Egipatska aritmetika i matematika

Potočki, Arijana

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Arijana Potočki

Egipatska aritmetika i geometrija

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Arijana Potočki

Egipatska aritmetika i geometrija

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2020.

Sadržaj

Uvod

Matematika je vrlo složena i apstraktna znanost, te nije jedinstvena. Neke metode, formule, dokazi, mogu se provesti na puno različitih načina. Matematika kao jedna od najstarijih grana znanosti, iza sebe ostavlja dugu priču. Njezina se "osobnost" razlikuje u pojedinim krajevima. Tako se, na primjer, kineska matematika uvelike razlikuje od babilonske, sumeranske, egipatske, pa i naše matematike. Sve one imaju svoju povijest, različite početke, imaju različite brojevne sustave, zapise, metode računanja i slično. Da bi se do svega toga došlo, bile su potrebne godine i godine istraživanja, rada i mudrih glava.

U ovom radu predstavit ćemo matematiku starog Egipta, osvrnuti se na to kako se računalo prije nekoliko tisuća godina.
U prvom poglavlju spomenut ćemo prve znakove pojave matematike, objasniti kako je nastala potreba za time da se nešto izračuna. Upoznat ćemo ono što je bilo ključno da se potrebne računice obilježe, a to je metoda pisanja. Bazirat ćemo se na zapisivanje brojeva te reći kako su i gdje zapisivali svoje spoznaje.

U drugom poglavlju bit će riječi o izvorima iz kojih saznajemo o egipatskog matematici. Opisat ćemo što se u njima nalazi, kada su nastali, tko ih je pronašao i slično.

U trećem poglavlju konkretno ćemo se osvrnuti na metode zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Vidjet ćemo kako se to pojavljivalo u nekim zadacima iz papirusa te kako su došli do tih spoznaja. Bit će govora i o razlomcima i činjenicama vezanih uz njih koje su koristili stari Egipćani.

U četvrtom poglavlju izneseni su neki "teži" zadaci iz papirusa, koji su bili riješeni u cijelosti.

Peto poglavlje predstavlja otkrića vezana uz geometriju, najvažnije formule koje su spoznali u početcima njihove matematike.

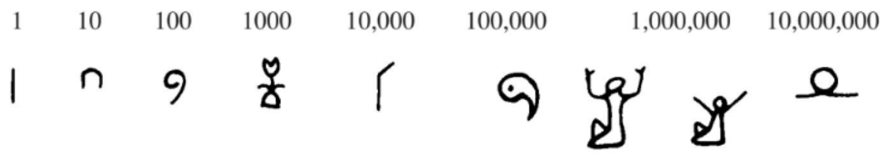
Na poslijetku od velikog je značaja ispiričati nešto o barem jednom djelu velike egipatske baštine, a to svakako zaslužuje Velika piramida.

1 Početci matematike u Egiptu

U ovom poglavlju upoznat ćemo prve znakove matematike i pojavu matematičke pismenosti u Egiptu. Prije tri ili četiri tisuće godina u drevnom Egiptu i Babiloniji postojala je grana znanosti koju možemo opisati kao matematiku. Neke od aktivnosti u toj znanosti koje su bile prisutne u najranijim ljudskim iskustvima su: problem prostornih odnosa, brojevi, veličine, redovi i oblici. U Egiptu, Herodot je proučavao piramide uzduž rijeke Nil. Bio je oduševljen Egipćanima više nego ostalim narodima, te je bio svjestan ljepote klime i topografije duž Nila. Kako se u Egiptu uvodila vladavina jedne osobe, to je sa sobom nosilo i brojne zadaće. Snažan i opsežan administrativan posao počeo se razvijati. Morao se napraviti popis stanovništva, nametnuti su im porezi, vojska je bila postojana, za što su bili potrebni veliki obračuni. Iz tog razloga, Egipćani su već 3500 godina prije Krista imali potpuno razvijen brojevni sustav koji je omogućio daljnje računanje, te su se postupno uvodili i novi simboli. Početkom dinastijskog doba, Narmer (za koga brojni autori smatraju da je zapravo bio legendarni Menes, prvi vladar ujedinjenog Egipta) morao je kazniti buntovnike iz Libije na zapadnom dijelu Delte. Narmerova kamena paleta čuva službeni rekord kraljevskog postignuća. Na njemu je prikazan sažetak plijena koji je Narmer ostvario tijekom svojih ratova. U popisu se nalazi 120000 zarobljenika, 400000 goveda i 1420000 koza. Drugi primjer bilježenja velikih brojeva pojavio se u Knjizi mrtvih. U jednom djelu, za koji se vjeruje da potječe iz Prve dinastije, Egipatski Bog Nu je rekao: „Ja radim za vas, ima nas četiri milijuna, šest stotina i jedna tisuća, i dvije stotine." Istaknimo kako se pojava egipatske vlade i uprave pod vodstvom faraona ne bi mogla dogoditi bez metode pisanja; točnije "svetih znakova" ili hijeroglifa.

1.1 Hijeroglifski znakovi

Hijeroglifski sustav pisanja je slikovni zapis u kojem svaki simbol predstavlja konkretan objekt. U jednoj od grobnica bili su pronađeni hijeroglifski simboli broja koji je prikazan kao jedan vertikalni slijed; slika štapa i neka vrsta potkove ili znak pete, koji se koristi kao skupni simbol za zamjenu deset zasebnih znakova. Drugim riječima, egipatski sustav bio je dekadski (od lat. decem, "deset"), koristio je računanje s potencijama broja 10. Da se taj broj tako često koristi kao osnova za brojčani sustav nesumnjivo pripisujemo čovjekovu deset prstiju i našoj navici da računamo na njih. Iz istog razloga, simbol sličan našem broju 1 gotovo se svugdje koristio za izražavanje broja jedan. Posebni slikovni znakovi korišteni su za svaku potenciju broja 10; od 10 do 10000000. Broj 100 prikazan je zakrivljenim konopljem, 1000 lotusovim cvijetom, 10000 predstavlja uspravno savijen prst, 100000 lopatica, 1000000 predstavljaju ljudi koji dižu ruke dok se za 10000000 pretpostavlja da ga simbolizira izlazak sunca.



Slika 1.1. *Hijeroglifski znakovi brojeva*

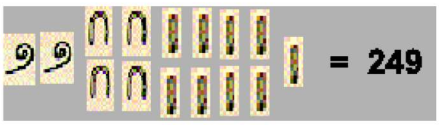
Hijeroglifskim znakovima se pisalo po kamenu, kako s lijeva na desno, tako i obrnuto, a ponekad i odozgo prema dolje.

1.2 Zapisi brojeva

Ostale su brojeve Egipćani zapisivali koristeći poznate znakove za brojeve onoliko puta koliko je to potrebno, od 1 do 9, te pišući različite vrste znakova jedno do drugih, traženi broj dobili njihovim sumiranjem. Jedna od glavnih razlika između brojevnog sustava kod Egipćana i našeg brojevnog sustava je ta da njihovi brojevi nisu bili pisani u sustavu mjesnih vrijednosti, tako da su brojevi mogli biti pisani bilo kojim redoslijedom. Obično je smjer pisanja bio s desna na lijevo, s tim da su prvo bile popisane veće jedinice, a zatim ostale po redoslijedu važnosti. Na primjer, broj 249 zapisivali su kao

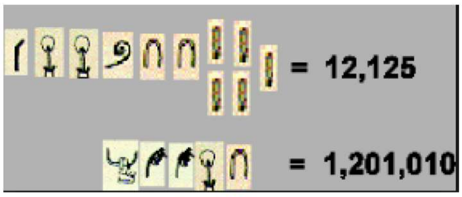
$$249 = 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 9,$$

pa u zapisu imaju dva znaka za 100, četiri znaka za 10 i devet znakova za 1.



