Kopule

Stojčević, Anja

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Anja Stojčević

Kopule

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Anja Stojčević

Kopule

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2019.

Sadržaj

Uvod **1**

1. Kopule **2**

1.1 Definicija kopule 3

1.2 Svojstva kopula 6

2. Neke važne kopule **8**

2.1 Nezavisna kopula i Fréchet-Hoeffdingova nejednakost 8

2.2 Kopule preživljenja 10

2.2.1 Funkcionalna invarijantnost 11

2.2.2 Repna zavisnost 12

3. Familije kopula **13**

3.1 Eliptične kopule 13

3.1.1 Normalna ili Gaussova kopula 14

3.1.2 Studentova t-kopula 15

3.2 Arhimedove kopule 18

3.2.1 Claytonova kopula 18

3.2.2 Gumbelova kopula 19

3.2.3 Frankova kopula 20

4. Primjena kopula **22**

4.1 Upravljanje rizicima 22

4.1.1 Vrijednost pod rizikom (VaR) 22
4.1.2 Testiranje otpornosti na stres 24
4.2 Optimizacija portfelja 26
4.3 Određivanje cijena financijskih izvedenica 28
4.4 Rizici kod primjene kopula 31

Literatura **33**

Sažetak **35**

Abstract **36**

Životopis **37**

Uvod

U novije vrijeme kopula predstavlja jedan moderan, suvremeni alat koji se sve više razvija i dobiva na popularnosti. Riječ kopula dolazi iz latinskog jezika i znači "veza" ili "spojnica". U lingvistici predstavlja riječ koja služi kao spojnica između subjekta i predikata. No, što je zapravo kopula u matematičkom svijetu? Kakva svojstva posjeduje? Ima li primjene i potrebe za kopulama u stvarnom svijetu?

Odmah na početku ovoga rada vidjet ćemo da poznavanjem kopula možemo izgraditi razne matematičke modele i odrediti gornje i donje granice za zajedničke vjerojatnosti preživljavanja neovisno o modelu. Upoznat ćemo se s definicijom kopula te svojstvima koja posjeduju. U drugom dijelu rada vidjet ćemo neke zanimljive kopule koje se povezuju s njihovim svojstvima te otkrivaju njihovu rasprostranjenost i mogućnosti njihove primjene. Nakon toga jedno poglavlje odvojit ćemo na familije kopula. Vidjet ćemo da postoje eliptične i Arhimedove kopule kao familije s određenim svojstvima koje objedinjuju više vrsta kopula.

Kad smo se upoznali s pojmom kopula, vidjeli njihove karakteristike te vrste kopula napokon možemo otkriti njihovu primjenu u stvarnom svijetu. Upravo tom temom ćemo se baviti u zadnjem dijelu ovoga rada. Vidjet ćemo gdje se primjenjuju kopule, gdje su se primjenjivale te do kakvih su rezultata dovele njihove primjene.

1. Kopule

Neka je $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ dvodimenzionalan slučajni vektor s funkcijom distribucije $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$ te neka su $F_1(x_1)$ i $F_2(x_2)$ pripadajuće marginalne funkcije distribucije. Vrijednosti navedenih funkcija distribucije nalaze se unutar jediničnog intervala $[0, 1]$. Preslikavanje koje vrijednost zajedničke funkcije distribucije pridružuje svakom paru vrijednosti marginalnih funkcija distribucije, odnosno funkcija $(F_1(x_1), (F_2(x_2)) \mapsto F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$, naziva se **kopula**.

U matematičkom smislu, 1959. godine u Sklarovom teoremu prvi put se pojavljuje riječ kopula (vidi u [1]). Osnovna ideja je bila da se podijeli zajednička funkcija distribucije na dio koji opisuje zavisnu strukturu (kopula) i dijelove koji opisuju samo ponašanje marginalnih distribucija. Dakle, kopula je funkcija koja paru, ili općenito n-torci, vrijednosti marginalnih funkcija distribucija slučajnog vektora pridružuje odgovarajuću vrijednost funkcije distribucije tog slučajnog vektora. Detaljnu definiciju dat ćemo u nastavku no zbog razumijevanja cijelog koncepta pogledajmo prvo odgovarajući primjer.

Primjer 1.1. ***Modeliranje zavisnosti između vremena neizvršenja novčanih obveza (bankrota)***

Pretpostavimo da kreiramo portfelj koji se sastoji od dvije obveznice s istim trenutkom dospjeća T. Ako izdavači obiju obveznica ne bankrotiraju do T, znamo točnu vrijednost portfelja u trenutku T. Međutim, suočavamo se s rizikom bankrota u tijeku trajanja obveznica. Označavajući s X_1, X_2 trenutke u budućnosti u kojima izdavači odlaze u bankrot, nadamo se da je $X_1 > T$ i $X_2 > T$. U suprotnom, s vjerojatnošću $1 - P(X_1 > T, X_2 > T)$, naša investicija će pretrpjeti teški gubitak. Posljedično, procjena zajedničke vjerojatnosti preživljenja $P(X_1 > T, X_2 > T)$ nam je vrlo bitna.

Pretpostavimo da su financijski analitičari opsežno proučili obje tvrtke izdavače obveznica te mogu procijeniti vjerojatnosti preživljenja $P(X_1 > T)$ i $P(X_2 > T)$. Za računanje zajedničke vjerojatnosti preživljenja trebamo dodatne informacije o strukturi zavisnosti između X_1 i X_2. Nažalost, nemamo dostupne empirijske podatke, ili zato što niti jedan izdavač nikad prije nije bankrotirao ili jednostavno nema dostupnih podataka koji pružaju korisne informacije o zavisnosti između vremena bankrota. Tada nam treba bivarijantni stohastički model kao familija funkcija distribucije slučajnog vektora (X_1, X_2) koji je konzistentan s našim stavom o vjerojatnosti preživljenja. To je zadatak modeliranja koji je daleko od trivijalnog. No, na sreću postoje kopule i teorija kopula nam može pomoći izraditi takve modele. Dodatno, omogućuje nam da postavimo gornje i donje granice za zajedničku vjerojatnost preživljenja.

1.1 Definicija kopule

Zbog jednostavnosti u nastavku ćemo kopule razmatrati samo u dvodimenzionalnom slučaju.

Definicija 1.1. *Kopula je funkcija* $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ *koja ima sljedeća svojstva:*

1. *Za* $\forall u, v \in [0,1]$ *je*
$$C(u,0) = 0 = C(0,v).$$
2. *Za* $\forall u, v \in [0,1]$ *je*
$$C(u,1) = u, C(1,v) = v.$$
3. *Za* $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ *takve da je* $u_1 \leq u_2$ *i* $v_1 \leq v_2$ *vrijedi*
$$C(v_1, v_2) - C(u_1, v_2) \geq C(v_1, u_2) - C(u_1, u_2).$$

Već smo napomenuli da je riječ kopula u statističkom smislu prvi put upotrijebio Sklar. Na osnovu toga smatra se da Sklarov teorem predstavlja osnovu teorije kopula kao i njihove primjene. Naime, Sklarov teorem objašnjava ulogu kopula u vezi višedimenzionalnih funkcija distribucija i njihovih marginalnih distribucija. Prije nego iskažemo Sklarov teorem, definirat ćemo prostor koji ćemo koristiti u navedenom teoremu, kao i dalje kroz rad.

Definicija 1.2. *Neka je* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *slučajni vektor koji ima marginalne funkcije distribucije* $F_1, F_2, ..., F_n$. *Tada prostor funkcija koji se sastoji od svih n-dimenzionalnih funkcija distribucije* $F_{\boldsymbol{X}}$ *slučajnog vektora* $\boldsymbol{X}$ *zovemo Fréchetov prostor, oznaka:* $\mathcal{R}_n(F_1, F_2, ..., F_n)$.

Neka je $U = (U_1, U_2)$ slučajni vektor te neka su slučajne varijable U_1 i U_2 uniforme na (0,1). Tada je kopula funkcija distribucije slučajnog vektora čije su marginalne distibucije uniformne na $(0,1)$ odnosno vrijedi:

$$C(u,v) = P\{U_1 \leq u, U_2 \leq v\}.$$

Znamo iz vjerojatnosti da transformacije slučajnih varijabli X i Y, $X \mapsto F_1(X), Y \mapsto F_2(Y)$, imaju jediničnu uniformnu distribuciju, tj.

$$F_1(X) \stackrel{d}{=} U_1, \quad F_2(Y) \stackrel{d}{=} U_2.$$

Teorem 1.1. *Ako je* V *neprekidna slučajna varijabla s funkcijom distribucije* F_V, *tada slučajna varijabla* $W = F_V(V)$ *ima uniformnu distribuciju na intervalu* $(0,1)$, *tj.* $W \sim U(0,1)$.

U nastavku, zbog jednostavnosti, razmotrit ćemo samo slučajeve u kojima su funkcije distribucije strogo rastuće funkcije.

Dokaz Teorema 1.1. Ako je V neprekidna slučajna varijabla, tada je funkcija distribucije F_V neprekidna, monotono rastuća bijekcija. Označimo s $W = F_V(V)$ slučajnu varijablu s funkcijom distribucije F_W. Za funkciju distribucije F_W vrijedi:

$$F_W(u) = P\{W \leq u\} = P\{F_V(V) \leq u\} = \begin{cases} 0 & ,u < 0 \\ P\{V \leq F_V^{-1}(u)\} & ,u \in [0,1). \\ 1 & ,u \geq 1 \end{cases}$$

Obzirom da je:

$$P\{V \leq F_V^{-1}(u)\} = F_V(F_V^{-1}(u)) = u,$$

slijedi da je $W \sim U(0,1)$ i to neovisno o funkciji distribucije F_W sve dok je ona funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable. □

Navedeni dokaz vrijedi samo za strogo rastuće funkcije distribucije. Općeniti dokaz može se pogledati u [9].

Analogno i transformacija koja odgovara F_i^{-1} standardne uniformne distribucije s funkcijom distribucije F_i.

Teorem 1.2. *Neka je $Y \sim U(0,1)$ i F_X funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable X. Ako funkcija $F_X(X)$ ima inverznu funkciju F_X^{-1} definiranu na intervalu $(0,1)$, tada slučajna varijabla $F_X^{-1}(Y)$ ima funkciju distribucije F_X.*

Iz prethodnih teorema slijedi:

$$\begin{aligned} C(F_1(x), F_2(y)) &= P\{U_1 \leq F_1(x), U_2 \leq F_2(y)\} \\ &= P\{F_1^{-1}(U_1) \leq x, F_2^{-1}(U_2) \leq y\} \\ &= P\{X \leq x, Y \leq y\} \\ &= F(x,y). \end{aligned}$$

Teorem 1.3. (Sklarov teorem)
Neka $F_{\mathbf{X}} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ ima neprekidne marginalne funkcije distribucije F_1 i F_2. Tada postoji jedinstvena kopula C takva da za $\forall(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)). \tag{1}$$

Obratno, ako je C kopula te F_1 i F_2 funkcije distribucije, onda je funkcija $F_{\mathbf{X}}$ definirana s (1), dvodimenzionalna funkcija distribucije s marginalnim distribucijama F_1 i F_2.

