Vivianijev teorem

Ždralović, Valentina

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Valentina Ždralović

Vivianijev teorem

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Valentina Ždralović

Vivianijev teorem

Završni rad

Voditeljica: prof.dr.sc. Zdenka Kolar-Begović

Osijek, 2019.

Sažetak

U ovom završnom radu se razmatra tvrdnja poznata u literaturi kao Vivianijev teorem koji kaže da je u jednakostraničnom trokutu suma udaljenosti bilo koje točke trokuta od stranica trokuta neovisna o izboru točke i jednaka je visini tog trokuta. Dano je nekoliko različitih dokaza teorema te navedena poopćenja i prostorni analogon teorema.

Ključne riječi: jednakostraničan trokut, Vivianijev teorem, pravilan poligon, pravilan tetraedar

Abstract

In this paper, it is presented the statement known in the literature as Viviani's theorem which says that in equilateral triangle the sum of the distances from any interior point to the sides of a triangle is independent of choosing the point. Some proofs of the theorem, the generalizations and the spatial analogue of the theorem are given.

Key words: equilateral triangle, Viviani's theorem, regular polygon, regular tetrahedron

Sadržaj

1 Uvod

Postoje brojne tvrdnje vezane uz trokut. U ovom završnom radu razmatra se poznata tvrdnja vezana uz jednakostranični trokut, Vivianijev teorem, prema kojemu je zbroj udaljenosti bilo koje točke jednakostraničnog trokuta od stranica tog trokuta jednak visini trokuta. U prvom poglavlju se iskazuje i dokazuje Vivianijev teorem. Dan je dokaz pomoću površina, te dokazi bez riječi korištenjem rotacije, translacije i vektora. U drugom poglavlju su navedene neke posljedice Vivianijeva teorema. U trećem poglavlju je naveden prostorni analogon teorema. U četvrtom poglavlju se razmatra poopćenje Vivianijeva teorema. U zadnjem poglavlju se razmatra obrat Vivianijeva teorema.

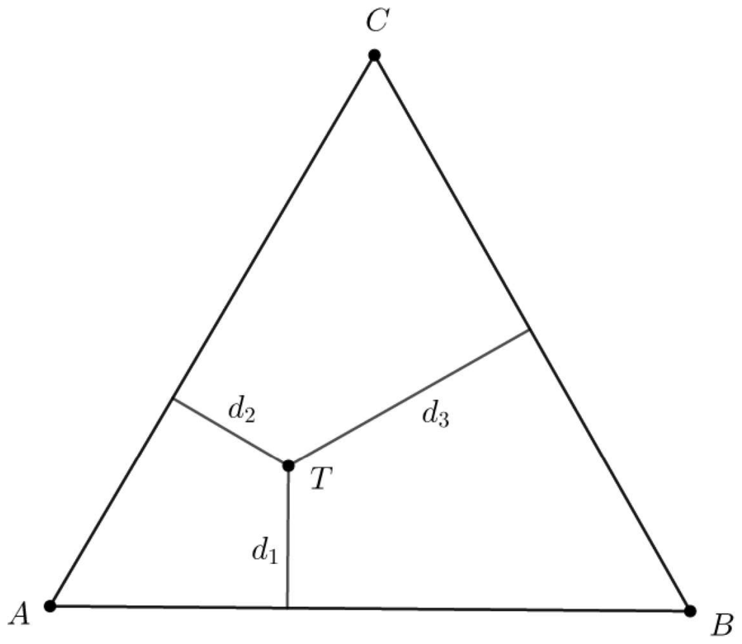
Vivianijev teorem je otkriven prije više od 300 godina. Osoba po kojoj je ova tvrdnja dobila ime je Vincenzo Viviani. Vincenzo Viviani (1622. – 1703.) je rođen i odrastao u Firenci. Matematiku ga je poučavao Clemente Settimi, skolopski fratar i Galilejev prijatelj. Godine 1647. postaje dvorski matematičar ([10]). Sa sedamnaest godina je postao student i asistent Galileu Galilei. Viviani je veći dio svog života proveo restaurirajući djela starogrčkih matematičara te je dvije godine prije svoje smrti objavio djelo pod imenom *The five books of 'Solid Coci' restored by a senior mathematician* ([11]). Također je objavio restauracije pod imenom *A divination of geometric maxima and minima* i *Fifth Book of the 'Elements' of Euclid*. Godine 1676. je objavio djelo *The pleasure of geometry* i godine 1677., *All the problems of the geometry of the things proposed.*

Slika 1: Vincenzo Viviani

2 Vivianijev teorem

U ovom poglavlju ćemo iskazati Vivianijev teorem. Navest ćemo nekoliko dokaza ove poznate tvrdnje: jedan pomoću površina i tri dokaza bez riječi.