Slika 1.2. *Zapis broja* 249

Primjetimo da se ovdje pisalo s lijeva na desno. Manji se znakovi obično grupiraju po dva, dok duguljasti stoje sami, a ako mali znak ne možemo ni s čim grupirati, ostavimo ga samog, centriranog.
Još neki primjeri zapisa brojeva:

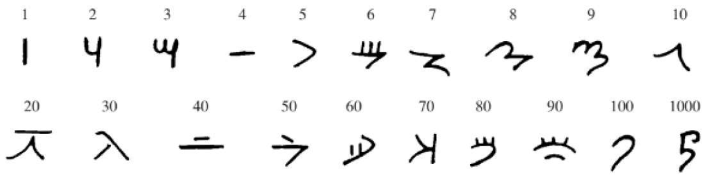


Slika 1.3. *Prikazi brojeva*

Egipatski brojevni sustav nije bio pogodan za računanje, ali je trgovina zahtijevala zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje te rad sa razlomcima. Bilo je potrebno provoditi transakcije, računati kamate na kredite, izračunati plaće, sastaviti kalendar. Za određivanje granica koristili su i jednostavna geometrijska pravila. Iako su Egipćani imali simbole za brojeve, nisu imali općenito jednoličnu oznaku aritmetičke operacije. U čuvenom Rhindovom papirusu pisar je predstavljao zbrajanje i oduzimanje hijeroglifima (koji nalikuju nogama osobe koja dolazi i odlazi -  i ).

1.3 Egipatska hijeratska numeracija

Zbog ograničenog prostora na površinama kamena ili metala pisanje je bilo ograničeno na ono što je od izuzetne važnosti. Egipćani su ustanovili da im je potreban lako dostupan i jeftin materijal. Taj su problem riješili izumom papirusa. Papirus je izrađen rezanjem tankih uzdužnih traka stabljike papirusne biljke nalik trsu, koja je obilovala močvarama u delti Nila. Redanjem tih trakica jedne do druge i njihovim sušenjem na suncu, prirodnom gumom biljke dijelovi se spoje te se dobije glatka površina za pisanje. Mogli su proizvesti trake dužine do 100 stopa, a pisali su olovkom u obliku četke i tintom od zemlje u boji ili ugljenom. S vremenom, egipatski svećenici sve su više razvijali brz i manje slikovit stil pisanja, koji bi zauzimao i manje mjesta na površinama. Razvili su tako hijeratski stil, čiji su simboli nalikovali hijeroglifskim znakovima, samo su bili izvedeni kratkim potezom. Ponavljajući niz jednakih znakova kod hijeroglifa zamijenjen je npr. jednim hijeratskim znakom.



Slika 1.4. Hijeratski simboli

Hijeroglifima bi se broj 37 pisao kao


,

dok bi hijeratskim pismom to bilo


.

2 Rhindov papirus

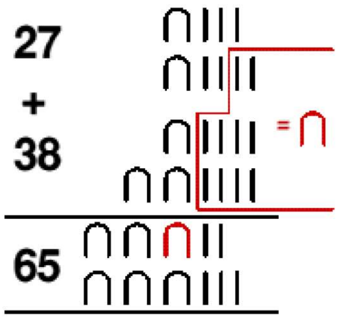
Ako se pitamo odakle znamo o matematici u Egiptu, odgovor je da većina spoznaja potječe iz dvaju papirusa: Rhindov i Goleniščevljev papirus, koji su imena dobili po svojim bivšim vlasnicima. Goleniščevljev papirus ponekad se naziva i Moskovski papirus, budući da se nalazi u Muzeju likovnih umjetnosti u Moskvi. Taj papirus potječe iz 1850. godine prije Krista. Rhindov papirus kupio je u Luxoru Škot Henry Rhind, 1858. godine i nakon toga ga donio u Britanski muzej. Pretpostavlja se da je papirus pronađen u ruševinama jedne male građevine. Pisao ga je pisar Ahmes oko 1650. g. pr. Kr. i vjeruje se da je nastao tako što je Ahmes prepisivao neki spis star 200 godina. Iako je papirus izvorno bio jedan svitak dugačak gotovo 18 metara i širok 13 centimetara, došao je u Britanski muzej u dva komada, a nedostajao je središnji dio. Komadi jednog svitka identificirani su 1922. godine kao dijelovi Rhindovog papirusa te vraćeni u muzej. Započeti s prijevođenjem Rhindovog papirusa bilo je moguće gotovo odmah, zahvaljujući znanjima stečenim putem kamena iz Rosette. Pronalazak te kamene ploče bio je najznačajniji događaj Napoleonove vladavine. Za Rhindov papirus možemo reći da je priručnik matematičkih vježbi te da su u njemu jedine "tajne" kako množiti i dijeliti. Ipak 85 zadataka sadržanih u Rhindovom papirusu i 25 zadataka iz Moskovskog papirusa daju nam jasnu predodžbu o karakteristikama egipatske matematike.

3 Egipatska aritmetika

Egipatska aritmetika bila je u osnovi "aditivna", što znači da je njena tendencija bila svesti množenje i dijeljenje na zbrajanje i oduzimanje.

3.1 Zbrajanje i oduzimanje

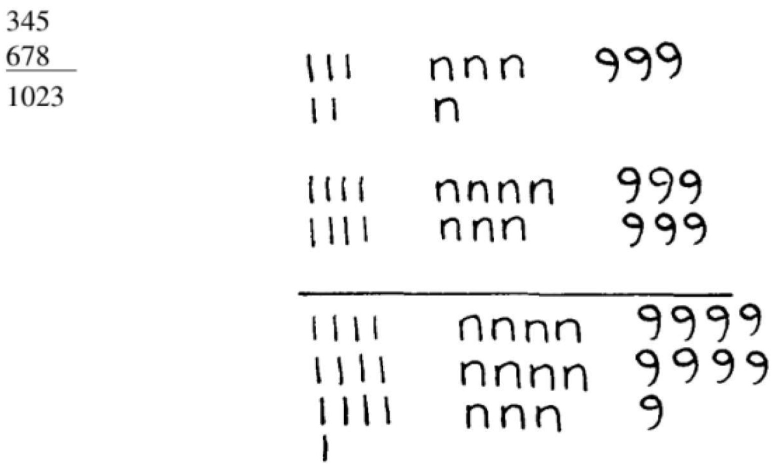
Stari Egipćani zbrajali su skupljanjem istih simbola zajedno i pretvaranjem njih deset u jedan simbol sljedeće razine, dok se sve ostalo prepisuje. To možemo vidjeti na sljedećoj slici.