Iz (1) možemo vidjeti da funkcija C "povezuje" marginalne funkcije distribucije F_1 i F_2 sa zajedničkom distribucijom $F_{\mathbf{X}}$ slučajnih varijabli X_1 i X_2. Zavisnost je u potpunosti opisana pomoću C i tako odvojena od marginalnih distribucija.

Posljedica 1.1. *Neka su* F_1^{-1} *i* F_2^{-1} *inverzne funkcije marginalnih funkcija distribucija. Tada postoji jedinstvena kopula* $C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *takva da je*

$$C(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)).$$

Dakle, marginalna distribucija i struktura zavisnosti n-dimenzionalnog slučajnog vektora mogu biti strogo razdvojene. Dok je marginalna distribucija određena jednodimenzionalnom funkcijom distribucije, struktura zavisnosti je određena kopulom.

1.2 Svojstva kopula

Lema 1.1. *Neka je $F_{\mathbf{X}} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ s nosačem $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$. Neka su x_1 i x_2 u $\mathcal{S}_1$ i vrijedi $x_1 \leq x_2$, te neka su y_1 i y_2 u $\mathcal{S}_2$ i vrijedi $y_1 \leq y_2$.*
Tada je funkcija koja preslikava $t \mapsto F_{\mathbf{X}}(t, y_2) - F_{\mathbf{X}}(t, y_1)$ monotono rastuća na $\mathcal{S}_1$, a funkcija koja preslikava $t \mapsto F_{\mathbf{X}}(x_2, t) - F_{\mathbf{X}}(x_1, t)$ monotono rastuća na $\mathcal{S}_2$.

Dokaz. Neka je $t_1 \leq t_2 \in \mathcal{S}_1$, tada vrijedi

$$(F_{\mathbf{X}}(t_2, y_2) - F_{\mathbf{X}}(t_2, y_1)) - (F_{\mathbf{X}}(t_1, y_2) - F_{\mathbf{X}}(t_1, y_1)) = P\{\mathbf{X} \in (t_1, t_2] \times (y_1, y_2]\} \geq 0.$$

Drugi slučaj iz iskaza teorema dokazuje se analogno. □

Sljedeći rezultat pokazuje neprekidnost kopula uz Lipschitzov uvjet.

Propozicija 1.1. *Neka su $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$. Tada je:*

$$|C(u_1, u_2) - C(v_1, v_2)| \leq |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|.$$

Stoga je kopule C uniformno neprekidna na $[0, 1]^2$.

Dokaz. Pokazat ćemo da za dani $F_{\mathbf{X}} \in \mathcal{R}_2(F_1, F_2)$ s nosačem $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ i za bilo koje točke (x_1, x_2) i (y_1, y_2) iz tog nosača vrijedi nejednakost:

$$|F_{\mathbf{X}}(y_1, y_2) - F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)| \leq |F_1(y_1) - F_1(x_1)| + |F_2(y_2) - F_2(x_2)|. \tag{2}$$

Iz nejednakosti trokuta imamo

$$|F_{\mathbf{X}}(y_1, y_2) - F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)| \leq |F_{\mathbf{X}}(y_1, y_2) - F_{\mathbf{X}}(x_1, y_2)| + |F_{\mathbf{X}}(x_1, y_2) - F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)|.$$

Pretpostavimo da je $x_1 \leq y_1$, pa iz Lema 1.1. slijedi

$$0 \leq F_{\mathbf{X}}(y_1, y_2) - F_{\mathbf{X}}(x_1, y_2) \leq \lim_{y_2 \to \infty} (F_{\mathbf{X}}(y_1, y_2) - F_{\mathbf{X}}(x_1, y_2)) = F_1(y_1) - F_1(x_1).$$

Analogno vrijedi i za $y_1 \leq x_1$. Iz toga slijedi da za $\forall x_1, y_1 \in S_1$ vrijedi

$$|F_{\mathbf{X}}(y_1, y_2) - F_{\mathbf{X}}(x_1, y_2)| \leq |F_1(y_1) - F_1(x_1)|.$$

Slično, za $\forall x_2, y_2 \in S_2$ vrijedi

$$|F_{\mathbf{X}}(x_1, y_2) - F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)| \leq |F_2(y_2) - F_2(x_2)|.$$

Iz posljednje dvije nejednakosti i nejednakosti trokuta slijedi (2). □

Kao direktna posljedica teorema proizlazi sljedeće:

Posljedica 1.2. *Neka je C kopula i u_0 bilo koji broj iz $[0, 1]$. Tada:*

1. *Funkciju $t \mapsto C(t, u_0)$ s $[0, 1]$ u $[0, 1]$ zovemo horizontalni dio kopule C u u_0.*
2. *Funkciju $t \mapsto C(u_0, t)$ s $[0, 1]$ u $[0, 1]$ zovemo vertikalni dio kopule C u u_0.*
3. *Funkciju $t \mapsto C(t, t)$ s $[0, 1]$ u $[0, 1]$ zovemo dijagonalni dio kopule C u u_0.*

Horizontalni, vertikalni i dijagonalni dijelovi kopule C su neopadajuće i uniformno neprekidne funkcije na $[0, 1]$.

Teorem 1.4. *Neka je C kopula i za $\forall u_2 \in [0, 1]$ parcijalna derivacija $\frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2)$ postoji skoro svuda. Tada za svaki par točaka (u_1, u_2) u kojima derivacija postoji vrijedi*

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \leq 1. \tag{3}$$

Analogno, za $\forall u_1 \in [0, 1]$ parcijalna derivacija $\frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2)$ postoji skoro svuda. Tada za svaki par točaka (u_1, u_2) u kojima derivacija postoji vrijedi

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2) \leq 1. \tag{4}$$

Dodatno, funkcije $u_1 \mapsto \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2)$ i $u_2 \mapsto \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2)$ su definirane i neopadajuće skoro svuda na $[0, 1]$.

Dokaz. Parcijalne derivacije $\frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2)$ i $\frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2)$ postoje, s obzirom da su monotone funkcije (horizontalni i vertikalni dio) diferencijabilne skoro svuda. Tada nejednakosti (3) i (4) slijede iz posljedice 1.2.
Ako je $v_1 \leq v_2$ tada iz leme 1.1. slijedi da je funkcija $u \mapsto C(u, v_2) – C(u, v_1)$ neopadajuća. Odavdje slijedi da je $\frac{\partial}{\partial u}(C(u, v_2) – C(u, v_1))$ definirana i nenegativna skoro svuda na $[0, 1]$, pa je funkcija $u_2 \mapsto \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2)$ definirana i neopadajuća skoro svuda.
Slično se dokazuje i za $\frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2)$. □

Teorem 1.5. *Neka su F_1 i F_2 neprekidne marginalne funkcije distribucija s gustoćama f_1 i f_2. Tada se zajednička funkcija gustoće od $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ može zapisati na sljedeći način:*

$$f_{\boldsymbol{X}}(x) = f_1(x_1) f_2(x_2) c(F_1(x_1), F_2(x_2)), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

gdje je gustoća kopule c dana s

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2), \quad (u_1, u_2) \in [0, 1]^2.$$

Specijalno, ako su X_1 i X_2 nezavisne, tada je $c(u_1, u_2) = 1$ i zajednička funkcija gustoće f_X se faktorizira na marginalne funkcije gustoće f_1 i f_2.

2. Neke važne kopule

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s nezavisnom kopulom, Fréchet-Hoeffdingovom nejednakosti te pojmom kopula preživljenja.

2.1 Nezavisna kopula i Fréchet-Hoeffdingova nejednakost

Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable s funkcijama distribucije F_1 i F_2. Njihova zajednička funkcija distribucije je dana s $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$ gdje je $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$. Kopula koja odgovara ovoj strukturi dana je izrazom

$$C_N(u_1, u_2) = u_1 u_2, \quad (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$$

Ovakva kopula se naziva nezavisna kopula.
Pokazat ćemo da je ona uistinu kopula, odnosno da zadovoljava zahtjeve iz definicije kopule. Neka su $u, v \in [0, 1]$. Tada vrijedi:

1. $C_N(u, 0) = u \cdot 0 = 0, C_N(0, v) = 0 \cdot v = 0$
2. $C_N(u, 1) = u \cdot 1 = u, C_N(1, v) = 1 \cdot v = v$
3. Za $u_1 \leq u_2$ i $v_1 \leq v_2$, $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$, vrijedi:
   $C_N(u_2, v_2) - C_N(u_2, v_1) - C_N(u_1, v_2) + C_N(u_1, v_1) = u_2 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_2 + u_1 \cdot v_1 \geq 0.$

Ukoliko X_1 i X_2 zadovoljavaju Sklarov teorem, onda su one nezavisne ako i samo ako je $C \equiv C_N$.

Kako bi ograničili kopule s obje strane upoznat ćemo se sa pojmom Fréchet-Hoeffdingove nejednakosti odnosno kopulama koje predstavljaju donju i gornju Fréchet-Hoeffdingovu granicu. Neka je C kopula. Tada za svaki uređeni par (u, v) iz domene funkcije C vrijedi:

$$max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq min(u, v),$$

$$C_D(u, v) \leq C(u, v) \leq C_G(u, v), \tag{5}$$

gdje su C_G i C_D kopule koje zovemo gornja, odnosno donja Fréchet-Hoeffdingova granica. U nastavku ćemo pokazati da su one stvarno kopule, odnosno da zadovoljavaju zahtjeve iz definicije kopule. Neka su $u, v \in [0, 1]$. Gornja Fréchet-Hoeffdingova granica zadovoljava:

1. $C_G(u, 0) = min(u, 0) = 0, C_G(0, v) = min(0, v) = 0$
2. $C_G(u, 1) = min(u, 1) = u, C_G(1, v) = min(1, v) = v$

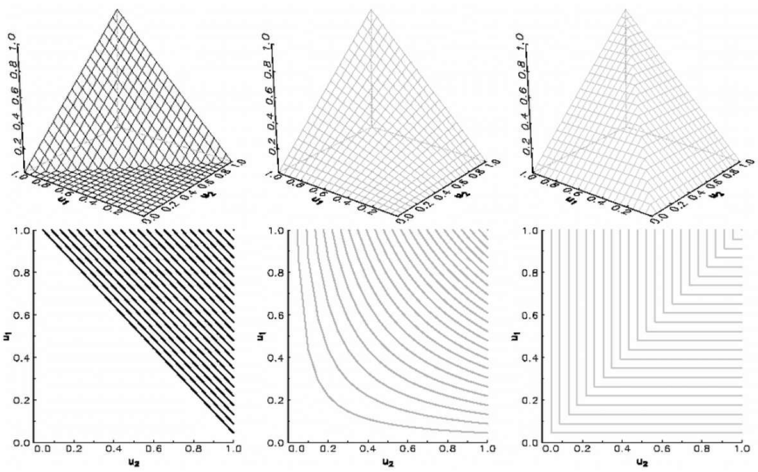
3. Neka su $u_1 \leq u_2$ i $v_1 \leq v_2$, $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$. Tada je
$C_G(u_2, v_2) - C_G(u_2, v_1) - C_G(u_1, v_2) + C_G(u_1, v_1) =$
$= min(u_2, v_2) - min(u_2, v_1) - min(u_1, v_2) + min(u_1, v_1) \geq 0.$

Donja Fréchet-Hoeffdingova granica zadovoljava:

1. $C_D(u, 0) = max(u - 1, 0) = 0, C_D(0, v) = max(0, v - 1) = 0$
2. $C_D(u, 1) = max(u, 0) = u, C_D(1, v) = max(0, v) = v$
3. Neka su $u_1 \leq u_2$ i $v_1 \leq v_2$, $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$. Tada je
$C_D(u_2, v_2) - C_D(u_2, v_1) - C_D(u_1, v_2) + C_D(u_1, v_1) =$
$max(u_2+v_2-1, 0)-max(u_2+v_1-1, 0)-max(u_1+v_2-1, 0)+max(u_1+v_1-1, 0) \geq 0.$

Slijedi da su donja i gornja Fréchet-Hoeffdingova granica kopule.