Teorem 2.1. *(*Vivianijev teorem*) U jednakostraničnom trokutu ABC, zbroj udaljenosti bilo koje točke T trokuta ABC od stranica trokuta je jednak visini trokuta.*



Slika 2

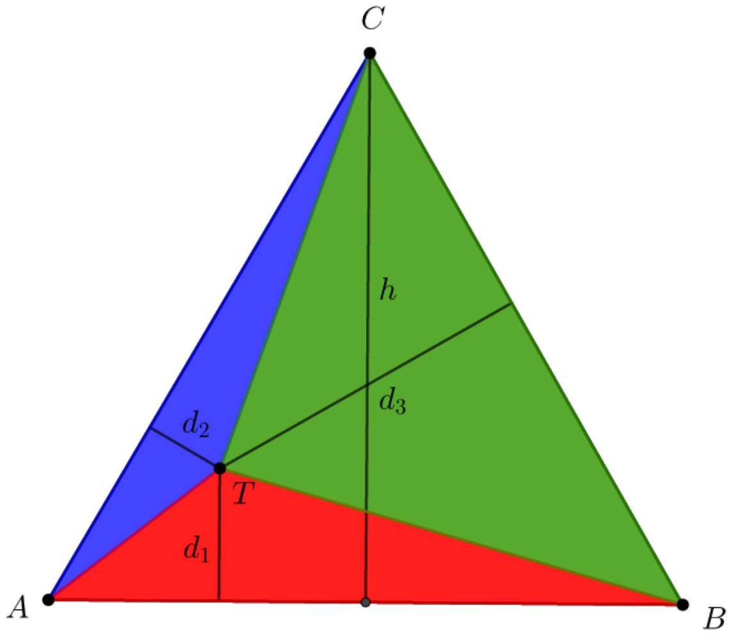
Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ jednakostraničan trokut sa stranicom a i visinom h, te neka je T bilo koja točka trokuta ABC. Označimo s d_1, d_2, d_3 udaljenosti točke T do stranica trokuta. Pomoću dužina $\overline{AT}$, $\overline{BT}$, $\overline{CT}$ dobivamo tri trokuta TAB, TCA, TBC (slika 3).

Površine tih trokuta iznose $\frac{1}{2}d_1a$, $\frac{1}{2}d_2a$, $\frac{1}{2}d_3a$. Kako te dužine dijele trokut ABC na trokute TAB, TBC i TCA, vrijedi

