ranije smo povoljnu igru definirali kao igru u kojoj je $p > q$, a može se definirati i kao igra koja sadrži dio podigara od kojih je jedna ili više povoljna. Takva cjelina se naziva *složena igra.* Odgovarajuća pravila zahtjevaju od igrača da ulaže najmanje jednu jedinicu u svakoj podigri. Nadalje, igraču je poznata relativna frekvencija pojavljivanja svake podigre, a on je odmah unaprijed obaviješten o pojedinostima podigre koja će se uskoro igrati. Blackjack je najčešći primjer složene igre.
Zbog varijacija uloga, igrač u složenoj igri može postići bilo koje pozitivno matematičko očekivanje, njegovo je samo da uloži dovoljno veliki ulog u povoljnoj igri kako bi prevladao

negativna očekivanja koja proizlaze iz jediničnih uloga u nepovoljnim igrama.
Međutim, takav način igre može dovesti do velike vjerojatnosti propasti, stoga je potrebno uvesti kriterij, tzv. kriterij preživljavanja, koji nalaže minimiziranje vjerojatnosti propasti dok se postiže ukupno pozitivno očekivanje dobitka. Sistem klađanja u skladu s ovim kriterijem dan je u sljedećem teoremu.

Teorem 5.8. *U složenim igrama postoji kritična vjerojatnost pobjede u jednoj partiji, $p^* > 0.5$, takva da se optimalni ulog za svaku podigru, $\beta^*(p)$, u okviru kriterija preživljavanja određuje na način:*

$$\beta^*(p) = \begin{cases} 1, & ako \;\; je \;\; p < p* \\ \frac{\log[(1-p)/p]}{\log[(1-p*)/p*]} & ako \;\; je \;\; p \geq p* \end{cases}$$

Vjerojatnost p^* iz prethodnog teorema predstavlja kritičnu razinu te ako imamo vjerojatnost pobjede ispod te razine preporučeno je uložiti 1 jedinicu, a ako je p iznad te razine ulažemo po danoj formuli.
Ilustrativni primjer u [4]-str.66, pokazuje koliko trebamo uložiti ako imamo $p* = 0.5113$ za dvije različite vrijednosti p u podigrama. Za $p = 0.45$ treba uložiti 1, dok za $p = 0.55$ ulažemo 4.45 jedinica. Takvim ulaganjem postiže se ukupno očekivanje 0.082.

5.4 Optimalna strategija i informacije u igrama na sreću

Do sada smo pokazivali da niti jedan sistem klađenja temeljen na ranijim igrama ne može utjecati na očekivani dobitak igre s nezavisnim partijama, nego je potrebno optimizirati vjerojatnost uspjeha, broj igara i druge bitne čimbenike ovisno o ciljevima. Međutim, objektivne korisnosti se usredotočuju isključivo na igračevo matematičko očekivanje dobitka. Strategija i informacije su dva parametra koja se izravno odnose na matematičko očekivanje, a njihov odnos je posljedica fundamentalnog teorema teorije igara - von Neumannov minimax teorem.

Teorem 5.9. *Za svaku pravokutnu igru za dvije osobe koja ima matricu isplate $[a_{ij}]$, gdje igrač* **A** *ima m strategija $A_1, ..., A_m$ koje se biraju s vjerojatnostima $p_1, ..., p_m$ redom i igrač* **B** *ima n strategija $B_1, ..., B_n$ koje se biraju s vjerojatnostima $q_1, ..., q_n$ redom ($\sum p_i = \sum q_j = 1$), matematičko očekivanje dobitka $\mathcal{E}[S_A(m), S_B(n)]$ jednog igrača za bilo koje strategije $S_A(m)$ i $S_B(n)$ definirano je s*

$$\mathcal{E}[S_A(m), S_B(n)] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j.$$

Nadalje, ako $m \times n$ igra ima vrijednost γ, nužan i dovoljan uvjet da S_A^* bude optimalna strategiija za igrača **A** *je*

$$\mathcal{E}[S_A^*(m), S_B(n)] \geq \gamma$$

za sve moguće strategije $S_B(n)$. Slično, nužan i dovoljan uvjet da S_B^* bude optimalna strategija za igrača **B** *je*

$$\mathcal{E}[S_A(m), S_B^*(n)] \leq \gamma.$$

U dijelu 3.1.2 ovog rada smo nešto rekli o očekivanju $\mathcal{E}[S_A(m), S_B(n)]$ te kako ga možemo izračunati.
Prethodni teorem kaže da svaka igra za dvije osobe s nultim zbrojem ima optimalnu miješanu strategiju. Također kaže da je maksimalna vrijednost minimalnog očekivanog dobitka jednog igrača jednaka minimalnoj vrijednosti maksimalnog očekivanog gubitka drugog igrača. Nadalje, omogućava nam odrediti optimalne strategije ako nam je cilj minimizirati naš maksimalni gubitak ili maksimizirati minimalni dobitak.
U daljnim razmatranjima je potrebno uvesti informacije u format igre s obzirom da količina informacija dostupna svakom igraču može imati utjecaja na matematičko očekivanje. Na primjer u šahu i dami su sve informacije dostupne. U bridžu je sastav svake ruke skrivena informacija koja će se postupno otkrivati. U pokeru je skrivanje određenih karata svake ruke ključno za konačni ishod igre.

Primjer 5.7. *([4]-str. 68) Ako imamo matricu isplate za igru podudaranja dva novčića kao u Primjeru 3.1, gdje svaki igrač bira pismo ili glavu s vjerojatnosti $p = 1/2$, matematičko očekivanje dobitka za oba igrača je tada 0. Sada pretpostavimo da igrač* **A** *ima špijuna koji će mu točno "dojaviti" sljedeću strategiju igrača* **B**. *Ako je špijun nesavršen u svojim špijunskim sposobnostima ili se nađe greška u komunikacijskom kanalu, igrač* **A** *ima samo vjerojatnosno znanje strategije igrača* **B**. *Konkretno, ako je p stupanj znanja, imamo matricu igre*

	$B_1(G)$	$B_2(P)$
$A_1(G,G)$	1	-1
$A_2(G,P)$	$2p-1$	$2p-1$
$A_3(P,G)$	$1-2p$	$1-2p$
$A_4(P,P)$	-1	1

Tablica 3: Matrica isplate za igru podudaranja novčića sa špijunom

gdje $(i,j)-$ti element predstavlja stategiju igrača **A** *birajući i kada je obavješten da je izbor igrača* **B** *G (glava) i j kada je obavješten da* **B** *bira P (pismo). Za $p > 1/2$ igrač* **A** *preferira strategiju A_2 te birajući tu strategiju očekivanja dobitka za* **A** *iznosi $2p-1$. Uz savršenog špijuna, $p = 1$, očekivanje je 1, a za $p = 1/2$ očekivanje je 0. Dakle, ovismo o stupnju znanja špijuna, matematičko očekivanje dobitka igrača se mijenja.*

Postoje igre na sreću u kojima je dopuštena komunikacija partnera putem komunikacijskog kanala s ograničenim kapacitetom. Jedan od ciljeva takvih igara je prenijeti što je više moguće informacija tim komunikacijskim kanalom ([4]-Theorem 10, str.68). To stanje prijenosa maksimalnih informacija je moguće pod uvjetom minimalne redundancije i

maksimalne entropije informacije. Kažemo da je entropija mjera neizvjesnosti u realizaciji slučajne varijable. Maksimalna entropija informacija vrijedi kada iz skupa od n mogućih poruka svaku poruku biramo s vjerojatnosti $1/n$, tj. postoji neizvjesnost jer su svi ishodi jednako vjerojatni. Na primjer ako imamo dvije moguće realizacije slučajne varijable koje se događaju s vjerojatnostima p i q, $p \neq q$, tada je entropija manja jer je jedan događaj vjerojatniji od drugog. Možemo reći da se entropija odnosi na poruke koje primatelju prenose nepredvidive informacije.
Suprotno tome, redundancija se odnosi na poruke koje primatelju prenose vrlo predvidive informacije. Radi se o višku informacija u komunikaciji radi sigurnijeg prijenosa informacija. Minimalna redundacija se također javlja kada su sve realizacije slučajne varijable jednako vjerojatne. Zaključujemo da se oba uvjeta za maksimalni prijenos informacija javljaju kada imamo neizvjesnost u izboru poruka koje ćemo poslati. Iako se ne sastoje sve igre od komunikacije, postoje neke igre u kojima je komunikacija najbitniji dio i poziva se na prethodni teorem.

Moguće je navesti i više teorema koji su korisni za teoriju igara na sreću, međutim, ti teoremi nisu toliko primjenjivi u igri. Neki od njih se mogu pronaći u [4]-Additional Theorems.

6 Neke igre na sreću

U ovom poglavlju ćemo navesti neke igre na sreću i vidjeti primjenu ranije navedene teorije u njima.