Već smo napomenuli da su kopule dvodimenzionalne funkcije distribucije s jediničnim uniformnim marginalnim distribucijama i kao takve vrijedi nejednakost (5). Sljedećim grafičkim prikazom, u kojem usporedbno vidimo Fréchet-Hoeffdingova gornja granična kopula C_G, nezavisna kopula C_N i Fréchet-Hoeffdingova donja granična kopula C_D, možemo se i uvjeriti u istinitost nejednakosti (5).



Slika 2.1 Fréchet-Hoeffdingova gornja granična kopula C_G, nezavisna kopula C_N i Fréchet-Hoeffdingova donja granična kopula C_D

2.2 Kopule preživljenja

Definicija 2.1. *Ako je C kopula, tada se funkcija definirana izrazom*

$$\overline{C}(u_1, u_2) = C(1–u_1, 1–u_2) + u_1 + u_2–1, \quad u_1, u_2 \in [0, 1],$$

naziva kopula preživljenja.

Ovako definirana kopula $\overline{C}$ u potpunosti zadovoljava zahtjeve iz definicije 1.1. Neka su $u, v \in [0, 1]$. Tada vrijedi:

1. $\overline{C}(u, 0) = \underbrace{C(1-u, 1)}_{=1-u,\, jer\, je\, C\, kopula} +u–1 = 1–u + u–1 = 0$

2. $\overline{C}(u, 1) = C(1–u, 1-1) + u + 1–1 = \underbrace{C(1-u, 0)}_{=0,\, jer\, je\, C\, kopula} +u = u$

3. Neka su $u_1 \le u_2$ i $v_1 \le v_2$, $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$. Treba pokazati da vrijedi:

$$\overline{C}(v_1, v_2) - \overline{C}(u_1, v_2) \ge \overline{C}(v_1, u_2) - \overline{C}(u_1, u_2)$$

. Nakon što uvrstimo definiciju funkcije $\overline{C}$ imamo sljedeće:

$$C(1–v_1, 1–v_2)+v_1+v_2-1–C(1-u_1, 1–v_2)–u_1–v_2+1 \ge C(1–v_1, 1–u_2)+v_1+u_2-1$$

$$–C(1–u_1, 1–u_2)–u_1–u_2 + 1$$

$$C(1–v_1, 1–v_2)–C(1 - u_1, 1–v_2) \ge C(1–v_1, 1–u_2)–C(1–u_1, 1–u_2),$$

iz čega slijedi tvrdnja ukoliko uzmemo u obzir da je C kopula.

Kako je $\overline{C}$ kopula, tada za $\forall u \in [0, 1]^2$ vrijedi nejednakost

$$C_D(u_1, u_2) \le \overline{C}(u_1, u_2) \le C_G(u_1, u_2).$$

Za nezavisne kopule, Fréchet-Hoeffdingove kopule i kopule preživljenja dodatno vrijedi:

$$\overline{C}_D = C_D$$

$$\overline{C}_N = C_N$$

$$\overline{C}_G = C_G,$$

gdje je $\overline{C}_D$ donja Fréchet-Hoeffdingova kopula preživljenja, $\overline{C}_N$ nezavisna kopula preživljenja i $\overline{C}_G$ gornja Fréchet-Hoeffdingova kopula preživljenja. Također, na kopule preživljenja možemo primjeniti Sklarov teorem. Specijalno, kopule preživljenja mogu biti iskorištene za prikazivanje repne funkcije distribucije $\overline{F}_{\mathbf{X}}$ od $\mathbf{X}$ pod uvjetom da su $\overline{F}_1$ i $\overline{F}_2$ marginalne repne funkcije distribucije. Tada je

$$\overline{F}_{\mathbf{X}}(x) = 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F_{\mathbf{X}}(x) = \overline{C}(\overline{F}_1(x_1), \overline{F}_2(x_2)).$$

$\overline{C}$ povezuje zajedničku repnu funkciju distribucije s njenim marginama $\overline{F}_1$ i $\overline{F}_2$ na apsolutno isti način kao što kopula povezuje zajedničku funkciju distribucije $F_{\mathbf{X}}$ s njenim marginalnim funkcijama distribucije F_1 i F_2.

Primjer 2.1. ***(Pareto kopula preživljenja)*** *Podsjetimo se da je funkcija distribucije slučajne varijable s Pareto distribucijom zadana s:*

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{c}{x}\right)^{\alpha} & , x > c \\ 0 & , x < c, \end{cases}$$

gdje su c i α pozitivni parametri.

Koristeći dvodimenzionalnu Pareto distibuciju imamo da je

$$\overline{F}_{\mathbf{X}}(x) = \overline{C}(\overline{F}_1(x_1), \overline{F}_2(x_2))$$

za $\overline{C}(u) = (u_1^{-\frac{1}{\alpha}} + u_2^{-\frac{1}{\alpha}})^{\alpha} - 1$.

Poznavanjem kopula preživljenja dolazimo do novih svojstava kopula. U nastavku ćemo definirani funkcionalnu invarijantnost i repnu zavisnost u kontekstu kopula.

2.2.1 Funkcionalna invarijantnost

Jedna od značajnih korisnosti kopula proizlazi iz činjenice da pri primjeni stroge monotone transformacije na slučajne varijable, kopule koje povezuju marginalne i zajedničku distribuciju su ili invarijantne na transformaciju ili se mijenjaju na predvidiv način.

Teorem 2.1. *Neka su X_1 i X_2 neprekidne slučajne varijable s kopulom C, a t_1 i t_2 neprekidne monotone funkcije:*

1. *Ako su t_1 i t_2 monotono rastuće funkcije, tada $(t_1(X_1), t_2(X_2))$ ima kopulu C.*

2. *Ako je t_1 monotono rastuća funkcija, a t_2 monotono padajuća funkcija, tada $(t_1(X_1), t_2(X_2))$ ima kopulu oblika $u_1 - C(u_1, 1 - u_2)$.*

3. *Ako je t_1 monotono padajuća funkcija, a t_2 monotono rastuća funkcija, tada $(t_1(X_1), t_2(X_2))$ ima kopulu oblika $u_2 - C(1 - u_1, u_2)$.*

4. *Ako su t_1 i t_2 monotono padajuće funkcije, tada $(t_1(X_1), t_1(X_2))$ ima kopulu $\overline{C}$.*

Iz teorema vidimo da primjena monotono rastućih funkcija na slučajne varijable ne mijenja njihovu kopulu, dok primjena monotono padajućih funkcija na slučajne varijable njihovu kopulu transformira u kopulu preživljenja.

2.2.2 Repna zavisnost

Jedna od popularnih interpretacija teških repova distribucije je sljedeća: Distribucija ima teške repove ako vjerojatnost realizacije ekstremnih događaja modelira bolje od normalne distribucije s istim očekivanjem i varijancom. Teški repovi su vrlo bitni u svijetu financija s obzirom da ekstremni događaji nose najveće gubitke, a upravo su kopule koristan alat za opisivanje strukture zavisnosti.

Neka su X_1 i X_2 neprekidne slučajne varijable s funkcijama distribucije F_1 i F_2. Koeficijent repne zavisnosti za (X_1, X_2) s kopulom C definiran je na sljedeći način:

$$\lambda_U = \lim_{v \to 0} P\{X_1 > \overline{F}_1^{-1}(v) | X_2 > \overline{F}_2^{-1}(v)\}$$

$$= \lim_{v \to 0} \frac{P\{X_1 > \overline{F}_1^{-1}(v) | X_2 > \overline{F}_2^{-1}(v)\}}{P\{X_2 > \overline{F}_2^{-1}(v)\}}.$$

Izraz u brojniku možemo zapisati kao:

$$P\{X_1 > \overline{F}_1^{-1}(v) | X_2 > \overline{F}_2^{-1}(v)\} = 1 - P\{X_1 \leq \overline{F}_1^{-1}(v)\} - P\{X_2 \leq \overline{F}_2^{-1}(v)\}$$

$$+ P\{X_1 \leq \overline{F}_1^{-1}(v), X_2 \leq \overline{F}_2^{-1}(v)\}.$$

Odavdje slijedi,

$$\lambda_U = \lim_{v \to 0} \frac{1 - 2(1 - v) + C(1 - v, 1 - v)}{v},$$

što osigurava neprekidnost F_1 i F_2.

Definicija 2.2. *Koeficijent repne zavisnosti λ_U za (X_1, X_2) s kopulom C je*

$$\lambda_U = \lim_{v \to 1} \frac{1 - 2v + C(v, v)}{1 - v}.$$

Ako je $\lambda_U > 0$, tada su X_1 i X_2 asimptotski zavisne u desnom repu, a ako je $\lambda_U = 0$, tada su asimptotski nezavisne.

Analogno se definira koeficijent repne zavisnosti u lijevom repu. Repna zavisnost je vrlo bitna kod odabira odgovarajuće kopule. Konkretne primjere ćemo vidjeti upoznavanjem kopula u nastavku.

3. Familije kopula

U upotrebi možemo pronaći različite vrste kopula, a izbor kopule ovisi o konkretnom problemu koji se pokušava riješiti. Općenito postoje dvije glavne familije kopula, a to su eliptične i Arhimedove kopule.

3.1 Eliptične kopule

Eliptična distribucija je familija distribucija u koju spadaju, između ostalog, i Gaussova i Studentova t-distribucija. Eliptične distribucije su simetrične, a naziv su dobile po tome što njihove funkcije gustoće imaju oblik elipse.

Eliptične kopule su kopule eliptičnih distribucija, koje obuhvaćaju multivarijantne distribucije i omogućuju modeliranje multivarijantnih ekstrema. Njihova najveća prednost je to što se mogu postaviti različite razine korelacije između margina. Odnos između koeficijenta korelacije ρ i Kendallovog τ je:

$$\rho(X,Y) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right).$$

Koeficijent korelacije ρ i Kendallov τ su mjere zavisnosti koje se mogu koristiti za računanje parametra kopule s kojim ćemo se upoznati u nastavku.

Spearmanov koeficijent korelacije koristi se kao mjera povezanosti dviju slučajnih varijabli. Kao rezultat daje približnu vrijednost koeficijenta korelacije koji se tretira kao njegova dovoljno dobra aproksimacija. Prilikom korištenja Spearmanovog koeficijenta, vrijednosti varijabli potrebno je rangirati i na takav način svesti na zajedničku mjeru. Najjednostavniji način rangiranja je da se najmanjoj vrijednosti svake varijable dodjeli rang 1, sljedećoj po veličini rang 2 i tako sve do posljednje kojoj se dodjeluje maksimalan rang. Izračunavanje koeficijenta radi se korištenjem vrijednosti pridijeljenih rangova. Formula za izračun Spearmanovog koeficcijenta korelacije je:

$$\rho_S = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)},$$

gdje je d razlika vrijednosti rangova dvije promatrane varijable, a n broj promatranja, odnosno broj različitih serija.