$$\frac{1}{2}d_1a + \frac{1}{2}d_2a + \frac{1}{2}d_3a = \frac{1}{2}ha.$$

Slijedi

$$d_1 + d_2 + d_3 = h.$$

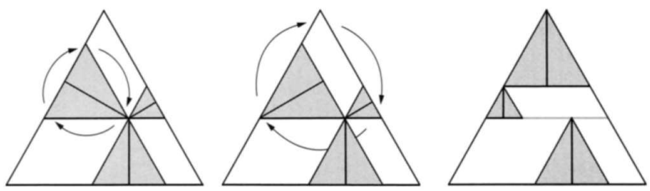


Slika 3: Dokaz pomoću površina

□

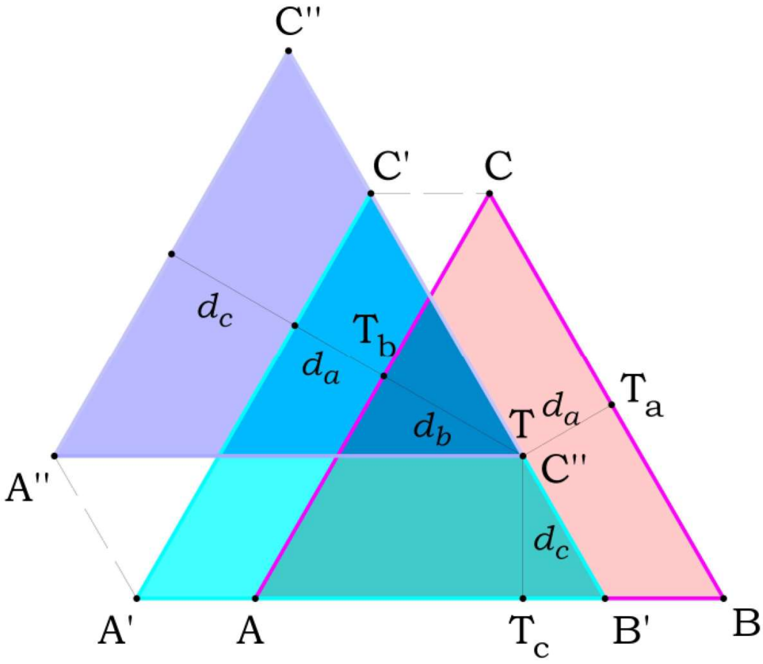
Navest ćemo još nekoliko dokaza Vivianijeva teorema.

1. Dokaz bez riječi pomoću rotacije ([3]).



Slika 4: Dokaz pomoću rotacije

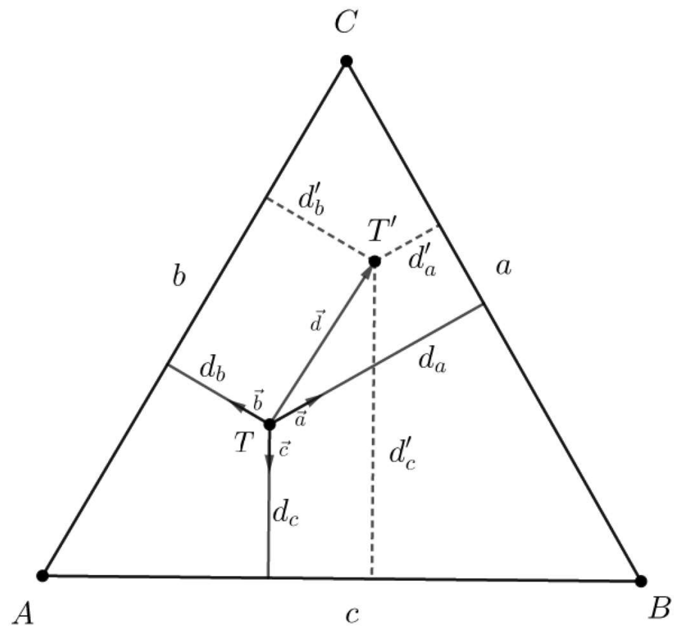
2. Dokaz bez riječi pomoću translacije ([6]).



Slika 5: Dokaz pomoću translacije

3. Dokaz bez riječi pomoću vektora ([5]).

$$|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}|$$
$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$$
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d} + \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{d} = 0$$
$$d_a - d'_a + d_b - d'_b + d_c - d'_c = 0$$
$$d_a + d_b + d_c = d'_a + d'_b + d'_c$$