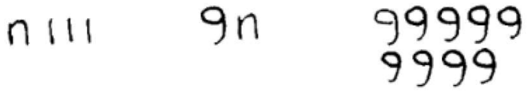
Slika 3.1. Zbrajanje brojeva

Iako se njihov princip računanja uvelike razlikuje od našega, možemo uočiti sličnost u toj pretvorbi. Oni deset istih simbola pretvore u simbol sljedeće razine, dok mi kod zbrajanja prenosimo znamenku desetice i nju dalje pribrajamo. Pogledajmo još jedan primjer zbrajanja troznamenkastih brojeva:

Primjer 1. *Zbrojimo* 345 *i* 678*.*

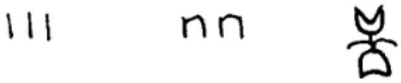


zbroj je zapravo



,

što je u konačnici

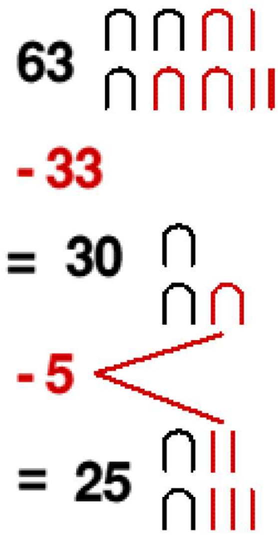


.

U ovome primjeru vidimo da nakon zbrajanja imamo 13 jedinica, što mijenjamo jednim znakom za deseticu i 3 jedinice. Primjetimo da su u ovome primjeru napisane prvo znamenke manje vrijednosti, pa potom veće, što nije od presudne važnosti, za rezultat ćemo jedinice naravno napisati na kraju, desetice ispred i slično. Nadalje imamo 11 znakova za deseticu, što mijenjamo jednim znakom za 100 i jedna desetica ostaje, te imamo 9 znakova za stoticu, zbrojimo s jednom prethodno spomenutom i potom tih 10 mijenjamo znakom za tisuću. Sada imamo tri jedinice, dvije desetice, i jednu tisućicu što nam daje: $1 \cdot 1000 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 = 1023$.

Oduzimali su tako da se od prvog faktora (umanjenika) odmicao određeni broj potrebnih simbola. Ovo je znalo biti i komplicirano kada se moralo oduzeti više simbola nego što ih je bilo prisutno u prikazu, no ako malo bolje pogledamo, isto to radimo i mi danas. Npr. ako bi računali $63 - 38$, od šest desetica možemo oduzeti tri, tri nam ostaju, ali možemo oduzeti samo tri jedinice. Trebamo oduzeti još pet jedinica, za što će nam poslužiti jedna desetica. Vrijedi:

$$1 \ desetica - 5 \ jedinica = 10 \ jedinica - 5 \ jedinica = 5 \ jedinica.$$

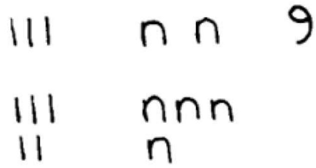


Slika 3.2. Oduzimanje brojeva

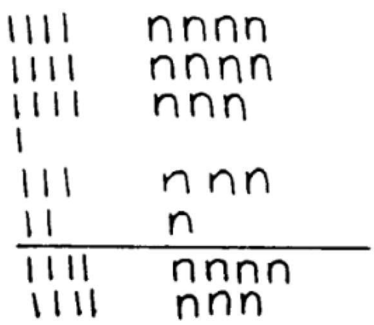
Sada je jasno da nam nakon toga ostaju dvije desetice i tih pet jedinica. Dakle, kada je to potrebno, veći simbol mijenja se za deset simbola nižeg reda, kako bi se mogao oduzeti dani broj.

Primjer 2. *Od broja* 123 *oduzmimo* 45.

$$\begin{array}{r} 123 \\ -45 \\ \hline 78 \end{array}$$



Rješenje:



Dakle za početak od 3 jedinice moramo oduzeti 5, što ne možemo, tako da smo jednu deseticu broja 123 pretvorili u 10 jedinica, a stoticu smo potom pretvorili u 10 desetica, budući da je to također potrebno. Kada smo to sredili od prvog broja oduzmemo potreban broj znakova desetica (4), i potreban broj znakova jedinica (5). Za rezultat dobijemo 7 desetica i 8 jedinica, što je 78.

3.2 Množenje i dijeljenje

Kroz ovo poglavlje upoznati ćemo princip množenja i dijeljenja Egipćana. Naime, množili su udvostručavanjem danog broja, što daje naslutiti da su, možda i nesvjesno koristili potencije broja 2. Udvostručavali su na način da su broj zbrajali sa samim sobom, dakle samo su pisali brojeve jedan ispod drugoga udvostručavajući prethodni. Pogledajmo kako bi izgledalo množenje broja 41 sa 59. Za početak svaki od tih brojeva dobiva svoj stupac. Prvi redak sastoji se od broja 1 i drugog faktora, tj. 59 u drugom stupcu. Brojevi se u svakom idućem retku udvostručavaju, dakle u prvom se stupcu ispisuju potencije broja 2. Udvostručavanje staje kad se u prvom stupcu dobije broj veći od prvog faktora (u obzir se uzimaju retci prije tog retka).

41	59
1	59
2	118
4	236
8	472
16	944
32	1888

Sada se provede niz oduzimanja brojeva prvog stupca: $41 - 32 = 9$, $9 - 8 = 1$, $1 - 1 = 0$ (od 41 oduzmemo najveći broj prvog stupca, od razlike najveći od njega manji član prvog stupca itd., sve dok ne dobijemo nulu). Time dobivamo da je $41 = 32 + 8 + 1$. Za vrijeme navedenih oduzimanja označe se brojevi desnog stupca u retcima iz kojih su uzimani brojevi za oduzimanje.

41	59	
1	59	△
2	118	
4	236	
8	472	△
16	944	
32	1888	△
	2419	

Ti se označeni brojevi na kraju zbroje, a dobiveni je rezultat umnožak $41 \cdot 59 = 2419$. Vidimo da se tu prvi faktor zapravo zapisao binarno $41 = 32 + 8 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2^0 = 101001_2$ te se koristila distributivnost množenja prema zbrajanju:
$41 \cdot 59 = (32 + 8 + 1) \cdot 59 = 32 \cdot 59 + 8 \cdot 59 + 1 \cdot 59.$

Vratimo li se malo na početak članka, na prikazanoj slici hijeroglifskih znakova možemo vidjeti da je egipatski brojevni sustav koristio simbole koji predstavljaju potencije broja 10 s eksponentima od 0 do 6. Dakle i oni su uočili da je množenje broja brojem 10 jednostavno: zamijenili bi svaki simbol onim susjednim po veličini, npr. $236 \cdot 10 = 2360 = 2$ tisućice, 3 stotice i 6 desetica (6 jedinica postaje 6 desetica, 3 desetice postaju 3 stotice, 2 stotice postaju 2 tisućice).

Primjer 3. *Odredimo produkt brojeva* 19 *i* 71.

Započnimo istim postupkom, dupliciranjem.

19	71
1	71
2	142
4	284
8	568
16	1136

Ovdje stajemo sa udvostručavanjem, jer je sljedeća potencija broja 2 veća od 19. Budući da istim principom oduzimanja vrijedi $19 = 1 + 2 + 16$ označit ćemo redove u kojima se pojavljuju ti brojevi te zbrojiti vrijednosti uz njih. Dobili smo produkt brojeva 19 i 71.

19	71
1	71 △
2	142 △
4	284
8	568
16	1136 △
19	1349

Vrijedi: $1349 = 71 + 142 + 1136 = (1 + 2 + 16) \cdot 71 = 19 \cdot 71$. Pogledajmo sada drugu situaciju. Da je broj 71 odabran kao prvi faktor množenja, a 19 kao drugi imali bismo sljedeći postupak.