6.1 Blackjack

6.1.1 Pravila igre i pretpostavke

Blackjack ili ajnc je kartaška igra na sreću koja se igra u kockarnicama diljem svijeta. Igra se sa 4, 6 ili 8 špilova od 52 karte. Može sudjelovati do 7 igrača koji ne igraju međusobno jedan protiv drugoga, nego svaki igra protiv djelitelja ili "kuće". Na početku partije igrači stavljaju početni ulog i nekon toga djelitelj svakome podijeli dvije karte, a jednu svoju kartu okrene kako bi ju svi vidjeli. Cilj igre je postići zbroj karata veći od djeliteljevog, a da igrač ne prijeđe 21. Dečko, dama i kralj vrijede 10 bodova, a karte s brojevima onoliko koliki je broj. As vrijedi ili 11 bodova i to ako je zbroj drugih karata manji ili jednak 10, ili 1 bod ako je zbroj drugih karata 11 ili veći. Međutim, ako igrač ima dva asa, jedan od njih mora vrijediti 11 bodova, osim ako je zbroj bodova svih ostalih karata veći ili jednak 10. Ako igrač ima asa od 11 bodova, tada se kaže da mu je zbroj mekan ("soft"), a ako nema asa ili ima asa od jednog boda, tada mu je zbroj tvrd ("hard"). Ako igrač u prvom dijeljenju dobije karte sa zbrojem 21, kaže se da ima *blackjack* i automatski pobjeđuje, osim u slučaju da i djelitelj ima 21, tada je neriješeno. Ako igrač pobjedi osvaja

dvostruko od početnog uloga. Postoje minimalni i maksimalni mogući ulog, uobičajeno je za minimalni ulog uzeti \$5, a za maksimalni \$3000.
Postoji nekoliko opcija između kojih igrači mogu birati:

- Hit - dobiva još jednu kartu,
- Stand - ne dobiva dodatne karte i njegova partija završava,
- Double down - dobiva još jednu kartu i njegova partija završava pri tome mora uložiti iznos jednak početnom,
- Split - razdvajanje dvije iste karte pri čemu mora uložiti iznos jednak početnom, a svaku kartu zatim igra kao zaseban igrač,
- Early surrender - partija završava kao u standu, ali igrač može odabrati ovu opciju jedino odmah nakon što dobije prve dvije karte. On tada ne uspoređuje karte s djeliteljevima nego dobiva natrag polovicu svog uloga,
- Late surrender - mogućnost odustajanja ako je djeliteljeva vidljiva karta as ili 10, a nakon što djelitelj provjeri ima li blackjack ili ne.

Sve opcije nisu prisutne u svim kockarnicama, većina ih dozvoljava samo hit i stand. Neke kockarnice zahtijevaju od djelitelja da igračima ponude osiguranje ako je njihova vidljiva karta as. Igrač može uložiti do polovice početnog uloga kao osiguranje. Ako neki od igrača prihvati osiguranje, djelitelj će pogledati drugu kartu i reći ima li blackjack ili ne. Ako ima, igračima s osiguranjem iznos osiguranja se vraća u omjeru 2 : 1. Ako nema, kuća pokupi uloge osiguranja i ne isplaćuje ih, a igra se normalno nastavlja, a igrači s blackjackom odmah dobivaju isplatu 3 : 2.
Pretpostavljamo da djelitelj uzima karte dok ne dođe do 16. Ako ima soft 17 koristi opciju stand. Ako ima od 18 do 21 staje i igrači uspoređuju bodove s njim. Nadalje, pretpostavimo da je igračima dopuštena opcija double down nakon što razdvoji dvije iste karte (split), s time da mu je opcija split dopuštena tri puta, a ako se radi o asevima onda samo jednom. Pretpostavljamo da imamo opcije early surrender i late surrender.
Pretpostavka koja vodi do optimalnih strategija je da se radi o objektivnoj funkciji korisnosti. Prema tom modelu vrijeme je beznačajno, a vjerojatnosti pobjede, p, i poraza, q, se izračunavaju po svakoj igri posebno. Matematičko očekivanje dobitka iznosi $p - q$. Vjerojatnost da partija bude neriješena r se ignorira tako da r ravnomjerno podijelimo između p i q, tj.

$$p' = p + \frac{r}{2} \quad i \quad q' = q + \frac{r}{2}.$$

Na taj način je očekivanje dobitka i dalje ostalo isto.
U slučaju jednog špila karata, broj mogućih kombinacija prve dvije karte igrača je $\binom{52}{2} = 1326$, a vjerojatnost da će u prvom dijeljenju igrač dobiti blackjack iznosi $\frac{4 \cdot 16}{1326} = \frac{32}{663} =$

0.04827, odnosno 4.827%. Broj svih mogućih kombinacija prve dvije karte igrača i djelitelja je $\binom{52}{2}\binom{50}{2} = 1624350$.

6.1.2 Optimalne strategije

Pogledajmo sada dvije streategije koje se koriste u ovoj igri. Cilj strategija je pobijediti kockarnicu ili barem smanjiti njezinu prednost budući da kockarnica uvijek ima prednost u odnosu na igrača.

6.1.2.1 Osnovna strategija

Za početak proučimo najjednostavniju strategiju, a to je osnovna strategija (*basic strategy*). Još sredinom prošlog stoljeća matematičari su se počeli baviti proučavanjem blackjacka kako bi došli do matematičkih pravila za pobjedu kockarnice ili barem za smanjenje njezine prednosti. Znajući igračeve karte i djeliteljevu prikazanu kartu, pomoću teorije vjerojatnosti su došli do jasnih smjernica igraču koji je potez najbolje odigrati. Za razvoj ove strategije je pomogla i činjenica da djelitelj mora slijediti ranije navedena pravila, uz to, nema mogućnost opcije split i double down, i za blackjack ne dobiva isplatu 3 : 2. Budući da samo iz vjerojatnosti dobivanja neke karte nije uvijek jasno što je najpovoljnije za igrača, pogotovo u slučaju kada uzimanjem još jedne karte ima veliku vjerojatnost da mu zbroj prijeđe 21, a istovremeno, ako se zaustavi, djelitelj ima veliku šansu za pobjedom. Stoga su primjenom računala izvršene mnogobrojne simulacije igre iz koji je proizašla tablica s osnovnom strategijom. Ova strategija se pokazala optimalnom, a pomaže igraču zaraditi više novaca, na primjer, kaže kada je pravo vrijeme za double down opciju, te izgubiti manje novaca. Na primjer, pretpostavimo da igračev zbroj karata iznosi 16, a vidljiva karta je as. Po logici bi igrač u tom trenutku birao opciju stand, no, međutim, ova strategija sugerira opciju hit. Na taj način će igrač izgubiti manje novaca.
Pogledajmo dobivenu tablicu za jedan špil karata.

Igračeve karte	Djeliteljeva vidljiva karta									
	2	3	4	5	6	7	8	9	D	A
5 − 7	hit	hit	hit	hit	hit	hit	hit	hit	hit	hit,e
8	hit	hit	hit	DD	DD	hit	hit	hit	hit	hit
9	hit	DD	DD	DD	DD	hit	hit	hit	hit	hit
10	DD	DD	DD	DD	DD	DD	DD	DD	hit	hit
11	DD	DD	DD	DD	DD	DD	DD	DD	DD	DD
12	hit	hit	stand	stand	stand	hit	hit	hit	hit	hit,e
13	stand	stand	stand	stand	stand	hit	hit	hit	hit	hit,e
14	stand	stand	stand	stand	stand	hit	hit	hit	hit,e	hit,e
15	stand	stand	stand	stand	stand	hit	hit	hit	hit,e,l	hit,e
16	stand	stand	stand	stand	stand	hit	hit	hit,e,l	hit,e,l	hit,e,l
17	stand	stand	stand	stand	stand	stand	stand	stand	stand	stand,e
18 − 21	stand	stand	stand	stand	stand	stand	stand	stand	stand	hit,e
A-2	hit	hit	DD	DD	DD	hit	hit	hit	hit	hit
A-3	hit	hit	hit	DD	DD	hit	hit	hit	hit	hit
A-4	hit	hit	DD	DD	DD	hit	hit	hit	hit	hit
A-5	hit	hit	DD	DD	DD	hit	hit	hit	hit	hit
A-6	hit	DD	DD	DD	DD	hit	hit	hit	hit	hit
A-7	stand	DD	DD	DD	DD	stand	stand	hit	hit	hit
A-8, 9,D	stand	stand	stand	stand	stand	stand	stand	stand	stand	stand
A-A	split	split	split	split	split	split	split	split	split	split
2 − 2	split	split	split	split	split	split	hit	hit	hit	hit
3 − 3	split	split	split	split	split	split	split	hit	hit	hit,e
4 − 4	hit	hit	split	split	split	hit	hit	hit	hit	hit
5 − 5	DD	DD	DD	DD	DD	DD	DD	DD	hit	hit
6 − 6	split	split	split	split	split	split	hit	hit	hit	hit,e
7 − 7	split	split	split	split	split	split	split	hit	hit,e,l	hit,e,l
8 − 8	split	split	split	split	split	split	split	split	split,e	split,e
9 − 9	split	split	split	split	split	stand	split	split	stand	split
D-D	stand	stand	stand	stand	stand	stand	stand	stand	stand	stand

Tablica 4: Osnovna strategija u slučaju jednog špila. Izvor [4]-str. 268

U prethodnoj tablici slovo e označava early surrender, a slovo l late surrender. DD označava opciju double down, slovo D karte čija je vrijednost 10, a slovo A as.
Kao što možemo vidjeti u tablici je za svaku moguću situaciju navedeno što je najbolje učiniti kako bi smanjili gubitak. Za izračun matematičkog očekivanja dobitka također znamo kolika je vjerojatnost da igrač pobijedi, izgubi ili da bude neriješeno. Na primjer, pretpostavimo da igrač ima dvije karte vrijednosti 10 bodova, ukupno 20, a djelitelj ima 6 i neka je igrač u igru uložio \$1000. Na osnovu povijesti, dobivene su sljedeće vjerojatnosti, 0.097 da će djelitelj izvući karte i imati ukupno 21 bod, 0.102 da će djelitelj imati točno 20 bodova i 0.801 da će imati 19 ili manje. Dakle, igrač ima $9,7\%$ šanse izgubiti svoj ulog, zatim, 10.2% šanse da mu se vrati početni ulog i 80.1% da osvoji \$1000. Matematičko očekivanje dobitka tada iznosi \$704 ili $70,4\%$. To znači da svaki puta kada imamo zbroj 20, a djelitelj 6, bez obzira na koliki iznos se kladili, očekivano zarađujemo $70,4\%$ svog uloga.
Pogledajmo sada koliko je poželjno ulagati u pojedinu partiju igre. Ranije smo rekli kako

je Labouchere sistem, ili sistem precrtavanja, primjenjiv u blackjacku pa pogledajmo to na primjeru.