Kendallov tau (τ) je mjera povezanosti koja računa razliku između broja suglasnih i nesuglasnih parova slučajnih varijabli iz uzorka. Promatani par je suglasan ako uz veću vrijednost prve varijable ide i veća vrijednost druge promatrane varijable. Analogno, par je nesuglasan ako uz veliku vrijednost prve varijable ide mala vrijednost druge varijable. Kendallov tau zadan je s:

$$\tau = \frac{S-N}{n(n-1)/2},$$

gdje S predstavlja broj suglasnih parova, N broj nesuglasnih parova, a n broj uzoraka.

Eliptične kopule se još zovu i implicitne kopule, a dijele se na dvije vrste - normalnu (Gaussovu) i Studentovu t-kopulu. U idućim potpoglavljima ćemo pobliže objasniti obje vrste eliptičnih kopula, kao i razlike između njih.

3.1.1 Normalna ili Gaussova kopula

Pretpostavimo da su sve komponente normalnog slučajnog vektora jednako distribuirane. Kopula n-dimenzionalne normalne distribucije s korelacijskom matricom R je dana formulom

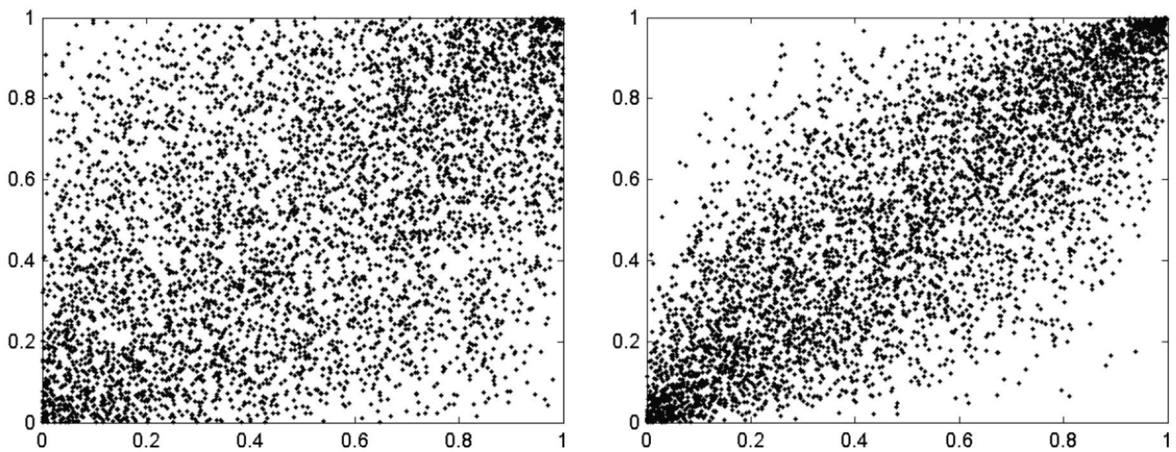
$$C_R^{Gauss}(u) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), ..., \Phi^{-1}(u_n)),$$

gdje je Φ_R funkcija distribucije n-dimenzionalnog normalnog slučajnog vektora s korelacijskom matricom R, a Φ^{-1} označava inverz njegove marginalne funkcije distribucije. Takvu kopulu nazivamo normalnom ili Gaussovom kopulom. Gustoća Gaussove kopule se može zapisati kao

$$c_R^{Gauss}(u) = \frac{1}{\sqrt{detR}} exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\Phi^{-1}(u_1)\\ \vdots \\ \Phi^{-1}(u_d)\end{pmatrix}^T \cdot (R^{-1} - I) \cdot \begin{pmatrix}\Phi^{-1}(u_1)\\ \vdots \\ \Phi^{-1}(u_d)\end{pmatrix}\right),$$

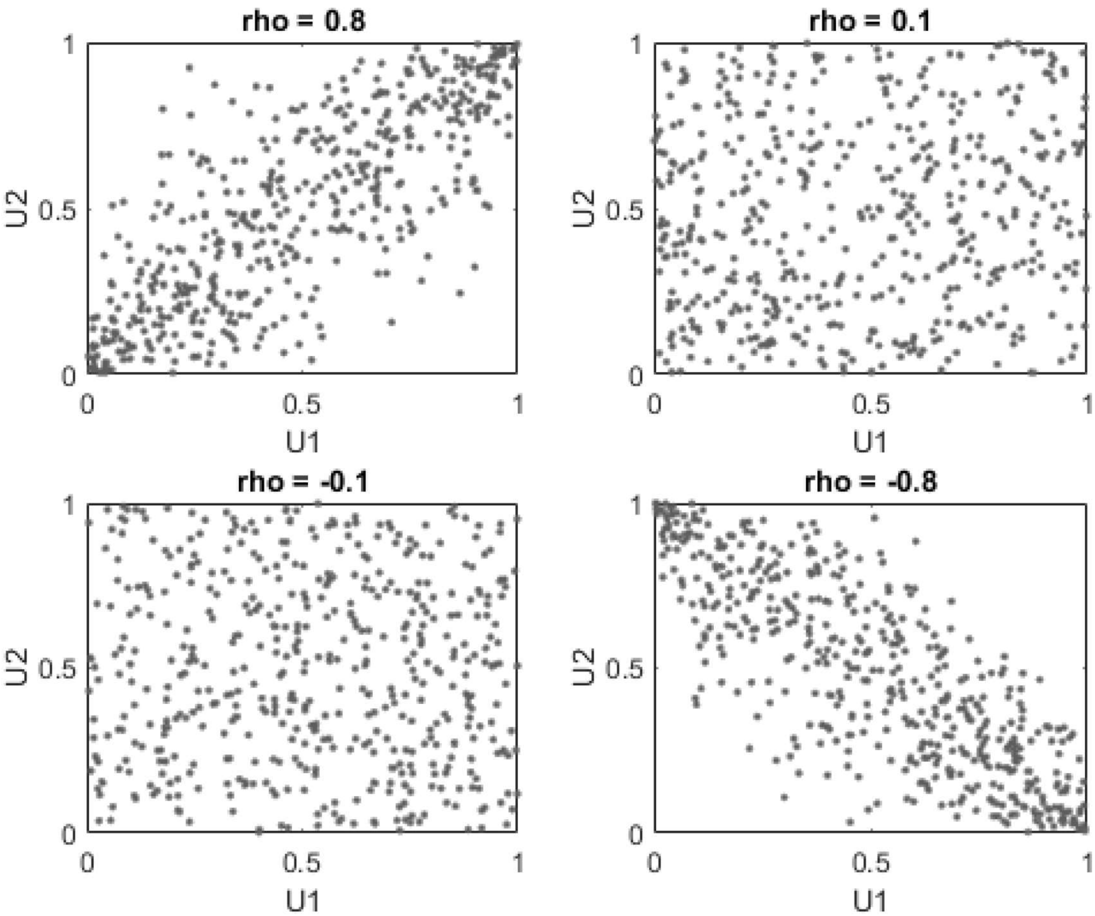
gdje je I jedinična matrica.

Gustoća dvodimenzionalne Gaussove kopule za različite vrijednosti koeficijenta korelacije ρ je prikazana na slici 3.1.1



Slika 3.1.1.1 Funkcija gustoće Gaussove kopule s vrijednošću koeficijenta korelacije ρ = 0.5 (lijevo) i $\rho = 0.8$ (desno)

Iz dijagrama raspršenosti podataka uočavamo da se povećanjem koeficijenta korelacije ρ podaci grupiraju oko pravca koji ima pozitivan koeficijent smjera. Analogno, povećanjem negativnog koeficijenta korelacije podaci se grupiraju oko pravca koji ima negativan keoficijent smjera.



Slika 3.1.1.2 Funkcija gustoće Gaussove kopule s vrijednošću koeficijenta korelacije ρ = 0.8, 0.1 (gore) i ρ = -0.8, -0.1 (dolje)

Gaussova kopula je vrlo popularna zbog pretpostavke normalnosti u mnogim financijskim modelima, kao i zbog jednostavnosti korištenja. Ipak, njezin veliki nedostatak je to što ne podržava repnu zavisnost, zbog čega su u određenim situacijama druge vrste kopula prikladnije.

3.1.2 Studentova t-kopula

Studentova distribucija sa stupnjem slobode $v > 0$ ima sljedeću funkciju gustoće:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\delta\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{v}{2})}\left(1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2\right)^{-\frac{v+1}{2}},$$

pri čemu je $\delta > 0$ parametar raspršenosti, $\mu \in \mathbb{R}$ lokacijski parametar i $x \in (-\infty, \infty)$.

Pretpostavimo da su sve komponente slučajnog vektora jednako distribuirane. Kopula višedimenzionalne Studentove t-distribucije je Studentova t-kopula i opisana je formulom

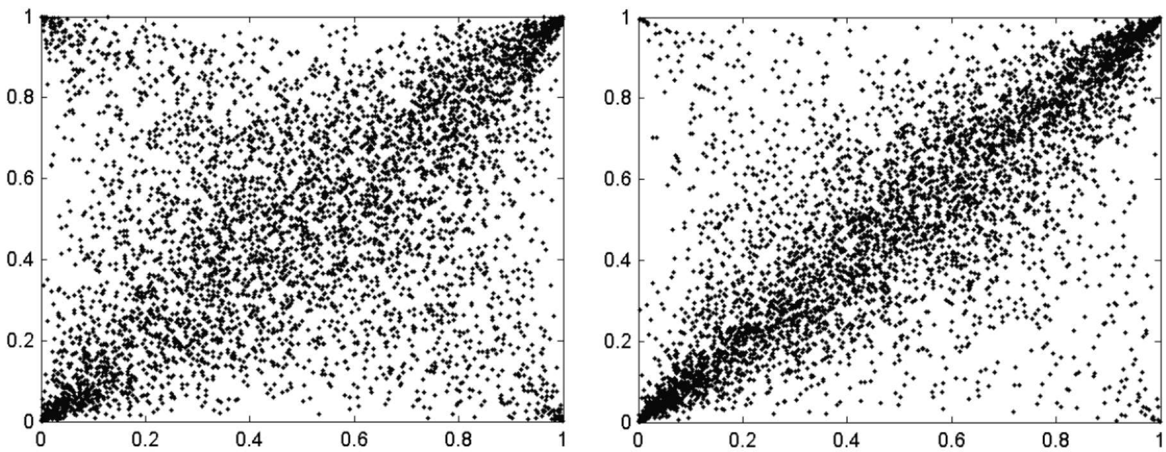
$$C_T(u_1, ..., u_r) = t_{r,v}(t_v^{-1}(u_1), ..., t_v^{-1}(u_r)),$$

gdje v predstavlja broj stupnjeva slobode, $t_{r,v}$ predstavlja zajedničku funkciju distribucije r-dimenzionalne Studentove t-distribucije, a t_v^{-1} predstavlja inverznu funkciju marginalne distribucije Studentove t-distribucije.