71	19
1	19
2	38
4	76
8	152
16	304
32	608
64	1216
71	1349

Budući da je $71 = 1+2+4+64$, zbrajanjem tih članova pomnoženih sa 19 dobijemo naravno isto 1349.

71	19	
1	19	△
2	38	△
4	76	△
8	152	
16	304	
32	608	
64	1216	△
71	1349	

Dijeljenje je pak zahtijevalo korištenje množenja i vrlo često upotrebu razlomaka. Na primjer, podijeliti 91 sa 7, znači odrediti x takav da je $7x = 91$. On se utvrđuje udvostručivanjem broja 7, sve dok se ne postigne ukupno 91. Postupak izgleda ovako:

1	7
2	14
4	28
8	56

Kod ovog udvostručavanja stajemo, jer sa sljedećim udvostručavanjem vidimo da bismo u desnom stupcu dobili broj veći od 91. Kako nam je sada $7 + 28 + 56 = 91$, označimo redove u kojima se nalaze spomenuti članovi te zbrojimo i pripadajuće članove lijevog stupca. Imamo: $1 + 4 + 8 = 13$, što nam daje traženi x tj. kvocijent brojeva 91 i 7.

1	7	△
2	14	
4	28	△
8	56	△
13	91	

Dijeliti nije uvijek bilo tako jednostavno kao u prethodnom primjeru. Prilikom računanja Egipćani su često morali uvoditi razlomke. Na primjer, dijeljenje broja 35 sa 8 započinjali bi udvostručavanjem broja 8 sve do koraka u kojem bi sljedeće udvostručavanje premašilo djeljenika. Tada bi započimalo prepolavljanje djeljitelja kako bi se radnja izvela do kraja. Račun bi izgledao ovako:

1	8	
2	16	
4	32	△
$\frac{1}{2}$	4	
$\frac{1}{4}$	2	△
$\frac{1}{8}$	1	△
zbroj $4+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	35	

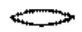
Kod određivanja brojeva koje trebamo označiti da u zbroju dobijemo 35 koristimo se sljedećom tehnikom: od 35 oduzmemo prvi najveći broj tj. 32, ostane nam 3, a to je očigledno da moramo iskoristiti 1 i 2 (što nismo imali pa je bilo potrebno započeti s polovljenjem djelitelja), vrijedi $35 = 32 + 2 + 1$. Dobiveni zbroj s lijeve strane je traženi kvocjent. Možemo reći da su se Egipćani kod dijeljenja služili naštimavanjem. Pogledajmo sljedeći primjer dijeljenja broja 16 sa 3.

1	3	△
2	6	
4	12	△
$\frac{2}{3}$	2	
$\frac{1}{3}$	1	△
zbroj $5+\frac{1}{3}$	16	

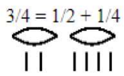
Došavši do broja 12, sljedeća iteracija bila bi broj veći od djeljenika, pa stajemo. Gledamo razliku $16 - 12 = 4$ i sada je očito da ta 4 još moramo nadomjestiti zbrajanjem nekih od brojeva tog desnog stupca. Možemo iskoristiti 3 i još nam treba 1. Jedinicu možemo dobiti kao polovinu od 2, a 2 nam je zapravo $\frac{2}{3}$ djelitelja. Istim principom kao i do sada dobije se zbroj što je u konačnici traženi rezultat.

Ova metoda temelji se na jednostavnoj matematičkoj činjenici koja je bila poznata i egipatskim pisarima, a to je da su množenje i dijeljenje inverzne operacije, tj. $a \cdot b = c$ ako i samo ako je $c : b = a$.

3.2.1 Razlomci

Ono što se pojavljuje prilikom dijeljenja su svakako razlomci. Naime, kada su Egipatski matematičari morali računati sa razlomcima, nailazili su na razne probleme, primjerice kako zapisati razlomak $\frac{2}{5}$ i izračunati njegovu vrijednost. Njihove metode zapisivanja dopuštale su samo uporabu jediničnih razlomaka, tj. one oblika $\frac{1}{n}$, gdje je n prirodan broj. Ako traženi razlomak nije moguće zapisati tako, onda se razlomak morao zapisati kao zbroj razlomaka s brojnikom 1. Iznimka u tome je bio razlomak $\frac{2}{3}$. Jedinični su razlomci zapisivani tako da se jedinica označavala simbolom "otvorenih usta"  , a uz nju se nalazio hijeroglifski znak za broj u nazivniku. To bi izgledalo ovako:

Slika 3.3. Zapisivanje razlomaka

Iznimka $\frac{2}{3}$ označavala se simbolom .
Ostali razlomci prikazivali su se u obliku zbroja jediničnih razlomaka kao npr:


Primjer 4. *Zapišimo razlomak $\frac{6}{7}$ principom Egipatskog zapisa.*
Rješenje:

$$\frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}.$$

Također, $\frac{6}{7}$ može se prikazati i kao:

$$\frac{6}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7},$$

no Egipćani su smatrali da je apsurdno i kontradiktorno dopustiti takvo zapisivanje. Imali su određena pravila kojih ćemo se dotaknuti nešto kasnije. Razlomke iz prvog prikaza dobili bi principom dijeljenja 6 sa 7. Shematski se prikaz može vidjeti i na slici.

1	7	
$\frac{1}{2}$	$3+\frac{1}{2}$	△
$\frac{1}{4}$	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	△
$\frac{1}{7}$	1	
$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$	△
$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{4}$	△
zbroj $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$	6	

Budući da je 6 manje od 7, odmah se započinje sa polovljenjem djelitelja. Prva dva reda kada zbrojimo desnu stranu dala bi $5+\frac{1}{4}$ te je potrebno dobiti još $\frac{3}{4}$. To dobiju zbrajanjem $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$, a na prikazanoj slici vidljivo je i kako su došli to tih razlomaka.

S vremenom su uveli jednostavnije zapise. Razlomke s jedinicom u brojniku pišu kosom crtom iza koje slijedi nazivnik, npr. $\frac{1}{2}$ zapisuju kao /2, $\frac{1}{4}$ kao /4, dok se iznimka, $\frac{2}{3}$, piše //3.

3.2.2 Načela jediničnih razlomaka

Kako bi se olakšao rastav razlomka na jedinične razlomke postojala su brojna pravila. Na samom početku Rhindovog papirusa nalazi se tablica koja sadrži rastav razlomaka s brojnikom 2 i neparnim nazivnikom između 5 i 101. Ta tablica zauzima gotovo $\frac{1}{3}$ papirusa i najopširnija je tablica koja se nalazi u drevnim egipatskim papirusima koji su došli do nas. Pisar je prvo objasnio raščlanjivanje razlomaka oblika $\frac{2}{n}$. Za razlomke $\frac{2}{n}$ čiji je nazivnik bio djeljiv s 3 to bi izgledalo ovako:

$$\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}.$$

Primjer toga je $\frac{2}{15}$ $(k = 5)$:

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}.$$

Raščlanjivanje preostalih razlomaka oblika $\frac{2}{n}$ je prikazano u idućoj tablici.