Primjer 6.1. *Pretpostavimo da je igračev početni kapital* 5000 *jedinica, da koristi sistem precrtavanja i ulaže* $50k$ *jedinica, gdje* k *dobije iz pripadnog niza. Pogledajmo dvije igre. Prva igra:*

Niz	Ulog	Igračeve karte	Zbroj	Vidljiva karta	Opcija	Djeliteljev zbroj	Dobitak	Kapital
$1, 1, 2, 3$	200	$7, 6$	13	2	stand	18	-200	4800
$1, 1, 2, 3, 4$	250	$5, 5$	10	J	stand	20	-250	4550
$1, 1, 2, 3, 4, 5$	300	$J, 10$	20	Q	stand	20	300	4550
$1, 1, 2, 3, 4, 5$	300	$2, 10$	12	J	hit	hit		
hit		$2, 10, 6$	18	J	stand	26	600	4850
$1, 2, 3, 4$	250	$10, 4$	14	5	stand	25	500	5100
$2, 3$	250	$2, 7$	9	7	hit	hit		
hit		$2, 7, Q$	19	7	stand	14	500	5350
Kraj								

Nakon odigrane igre igrač je na dobitku 350 *jedinica. Za odabir opcije služio se tablicom 4. Pomoću ove strategije, igrač je stao s igrom u trenutku kada je na dobitku. Pogledajmo i drugu igru.*

Niz	Ulog	Igračeve karte	Zbroj	Vidljiva karta	Opcija	Djeliteljev zbroj	Dobitak	Kapital
$1, 1, 2, 3, 4$	250	$K, 5$	15	2	stand	20	-250	4750
$1, 1, 2, 3, 4, 5$	300	$3, 3$	6	10	hit	hit		
hit		$3, 3, 8$	14	10	hit	hit		
hit		$3, 3, 8, 3$	17	10	stand	17	300	4750
$1, 1, 2, 3, 4, 5$	300	$8, 4$	12	6	stand	22	600	5050
$1, 2, 3, 4$	250	$10, J$	20	10	stand	20	250	5050
$1, 2, 3, 4$	250	$10, 5$	15	10	hit	hit		
hit		$10, 5, 2$	17	10	stand	20	-250	4800
$1, 2, 3, 4, 5$	300	$K, 7$	17	9	stand	18	-300	4500
$1, 2, 3, 4, 5, 6$	350	$5, 7$	12	7	hit	hit		
hit		$5, 7, 9$	21	7	BLACKJACK	20	700	4850
$2, 3, 4, 5$	350	$7, 3$	10	8	double down	double down		
double down	350	$7, 3, 4$	14	8	-	25	1400	5550
$3, 4$	350	Q, J	20	Q	stand	17	700	5900
Kraj								

U ovoj igri igrač osvaja 900 *jedinica. Iako je u prvih šest partije bio na gubitku od* 500 *jedinica, u preostale tri partije je uspio vratiti izgubljeni kapital i zaraditi dodatni.*
Na dva primjera smo vidjeli da sistem precrtavanja može pomoći igraču osvojiti određeni kapital. Naravno, nije uvijek to tako. Kao što smo ranije rekli, u slučaju niza poraza ulozi se povećavaju što može rezultirati gubitkom igračevog kapitala.

Pogledajmo primjenu martingalne strategije u blackjacku.

Primjer 6.2. *Pretpostavimo da imamo situaciju kao u prethodnom primjeru, da su ishodi igara jednaki i da igrač donosi jednake odluke. Neka igrač primjenjuje martingalnu* *strategiju s početnim ulogom* 50 *jedinica. U prvoj igri primjenom ove strategije igrač ostvaruje dobitak* 150 *jedinica, a u drugoj igri* 250*. Radi se o znatno manjem dobitku nego u prethodom primjeru pa zaključujemo da je sistem precrtavanja profitabilniji za ovu igru.*

6.1.2.2 Brojanje karata

Još jedna strategija koja se pokazala korisnom je brojanje karata (*card counting*). To je sistem kojim se prate karte koje su podijeljene kako bi se utvrdilo kada je ostatak karata povoljniji za igrača. Prednost djelitelja koja postoji u kockarnicama vrijedi za ukupni broj karata s kojim se igra. Sistem se temelji na fundamentalnom teoremu brojanja karata (vidi [13]) koji kaže da kako ulaganje minimalnog iznosa za negativna očekivanja i većih iznosa za pozitivna očekivanja poboljšavaju ukupno očekivanje igrača. Drugim riječima, kako se karte dijele tako među preostalim kartama u špilu ostaje više onih koje su povoljnije ili za igrača (karte vrijednosti 10 i as) ili za djelitelja (2, 3, 4, 5, 6). Brojanjem karata igrač utvrđuje kada među preostalim kartama ima više njemu povoljnijih karata i tada povećava svoje uloge. Kada je među preostalim kartama više onih koje pogoduju djelitelju tada smanjuje uloge. Na taj način on smanjuje prednost djelitelja. Za ovu strategiju potrebno je odlično poznavanje osnovne strategije.
Osnova brojanja karata počiva na kvantitativnom učinku (EOR) na igračevo očekivanje u slučaju uklanjanja pojedine karte iz špila. To je učinak koji jedna karta ima na prednost djelitelja (kockarnice) nakon što je uklonjena iz igre. Osnovni cilj sistema je dodijeliti bodovne vrijednosti svakoj karti tako da približno koreliraju s EOR-om te tako omogućuje igraču procijeniti prednost djelitelja na temelju karata koje je još potrebno podijeliti.
Nakon što je igrač izbrojao karte nakon djeljenja, treba odrediti koliko je ostatak karata povoljan za igrača. Svaka karta velike bodovne vrijednosti u ostatku karata povećava igračevu prednost za 0.5%, ali to vrijedi ako se igra sa jednim špilom. Zbog toga igrač mora procijeniti koliko je još špilova karata preostalo za igru i tim brojem podijeliti zbroj karata dobiven brojanjem. Taj novi zbroj se zove pravi zbroj (*true count*). Potrebno ga je samo približno izračunati, jer on pokazuje prelazi li zbroj određeni cijeli broj ili ne. Stoga je pravi zbroj približno proporcionalan očekivanju igrača. U slučaju da je pravi zbroj negativan, tada u špilu ima više karata manje vrijednosti od onih veće vrijednosti. Ta situacija je povoljnija za djelitelja pa igrač treba ulagati minimalne iznose.
Postoji više vrsta sistema za brojanje karata, pogledajmo neke u sljedećoj tablici.

Sistem	Vrijednost karte									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	A
Hi-Lo	1	1	1	1	1	0	0	0	-1	-1
K-O	1	1	1	1	1	1	0	0	-1	-1
Zen	1	2	2	2	2	1	0	0	-2	-1
Halves	0.5	1	1	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1

Tablica 5: Primjer brojanja karata u nekim sistemima. Izvor [4]-str. 274

Igrači moraju biti oprezni s ovom strategijom jer kockarnica može otkiriti da igrač broji karte i on može dobiti zabranu pristupa.

6.1.3 Kellyjev sistem klađenja u blackjacku

Nakon što igrač dobro nauči osnovnu strategiju i brojanje karata može primijeniti Kellyjev sistem klađenja. Budući da je ovaj sistem namijenjen povoljnim igrama, igrač najprije mora steći prednost ispred kockarnice. Prema Kellyjevom kriteiju igrač treba ulagati postotak kapitala koji je jednak njegovoj prednosti. Na primjer, ako igrač ima kapital 500 jedinica i u prednosti je 1%, trebao bi uložiti 5 jedinica. Kako igrač postiže veću prednost, to ulaže više jedinica, a time i ostvaruje veći dobitak.
Pogledajmo koliko bi igrač s početnim kapitalom 10000 trebao ulagati primjenom ove strategije. Neka su nakon brojanja karata u 100 partija igre dobiveni sljedeći rezultati koji su prikazani u tablici.

Pravi zbroj	Broj partija	Igračeva prednost	Ulog	Ukupan ulog	Očekivani dobitak
-6	1	-3.5%	0	0	0
-5	2	-3.0%	0	0	0
-4	3	-2.5%	0	0	0
-3	4	-2.0%	10	40	-0.80
-2	8	-1.5%	10	80	-1.20
-1	11	-1.0%	10	110	-1.10
0	42	-0.5%	10	420	-2.10
1	11	0%	10	110	0
2	8	0.5%	50	400	2.00
3	4	1.0%	100	400	4.00
4	3	1.5%	150	450	6.75
5	2	2.0%	200	400	8.00
6	1	2.5%	250	250	6.25

Tablica 6: Primjer rezultata brojanja karata i ulaganja prema Kellyjevom kriteriju

Ulozi označeni plavom bojom su izračunati prema Kellyjevom kriteriju. Očekivani gubitak igrača je 5.20 jedinica, a očekivani dobitak 27 jedinca pa je ukupni očekivani dobitak igrača 21.80 jedinica. Kada igrač brojanjem karata postigne prednost može prijeći

na ovaj sistem klađenja. Međutim, mora biti oprezan, ako odmah nakon uloga 10 uloži 50 ili neki veći iznos, postane sumnjiv u kockarnici. Iz tog razloga, igrač može koristiti, na primjer, 80% Kellyjevog uloga. Tako bi umjesto 50 jedinica uložio 40. Tada ukupni očekivani dobitak iznosi 12.80. Za ovaj primjer nemamo točan broj pobjeda i poraza igrača pa ne znamo koliki je stvarni dobitak ostvario.
Dakle, za primjenu ovog kriterija igrač bi trebao znati savršeno brojati karte i to vješto prikrivati.