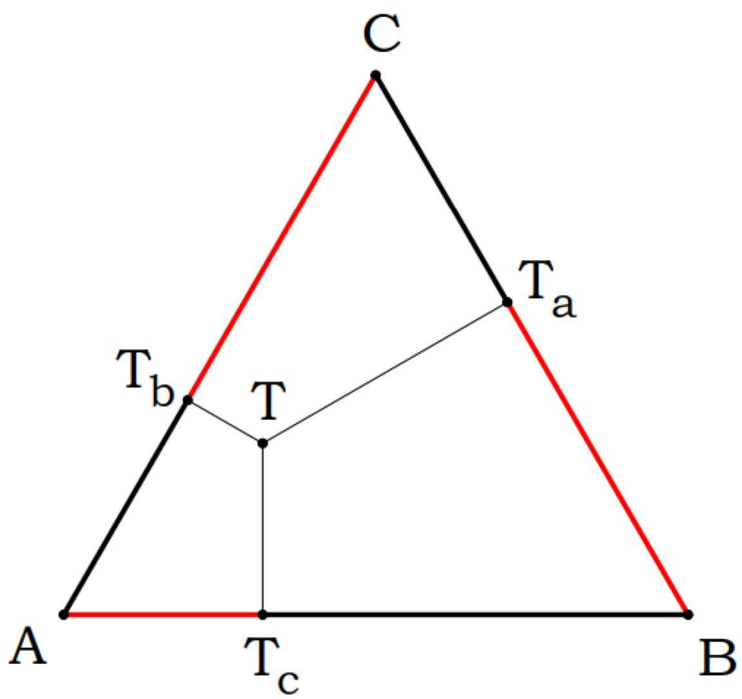


Slika 6: Dokaz pomoću vektora

3 Neke posljedice Vivianijeva teorema

Navest ćemo tvrdnju koja je posljedica Vivianijeva teorema ([6]). Dokaz pomoću vektora nam je pokazao da ako je T točka unutar jednakostraničnog trokuta ABC, a $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ bilo koja tri jedinična vektora čija je suma $\overrightarrow{0}$, tada je suma duljina projekcija $\overline{TA}$, $\overline{TB}$ i $\overline{TC}$ na $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ konstantna za sve takve točke T. Kako možemo izabrati takva tri jedinična vektora $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ na beskonačno mnogo načina, moguće je dobiti beskonačno mnogo teorema iz ove tvrdnje. Navest ćemo jednu mogućnost. Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ jedinični vektori čiji se smjerovi podudaraju s $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CA}$. Iz toga direktno slijedi teorem.

Teorem 3.1. *Neka je dan jednakostraničan trokut ABC i točka T unutar trokuta ABC. Neka su T_a, T_b i T_c nožišta okomica iz točke T na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC. Tada suma $|AT_c| + |BT_a| + |CT_b|$ ima istu vrijednost za bilo koju točku T.*



Slika 7: Posljedica Vivianijeva teorema

Nije teško izvesti kolika je vrijednost sume $|AT_c| + |BT_a| + |CT_b|$ za jednakostraničan trokut ABC duljine stranice a. Ako je T središte trokuta ABC opisane kružnice tada je

$$|AT_c| = |BT_a| = |CT_b| = \frac{a}{2}.$$

Odavde dobivamo

$$|AT_c| + |BT_a| + |CT_b| = \frac{3a}{2}.$$

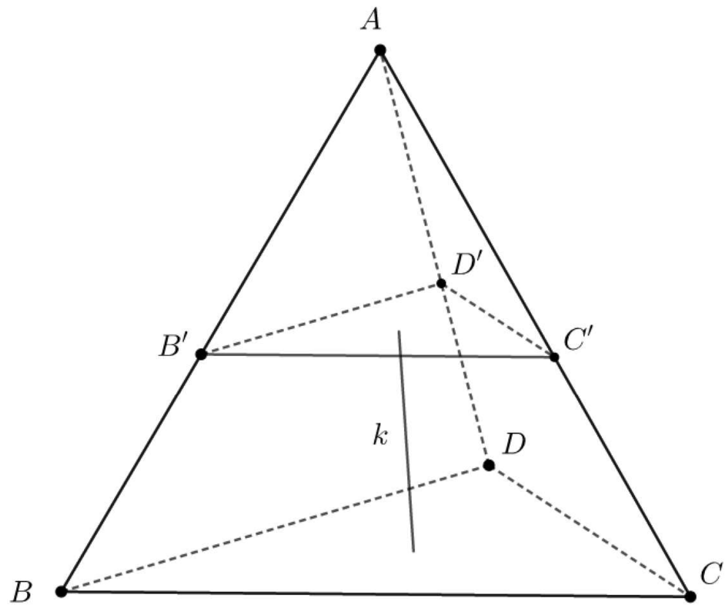
za bilo koju točku T unutar trokuta ABC. Također slijedi jednakost

$$|AT_c| + |BT_a| + |CT_b| = |BT_c| + |CT_a| + |AT_b|.$$

4 Prostorni analogon Vivianijeva teorema

U ovom poglavlju ćemo navesti i dokazati prostorni analogon Vivianijeva teorema. Prostorni analogon Vivianijeva teorema je moguće dokazati korištenjem volumena. Ovdje će ova tvrdnja biti dokazana bez korištenja volumena ([2]). Najprije iskažimo sljedeću lemu.