$$\begin{array}{ll}
\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} & \frac{2}{53} = \frac{1}{30} + \frac{1}{318} + \frac{1}{795} \\
\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} & \frac{2}{55} = \frac{1}{30} + \frac{1}{330} \\
\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66} & \frac{2}{59} = \frac{1}{36} + \frac{1}{236} + \frac{1}{531} \\
\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104} & \frac{2}{61} = \frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610} \\
\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68} & \frac{2}{65} = \frac{1}{39} + \frac{1}{195} \\
\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114} & \frac{2}{67} = \frac{1}{40} + \frac{1}{335} + \frac{1}{536} \\
\frac{2}{23} = \frac{1}{12} + \frac{1}{276} & \frac{2}{71} = \frac{1}{40} + \frac{1}{568} + \frac{1}{710} \\
\frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75} & \frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365} \\
\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232} & \frac{2}{77} = \frac{1}{44} + \frac{1}{308} \\
\frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155} & \frac{2}{79} = \frac{1}{60} + \frac{1}{237} + \frac{1}{316} + \frac{1}{790} \\
\frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42} & \frac{2}{83} = \frac{1}{60} + \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498} \\
\frac{2}{37} = \frac{1}{24} + \frac{1}{111} + \frac{1}{296} & \frac{2}{85} = \frac{1}{51} + \frac{1}{255} \\
\frac{2}{41} = \frac{1}{24} + \frac{1}{246} + \frac{1}{328} & \frac{2}{89} = \frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890} \\
\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301} & \frac{2}{91} = \frac{1}{70} + \frac{1}{130} \\
\frac{2}{47} = \frac{1}{30} + \frac{1}{141} + \frac{1}{470} & \frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570} \\
\frac{2}{49} = \frac{1}{28} + \frac{1}{196} & \frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776} \\
\frac{2}{51} = \frac{1}{34} + \frac{1}{102} & \frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}
\end{array}.$$

Otkako se pojavio prvi prijevod papirusa matematičari su pokušavali otkriti metode kojima su nastali izrazi dani u tablici. Od mnogih načina rastava na jedinične razlomke zašto je za $\frac{2}{19}$ odabran:

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114},$$

a ne

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{57} + \frac{1}{228}?$$

Posljednji razlomak $\frac{2}{101}$ prikazan je kao

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}.$$

To je jedini mogući rastav tog razlomka na najviše četiri jedinična razlomka s nazivnicima manjim od 1000 i poseban je slučaj opće formule

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}.$$

Naime, pisar spomenute tablice nije sasvim prihvatio to pravilo. Razlog tome je što su postojali jednostavniji zapisi te se smatra da je koristio određene principe:

- poželjni su mali nazivnici, ne veći od 1000 tj. za početak se koristi najveći mogući jedinični razlomak;

- koristi se što manje jediničnih razlomaka, ne više od četiri;
- parni nazivnici bili su poželjniji nego neparni;
- prvo se zapisuju razlomci s manjim nazivnikom te ne smije biti ponavljanja razlomaka;
- mali prvi nazivnik može se povećati ako će se time smanjiti ostali veliki nazivnici (npr. $\frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$ je poželjniji nego $\frac{2}{31} = \frac{1}{18} + \frac{1}{186} + \frac{1}{279}$).

Nije moguće jasno ustvrditi zašto su uspostavljena ova pravila i da li su uopće bila uspostavljena.

Nekoliko primjera koji objašnjavaju ova pravila:

1. Razlomak $\frac{3}{4}$ pisar je mogao zapisati kao $/2 + /4$, ili $/3 + /4 + /6$. Uvijek se koristi kraća verzija.
2. Razlomak $\frac{7}{12}$ mogao se zapisati kao $/2 + /12$, ili $/3 + /4$. Pisar bi koristio $/2 + /12$ jer mora koristiti veći jedinični razlomak ($/2$ koji je veći od $/3$).
3. Razlomak $\frac{9}{10}$ nije se mogao zapisati kao $/2 + /5 + /5$ zato što se jedinični razlomak može koristiti samo jednom u prikazu. Zato bi se $\frac{9}{10}$ pisao kao $//3 + /5 + /30$.

Ovaj primjer pokazuje kako su razlomci u zbroju pisani u padajućem redoslijedu: $//3 > /5 > /30$.

Primjer 5. *Pomnožimo* $2 + \frac{1}{4}$ *i* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$.

Započinjemo postupak množenja udvostručavanjem drugog faktora. Primjetimo da udvostučavanje $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$ daje $3 + \frac{2}{7}$, što bi egipatski matematičari zapisali kao $3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$. Kako smo prethodno opisali, princip množenja temelji se na zbrajanju vrijednosti iz stupaca. Ovdje nam prvi stupac treba dati $2 + \frac{1}{4}$. Nakon prvog koraka u drugom retku i prvom stupcu imamo vrijednost 2, te nam još u tom stupcu treba $\frac{1}{4}$. Tu ćemo vrijednost dobiti polovljenjem $\frac{1}{2}$ drugog faktora.
Matematičari su znali da je udvostručen razlomak $\frac{1}{2n}$ zapravo jednak $\frac{1}{n}$. Postupak izgleda ovako:

$$
\begin{array}{lcr|l}
 & & 1 & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{7} \\
 & \triangle & 2 & 3+\frac{1}{4}+\frac{1}{28} \\
 & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14} \\
 & \triangle & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{28} \\
\hline
\text{zbroj} & & 2+\frac{1}{4} & 3+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{14}
\end{array}.
$$

Primjer 6. *Teži primjer dijeljenja razlomaka pojavljuje se kao Problem* 33. *u Rhindovom papirusu. Podijelimo* 37 *sa* $1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$.

Prema principu egipatskog dijeljenja postupak započinje na idući način:

$$
\begin{array}{r|l}
1 & 1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7} \\
2 & 4+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28} \\
4 & 8+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{14} \\
8 & 18+\frac{1}{3}+\frac{1}{7} \\
16 & 36+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}
\end{array},
$$

s time da je $\frac{2}{7}$ zapisano kao $\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$. Sada je zbroj $36+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ blizu 37 (vidljivo je da bi ga sljedećim korakom prešli). Matematički gledano, zanima nas koliko izrazu $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ nedostaje do jedinice. Potrebno je odrediti x takav da je:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+x=1;$$

ili problem postaviti na drugačiji način; naći y koji će zadovoljiti:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{y}{84}=1;$$

gdje je 84 najmanji zajednički višekratnik nazivnika 3, 4 i 28. Sređivanjem ove jednadžbe (tj. množenjem obe strane sa 84) dobijemo jednadžbu oblika:

$$56+21+3+y=1$$

iz čega slijedi da je

$$y=4.$$

Dakle, ostatak koji treba pribrojiti izrazu $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ da bi zbroj bio 1 je $\frac{4}{84}$ ili $\frac{1}{21}$.

Sljedeći korak je odrediti s kojom vrijednošću trebamo pomnožiti $1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$ (djelitelja) da bi se dobio taj ostatak $(\frac{1}{21})$. To znači naći nepoznanicu z koja je rješenje jednadžbe:

$$z \cdot (1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}) = \frac{1}{21}.$$

Množenjem izraza sa 42 (najmanjim zajedničkim višekratnikom nazivnika) dobivamo

$$97 \cdot z = 2 \text{ ili } z = \frac{2}{97},$$

što je u egipatskom zapisu $\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$. Sada imamo sve te nam preostaje zbrojiti zadnja dva retka. Cijeli postupak izgleda ovako:

	1	$1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$	
	2	$4+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$	
	4	$8+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$	
	8	$18+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$	
	16	$36+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$	$\triangle$
	$\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$	$\frac{1}{21}$	$\triangle$
zbroj	$16+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$	37	

Rezultat dijeljenja 37 sa $1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$ je $16+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$.