6.2 Baccarat

Baccarat je jednostavna igra na sreću koja se igra sa šest ili osam špilova od 52 igraće karte. Postoje tri verzije igre, a to su punto banco, baccarat banque i baccarat chemin de fer. Pravila su uglavnom ista u svim verzijama. Cilj igre je predvidjeti tko će pobijediti (igrač, bankar ili neriješeno). Onaj čiji je zbroj bliže 9 je pobijedio. Na početku svake partije, koja se naziva se i coup, igrači stavljaju ulog na pobjedu igrača, bankara ili neriješenu partiju. U slučaju da se klade na igrača i dobiju okladu, iznos im se isplaćuje u omjeru 1 : 1. U slučaju ulaganja da će bankar pobijediti i on pobjedi, kuća uzima proviziju 5%, stoga se igraču isplaćuje 0.95 : 1. Igraču koji se kladio na neriješenu partiju isplaćuje se nagrada u omjeru 8 : 1 (neke kockarnice isplaćuju 9 : 1). Nakon što su igrači postavili uloge, igrač i bankar dobijaju po dvije karte koje su svima vidljive. Karte s brojevima vrijede koliki je broj, as vrijedi 1, a 10, dečko, dama i kralj nula bodova. Karte se zbrajajnju modulo 10. Ako jedan od njih ima zbroj 8 ili 9, partija završava. Ako je igračev zbroj $0-5$ on vuče dodatnu kartu, a ako je zbroj 6 ili 7 koristi opciju stand. Nakon toga bankar ili vuče dodatnu kartu ili koristi opciju stand po sljedećoj tablici.

Igračeve karte	Vuče kartu ako ima zbroj	Stand ako ima zbroj
Nema kartu	$0-5$	6 ili 7
2 ili 3	$0-4$	$5-7$
4 ili 5	$0-5$	6 ili 7
6 ili 7	$0-6$	7
8	$0-2$	$3-7$
as, 9 ili 10	$0-3$	$4-7$

Tablica 7: Pravila po kojima igra Bankar. Izvor [4]-str. 260

U [12]-poglavlje 3 možemo pronaći vjerojatnost pobjede bankara p, igrača q i neriješene partrije r. Vjerojatnosi su $p = 0.4586$, $q = 0.4463$ i $r = 0.0951$. Stoga bi se igrač uvijek trebao kladiti na pobjedu bankara, međutim, kako smo ranije rekli, kockarnice u tom slučaju uzimaju proviziju od 5%. Očekivani dobitak igrača u slučaju klađenja na igračevu pobjedu iznosi -0.0123 jedinica. U slučaju klađenja na bankara, uz proviziju, očekivani dobitak iznosi -0.0106, dok za neriješenu partiju iznosi -0.1441. Dakle, gledajući očekivani dobitak zaključujemo da bi se igrač svakako trebao kladiti na bankara.

Pogledajmo na jednoj igri kolika je promjena igračevog kapitala ako ulaže prema sistemu precrtavanja, d'Alembertovom sistemu i martingalnoj strategiji.

Primjer 6.3. *Pretpostavimo da je igračev početni kapital* 10000 *jedinica i da uvijek ulaže na bankara. Neka mu je početni ulog* 100 *jedinica i ulaže prema:*

(a) sistemu precrtavanja

Niz	Ulog	Igračeve karte	Igračev zbroj	Bankarove karte	Bankarov zbroj	Dobitak
$1,2,3,2,2$	300	$7,7,3$	7	$3,A,J$	4	-300
$1,2,3,2,2,3$	400	$9,6,8$	3	$Q,3$	3	400
$1,2,3,2,2,3$	400	$K,2,8$	0	$J,4$	4	780
$2,3,2,2$	400	$7,J$	7	$A,J,4$	5	-400
$2,3,2,2,4$	600	$J,3,K$	3	$5,K$	5	1170
$3,2,2$	500	$2,K,9$	1	$8,6$	4	975
2	200	$2,K$	2	$3,5$	8	390
Kraj						

Igračev kapital na kraju igre je 10915 *jedinica. Ostvario je dobitak od čak* 915 *jedinica.*

(b) d'Alembertovom sistemu s $K = 50$. *U prvu partiju igrač ulaže* 100 *jedinica, u slučaju poraza ulaže dodatnih* 50 *jedinica, a u slučaju pobjede ulog smanjuje za* 50. *Primjenom ove strategije na igru kao u (a) dijelu igračev kapital na kraju igre iznosi* 10227, 5 *jedinica. Ostvario je dobitak, ali manji nego primjenom prethodnog sistema.*

(c) martingalnom strategijom. U prvu partiju igrač ulaže 100 *jedinica, u slučaju poraza ulaže dvostruko više, a u slučaju pobjede ulaže početni iznos od* 100 *jedinica. Primjenom ove strategije na igru iz (a) dijela igračev kapital na kraju igre iznosi* 10350 *jedinica.*
Primjenom sistema precrtavanja je igrač ostvario najveći dobitak.

Pogledajmo još jedan primjer u kojemu ćemo pretpostaviti da se igrač kladi na pobjedu igrača.

Primjer 6.4. *Pretpostavimo da imamo igru kao u prethodnom primjeru, igračev početni kapital iznosi* 10000 *jedinica i početni ulog je* 100 *jedinica. Kao što smo rekli, igrač se kladi na igrača.*

(a) Primjenom sistema precrtavanja, nakon pete partije igre igrač ima niz od tri poraza, u posljednoj partiji mora uložiti 1000 *jedinica koje izgubi te igra u tom slučaju ne staje. Sada je njegov kapital* 8900. *U iduću partiju ulaže* 1300 *i pretpostavimo da pobijedi, osvaja dupli iznos i ostvaruje ukupan dobitak od* 1500 *jedinica.*

(b) *Primjenom d'Alembertove strategije s* $K = 50$, *nakon odigrane igre igračev kapital iznosi* 9950. *U posljednju partiju igre je uložio* 150 *jedinica koje je izgubio, ako se igra nastavi, u sljedeću partiju ulaže* 200 *jedinica. Pretpostavimo da je igrač pobijedio tu partiju, tada ostvaruje ukupan dobitak od* 150 *jedinica.*

(c) *Primjenom martingalne strategije, igračev kapital na kraju igre iznosi* 9500. *Ako bi odigrao još jednu partiju, morao bi uložiti* 800 *jedinica i u slučaju pobjede ostvaruje ukupan dobitak od* 300 *jedinca. U sva tri sistema, ako se niz poraza nastavi, može doći do igračeve propasti jer igrač ulaže sve veće iznose.*

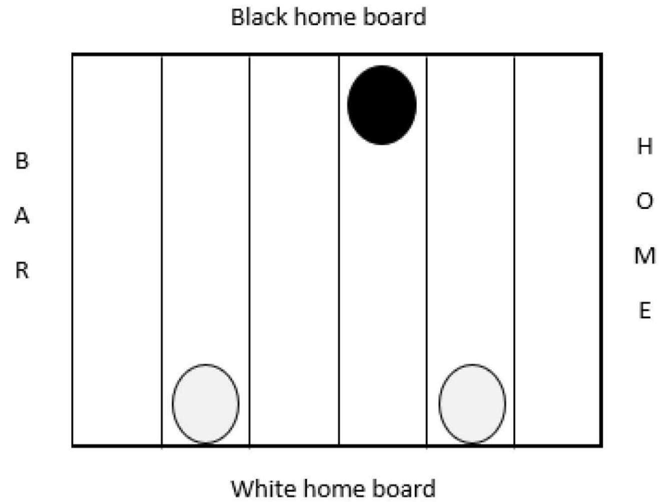
Iz prethodna dva primjera možemo zaključiti kako primjenom sistema precrtavanja igrač ostvaruje najveći dobitak ako se kladi na bankara i najveći gubitak ako se kladi na igrača. Analogno, d'Alembertovim sistemom ostvaruje najmanji dobitak, odnosno gubitak, ako se kladi na bankara, odnosno igrača.
Pretpostavimo da je igračev početni kapital 1000 jedinica i da u svaku partiju ulaže 100, primjenom formule iz korolara 5.3 računamo vjerojatnost propasti igrača u 14. partiji igre i dobivamo da iznosi 0.6397. Za slučaj kada se kladi na bankara vjerojatnosti propasti u istoj partiji bi bila 0.4874. Dakle, bez obzira na tijek igre, igrač s početnim kapitalom 1000 jedinica koji ulaže 100, ima manju šansu da će izgubiti sav svoj kapital ako se kladi na pobjedu bankara. To nam daje još jedan razlog zašto je bolje kladiti se na bankara.