Lema 4.1. *Neka je $B'C'D'$ ravnina paralelna sa stranom BCD pravilnog tetraedra $ABCD$ i neka siječe bridove $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AD}$ u točkama B', C' i D' tako da je $AB'C'D'$ također pravilni tetraedar. Neka je udaljenost između paralelnih ravnina jednaka k. Tada vrijedi*



Slika 8

$$h(AB'C'D') + k = h(ABCD)$$

gdje $h(AB'C'D')$ predstavlja visinu tetraedra AB'C'D'.

Teorem 4.2. *Neka je točka O unutar, ili na strani, pravilnog tetraedra $ABCD$ i neka pravci kroz točku O okomiti na strane BCD, ACD, ABD i ABC sijeku te strane u točkama E, F, G i H. Tada je zbroj udaljenosti $|OE|$, $|OF|$, $|OG|$ i $|OH|$ jednak visini tetraedra $ABCD$.*

Dokaz. U ovom dokazu koristimo Lemu 4.1 Razlikujemo četiri slučaja.

Slučaj 1. (slika 9) Ako se točka O podudara s vrhom tetraedra $ABCD$, npr. $O = A$, tada zaključujemo

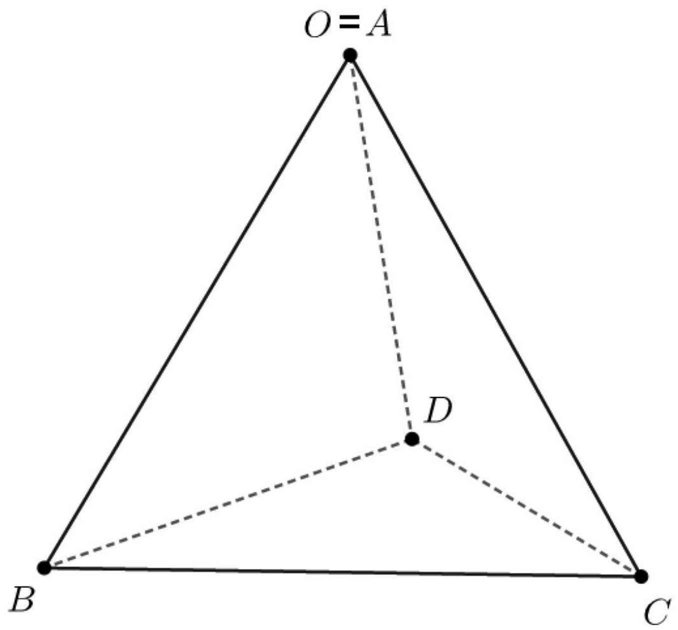
$$|OG| = |OF| = |OH| = 0,$$

i

$$|OE| = h,$$

gdje je h visina tetraedra. Stoga vrijedi

$$|OE| + |OF| + |OG| + |OH| = h.$$



Slika 9

Slučaj 2. (slika 10) Pretpostavimo da točka O leži na bridu tetraedra $ABCD$, npr. $O = B'$, gdje B' leži na bridu $\overline{AB}$. Neka ravnina kroz B' paralelna s ravninom BCD siječe bridove $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AD}$ u točkama B', C' i D'. Tada, pomoću Leme 4.1, vrijedi