3.2.3 Metoda rastavljanja racionalnih brojeva

Postoji nešto moderniji način raščlanjivanja razlomaka s brojnikom različitim od 2 na jedinične razlomke. Na primjer, pokušajmo rastaviti broj $\frac{9}{13}$. Vrijedi da je $9 = 1 + 4 \cdot 2$, pa bi rastav mogao biti

$$\frac{9}{13} = \frac{1}{13} + 4(\frac{2}{13})$$

Razlomak $\frac{2}{13}$ možemo rastaviti prema tablici za $\frac{2}{n}$. Sada imamo

$$\frac{9}{13} = \frac{1}{13} + 4\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}\right)$$

$$= \frac{1}{13} + \frac{1}{2} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26}$$

$$= \frac{2}{13} + \frac{1}{2} + \frac{1}{26}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104} + \frac{1}{2} + \frac{1}{26},$$

i konačno

$$\frac{9}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}.$$

U ovome primjeru nazivnici unutar zagrade djeljivi su sa 4, ali pitamo se što ako nemamo takav slučaj?
Dokazano je da postoji metoda koja može rastaviti svaki pozitivan racionalan broj na konačan broj različitih jediničnih razlomaka, a zovemo ju "metoda cijepanja". Pravilo kojim možemo rastaviti jedan pozitivan racionalan broj glasi

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)},$$

koja rastavlja jedan jedinični razlomak na sumu dva jedinična razlomka. Na primjer, da bi rastavili $\frac{2}{19}$ prvo pišemo

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{19} + \frac{1}{19};$$

potom jedan od jediničnih razlomaka rastavimo metodom cijepanja $\frac{1}{19} = \frac{1}{20} + \frac{1}{19 \cdot 20}$, te je konačno

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \frac{1}{19 \cdot 20}.$$

U konačnom izrazu dozvoljeno je imati samo jedan razlomak oblika $\frac{1}{n}$, sve ostale je potrebno rastaviti. Tako za $\frac{3}{5}$ vrijedi

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5};$$

rastavimo dva jedinična razlomka na $\frac{1}{6} + \frac{1}{6 \cdot 5}$, slijedi da je

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + (\frac{1}{6} + \frac{1}{30}) + (\frac{1}{6} + \frac{1}{30}).$$

Sada rastavimo $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{30}$ na $\frac{1}{7} + \frac{1}{6 \cdot 7}$ i $\frac{1}{31} + \frac{1}{30 \cdot 31}$ i slijedi

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + \frac{1}{42} + \frac{1}{930}.$$

Općenito, metoda je sljedeća. Prvo pišemo

$$\tfrac{m}{n} = \tfrac{1}{n} + \Bigg(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m-1}\Bigg).$$

Sada $m-1$ razlomak mijenjamo metodom cijepanja sa $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ i dobivamo:

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + \Bigg[\underbrace{\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}\right)}_{m-2}\Bigg]$$

Ponavljanjem postupka dobivamo:

$$\tfrac{m}{n} = \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n(n+1)} + \tfrac{1}{n+2} + \tfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \tfrac{1}{n(n+1)+1} + \tfrac{1}{n(n+1)(n(n+1)+1)} + \cdots.$$

4 Zadaci iz Rhindovog papirusa

Rhindov papirus sadrži nekoliko u cijelosti riješenih zadataka. Oni obično započinju sumom poznatih jediničnih razlomaka te u nastavku uz njih dolazi suma nepoznatih jediničnih razlomaka, čije vrijednosti se traže kako bi u sumi dobili vrijednost 1. Puno mjesta na papirusu zauzimaju problemi iz svakodnevnog života, kao na primjer pravedna podjela kruha na određen broj ljudi ili potrebna količina zrna za izradu piva. Takvi su zadaci uglavnom jednostavni i ne ide se dalje od jednadžbe s jednom nepoznanicom. Također papirus sadrži i dosta jednostavnijih zadataka u kojima je potrebno samo provesti neku računsku operaciju. Pogledajmo u sljedećim naslovima neke zahtjevnije zadatke.

4.1 Metoda krive pozicije

Ovaj se zadatak u Rhindovom papirusu pojavljuje kao "Problem 22.". Zadatak traži da se dopuni izraz $\frac{2}{3} + \frac{1}{30}$ kako bi suma tih vrijednosti bila 1. U modernom zapisu odabere se prikladan broj N i jedinični razlomci $\frac{1}{n_1}, ..., \frac{1}{n_k}$ koji zadovoljavaju jednadžbu:

$$(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{1}{n_1} + \cdots + \tfrac{1}{n_k}) \cdot N = N$$

Vidimo da kada bi podijelili izraz s obje strane vrijednošću N zbroj razlomaka bio bi 1. Nadalje, pisar je primjetio da bi bilo zgodno za N uzeti vrijednost 30, jer je to zajednički nazivnik poznatih razlomaka te napraviti sljedeće

$$(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{30}) \cdot 30 = 21$$

$$= 20 + 1$$

te je izraz s desne strane skratio za 9. Nadalje vrijedi

$$9 = 6 + 3 = \tfrac{1}{5} \cdot 30 + \tfrac{1}{10} \cdot 30 = (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{10}) \cdot 30$$

Zbrajanjem ta dva izraza dobio je

$$(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{10}) \cdot 30 = 30$$

i rezultat je

$$\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{10} = 1.$$

Slika 1.4. Zadaci s Rhindovog papirusa

4.2 Problem 24.

Vrijednost x i $\frac{1}{7}$ te vrijednosti u sumi daju 19. Koliko iznosi x?

Danas, s našim algebarskim simbolima, trebali bi riješiti jednadžbu s nepoznanicom x:

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

ili

$$\frac{8x}{7} = 19.$$

Pisar je koristio najstariji i najuniverzalniji način za rješavanje linearne jednadžbe - metodu krive pozicije ili lažnu pretpostavku. U prvoj jednadžbi lažna pretpostavka bi bila $x = 7$ (izbor je pogodan jer je $\frac{x}{7}$ lako izračunati). Lijeva strana jednadžbe tada je $7 + \frac{7}{7} = 8$, umjesto željenog rješenja 19. Da bi dobili 19, 8 moramo pomnožiti sa $\frac{19}{8}$=$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. Točna vrijednost se dobije tako da pomnožimo lažnu pretpostavku 7 sa $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. Rezultat je:

$$x = \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot 7 = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$$