Funkcija gustoće Studentove t-kopule dana je sljedećim izrazom:

$$c(t_v(x_1), ..., t_v(x_r)) = \frac{f(x_1, ..., x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i(x_1)} = \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}\right]^r \frac{\left(1 + \frac{x'\Sigma^{-1}x}{v}\right)^{-\frac{v+r}{2}}}{\prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{x_i^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}},$$

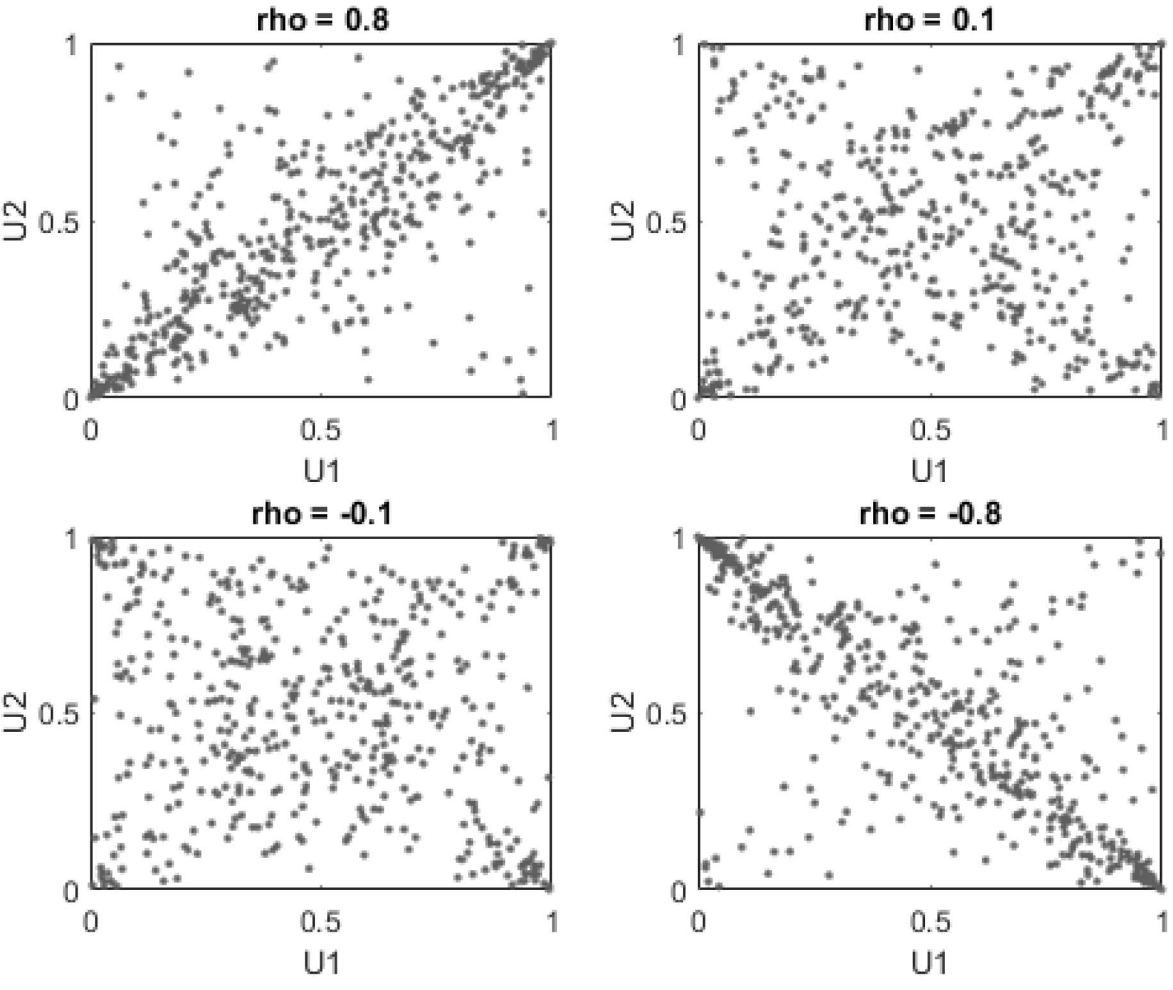
gdje je $x' = (t_v^{-1}(u_1), ..., t_v^{-1}(u_r))$ vektor inverznih funkcija distribucije Studentove t-distribucije. Gustoća Studentove t-kopule za različite vrijednosti koeficijenta korelacije ρ je prikazana na slici 3.1.2



Slika 3.1.2.1 Funkcija gustoće Studentove t-kopule s vrijednošću koeficijenta korelacije $\rho = 0.5$ (lijevo) i $\rho = 0.8$ (desno)

Kao i kod Gaussove kopule, povećanjem koeficijenta korelacije ρ podaci se grupiraju oko pravca koji ima pozitivan koeficijent smjera, no možemo uočiti da imamo veću raspršenost. Naime, Studentova t-distribucija ima teži rep od normalne i kao takva bolje opisuje vjerojatnost realizacije ekstremnih događaja. Iz tog razloga, Studentova t-kopula trenutno bilježi rast popularnosti kao alternativa Gaussovoj kopuli za modeliranje financijskih rizika.

S druge strane, povećanjem negativnog koeficijenta korelacije podaci se grupiraju oko pravca koji ima negativan koeficijent smjera.



Slika 3.1.2.2 Funkcija gustoće Studentove t-kopule s vrijednošću koeficijenta korelacije ρ = 0.8, 0.1 (gore) i ρ = -0.8, -0.1 (dolje)

3.2 Arhimedove kopule

Arhimedove kopule su poznate i kao eksplicitne kopule zato što su dane eksplicitnom formulom, za razliku od eliptičnih kopula. Njihova definicija se bazira na generatorskoj funkciji.

Generator φ je funkcija za koju vrijedi:

1. $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1]$ takva da je $\varphi(0) = 1$ i $\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$,
2. φ je neprekidna,
3. φ je strogo podajuća na $[0, \varphi^{-1}(0)]$,
4. φ^{-1} definiran je kao $\varphi^{-1}(x) = inf\{u : \varphi(u) \leq x\}$

Definicija 3.1. *Neka je φ strogi generator, a φ^{-1} kompletno monoton na $[0, \infty\rangle$. Onda se Arhimedova kopula može definirati kao*

$$C(u_1, u_2) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)).$$

Danas je u upotrebi veći broj Arhimedovih kopula, ali samo tri imaju širu primjenu u financijama - Claytonova, Frankova i Gumbelova kopula, stoga ćemo samo njih detaljnije razraditi.

3.2.1 Claytonova kopula

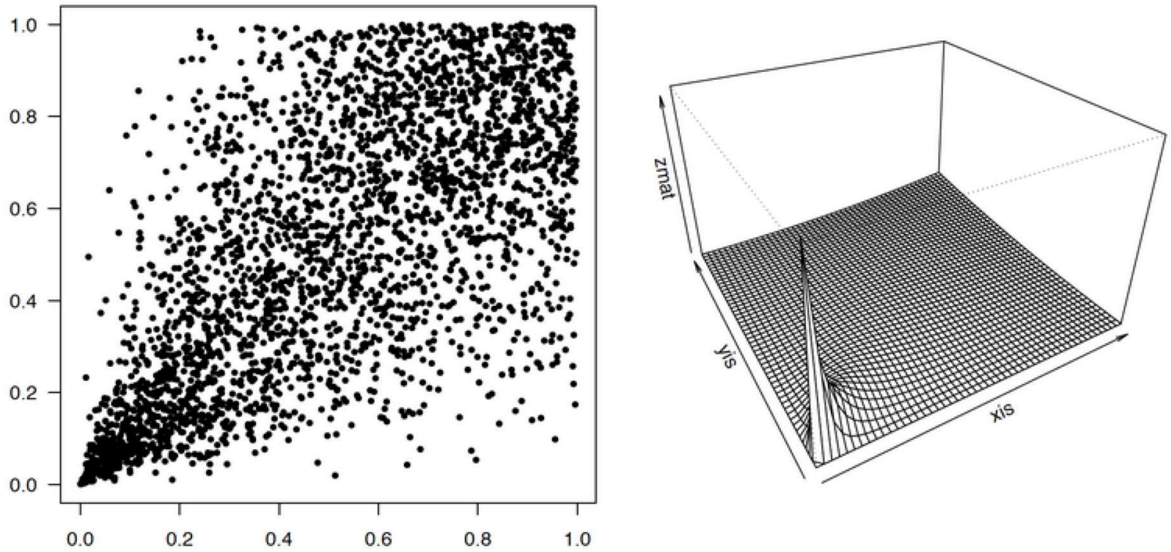
Claytonova kopula se većinom koristi za proučavanje povezanih rizika zato što ima sposobnost detekcije zavisnosti na lijevom repu. Zatvoreni oblik bivarijantne Claytonove kopule glasi:

$$C^{Cl}(u_1, u_2; \theta) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta},$$

gdje je $\theta > 0$ parametar kopule. Veza između parametra Claytonove kopule i mjere Kendallovog τ dana izrazom:

$$\tau_K = \frac{\theta}{\theta + 2}.$$

Claytonova kopula se, zbog vrijednosti parametra θ koji mora biti pozitivan, može koristiti samo kod pozitivne vrijednosti korelacije.



Slika 3.2.1 Funkcija gustoće Claytonove kopule s parametrom $\theta = 2$

Iz dijagrama raspršenosti možemo uočiti da je Claytonova kopula asimetrična i ima težu zavisnost u lijevom repu.

Dijagrami raspršenosti savršeno prikazuju međusobni odnos između dvije varijabli i kao takvi otkrivaju njihovu povezanost, korelaciju. Korelacija ima dva bitna svojstva. Prvo je intenzitet ili jakost koja ukazuje na stupanj međusobne povezanosti dviju veličina koje su korelirane, a drugo svojstvo je smjer koji pokazuje smanjuju/povećavaju li se istovremeno ili se jedna smanjuje/povećava dok se druga povećava/smanjuje. Korelacija se izražava koeficijentom korelacije. Ukoliko je koeficijent korelacije jednak nuli, korelacije nema i tada su točke na dijagramu raspršenosti u potpunosti nasumično raspoređene bez ikakve vidljive tendencije. Korelacije je savršena i pozitivna ukoliko je koeficijent korelacije jednak jedan, tada su točke na dijagramu točno položene uzduž pravca. Na osnovu navedenog i grafičkog prikaza jasno je da je koeficijent korelacije viši kod vrijednosti varijabli bližih nuli. Povećavanjem vrijednosti varijabli, vrijednost koeficijenta korelacije se približava nuli. Uključimo li u to i znanje o repnoj zavisnosti iz poglavlja 2.2.2. možemo zaključiti da Claytonova kopula ima težu zavisnost u lijevom repu.