6.3 Backgammon

Backgammon je jednostavniji primjer igre na sreću u kojoj neizvjesnost daje bacanje dviju igraćih kockica. To je jedna od najstarijih igara na ploči. Za igru se koristi ploča s 24 polja na kojoj svaki igrač ima po 15 svojih figura koje pomiče ovisno o dobivenim brojevima na kockicama. Cilj igre je izbaciti sve figurice s ploče, a da bi se figurice mogle izbacivati potrebno ih je dovesti na dio ploče koji se naziva home board. Ako igrač dobije dva ista broja na kockicama, figure miče za taj broj četiri puta. Detaljnije o pravilima i samoj igri može se pronaći u [14] i [12]-str. 107.
U igri postoji i kocka za dupliranje. U svakom potezu igrač može pitati protivnika želi li igrati za dubli ulog, on može prihvatiti tu ponudu ("take") ili odbiti ("drop"). Ako odbije, predaje igru i igrač osvaja početni ulog. Ako prihvati, on je vlasnik kocke i jedino on može sljedeći put duplirati ulog, u slučaju da se igra okrene u njegovu korist. Postavlja se pitanje u kojem slučaju treba prihvatiti opciju dupliranja.
Pretpostavimo da je trenutni ulog jedna jedinica, ako igrač odbije ponudu za dupliranje uloga gubi jednu jedinicu, a ako prihvati, nastavlja igrati za dvije jedinice. Pretpostavimo da je igrač prihvatio ponudu i zanemarimo prednosti posjedovanja kockice. Nadalje, neka je p vjerojatnost pobjede. Tada igrač osvaja 2 jedinice s vjerojatnosti p i gubi 2 jedinice s vjerojatnosti $1 - p$. Očekivani dobitak igrača u tom slučaju iznosi $4p - 2$. Usporedimo li dobiveni izraz s gubitkom jedne jedinice u slučaju da igrač nije prihvatio

ponudu, dobivamo sljedeće: ako je vjerojatnost pobjede manja od 1/4, igrač bi trebao odbiti ponudu dupliranja, u suprotnom bi trebao prihvatiti.
U prethodnom razmatranju smo zanemarili prednosti posjedovanja kockice. Ako igrač prihvati tu ponudu u početku igre, on može ponovno duplirati ulog ako igra krene u njegovu korist. Sada se postavlja pitanje treba li udvostručiti ulog ili ne. Na primjer, ako igrač vidi da je igra povoljnija za njega, ponudi protivniku dupliranje uloga i on prihvati. Tada jedino protivnik može opet udvostručiti ulog, a ako igra krene u njegovu korist, naravno da će to i učiniti. Stoga treba biti oprezan s tom opcijom.
Pogledajmo na nekoliko primjera treba li igrač udvostručiti ulog ili ne.

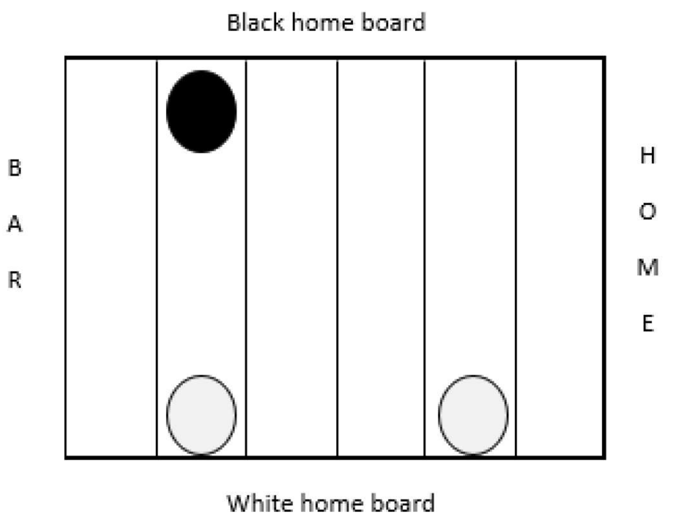
Primjer 6.5. *(a) Pretpostavimo da imamo situaciju kao na slici. Igračeve figure su bijele i on je na potezu. Početni ulog je jedna jedinica. Pitanje je treba li on duplirati.*



Slika 5: Primjer situacije iz igre Backgammon. Izvor [5]-str. 77

Prvo je potrebno izračunati vjerojatnost njegove pobjede. Ukupno ima 36 *mogućih kombinacija brojeva, od toga* 19 *kombinacija donosi pobjedu. Slijedi da je vjerojatnost pobjede igrača* $p = 19/36$. *Kako je vjerojatnost pobjede protivnika* $q = 17/36 > 1/4$, *on će prihvatiti ponudu dupliranja. Ako igrač ne udvostruči ulog prosječno osvaja* 1/18. *U slučaju dvostrukog uloga, očekivano osvaja* 1/9. *Dakle, igrač bi trebao duplirati.*

(b) Pretpostavimo da imamo sljedeću situaciju, početni ulog je jedna jedinica i pitamo se treba li igrač duplirati.



Slika 6: Primjer situacije iz igre Backgammon. Izvor [5]-str. 78

U slučaju da igrač ne udvostruči ulog i igra se nastavi, moguće su sljedeće situacije:

1. *Igrač pobjeđuje nakon prvog bacanja,*
2. *Nakon prvog bacanja igrač nije pobijedio i kockicu baca protivnik koji pobjeđuje,*
3. *Nakon prvog bacanja nitko nije pobijedio i igrač baca drugi put.*

U prvom slučaju, imamo situaciju kao u (a) dijelu primjera, vjerojatnost pobjede je $19/36$ *i u tom slučaju igrač osvaja jednu jedinicu. Ako igrač ne pobjedi, dolazimo do druge moguće situacije u kojoj je vjerojatnost pobjede protivnika* $\frac{31}{36}$. *Tada vjerojatnost da će igrač izgubiti jednu jedinicu iznosi* $(\frac{17}{36})(\frac{31}{36}) = \frac{527}{1296}$. *S vjerojatnosti* $\frac{85}{1296}$ *igrač se nalazi u trećoj situaciji. Tada bi trebao udvostručiti ulog, međutim, šanse za pobjedu su velike i protivnik bi vjerojatno odbio tu ponudu. Igrač osvaja jednu jedinicu. Očekivani dobitak iznosi* $\frac{19}{36} - \frac{527}{1296} + \frac{85}{1296} = \frac{121}{648}$.
Pretpostavimo da je igrač ponudio dupliranje i protivnik je prihvatio. Kao i ranije, s vjerojatnosti $19/36$ *osvaja dvije jedinice i s vjerojatnosti* $17/36$ *gubi dvije jedinice te tada kocku za dupliranje posjeduje protivnik. Dolazimo do druge situacije u kojoj protivnik ima vjerojatnost pobjede* $31/36$ *i on će tada ponuditi dupliranje. Igrač bi trebao odbiti tu opciju. Očekivani dobitak igrača ako duplira iznosi* $1/9$ *što je manje nego kada ne duplira. Stoga igrač u ovoj situaciju ne bi trebao duplirati.*

U [12]-poglavlje 7 se može pronaći više primjera i tablice s vjerojatnostima pobjede, kao i one s očekivanim dobitkom kada su igraču ostale dvije figure na ploči.

6.4 Tko želi biti milijunaš?

Tko želi biti milijunaš? je televizijski kviz koji se prikazuje u velikom broju država. Za razliku od prethodnih igara na sreću, ovdje je slučajnost u postavljenom pitanju i količini znanja koju posjeduje igrač. Također, on donosi odluke uz nesigurnost. Da bi se igrač mogao natjecati za osvajanje milijuna, mora proći dio igre koja se naziva "najbrži prst". U tom dijelu igre, postavlja se pitanje u kojem je potrebno posložiti odgovore u određenom poretku, ukupno ima 24 kombinacije. Nakon toga igrač odgovara na 15 pitanja s ponuđenim odgovorima *a, b, c, d*. Svako pitanje nosi određenu nagradu, f_n.

n	f_n	w_n
1	100	0
2	200	0
3	300	0
4	500	0
5	1000	0

n	f_n	w_n
6	2000	1000
7	4000	1000
8	8000	1000
9	16000	1000
10	32000	1000

n	f_n	w_n
11	64000	32000
12	125000	32000
13	250000	32000
14	500000	32000
15	1000000	32000

Tablica 8: Vrijednost nagrade f_n i nagrada u slučaju netočnog odgovora w_n za svako pitanje

Na svakom pitanju igrač može odustati i osvaja nagradu f_{n-1}. Ako odgovori netočno osvaja nagradu w_n. Kada igrač točno odgovori na pitanje $n = 5$ i $n = 10$, kaže se da je prešao prvi, odnosno drugi prag i tada se vrijednost w_n povećava. Igrač na raspolaganju ima tri pomoći (lifelines, joker), svaku pomoć može iskorisitit samo jednom, a na svakom pitanju ih može koristiti više. To su "pitaj publiku", "pitaj prijatelja" i "50 : 50".
Potrebno je napraviti matematički model za ovu igru i pronaći igračevu optimalnu strategiju, što možemo pronaći u [3].

6.4.1 Određivanje stupnja znanja i skupa stanja igrača

Označimo s $n = 1, ..., 15$ broj pitanja na kojemu se igrač nalazi i neka je $n = 16$ nakon što je igrač točno odgovorio na svih 15 pitanja.
Glavni parametri u igri su vjerojatnosti da će igrač točno odgovoriti na $n-$to pitanje. Neka je $\pi^n = (\pi_a^n, \pi_b^n, \pi_c^n, \pi_d^n)$ vektor vjerojatnosti igrača za $n-$to pitanje. Svaka komponenta π_i^n predstavlja vjerojatnost koju igrač dodjeljuje događaju "točan odgovor je i", $i = a, b, c, d$. Komponente vektora su nenegativni realni brojevi koji u sumi daju 1.
Kako igrač neće moći točno procijeniti vektor vjerojatnosti, definiramo konačan skup $\mathcal{K}$ mogućih stupnjeva znanja za svako pitanje. Svaki stupanj znanja odgovara jednom vektoru π^n. Stupnjeve znanja možemo podijeliti u pet osnovnih kategorija, a to su

k=0: igrač zna točan odgovor (nema nesigurnosti)

k=1: igrač je uvjeren, ali nije siguran, da zna točan odgovor k=2: igrač se dvoumi između dva odgovora, preostala dva nisu sigurno točna

k=3: dva odgovora su eliminirana s pomoći $50:50$, ali igrač se i dalje dvoumi između dva preostala odgovora

k=4: igrač nema nikakvog znanja koji je točan odgovor.