5 Egipatska geometrija

Kada bi govorili o porijeklu geometrije, prihvačena je činjenica da ona potječe upravo iz starog Egipta. Velike godišnje poplave rijeke Nil, dovele su do toga da su se granice zemljišnih posjeda brisale i trebalo ih je ponovno odrediti. Trebalo je, dakle, premjeravati zemljišta. Izgradnja veličanstvenih hramova, piramida, kipova, također je zahtijevala određena znanja iz geometrije. Naime, naziv "geometrija" spoj je dviju grčkih riječi "zemlja" i "mjera".
Matematički papirusi koji su došli do nas sadrže brojne primjere konkretnih formula poput onih za određivanje površine i volumena njima najbliskijim plohama i čvrstim tijelima. Takva pravila računanja nastala su s vremenom, skupljanjem iskustava, metodama pokušaja i pogreške i promatranjima. Egipćani su tražili korisne činjenice koje se odnose na mjerenje. Neke od njihovih formula bile su samo približno točne i nisu davale dovoljno prihvatljive rezultate za praktične potrebe svakodnevnog života.
U velikom posvetnom natpisu, od oko 100 godina prije Krista, u hramu Horusa u Edfu, postoje zapisi na brojnim četverostranim plohama koje su darovi hramu. Za svaku od njih površina je izračunata uzevši produkt prosjeka dvaju suprotnih strana tj. koristeći formulu

$$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d),$$

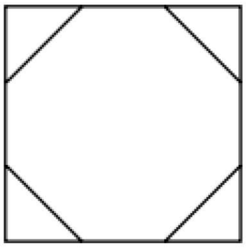
gdje su a, b, c i d duljine uzastopnih stranica.
Formula je očito netočna. Ona daje približno točan rezultat samo kada ploha sliči pravokutniku. Ono što je zanimljivo je da se ta ista, pogrešna formula za računanje površine lika, pojavila 3000 godina ranije u Babilonu.
U Rhindovom papirusu zadaci od 41 do 60 odnose se na geometrijske probleme. Ti se problemi uglavnom bave pitanjem količine zrna posijanog na površinama pravokutnog oblika i uskladištenog u bačvama.
Možda najbolje otkriće u egipatskoj geometriji je formula za računanje površine kruga, što se pojavljuje u Rhindovom papirusu kao zadatak 50. Traži se površina kruga s dijametrom 9. Za početak oduzeli su $\frac{1}{9}$ dijametra od njega samog, rezultat je 8. Potom su množili rezultat sa samim sobom $(8 \cdot 8 = 64)$, što je površina danog kruga. Matematički zapisano formula za izračunavanje površine kruga dijametra d bila bi

$$P = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2.$$

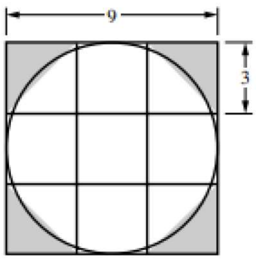
Usporedimo li to sa stvarnom formulom površine kruga $P = r^2\pi = (\frac{d}{2})^2\pi$ dobivamo

$$\left(\frac{8d}{9}\right)^2 = \frac{d^2\pi}{4},$$

te je $\pi = 4(\frac{8}{9})^2 = 3.1605...$ bila njihova aproksimacija broja π.
Nije poznato kako su došli do navedene formule za površinu kruga, no postoji mogućnost da "Problem 48." iz Rhindovog papirusa daje motiv za to. U tom problemu uobičajna ideja koju autor predlaže učiniti je zamijeniti za krug za lik koji poznaje. Točnije, promatra kvadrat u kojemu se unutar svakog vrha nalaze jednakokračni trokuti te unutrašnjost kvadrata čini osmerokut, što možemo vidjeti na sljedećoj slici.



Pisar je za duljinu stranice kvadrata uzeo 9 jedinica te je tako svaki trokut površine $\frac{9}{2}$ kvadratnih jedinica. Također, primjetio je da bi površina osmerokuta mogla biti jednaka površini kruga upisanog u kvadrat, stoga je to uspoređivao. Promjer kruga tada je jednak stranici kvadrata. Opisano se može vidjeti na slici.



Sada je površina osmerokuta jednaka površini kvadrata umanjenoj za četiri površine trokuta, što je

$$P = 9^2 - 4\left(\frac{9}{2}\right) = 63.$$

Za površinu kruga promjera 9 dobili bismo

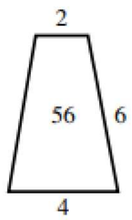
$$\left(\frac{8 \cdot 9}{9}\right)^2 = 8^2 = 64,$$

što je vrlo blizu izračunatoj površini osmerokuta. Možemo naslutiti da dani problem uistinu može biti povod za formulu površine kruga kod Egipćana.

Moskovski papirus sadrži samo 25 zadataka, od kojih se neki problemi pojavljuju i u Rhindovom papirusu, no jedan je zadatak od iznimne važnosti drevnog egipta. Problem 14. pokazuje da su Egipćani 1850. godine prije Krista znali formulu za računanje volumena pravilne krnje piramide kojoj je baza kvadrat. Formula glasi

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2),$$

gdje je a stranica kvadrata(baze), b stranica paralelne baze iznad nje i h visina krnje piramide.
U zadatku 14. dani lik je trapez,

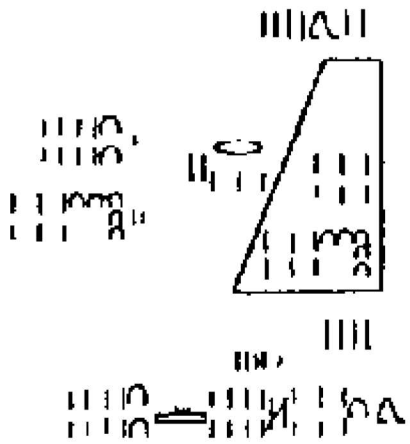


te su matematičari pretpostavili da je on jedna strana krnje kvadratne piramide i postavili račun za njen volumen. Duljina stranice baze bila je 4, visina 6 te duljina stranice gornje baze 2. Koraci računa bili su:

1. kvadrirati 4, rezultat je 16;
2. udvostručiti 4, rezultat je 8 ($4 \cdot 2$ tj. u formuli $a \cdot b$);
3. kvadrirati 2, rezultat je 4;
4. zbrojiti 16, 8 i 4, rezultat je 28;
5. uzeti $\frac{1}{3}$ od 6 (visine), rezultat je 2;
6. udvostručiti 28, rezultat je 56.

Primjetimo da se, ako to usporedimo s nama poznatom formulom za spomenuti volumen $V = \frac{h}{3}\left(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2\right) = \frac{6}{3}(16 + \sqrt{64} + 4) = 56$ (gdje su B_1 i B_2

površine dviju danih baza), rezultati podudaraju. S druge strane, ta je formula bila točna samo za neka geometrijska tijela, no tada matematičari nisu imali dovoljno materijala i spoznaja kako bi preformulirali metodu.



Slika 5.1. Dio Mosovskog papiusa na kojemu se nalazi izračun volumena krnje piramide