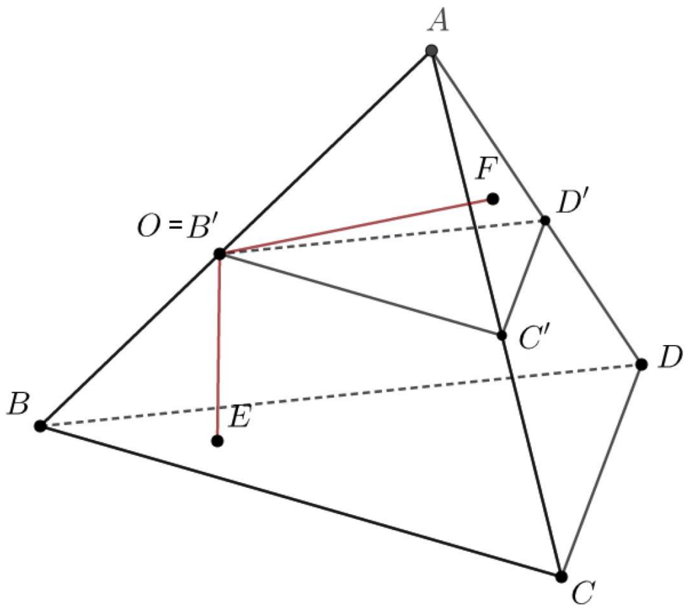
$$|OE| = k,$$

$$|OF| = h(AB'C'D'),$$

$$|OG| = |OH| = 0.$$

Stoga slijedi

$$|OE| + |OF| + |OG| + |OH| = h(ABCD).$$



Slika 10

Slučaj 3. (slika 11) Pretpostavimo da točka O leži na strani tetraedra $ABCD$, npr. $O = H$, gdje je H točka na strani ABC. Neka ravnina kroz točku H paralelna ravnini BCD siječe bridove $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AD}$ u točkama B', C' i D'. Tada, primjenom slučaja 2 na točku H koja se nalazi na bridu $\overline{B'C'}$ tetraedra $AB'C'D'$, imamo

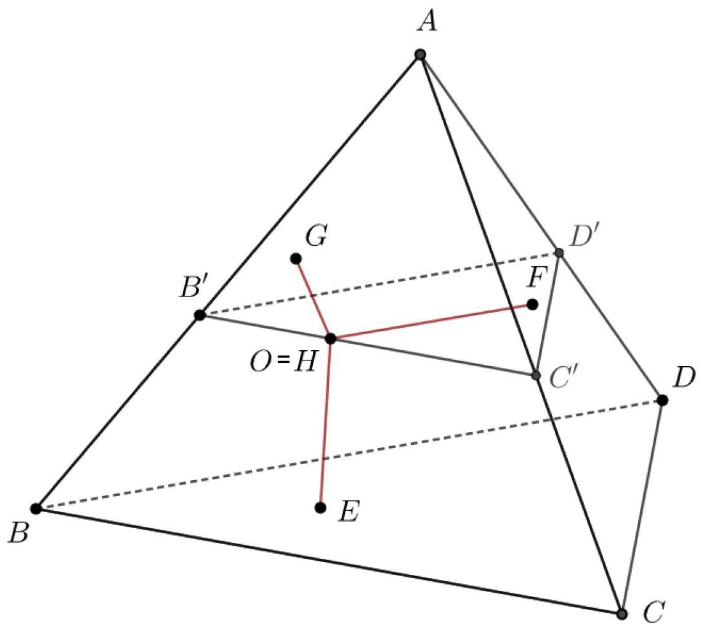
$$|OF| + |OG| + |OH| = |HF| + |HG| + 0 = h(AB'C'D')$$

i

$$|OE| = k.$$

Stoga zbog Leme 4.1 vrijedi

$$|OE| + |OF| + |OG| + |OH| = h(ABCD).$$



Slika 11

Slučaj 4. (slika 12) Pretpostavimo da točka O leži unutar tetraedra $ABCD$. Neka ravnina kroz točku O paralelna s ravninom BCD siječe bridove $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AD}$ u točkama B', C' i D'. Tada primjenom slučaja 3 na točku O koja se nalazi na strani $B'C'D'$ tetraedra $AB'C'D'$ imamo