3.2.2 Gumbelova kopula

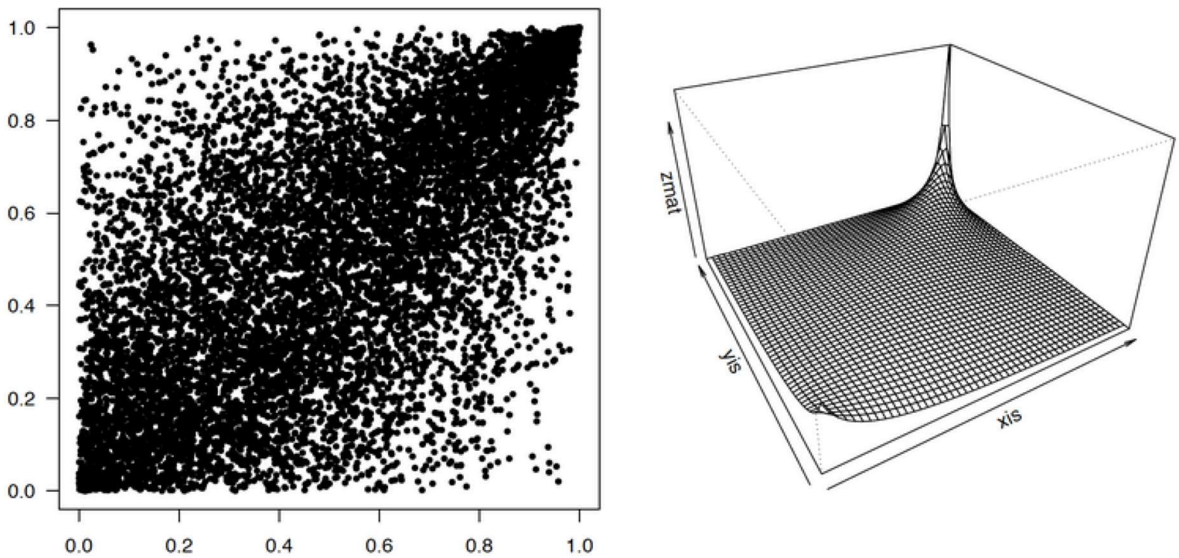
Gumbelova kopula je najpoznatija po tome što može detektirati snažnu zavisnost na desnom repu kopule i slabu zavisnost na lijevom repu kopule. Bivarijantna Gumbelova kopula dana je izrazom:

$$C^{Gu}(u_1, u_2; \theta) = exp\left(-\left[(-logu_1)^\theta + (-logu_2)^\theta\right]^{1/\theta}\right),$$

gdje je $\theta > 1$ parametar kopule.

Slično kao i Claytonova kopula, Gumbelova kopula se može koristiti samo za slučajeve nezavisnosti i pozitivne koreliranosti. Veza između parametra θ i Kendallovog tau je

$$\tau_K = 1 - \theta^{-1}.$$



Slika 3.2.2 Funkcija gustoće Gumbelove kopule s parametrom $\theta = 2$

Iz dijagrama raspršenosti možemo vidjeti grupiranje točaka kod vrijednosti koje su bliže nuli, ali i onih vrijednosti koje su bliže jedinici. Točke oko srednjih vrijednosti su dosta raspršene. Zaključujemo da Gumbelova kopula ima jaču zavisnost na desnom repu, a slabiju na lijevom.

3.2.3 Frankova kopula

Frankova kopula dana je izrazom

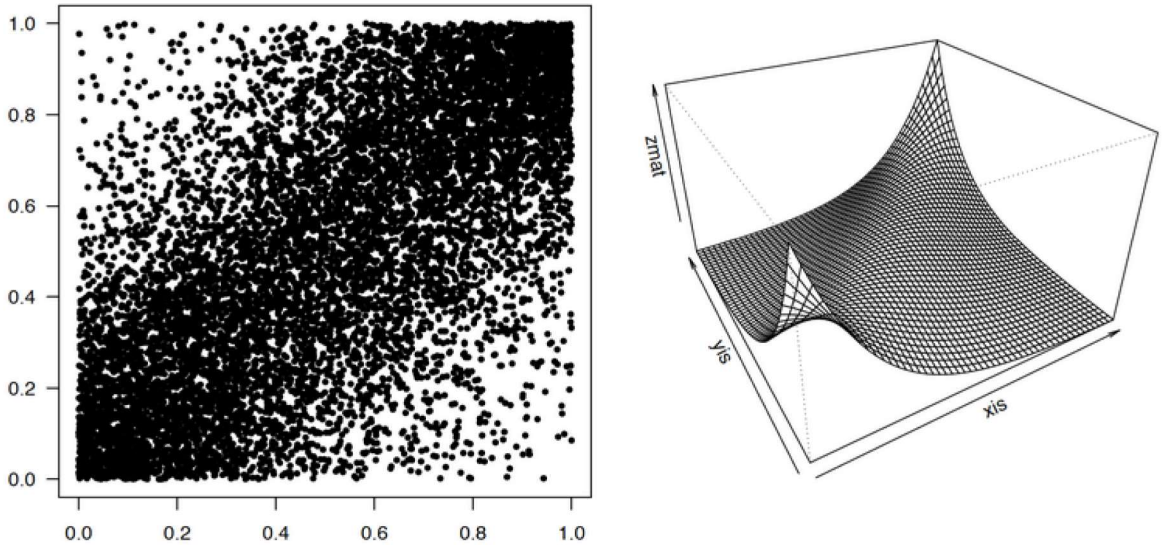
$$C^{Fr}(u_1, u_2; \theta) = -\theta^{-1} log\left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)}\right),$$

gdje parametar kopule θ može poprimiti bilo koju realnu vrijednost. Zbog toga se Frankova kopula može koristiti i za modeliranje kod slučajnih varijabli s negativnim koeficijentom korelacije. Za razliku od Claytonove i Gumbelove kopule, Frankova kopula ne može detektirati zavisnost na repu kopule. Veza između parametra θ i Kendallovog tau je zadan s

$$\tau_K = 1 + 4\frac{D_1(\theta) - 1}{\theta},$$

gdje D predstavlja Debyevu funkciju definiranu formulom

$$D_K(\alpha) = \frac{k}{a^k}\int_0^\alpha \frac{t^k}{exp(t) - 1}dt, \quad k = 1, 2.$$



Slika 3.2.3 Funkcija gustoće Frankove kopule s parametrom $\theta = 2$

Iz dijagrama raspršenosti vidljivo je da su točke raspoređene simetrično, ali totalno nasumično. Naime, Frankova kopula je simetrična i bez repne zavisnosti.

4. Primjena kopula

Iako se kopule danas primjenjuju u mnogim područjima ljudskog djelovanja, uključujući građevinu, medicinu, geodeziju i klimatologiju, najširu upotrebu su pronašle u području financija gdje se koriste za upravljanje rizicima, optimizaciju portfelja i određivanje cijene financijskih izvedenica.

4.1 Upravljanje rizicima

Koncept rizika se temelji na nesigurnosti oko budućih ishoda. Rizik možemo definirati kao kalkuliranu prognozu moguće štete ili gubitka koji nastaju u slučaju negativnih događaja, odnosno, možemo reći da rizik predstavlja bilo koju neizvjesnost koja može rezultirati gubitkom. Svaka financijska institucija ima za cilj minimizirati rizike i stvoriti mehanizme zaštite kojima se gubitci mogu izbjeći ili umanjiti. Jedan od ključnih koraka u upravljanju rizicima je modeliranje rizika, a ono podrazumijeva stvaranje modela koji uzima u obzir korelaciju između individualnih rizika i zavisnost između ekstremnih događaja. Obzirom da pružaju mogućnost opisivanja zavisnosti, kopule su dobar izbor za stvaranje takvih modela.

Postoje različiti tipovi rizika, ali u svijetu financija se ističu tri najvažnija - tržišni, kreditni i operativni rizik. Tržišni rizik je rizik ostvarivanja gubitaka uslijed negativnih kretanja cijena na tržištu. Tržišni rizik se još zove i sistematski rizik. Na njega mogu utjecati recesije, politička zbivanja, inflacija, valutni rizici, promjene kamatnih stopa, promjene cijena vrijednosnica, prirodne katastrofe itd. Kreditni rizik je rizik da jedna strana (dužnik ili izdavatelj financijskog sredstva) neće izvršiti obavezu, odnosno vratiti dug, djelomično ili u cijelosti, zbog čega će investitor pretrpjeti financijski gubitak. Operativni rizik je rizik gubitka koji nastaje zbog neadekvatnih unutarnjih postupaka i procedura, ljudskih pogrešaka, pogrešaka u sustavu i vanjskih događaja.

Postoje različiti načini za kvantificiranje rizika, među kojima se po korištenosti ističu vrijednost pod rizikom (Value at Risk - VaR) kao mjera rizika i testiranje otpornosti na stres. Oba pristupa mogu koristiti kopule za modeliranje zavisnosti.

4.1.1 Vrijednost pod rizikom (VaR)

Prije nego definirano vrijednost pod rizikom, upoznat ćemo se s pojmom portfelja i povrata. Portfelj je skup različitih vrijednosnih papira (dionice, obveznice, komercijalni zapisi) u vlasništvu pojedinca ili poduzeća. Preciznije možemo ga definirati na sljedeći način:

Definicija 4.1. *Proizvoljan vektor $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, ..., \varphi^d) \in \mathcal{R}^{d+1}$ naziva se portfelj. Pritom φ^i predstavlja broj jedinica i-te imovine koju investitor posjeduje.*

Definicija 4.2. *Povrat je relativna promjena cijene financijske imovine u određenom vremenskom intervalu, najčešće izražena kao postotak.*

Za danu financijsku imovinu, relativni povrat (kraće povrat) u trenutku $(t+h)$, s obzirom na vrijednost i-te imovine u trenutku t, definiramo kao:

$$\frac{S_{t+h}^i - S_t^i}{S_t^i}, i = 1, ..., d$$

gdje je S_t^i cijena i-te imovine u trenutku t, a $d \in N$.

Vrijednost pod rizikom je minimalni gubitak koji se realizira tijekom određenog vremenskog razdoblja s vjerojatnošću p. Najčešće vremensko razdoblje za koje se računa VaR je između jednog dana i jednog mjeseca. Na primjer, financijska institucija može izračunati da ulaganje ima 3% jednomjesečnog VaR-a od 2%, što znači da će se s vjerojatnošću 0.03 u mjesec dana vrijednost ulaganja smanjiti za barem 2%.

Pretpostavimo da nas u trenutku t zanima rizičnost određene financijske imovine za budućih l vremenskih perioda. Označimo s $\Delta V_\varphi(l)$ slučajnu varijablu koja opisuje vrijednost portfelja φ u $(t+l)$ s obzirom na vrijednost u t te neka je F_φ funkcija distribucije od $\Delta V_\varphi(l)$. Vrijednost pod rizikom za $\langle t, t+l]$ s vjerojatnošću p za investitora koji posjeduje promatranu financijsku imovinu definiramo kao:

$$p = P(\Delta V_\varphi(l) \leq VaR(p)) = F_\varphi(VaR(p)).$$

Česta pretpostavka kod računanja rizične vrijednosti je da su povrati normalno distribuirani. Ova pretpostavka je dosta problematična, jer tržišna kretanja veoma često odstupaju od normalne distribucije.