Sada možemo staviti da je $\mathcal{K} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Jedna od mogućih kombinacija vektora vjerojatnosti za svaki k nalazi se u sljedećoj tablici. Komponente vektora ne moraju biti u navedenom poretku, ali permutacijom ne mijenjamo smisao.

k	Vektor vjerojatnosti
$k=0$	$(1, 0, 0, 0)$
$k=1$	$(\frac{4}{5}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15})$
$k=2$	$(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10})$
$k=3$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$
$k=4$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

Tablica 9: Primjer vektora vjerojatnosti za svaki stupanj znanja k

Nadalje, s K_n ćemo označiti skup mogućih stanja nakon što je igrač ponudio odgovor na $(n-1)-$vo pitanje i još ne znamo je li taj odgovor točan. Budući da njegova nagrada ovisi o broju pragova koje je prošao, s L_1, L_2 i L_3 ćemo označiti stanja gubitka, gdje stanje L_{i+1} označava da je igrač prošao $i-$ti prag za $i = 0, 1, 2$. Nultim pragom ćemo smatrati situaciju u kojoj igrač daje krivi odgovor na neko od prvih pet pitanja i ništa ne osvaja. Uzimajući u obzir ta tri stanja i stanje W koje označava pobjedu igrača, imamo

$$K_1 = \mathcal{K},$$
$$K_n = \mathcal{K} \cup \{L_1\}, \quad za \;\; n = 2, ..., 6,$$
$$K_n = \mathcal{K} \cup \{L_1, L_2\}, \quad za \;\; n = 7, ..., 11,$$
$$K_n = \mathcal{K} \cup \{L_1, L_2, L_3\}, \quad za \;\; n = 12, ..., 15,$$
$$K_{16} = \{W, L_1, L_2, L_3\}.$$

Na primjer, nakon što je igrač ponudio pdgovor na peto pitanje, on tada prelazi u stanje $a \in K_6$, koje može biti točan odgovor uz neki stupanj znanja k ili netočan odgovor i u tada osvaja 0.
Ako igrač netočno odgovori na $n-$to pitanje, tada prelazi u stanje $(n+1, L_m)$, gdje je $(n, m) \in \Lambda$ i $\Lambda = (\{1, ..., 5\} \times \{1\}) \cup (\{6, ..., 10\} \times \{2\}) \cup (\{11, ..., 15\} \times \{3\})$.
Također, potrebno je pratiti koje pomoći je igrač iskoristio. Pomoć 1 neka bude "$50:50$", pomoć 2 "pitaj prijatelja" i pomoć 3 "pitaj publiku". Budući da se svaka pomoć može samo jednom iskoristiti, definiramo skup $S = \{0, 1\}^3$ i neka je $(s_1, s_2, s_3) \in S$, pri čemu s_i označava je li se pomoć i iskoristila, za $i = 1, 2, 3$. Pomoći ćemo označiti s $l_1 = (1, 0, 0)$,

$l_2 = (0,1,0)$ i $l_3 = (0,0,1)$, tako l_i znači da je pomoć i iskorištena.
Za (s_1, s_2, s_3) i (t_1, t_2, t_3) iz S definiramo

$$s \vee t = (\max(s_1,t_1), \max(s_2,t_2), \max(s_3,t_3)), \qquad s - t = (s_1 - t_1, s_2 - t_2, s_3 - t_3)$$

i skup $D(s) = \{s \vee l_1, s \vee l_2, s \vee l_3\} \setminus \{s\}$. Igračev napredak u igri je sada moguće u potpunosti opisati uređenim parom $(n,s) \in \mathbb{P} = \{1,2,...,16\} \times S$ koji nazivamo razine ili faze igre.
Razlikom $\sigma - s \in \{l_1, l_2, l_3\}$ dobivamo pomoć koja se iskoristila za prelazak iz razine (n,s) u razinu (n,σ), za $\sigma \in D(s)$. Primjerice, ako je $s = (1,0,0)$, što znači da je igrač iskoristio samo pomoć 1, tada je $D(s) = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$. Da bi igrač prešao iz stanja (n,s) u (n,σ), gdje je $\sigma = (1,0,1)$, iskoristio je pomoć 3 jer je $\sigma - s = (0,0,1)$.
Uočimo da skup $D(s)$ za $s \neq (1,1,1)$ predstavlja moguće kombinacije pomoći nakon što igrač iskoristi jednu pomoć.
Vratimo se još na stupanj znanja igrača. Pretpostavimo sada da je $q_n(k)$ vjerojatnost da igrač ima određeni stupanj znanja $k \in \mathcal{K}$ za $n-$to pitanje i neka je r_k vjerojatnost da je njegov odgovor točan uz taj stupanj znanja. Za izbor $q_n(k)$ moramo uzeti u obzir činjenicu da pitanja postaju sve teža. Pitanja možemo podijeliti u tri grupe s obzirom na prijeđene pragove. Tako su u grupi 1 pitanja do prvog praga, u grupi 2 pitanja do drugog praga i u trećoj grupi se nalazi posljednji set pitanja prije glavne nagrade. Stavimo sada da je za svaki $k \in \mathcal{K}$, $q_n(k) = \rho_m(k)$, gdje je $(n,m) \in \Lambda$. Sada je $\rho_m(k)$ vjerojatnost da je igračev stupanj znanja jednak k za grupu pitanja m, $m = 1,2,3$. Stupanj znanja $k = 3$ se postiže jedino nakon korištenja pomoći 1 pa stavimo da je $\rho_m(3) = 0$, $m = 1,2,3$. Primjer vrijednosti za $\rho_m(k)$ je prikazan u sljedećoj tablici.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$\rho_1(k)$	0.5	0.4	0.05	0	0.05
$\rho_2(k)$	0.2	0.3	0.2	0	0.3
$\rho_3(k)$	0.2	0.2	0.1	0	0.5

Tablica 10: Primjer vjerojatnosti da je igračev stupanj znanja k za svaku grupu pitanja

S obzirom na izbor vektora vjerojatnosti iz tablice 9, stavimo da je $r_0 = 1$, $r_1 = \frac{4}{5}$, $r_2 = \frac{2}{3}$, $r_3 = \frac{1}{2}$ i $r_4 = \frac{1}{4}$.

6.4.2 Matematički model

U fazi (n,s) status igrača je opisan slučajnom varijablom $X_{n,s}$ koja ima vrijednosti u K_n. Događaj $\{X_{n,s} = k\}$ se javlja kada je igračev stupanj znanja za pitanje n jednak k, a događaj $\{X_{n,s} = L_m\}$ se javlja ako je igrač prethodno dao netočan odgovor. Prije postavljanja $n-$tog pitanja ne znamo ništa o igračevom stanju za to pitanje, kao ni za pitanja koja slijede, a njegova stanja na prethodnim pitanjima nam više nisu bitna. Stoga kažemo

da igra ima Markovljevo svojstvo koje smo definirali u dijelu 5.3.1. Na razini (n,s) igrač može odgovoriti točno na pitanje i prelazi na novu razinu $(n+1,s)$ sa statusom $X_{n+1,s}$ ili može iskoristit pomoć i prelazi na razinu (n,σ), $\sigma \in D(s)$, sa statusom $X_{n,\sigma}$.
Ako igrač odustane u fazi $(n,s) \in \mathbb{P}$, tada vrijednost isplate ne ovisi o s i pišemo $f(n,s) = f(n,k)$, a prema pravilima igre, stavimo da je $f(n,k) = f_{n-1}$, za $k \in K_n$. Funkciju f zovemo funkcijom isplate.
Pretpostavimo sada da igrač želi maksimizirati očekivanu korisnost isplate za danu funkciju korisnosti $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ i stavimo $g(n,k) = u(f(n,k))$. Nadalje, neka je $u^*(n,s,k)$ očekivana korisnost igrača u fazi igre (n,s) sa stanjem $k \in K_n$ koji igra optimalno od ove faze. Imamo

$$u^*(n,s,j) = \max\big(g(n,j), \mathcal{C}(n,s,j), \max_{\sigma \in D(s)} \mathcal{L}(n,s,\sigma,j)\big) \tag{1}$$

gdje su

$$\mathcal{C}(n,s,j) = \sum_{k \in K_{n+1}} p_n(j,k)u^*(n+1,s,k) \quad i \quad \mathcal{L}(n,s,\sigma,j) = \sum_{k=0}^{4} p_{n,\sigma-s}(j,k)u^*(n,\sigma,k),$$

a vjerojatnosti $p_n(j,k)$ i $p_{n,\sigma-s}(j,k)$ se nazivaju prijelazne vjerojatnosti. Definirane su na sljedeći način

$$p_n(j,k) = P(X_{n+1,s} = k | X_{n,s} = j) \;\; za \;\; j \in K_n, \; k \in K_{n+1},$$
$$p_{n,\sigma-s}(j,k) = P(X_{n,\sigma-s} = k | X_{n,s} = j) \;\; za \;\; j,k \in K_n.$$