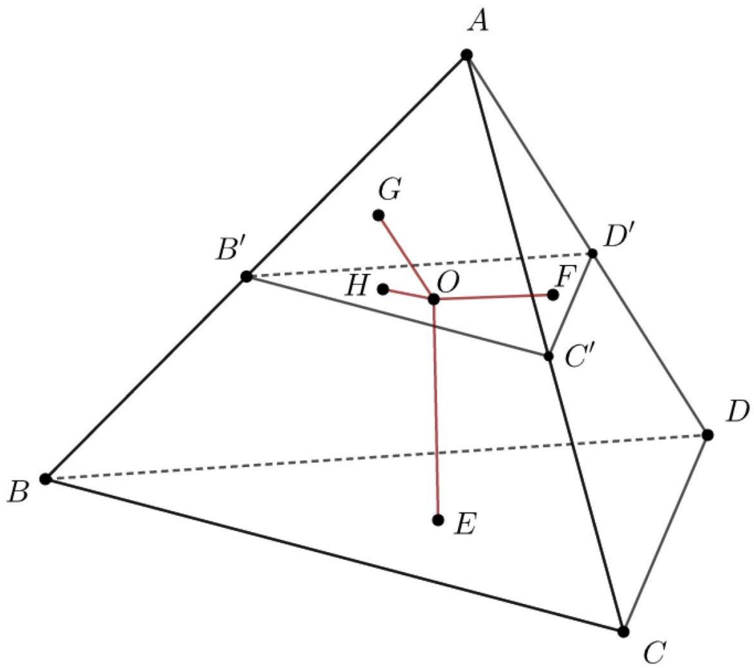
$$|OF| + |OG| + |OH| = h(AB'C'D')$$

i

$$|OE| = k.$$

Stoga, zbog Leme 4.1, vrijedi

$$|OE| + |OF| + |OG| + |OH| = h(ABCD).$$



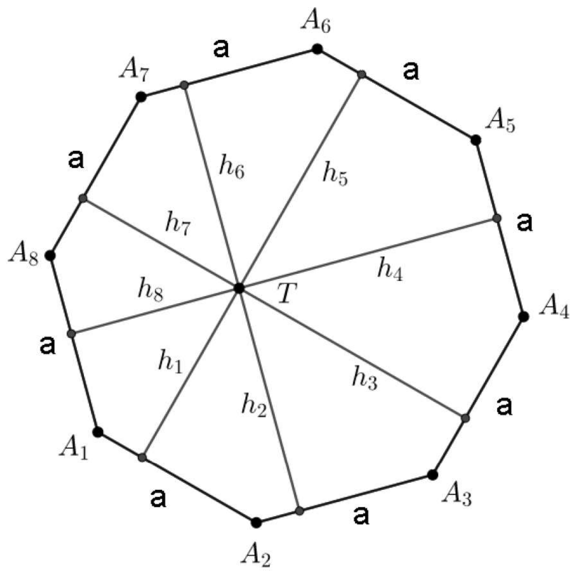
Slika 12

□

5 Poopćenja Vivianijeva teorema

Metodu površine koju smo koristili u prvom dokazu Vivianijeva teorema možemo iskoristiti za dokaz sljedećeg teorema koji predstavlja poopćenje Vivianijeva teorema.

Teorem 5.1. *Zbroj udaljenosti od bilo koje točke T unutar pravilnog poligona do njegovih stranica neovisan je o položaju točke T.*



Slika 13

Dokaz. Ako su stranice pravilnog n-terokuta duljine a, a udaljenosti od točke T do stranice n-terokuta $h_1, h_2, \ldots, h_n$, tada je površina poligona jednaka

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a h_i.$$

Vrijedi

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_n = \frac{2P}{a}$$

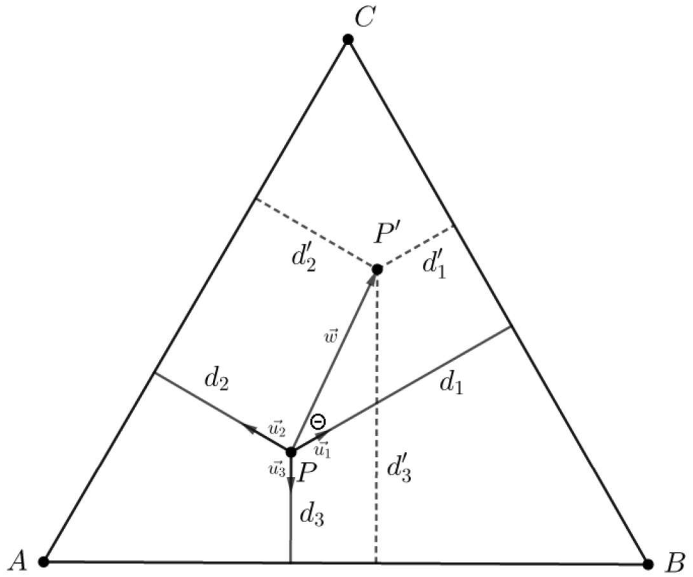
je konstantna. $\square$

Može se dokazati da Vivianijev teorem vrijedi i za poligone kojima su svi unutarnji kutovi sukladni tzv. ekviangularne poligone.