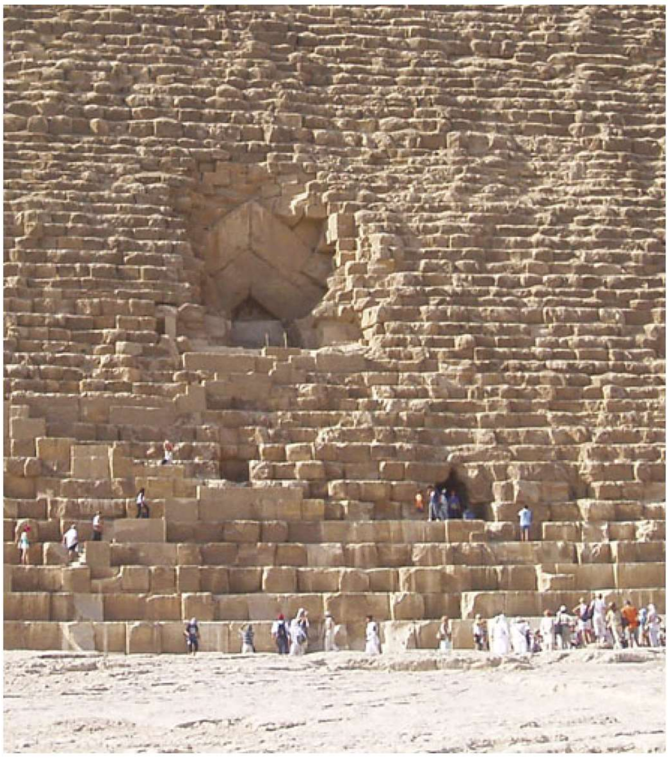
6 Velika piramida

Slika 6.1. Velika piramida u Gizi

Posebna zanimljivost koja je proizašla iz geometrijskih znanja Egipćana je Velika piramida u Gizi. Velika piramida smatra se jednom od najvećih i najznamenitijih ljudskih ostvarenja u povijesti. Podignuta je 2600 godine prije Krista u čast faraonu Kufu, kojega su Grci nazvali Keopsa. Ona je dokaz uvažavanja geometrijskih oblika, visokog razvoja inženjerske gradnje i dobre, usudimo se reći i savršene, društvene i političke organizacije. Kako doznajemo, prema Herodotu, oko 400000 radnika je godišnje radilo na Velikoj piramidi, punih 30 godina. Bili su podijeljeni u četiri odvojene skupine od po 100000 članova, a svaka je grupa bila zaposlena na tri mjeseca. Izračuni su pokazali da ne bi moglo više od 36000 ljudi raditi na piramidi u isto vrijeme bez da ometaju jedni drugima pokrete. Zemljopisni položaj Velike piramide je zagonetka. Velika piramida podignuta je na kamenoj uzvisini koja je umjetno poravnata. Sa svojih 146.7 m visine, do izgradnje Eiffelovog tornja bila je najviša građevina na svijetu. Baza piramide nije savršen kvadrat, ali najveće odstupanje između njenih stranica dugih 230 m iznosi samo 20 cm. Takva točnost zapanjuje današnje graditelje koji sebi dopuštaju puno veće odstupanje. Strane piramide su u obliku trokuta, ali i gotovo neprimjetno konkavne u sredini. Ova “nepravilnost” može se zamijetiti jedino pomoću snimki iz zraka.

Za izgradnju piramide upotrijebljeno je približno 2.5 milijuna kamenih blokova prosječne težine oko 2.6 tona, te je trebalo postaviti 125000 blokova godišnje. Problematiku vađenja kamena, prijevoza i podizanja takve težine na više od 100 m visine u doba kada nije korišten kotač, koloture, niti bilo kakvo željezno oruđe nećemo niti spominjati.

Piramida se prostire na površini od oko 53000 m^2. Za ilustraciju, na tom bi se prostoru moglo smjestiti nekoliko najvećih katedrala. Volumen joj se procjenjuje na nekih $2,6$ milijuna kubičnih metara, a težina joj iznosi preko $6,3$ milijuna tona. Vrhuncem graditeljske domišljatosti možemo smatrati i oblaganje bočnih stranica piramida vapnenačkim blokovima. Zahvaljujući savršeno spojenim blokovima koji su nakon toga potpuno uglađeni, piramida je ravna poput zrcala. Zbog nedostupnosti njezine unutrašnjosti piramida je postala misterij, no na žalost mnogih utvrđeno je da je ona zapravo potpuno prazna. Najveće zagonetke gradnje predstavljaju upravo unutrašnje prostorije i prolazi oko čijeg značenja se raspravlja više od tisuću godina. Važno je istaknuti da piramida ponosno čuva sjećanje na "Sedam čuda" antičkog svijeta, od kojih je sada jedino ona preostala.



Slika 6.2. Ulaz u piramidu

Slika 6.3. Unutrašnjost piramide

7 Zaključak

Nakon svih ovih saznanja možemo reći da su egipatski matematičari bili vrlo mudri. Metode računanja koje su iznijeli mješavina su jednostavnosti i kompliciranosti. U nekim se dijelovima koriste naštimavanjem, nagađanjem, te koriste vrijednosti koje im trebaju da dođu do rezultata, što nije nimalo jednostavno. Iako se metode uvelike razlikuju, možemo uočiti i neke sličnosti u računanju između nas i starih egipćana. O Velikoj piramidi možemo pričati kao o nadljudskom čudu, zacijelo su morali biti vješti s geometrijom, ali i organizacijom, kako bi u to doba uspjeli izgraditi takvo djelo.

Literatura

[1] M. F. Brückler, *Povijest matematike* 1 *(Izmjenjeno i dopunjeno izdanje)*, 10. rujna 2014.

[2] D. M. Burton, *The History of Mathematics: An Introduction*, 2007.

[3] V. Devide, *Matematika kroz kulture i epohe,* Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[4] B. Srdić, *Hrvatski matematički elektronski časopis; math.e* (3), 2009.

Sažetak

O egipatskoj matematici saznaje se iz dvaju izvora: Rhindovog i Moskovskog papirusa. Iz zadataka koji se nalaze u njima spoznali smo način na koji su egipćani zapisivali brojeve, način na koji su zbrajali, oduzimali, množili, dijelili; saznali smo o razlomcima, pravilima za zapisivanje razlomaka,... U tim papirusima nalazili su se i problemi koji se odnose na geometriju. Najvažnija otkrića bile su formule za određivanje površine kruga i volumena krnje piramide. Od velike je značajnosti spomenuti egipatsku Veliku piramidu, koja je jedna od najznamenitijih postignuća u povijesti čovječanstva.

Ključne riječi: matematika, zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, papirusi, razlomci, Velika piramida

Summary

Most of our knowledge of mathematics in Egypt is derived from two papyri: the Rhind Papyrus and the Golenischev Papyrus. Because of tasks that are in them, we know the ways of writing, summing, subtracking, multiplying and dividing the numbers and writing the fractions. Problems related to the geometry were also located in these papyri. The most important discoveries were the formulas for determining the ares of a circle and the volume of a truncated pyramid. It is of great significance to mention Egypt Great Pyramid, which is one of the most prominent achievements in the history of mankind.

Keywords: mathematics, summing, subtracking, multiplying, dividing, papyri, fractions, Great Pyramid

Životopis

Rođena sam 04.10.1994. u Osijeku, dolazim iz Bistrinaca, malog mjesta kraj Belišća. Osnovnu školu pohađala sam u Belišću od 2001. do 2009. Nakon toga upisala sam Opću gimnaziju u Valpovu, koju završavam 2013. godine. Iste te godine upisala sam se na fakultet, točnije Odjel za matematiku u Osijeku. Još od osnovne škole imala sam ljubav prema matematici, od 4. razreda osnovne škole išla sam na natjecanja te kod mene nije bilo dvojbe pri odabiru fakulteta. Uz dodatnu nastavu iz matematike (tzv. matematičare), bavila sam se pjevanjem i rukometom. Sport je i dan danas dio mog života, te sam aktivna golmanica drugoligaškog kluba Rk Olimpije u Osijeku. Također, svih ovih godina predstavljala sam s ostalim članicama Odjela ekipu Primosa na rukometnim natjecanjima. Uz studiranje radila sam studentske poslove kako bih mogla financirati život u Osijeku, ali uz to nalazila sam vremena i za druženja.