Do tih vjerojatnosti možemo doći i pomoću vjerojatnosti $q_n(k)$ i r_k, za $k \in \mathcal{K}$. Ako pretpostavimo da je točno odgovaranje na $n-$to pitanje nezavisno o stupnju igračevog znanja za $(n+1)-$vo pitanja, tada za $j \in \mathcal{K}$ imamo

$$p_n(j,k) = r_j q_{n+1}(k), \quad k \in \mathcal{K}, \; n = 1, ..., 14,$$
$$p_n(j, L_m) = \begin{cases} 1 - r_j & ako \; je \; (n,m) \in \Lambda \\ 0 & \text{inače} \end{cases},$$
$$p_{15}(j,W) = r_j,$$

Ako na razini (n,s) igrač netočno odgovori na postavljeno pitanje, tada prelazi u stanje $L_m \in K_{n+1}$ na razinu $(n+1,s)$, gdje je $(n,m) \in \Lambda$. Zbog potpunosti stavimo još da je $p_n(L_m, L_m) = 1$ ako je $L_m \in K_n$, $n = 2, ..., 15$. Detaljnije o prijelaznim vjerojatnostima se može pronaći u [10].
Nakon što se vrijednosti $u^*(n,s,k)$ izračunaju, optimalna strategija za igrača kaže da ako je on u fazi (n,s) sa stupnjem znanja j, tada mora pogledati koji je izraz s desne strane jednadžbe (1) jednak $u^*(n,s,j)$. Ako je to

- $g(n, j)$, onda bi trebao odustati i uzeti nagradu $f(n, j)$,
- $\mathcal{C}(n, s, j)$, tada bi trebao odgovoriti na pitanje,
- $\max\limits_{\sigma \in D(s)} \mathcal{L}(n, s, \sigma, j)$, onda bi trebao izabrati m takav da se za $\sigma = s \vee l_m$ postiže maksimum te nakon toga iskoristiti pomoć m.

U posljednja dva slučaja igrač dolazi u fazu $(n + 1, s)$ ili (n, σ) i ponavlja proces.

6.4.3 Modeliranje pomoći

Svaka od tri pomoći ima neke posebne karakteristike pa pogledajmo kako ih modelirati. U ovom dijelu koristimo prijelazne vjerojatnosti $p_{n,l_m}(j, k)$.

6.4.3.1 Pomoć "50 : 50"

Pretpostavimo da svaki od tri moguća para netočnih odgovora ima jednaku vjerojatnost eliminacije, odnosno s vjerojatnosti $\frac{1}{3}$ će jedan par netočnih odgovora biti uklonjen. Nadalje, označimo s C_t događaj "odgovor t je točan", za $t = a, b, c, d$ i s $E_{i,j}$ događaj "eliminirani su odgovori i i j", za $i, j = a, b, c, d,\ i \neq j \neq t$. Primjenom formule potpune vjerojatnosti dolazimo do vjerojatnosti događaja $E_{i,j}$, uz poznavanje igračevog vektora vjerojatnosti π^n. Na primjer, ako je igračev stupanj znanja $k = 2$ i $\pi^n = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10})$, tada je

$$P(E_{a,b}) = P(E_{a,b}|C_c)P(C_c) + P(E_{a,b}|C_d)P(C_d) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{15}.$$

Analogno računamo i vjerojatnosti eliminacije preostalih parova odgovora i dobivamo $P(E_{c,d}) = \frac{4}{15}$ i $P(E_{a,c}) = P(E_{a,d}) = P(E_{b,c}) = P(E_{b,d}) = \frac{1}{6}$

Nakon eliminacije dva odgovora, pomoću Bayesove formule izračunamo posteriornu vjerojatnost da je svaki preostali odgovor točan. Zatim odredimo stupanj znanja igrača i dobivena vjerojatnost postaje vjerojatnost da će igrač točno odgovoriti. Na primjer,

$$P(C_c|E_{a,b}) = \frac{P(E_{a,b}|C_c)P(C_c)}{P(E_{a,b})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{1}{15}} = \frac{1}{2},$$

igračev stupanj znanja sada najbolje odgovora stupnju $k = 3$. Analogno i za događaj $E_{c,d}$. U slučaju $E_{b,d}$, $E_{b,c}$, $E_{a,c}$ i $E_{a,d}$ stupanj znanja igrača odgovara stupnju $k = 1$. Prijelazne vjerojatnsti su tada, $p_{n,l_1}(2, 3) = P(E_{a,b} \cup E_{c,d}) = P(E_{a,b}) + P(E_{c,d}) = \frac{1}{3}$ i $p_{n,l_1}(2, 1) = 4P(E_{b,c}) = \frac{2}{3}$.

Analogno računamo i ostale prijelazne vjerojatnosti koje su prikazane u sljedećoj tablici.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$p_{n,l_1}(0,k)$	1	0	0	0	0
$p_{n,l_1}(1,k)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{6}{15}$	0	$\frac{2}{15}$	0
$p_{n,l_1}(2,k)$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
$p_{n,l_1}(3,k)$	0	0	0	1	0
$p_{n,l_1}(4,k)$	0	0	0	1	0

Tablica 11: Prijelazne vjerojatnosti za pomoć "50 : 50"

6.4.3.2 Pomoć "pitaj prijatelja"

Za ovu pomoć se pitamo koliki je stupanj znanja prijatelja i kako njegov stupanj znanja utječe na igračev. Pretpostavimo da su mogući stupnjevi znanja prijatelja jednaki kao igračevi i neka je $fr_n(k)$ vjerojatnost da je stupanj znanja prijatelja za $n-$to pitanje k.
Prvo pogledajmo kako njegov stupanj znanja utječe na igračev. Neka je $I(j,i,k)$ vjerojatnost da se igračev stupanj znanja nakon razgovora s prijateljem, čiji je stupanj znanja i, promijenio sa j na k. Vjerojatnost $p_{n,l_2}(j,k)$, $j,k = 0,...,4$ sada računamo po formuli:

$$p_{n,l_2}(j,k) = \sum_{i=0}^{4} fr_n(i) I(j,i,k). \tag{2}$$

Ako je igračev stupanj $j = 4$ i prijateljev i, tada očito igračev stupanj promijeni na i pa je $I(4,i,i) = 1$, za $i = 0,...,4$. Ako je $j = 3$, to znači da je igrač iskoristio pomoć 50 : 50, a tada i stupanj znanja prijatelja mora biti isto 3. Stoga je $I(3,3,3) = 1$ i $I(3,3,k) = 0$ za $k \neq 3$. U slučaju da je stupanj znanja prijatelja $i = 0$, 1 ili 2, onda stavimo da je $I(3,i,k) = p_{n,l_1}(i,k)$ za $k = 0,...,4$ i $i = 0,1,2$.
Nadalje pretpostavimo da su stupnjevi znanja igrača i prijatelja nezavisni, ali odgovori koje oni smatraju točnim nisu nezavisni. Neka je njihov stupanj $j = i = 1$. Ako preferiraju isti odgovor, tada igrač postaje sigurniji u svoj odgovor, što se javlja s vjerojatnosti r_1 i on prelazi u stupanj $k = 0$. U suprotnom, ako ne preferiraju isti odgovor, igrač je nesigurniji u svoj odgovor i tada prelazi u stupanj $k = 2$. Stoga je $I(1,1,0) = r_1$, a $I(1,1,2) = 1-r_1$.
Ako je $j = 2$ i $i = 1$ tada odgovor prijatelja može biti jedan od dva igračeva izbora i to s vjerojatnosti $4/5$ ili može biti jedan od preostala dva odgovora. U prvom slučaju pretpostavimo da će igrač poslušati prijatelja i tada prelazi u stupanj $k = 1$. Dok u drugom slučaju prijatelj zbunjuje igrača i on prelazi u stupanj $k = 4$. Stoga je $I(2,1,1) = \frac{4}{5}$ i $I(2,1,4) = \frac{1}{5}$.
Ostale situacije su prikazane u sljedećoj tablici. Na $(i,j)-$toj poziciji se nalazi stupanj znanja k u koji igrač prelazi, a u zagradi se nalazi vjerojatnost $I(j,i,k)$ za taj k.

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$j=0$	0 (1)	0 (1)	0 (1)		0 (1)
$j=1$	0 (1)	0 (4/5); 2 (1/5)	1 (4/5); 4 (1/5)		1 (1)
$j=2$	0 (1)	1 (4/5); 4 (1/5)	1 (20/45); 2 (24/45); 4 (1/45)		2 (1)
$j=3$	0 (1)	0 (6/15); 1 (7/15); 3 (2/15)	1 (2/3); 3 (1/3)	3 (1)	3 (1)
$j=4$	0 (1)	1 (1)	2 (0)		4 (1)

Tablica 12: Prikaz mogućih stupnjeva znanja k i vrijednosti $I(j,i,k)$ za sve $i,j=0,...,4$

Na kraju još pretpostavimo da je $fr_n(k) = q_n(k)$ što znači da igrač i prijatelj imaju istu vjerojatnost da im stupanj znanja bude k. Sada možemo lako izračunati $p_{n,l_2}(j,k)$, $j,k=0,...,4$ po formuli (2).