6 Obrat Vivianijeva teorema

U ovom poglavlju razmatrat ćemo obrat Vivianijeva teorema ([1]).

Teorem 6.1. *Ako unutar trokuta ABC postoji kružno područje R za koje je zbroj udaljenosti od točke P u R do tri stranice trokuta neovisan o položaju točke P, tada je trokut ABC jednakostraničan.*



Slika 14

Dokaz. Neka je točka P unutar trokuta $\triangle ABC$ i $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ jedinični vektori od točke P okomiti na stranice trokuta (slika 14). Trebamo pokazati da je kut između ta dva vektora $120°$, iz čega slijedi da svaki kut trokuta iznosi $60°$.

Pokažimo da je zbroj tih vektora, $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ jednak $\vec{0}$. Pretpostavimo suprotno. Iz pretpostavke teorema, slijedi da postoji točka P' u R takva da je $\overrightarrow{PP'}$ paralelan sa $\vec{u}$. Označimo vektor $\overrightarrow{PP'}$ s $\vec{w}$ i neka je Θ kut između $\vec{u}_1$ i $\vec{w}$. Također, neka su d_1, d_2 i d_3 udaljenosti od točke P do stranica $\triangle ABC$ i d_1', d_2' i d_3' odgovarajuće udaljenosti od točke P'. Prema pretpostavci vrijedi

$$d_1 + d_2 + d_3 = d_1' + d_2' + d_3'.$$

Vrijedi

$$\cos\Theta = \frac{d_1 - d_1'}{|\vec{w}|} \quad \text{i} \quad \cos\Theta = \frac{\vec{u_1}\cdot\vec{w}}{|\vec{w}|}.$$

Stoga slijedi

$$\vec{u_1}\cdot\vec{w} = d_1 - d_1'$$

pa zbog simetrije

$$\vec{u_2} \cdot \vec{w} = d_2 - d_2' \quad \text{i} \quad \vec{u_3} \cdot \vec{w} = d_3 - d_3'$$
$$\vec{u_1} \cdot \vec{w} + \vec{u_2} \cdot \vec{w} + \vec{u_3} \cdot \vec{w} = d_1 - d_1' + d_2 - d_2' + d_3 - d_3'$$
$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0.$$

Kako su vektori $\vec{u}$ i $\vec{w}$ paralelni, vrijedi $|\vec{u}| = 0$, što je kontradikcija. Zaključujemo, za $i = 1, 2, 3$ vrijedi $\vec{u}_i \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3) = 0$ iz čega slijedi:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 = -\frac{1}{2}.$$

Prema tome kut između bilo koja dva vektora $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ iznosi $\frac{2\pi}{3}$, pa je $\triangle ABC$ jednakostraničan. $\square$

Literatura

[1] Z. Chen, The Converse of Viviani's Theorem, College Mathematics Journal 37 (5), (2006), 390–391.

[2] K. Kawasaki, *On Viviani's Theorem in Three Dimensions*, The Mathematical Gazette 89 (515), (2005), 283–287.

[3] K. Kawasaki, *Proof without Words: Viviani's Theorem*, The Mathematical Gazette 78 (3), (2005), 213.

[4] G. Nicollier, *Proof without words: Vivani far congruent cevians*, Mathematics Magazin 89, (2016), 216–217.

[5] H. Samelson, *Proof without Words: Viviani's Theorem with Vectors*, Mathematics Magazine 76 (3), (2003), 225.

[6] S. Shirali, *Viviani's Theorem... And A* Cousin, At Right Angles 1 (2), (2012), 23–26.

[7] V. G. Tolelas, *A proof without words for Vivani's Theorem*, At Right Angles 4 (1), (2015), 5–6.

[8] M. de Villiers, *3D Generalisation of Vivani's theorem*, The Mathematical Gazette 97 (540), (2013), 441–445.

[9] Materijali kolegija Elementarna geometrija, Zdenka Kolar-Begović.

[10] `http://galileo.rice.edu/sci/viviani.html`

[11] `www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Viviani.html`