Postoji nekoliko metoda za modeliranje vrijednosti pod rizikom, među kojima su model varijance/kovarijance (RiskMetrics), povijesna simulacija, Monte Carlo simulacija i testiranje stresnih situacija. Model varijance/kovarijance i povijesna simulacija su popularni zbog svoje jednostavnosti pa su najčešće korišteni u financijskim institucijama. Ove metode polaze od pretpostavke da su povrati ulaganja nezavisni, što u većini stvarnih situacija nije točno pa vodi do podcjenjivanja ili precjenjivanja rizične vrijednosti. Jedan od načina na koji se navedeni modeli mogu poboljšati je korištenje kopula za modeliranje zavisnosti.

Proces modeliranja vrijednosti pod rizikom zahtijeva odabir kopule koja će se koristiti, vodeći računa o njihovim međusobnim razlikama. Potom se procjenjuju parametri marginalne distribucije, koji se zatim uvrštavaju u kopulu i dobije se mjera zavisnosti. Dobivene varijable se koriste za računanje rizične vrijednosti portfelja. Rezultati koji se dobiju na ovaj način su precizniji od onih koji ne koriste kopule. Jedan od dokaza su pružili H.P. Palaro i L.K. Hotta [11].

4.1.2 Testiranje otpornosti na stres

Testiranje otpornosti na stres u financijskoj instituciji je analiza ili simulacija koja se provodi pod hipotetskim nepovoljnim ekonomskim scenarijima poput ekonomske krize, visoke stope nezaposlenosti, prirodne katastrofe ili pada cijena dionica. Scenariji mogu uključivati jedan ili više nepovoljnih događaja istovremeno. Cilj testiranja otpornosti na stres je utvrditi ima li banka dovoljno kapitala da izdrži u nepovoljnim okolnostima poput krize.

Velike međunarodne banke su počele provoditi interne testove otpornosti na stres u ranim '90.-im godinama prošlog stoljeća u sklopu procesa upravljanja rizicima. Ipak, velika gospodarska kriza koja je izbila 2007. pokazala je da ti testovi nisu bili dovoljno učinkoviti i da su simulirali nedovoljno ekstremne događaje ili nisu uzimali u obzir mogućnost da se dogodi više njih istovremeno. Nakon krize, većina zemalja i međunarodnih organizacija je uvela regulativu koja zahtijeva od banaka da provode češće interne testove otpornosti, ali i neovisne testove koje nad bankama provode regulatori. Europsko nadzorno tijelo za bankarstvo (EBA) je neovisno tijelo EU-a koje je uspostavljeno 2011. s ciljem provođenja testova otpornosti na stres u europskim bankama.

Testovi otpornosti na stres se dijele u dvije velike kategorije - univarijantni i multivarijantni testovi otpornosti. Univarijantni testovi otpornosti analiziraju scenarij u kojem se događa samo jedan nepovoljan događaj, na primjer pad bruto domaćeg proizvoda za 5%, neovisno o ostalim događajima. Pritom se većinom razmatraju vrlo kratka vremenska razdoblja. Obzirom da se ne proučava zavisnost, kopule se ne koriste. Prednost ovakvih testova je što mogu uzeti u obzir vrlo ekstremne događaje, ali njihov nedostatak je što ne odgovaraju stvarnim uvjetima. Pad bruto domaćeg proizvoda nikada ne ostaje izolirani slučaj nego za sobom povlači i rast stope nezaposlenosti, pad cijena dionica, manju potrošnju itd.

Multivarijantni testovi otpornosti uključuju više nepovoljnih događaja koji se zbivaju istovremeno i više odgovaraju stvarnom svijetu. Obzirom da su mnogi od tih događaja međusobno zavisni (na primjer, stopa rasta bruto domaćeg proizvoda i stopa nezaposlenosti), potrebno je ispravno modelirati njihovu zavisnost. Testiranje stoga podrazumijeva velik broj simulacija s raznim kombinacijama nepovoljnih događaja, a za modeliranje zavisnosti se koriste kopule.

Multivarijantni testovi se mogu provesti koristeći tri vrste scenarija. Prva vrsta su povijesni scenariji, gdje se promatraju situacije koje su se već dogodile. Primjer su velike krize ili prirodne katastrofe iz povijesti. Njihov veliki nedostatak je što promatraju isključivo stvari koje su se već dogodile bez da uzimaju u obzir trenutnu situaciju i trenutne slabosti.

Druga vrsta su hipotetski scenariji koji promatraju moguće događaje, ne uzimajući u obzir slične situacije iz prošlosti. Mogu uključivati šokove koji se u današnjem svijetu mogu događati češće nego što su se događali u prošlosti, šokove koji se još nisu dogodili i situacije koje iskorištavaju slabosti koje su trenutno prisutne.

Treća vrsta su hibridni scenariji koji koriste povijesne scenarije, ali se ne ograničavaju na ishode koji su se tada dogodili. Jednostavnije rečeno, hibridni scenariji pretpostavljaju povijesne situacije i koriste ih za kalibriranje scenarija, ali dozvoljavaju drugačije ishode od povijesnih i temelje ih na trenutnom stanju.

Multivarijantni test otpornosti na stres se provodi tako da se odaberu univarijantni faktori rizika, a potom se povežu korištenjem odgovarajuće kopule. Izbor kopule ovisi o odabranim događajima i može značajno utjecati na rezultate. Na primjer, Gaussova kopula je najjednostavnija i tome duguje velik dio svoje popularnosti, ali u određenim situacijama nije dovoljno dobra zato što nema repnu zavisnost. Kao što su Malevergne i Sornette pokazali [9], Gaussova kopula ne može dobro predvidjeti zavisnost između ekstremnih događaja koji se događaju istovremeno, i u takvim scenarijima je Studentova t-kopula bolji izbor. S druge strane, rezultati dobiveni Studentovom t-kopulom se ne razlikuju od rezultata dobivenih Gaussovom kopulom ako je broj stupnjeva slobode dovoljno velik.

U slučaju manje ekstremnih scenarija, mogu se koristiti i Claytonova i Studentova t-kopula. Claytonova kopula ima asimetričnu distribuciju i visoku repnu zavisnost, zbog čega je prigodna za scenarije u kojima se stres primjenjuje na manji broj poslovnih sektora i uz manju korelaciju.

4.2 Optimizacija portfelja

Svrha optimizacije portfelja je minimiziranje rizika od gubitka vrijednosti i maksimiziranje prinosa. Modernu teoriju portfelja je 1952. utemeljio Harry Markowitz. Ona pretpostavlja da investitori žele izbjeći rizik, te u situaciji gdje mogu birati između dvije investicije jednakog očekivanog prinosa, biraju onu koja ima manji rizik. Da bi se minimizirao rizik, svaki kvalitetan portfelj bi trebao biti vrlo diverzificiran, odnosno imati udjele u većem broju različitih investicija.

Markowitz je predložio vlastiti model optimizacije portfelja koji je nazvan MV (mean-variance) model. Njegov model nastoji pronaći ravnotežu između stope prinosa i rizika te formira portfelj na temelju investitorove preferencije rizika ili prinosa. Tako konzervativniji investitor može birati portfelj koji ima manji prinos, ali i manji rizik. Ostale metode uključuju vrijednost pod rizikom, metodu očekivanog gubitka (poznata i kao uvjetna vrijednost pod rizikom) te Sortino omjer (pokazatelj koji omogućuje procjenu prinosa i rizika investicijskog instrumenta).

Ipak, svaka od navedenih metoda ima određene nedostatke. U klasičnoj teoriji upravljanja portfeljom, pretpostavlja se da je zajednička distribucija varijabli povrata na ulaganje zapravo višedimenzionalna normalna distribucija, iako to u stvarnosti ne mora biti slučaj. Ako želimo voditi računa o varijablama koje nisu distribuirane eliptično i povećati preciznost mjerenja rizika, možemo uvesti novi alat - kopule, pritom vodeći računa da moramo izraziti varijancu bez pretpostavke normalnosti.

Već smo napomenuli da se funkcija gustoće slučajnog vektora može zapisati pomoću gustoće kopule. Neka su r_i povrati i-te financijske imovine koju investitor posjeduje. Tada je $(r_1, ..., r_n)$ slučajan vektor s funkcijom gustoće $f(r) = f(r_1, ..., r_n)$. Vrijednost portfelja možemo definirati na sljedeći način: $r_p = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$, gdje je w_i broj jedinica i-te imovine u tom portfelju. Tada se varijanca portfelja može zapisati kao:

$$\sigma_p^2 = \int_{\mathbf{R}^n} (r_p - E(r_p))^2 f(r_p) dr_p = \int_{\mathbf{R}^n} \left(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i - E(r_p) \right)^2 f(r) dr_1 dr_2 ... dr_n,$$

gdje je

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i) = K.$$

r_p će biti vrijednost portfelja normalizirana brojem jedinica imovine u cijelom portfelju. K je očekivana vrijednost portfelja i računajući niz očekivanih povrata možemo dobiti MV učinkovitu granicu.

Kako u praksi uvijek radimo s realizacijama povrata, gornje očekivanje procjenjujemo sljedećom sumom:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} (w_1 r_{1j} + w_2 r_{2j} + ... + w_n r_{nj} - E(r_p))^2,$$

gdje je n broj različitih imovina sadržanih u portfelju, a m je veličina uzoraka povrata koji se mogu simulirati uz informaciju o strukturi zavisnosti sadržanoj u kopuli.

4.3 Određivanje cijena financijskih izvedenica

U svijetu financija, pojam "derivativ" ili izvedenica predstavlja financijski instrument kojemu je vrijednost izvedena iz vrijednosti druge imovine ili financijskog instrumenta. Derivati obećavaju isplatiti određenu količinu novca u budućnosti, ovisno o događajima na tržištu. Neki oblici derivata su opcije, swapovi, futures ugovori i razni vrijednosni papiri vezani za imovinu. Jedan poseban oblik su i kreditni derivativi, a posebno su zanimljive takozvane kolateralizirane dužničke vrijednosnice (eng. collateralized debt obligation ili CDO) koje su imale veliku ulogu u velikoj gospodarskoj krizi iz 2007. Riječ je o drugorazrednim hipotekarnim kreditima koji su izdani ljudima s niskim kreditnim rejtingom, a zatim upakirani s drugim kreditima i prodani investitorima. Mnogi od tih CDO-ova nisu ni sadržavali hipotekarne kredite nego samo derivative na njih [13].

Obzirom na količinu izdanih CDO-ova, jedan od velikih problema s kojim se financijska industrija suočava je određivanje njihove cijene. Inicijalni modeli su određivali cijene CDO-ova tako što su računali vjerojatnost bankrota za svakog pojedinog dužnika uz pretpostavku da su vjerojatnosti bankrota nezavisne. To naravno nije točno, zato što vjerojatnost bankrota raste za sve u vremenima recesije, a pada u vremenima gospodarskog rasta. David X. Li je 2000. predložio model koji koristi Gaussovu kopulu za računanje zavisnosti između pojedinih dužnika. Po njemu, proces ocjene se sastoji iz tri velika koraka:

1. računanje vjerojatnosti bankrota svakog pojedinog dužnika
2. računanje zavisnosti između dužnika
3. računanje očekivanog gubitka i cijene CDO-a na temelju ukupnog broja bankrota.

Uzmimo jedan jednostavan primjer koji preskače prvi korak uz pretpostavku da je vjerojatnost bankrota jednaka za svakog pojedinog dužnika.