6.4.3.3 Pomoć "pitaj publiku"

Pretpostavimo da je publici u cilju pomoći igraču i da iz histograma odgovora publike igrač može odrediti stupanj znanja publike koji može biti od 0 do 4. Tada možemo ovu pomoć promatrati kao pomoć "pitaj prijatelja". Označimo s $A_n(k)$ vjerojatnost da je stupanj znanja publike na $n-$tom pitanju k. Tada $p_{n,l_3}(j,k)$ računamo po formuli (2) samo što vjerojatnosti $fr_n(i)$ zamijenimo s $A_n(i)$.
Kao što smo za igrača odredili vjerojatnosti $\rho_m(k)$ prikazane u tablici 10, isto možemo učiniti i za publiku. Stavimo da je $A_n(k) = \alpha_m(k)$ za $(n,m) \in \Lambda$, što predstavlja vjerojatnost da je stupanj znanja publike jednak k za svaku grupu pitanja. Pogledajmo primjer tih vjerojatnosti.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$\alpha_1(k)$	0.6	0.3	0.05	0	0.05
$\alpha_2(k)$	0.4	0.3	0.2	0	0.1
$\alpha_3(k)$	0.2	0.2	0.1	0	0.5

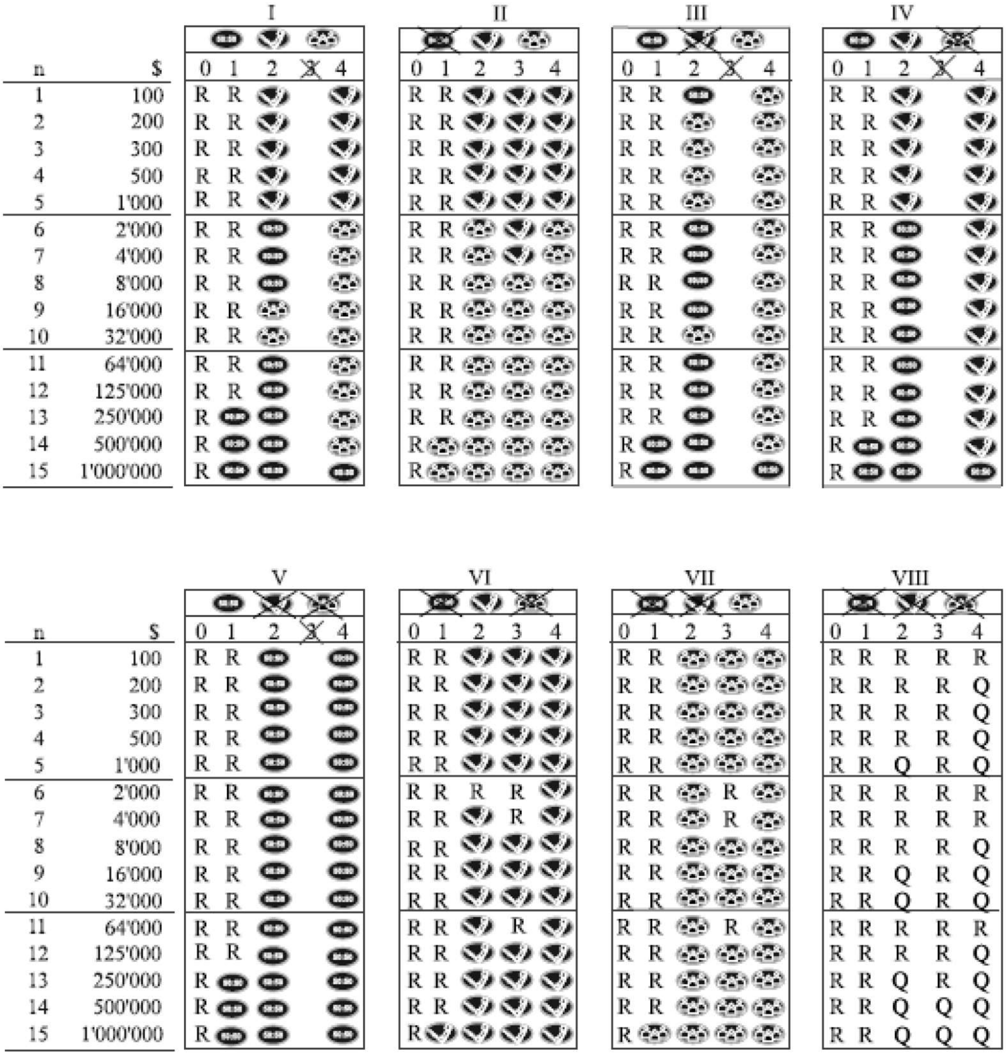
Tablica 13: Primjer vjerojatnosti da je stupanj znanja publike k za svaku grupu pitanja

Vjerojatnosti $\alpha_m(k)$ se razlikuju od $\rho_m(k)$ za neke vrijednosti m i k, a to je zato što publika nije pod tolikim pritiskom kao igrač i što ljudi u publici mogu komunicirati.

6.4.4 Optimalna strategija

Za funkciju $u^*(n,s,j)$ za 15 pitanja, 5 stupnja znanja i 8 mogućih kombinacija pomoći izračunato je 600 vrijednosti. Odnosno, za svaku situaciju dobivamo koji bi bio najbolji potez. Optimalna strategija je prikazana na slici 7. Pomoći su, redom, "50 : 50", "pitaj prijatelja" i "pitaj publiku". Brojevi od 0 do 4 označavaju stupnjeve igračevog znanja. Slovo R znači da bi igrač trebao riskirati i dati odgovor na pitanje, a slovo Q znači da bi trebao odustati.
Na primjer, ako je igračev stupanj znanja 2 za pitanje $n=9$ i potrošio je sve pomoći tada

optimalna strategija kaže da bi trebao odustati.



Slika 7: Optimalna strategija za igru Tko želi biti milijunaš? (Izvor [3])

Opširniji izvod optimalne strategije i općenito o ovoj igri može se pronaći u [3].

7 Literatura

[1] M. Benšić, N. Šuvak - Uvod u vjerojatnost i statistiku, Odjel za matematiku, Osijek, 2013.

[2] J. Bouda - Random walk, ruin problems and random processes https://www.fi.muni.cz/ xbouda1/teaching/2009/IV111/lecture4.pdf

[3] R.C.Dalang, V. Bernyk- A mathematical model for "Who wants to be a millionaire?", 2011.

[4] R. A. Epstein - The Theory of Gambling and Statistical Logic, Second Edition, Academic Press, 2009.

[5] John Haigh - Taking Chances-Winning with Probability, Oxford University Press, 2003.

[6] D. Jankov Maširević - Teorija odlučivanja (predavanja), Odjel za matematiku, Osijek

[7] D. Jukić - Mjera i integral, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2012.

[8] V. Krčadinac - Teorija igara - matematičko modeliranje konfliktnih situacija http://www.math.hr/ mathe/

[9] T. Leighton, R. Rubinfeld - Random Walks https://web.mit.edu/neboat/Public/6.042/randomwalks.pdf

[10] N. Šuvak-Slučajni procesi (predavanja), Odjel za matematiku, Osijek

[11] N. Šuvak-Vjerojatnost (predavanja), Odjel za matematiku, Osijek

[12] E. O. Thorp - The Mathematics of Gambling-Gambling Times, 1985.

[13] E. O. Thorp, W. E. Walden-The Fundamental Theorem of Card Counting with applications to Trente-et-Quarante and Baccarat. Int J Game Theory 2, 1973.

[14] Wikipedija - suradnici. Backgammon [Internet]. Wikipedija, Slobodna enciklopedija, 2021.

Sažetak

Igre na sreću su sve popularnije u današnje vrijeme, a opće je poznato da je u pozadini tih igara teorija vjerojatnosti. U prvom dijelu rada upoznali smo se s teorijom igara na sreću, vidjeli primjenu teorije korisnosti i odlučivanja u tim igrama te naveli osnovne teoreme. Definirali smo i neke sisteme klađenja, primjerice martingalna strategija i Kellyjev sistem, koji nam sugeriraju koliki iznos trebamo uložiti u igru. U drugom dijelu rada smo naveli neke igre na sreću kao što su Blackjack, Baccarat, Backgammon i Tko želi biti milijunaš?. Naveli smo njihove optimalne strategije, a u nekima smo na primjerima igre vidjeli primjenu sistema klađenja. Pokazalo se da nisu svi sistemi klađenja profitabilni u svim igrama, neki nose veći dobitak od drugih.

Ključne riječi: igre na sreću, teorija vjerojatnosti, teorija igara, teorija odlučivanja i korisnost, sistemi klađenja, martingalna strategija, Kellyjev sistem, optimalna strategija

Summary

Games of chance are becoming increasingly popular, and it is common knowledge that the probability theory is behind these games. In the first part of the paper, gambling theory was introduced, the application of decision making theory and utility in these games was shown, and basic theorems are listed. Also, we defined some betting systems, such as the Martingale strategy and Kelly's system, which suggest the optimal amount to invest in the game. In the second part of the paper, we listed some games of chance, such as Blackjack, Baccarat, Backgammon and Who Wants to Be a Millionaire? and their optimal strategies. Also, we concluded that not all betting systems are profitable in every game.

Key words: games of chance, gambling theory, probabillity theory, decision making theory and utility, betting systems, Martingale strategy, Kelly's system, optimal strategy

Životopis

Rođena sam 17.06.1997. u Somboru. Osnovnu školu završavam 2012. godine i upisujem gimnaziju u Belom Manastriru. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja sudjelovala sam na natjecanjima iz fizike i matematike. 2015. godine upisujem Sveučilišni preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku kojeg završavam 2018. s temom završnog rada "Funkcije operatora" pod mentorstvom doc.dr.sc. Suzane Miodragović. U listopadu iste godine upisujem se na Sveučilišni diplomski studij matematike, smjera Financijska matematika i statistika, također na Odjelu za matematiku u Osijeku.