Primjer 4.1. *Recimo da želimo izračunati očekivani gubitak za jednostavni CDO sa sljedećim karakteristikama:*

- *Ročnost je jedna godina.*
- *U portfelju se nalazi* $N = 125$ *obveznica.*
- *Svaka obveznica plaća kupon vrijednosti 1 jedinice nakon jedne godine ako nije bankrotirala.*
- *Ukoliko je neka obveznica neispunjena tada je njena stopa oporavka jednaka nuli.*

- *Postoje 3 tranše koje nas zanimaju: kapital, mezanin i nenadređene tranše, s točkama pričvršćenja 0-3 bankrota, 4-6 bankrota i 7-125 bankrota (donja granicatočke pričvršćenja predstavlja broj bankrota nakon kojega tranša počinje generirati gubitke, a gornja granica, koja se zove točka odvajanja, predstavlja broj bankrota nakon kojega će investitor izgubiti svu glavnicu tranše).*

Tranše su dio skupne zbirke vrijednosnih papira koje se mogu dijeliti ovisno o njhovom riziku ili nekim drugim karakteristikama.

Napravit ćemo jednostavnu pretpostavku da je vjerojatnost bankrota unutar jedne godine, oznaka q, jednaka za sve obveznice. X_i je normalizirana vrijednost imovine i-te obveznice, i pretpostavimo

$$X_i = \sqrt{\rho}M + \sqrt{1-\rho}Z_i, \tag{6}$$

gdje su $M, Z_1, ..., Z_N$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable. Primjetimo da je korelacija između svakog para vrijednosti imovine jednaka. Pretpostavimo i da će i-ti kredit bankrotirati ako $X_i \leq \overline{x}_i$. Obzirom da je vjerojatnost bankrota q jednaka za sve obveznice, imamo

$$\overline{x}_i = ... = \overline{x}_N = \Phi^{-1}(q), \tag{7}$$

odnosno $\overline{x}_i$ je q-ti kvantil funkcije distribucije vrijednosti obveznice X_i za sve i. Iz jednakosti (6) i (7) slijedi da je

$$\begin{aligned} P(i-ti\,kredit\,bankrotira|M \leq m) &= P(X_i \leq \overline{x}_i|M \leq m) \\ &= P(\sqrt{\rho}M + \sqrt{1-\rho}Z_i \leq \Phi^{-1}(q)|M \leq m) \\ &= P\left(Z_i \leq \frac{\Phi^{-1}(q) - \sqrt{\rho}M}{\sqrt{1-\rho}}|M \leq m\right). \end{aligned}$$

Stoga, ovisno o M, ukupan broj bankrota ima binomnu distribuciju s parametrima N i q_m, gdje je

$$q_m := \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(q) - \sqrt{\rho}m}{\sqrt{1-\rho}}\right).$$

Označimo li s Y slučajnu varijablu koja modelira broj obveznica koje su bankrotirale slijedi:

$$P(Y = k|M \leq m) = \binom{N}{k} q_m^k (1-q_m)^{N-k}. \tag{8}$$

Pitanje koje se nameće je gdje se ovdje koriste kopule? Objasnimo. Neka $C_{X_1,...,X_n}$ označava kopulu od $X := (X_1, ..., X_N)$ u (6). Onda je jasno da je kopula od X zaista Gaussova kopula C_P^{Gauss} gdje je R matrica korelacije u kojoj su svi elementi van dijagonale jednaki ρ. Po definiciji Gaussove kopule, $C_{X_1,...,X_n}$ zadovoljava

$$C_{X_1,...,X_n}(u_1, ..., u_N) = P(\Phi(X_1) \leq u_1, ..., \Phi(X_N) \leq u_N). \tag{9}$$

Možemo supstituirati sve X_i u (9) koristeći (6) i onda uvjetovanjem na realizaciju m slučajne varijable M da dobijemo

$$C_{X_1,...,X_n}(u_1,...,u_N) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_i) - \sqrt{\rho}m}{\sqrt{1-\rho}}\right) \Phi(m)dm, \tag{10}$$

gdje je Φ standardna normalna funkcija gustoće vjerojatnosti. Sada možemo upotrijebiti Sklarov teorem i (10) da bismo vidjeli da zajednička vjerojatnost bankrota zadovoljava:

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq \overline{x}_1, ..., X_N \leq \overline{x}_N) &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\Phi(\overline{x}_i)) - \sqrt{\rho}m}{\sqrt{1-\rho}}\right) \Phi(m)dm \quad (11) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(q) - \sqrt{\rho}m}{\sqrt{1-\rho}}\right) \Phi(m)dm. \quad (12) \end{aligned}$$

U ovom primjeru smo pretpostavili da su vjerojatnosti bankrota jednake i kao rezultat toga smo mogli koristiti binomne vjerojatnosti kao u (8). Stoga nismo morali koristiti (11) da izračunamo očekivane gubitke na tranšama. Ipak, za slučajeve u kojima vjerojatnosti bankrota nisu jednake, Gaussova kopula nam je nužna.

4.4 Rizici kod primjene kopula

Matematički model kopula nam pruža elegantan način da modeliramo zavisnost između različitih varijabli. Unatoč svojoj eleganciji, kopule nisu savršen alat i preveliko oslanjanje na njih može dovesti do katastrofalnih posljedica. Jedna takva posljedica je velika gospodarska kriza koja je započela 2007., za koju je jednim dijelom zaslužno neodgovorno korištenje kopula.

Kada je David X. Li predložio svoj model računanja cijene CDO-ova, što smo spomenuli u prošlom potpoglavlju, postao je toliko velika zvijezda u svijetu financija da su ga mnogi vidjeli kao kandidata za osvajanje Nobelove nagrade za ekonomiju. Problem s takvim modelom je što u stvarnim uvjetima ne funkcionira jednako dobro kao u savršenim teorijskim uvjetima. Model je računao vjerojatnost bankrota svakog pojedinog dužnika te zavisnost između svaka dva dužnika. Dobar primjer bi bile dvije tvrtke, A i B, koje se bave istom djelatnošću i međusobni su konkurenti. Kada tržište raste, raste i njihova prodaja, a korelacija između vrijednosti njihovih dionica je visoka. Ali ako tvrtka A pokrene vrlo uspješnu marketinšku kampanju i značajno poveća svoju prodaju, to ide nauštrb tvrtke B kojoj prihodi počinju padati i korelacija među njima postaje negativna. Dolaskom krize, prihodi se smanjuju i tvrtki A i tvrtki B, čime korelacija između vrijednosti njihovih dionica opet postaje pozitivna. Iz ovoga vidimo da je nemoguće savršeno opisati korelaciju koristeći samo jedan jedini broj. Moramo se osloniti na adekvatnu mjeru zavisnosti u skladu s problemom kojeg proučavamo i podacima s kojima raspolažemo.

Problem, naravno, nije samo u nesavršenosti kopula, nego preveliko oslanjanje financijskih institucija na modele dobivene korištenjem kopula. Čak je i sam David X. Li još 2005. upozorio da kopule imaju svoje nedostatke i ne bi im se trebalo slijepo vjerovati u svim situacijama. Također je tvrdio da ih mnogi koriste iako ih ne razumiju, ili ih ne razumiju dovoljno. Unatoč upozorenjima, nitko nije reagirao, a banke i investitori su se nastavili pretjerano oslanjati na modele dobivene korištenjem kopula. Rezultat toga je bila prevelika izloženost banaka i investicijskih kuća CDO-ovima i, posljedično, neadekvatni sustavi upravljanja rizikom. Dvije godine kasnije došlo je do pada cijena nekretnina u SAD-u i istovremenog rasta kamatnih stopa, što je mnoge građane SAD-a dovelo do bankrota. Kao što smo već objasnili, kopule nisu mogle savršeno prikazati korelaciju i nitko nije računao da će doći do tako masovnog broja bankrota. Obzirom da su u CDO-ove bile upakirane prvenstveno hipoteke na nekretnine, mnoge financijske institucije su izgubile velik novac zbog bankrota dužnika koji više nisu mogli vraćati stambene kredite. Gubitci su se počeli preljevati s jedne financijske institucije na drugu i uskoro su i neke velike banke poput Lehman Brothers proglasile bankrot. Lančana reakcije je dovela do sloma na financijskim tržištima u Sjedinjenim Američkim Državama koji se uskoro prelio i na ostatak svijeta te uzrokovao najveću svjetsku gospodarsku krizu nakon one iz 1929.

Zadnjih nekoliko desetaka godina matematički modeli imaju sve veću ulogu u svijetu financija, a iskustvo sve manju. To dovodi do stvaranja matematičkih modela koji djeluju u savršenom svijetu uz savršene pretpostavke iako znamo da svijet funkcionira drugačije. Ako bismo iz svega dosad navedenog htjeli izvući nekakvu pouku, to bi bilo da kao i svaki drugi alat kopule imaju mnoge prednosti i mogu biti vrlo korisne, ali samo ako se pažljivo koriste i ako se u obzir uzmu svi njihovi nedostaci.

Literatura

[1] C. Alexsander, *Practical Financial Econometrics*, John Wiley and Sons Ltd., Chichester, UK, 2008.

[2] U. Cherubini, E. Luciano, W. Vecchiato, *Copula methods in finance*, John Wiley and Sons Ltd., 2004.

[3] U. Cherubini, S. Mulinacci, F. Gobbi, S. Romagnoli, *Dynamic Copula Methods in Finance*, John Wiley and Sons Ltd., Chichester, UK, 2014.

[4] M. Denuit, J. Dhaene, M. Goovarts, R. Kaas, *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*, John Wiley and Sons Ltd., 2005.

[5] D. Fantazzini, *The Econometrics Modelling of Copulas: A Review with Extension*, Department of Econometrics and Quantitative Methods, University of Pavia

[6] M. Haugh, *An Introduction to Copulas*, 2016.

[7] J.C. Hull, *Risk Management and Financial Institutions*, Wiley Finances, 2007.

[8] J. Mai, M. Schere, *Financial Engineering with Copulas Explained, Palgrave Macmillan, Houndmills*, Basingstoke, UK, 2014.

[9] Y. Malevergne, D. Sornette, *Testing the Gaussian copula hypothesis for financialassets dependences*, 2010.

[10] R.C. Mittelhammer, *Mathematical Statistics for Economics and Business*, Springer, New York-Tokyo, 1996.

[11] H.P. Palaro, L.K. Hotta, *Using Conditional Copula to Estimate Value at Risk*, 2006.

[12] J. Rank, *Copulas: From theory to application in finance, Risk Books*, London, UK, 2006.

[13] F.A.B. Sabino da Silva, F.A. Ziegelmann, C. Tessari, *Robust Portfolio Optimization with Multivariate Copulas: a Worst-Case CVaR approach*, 2017.

[14] W.H. Shaw, V. Barry, *Moral Issues in Business*, 2014.

Sažetak

U ovom radu smo definirali pojam kopula i kroz primjere predstavili svojstva i vrste kopula. Pokazano je kako se kopule koriste za računanje zavisnosti između varijabli. Navedene su i objašnjene su primjene kopula, odnosno kakvu ulogu kopule imaju u upravljanju rizikom, optimizaciji portfelja i vrednovanju financijskih derivata. Vidjeli smo i koje su prednosti njihovog korištenja te koje opasnosti donosi preveliko oslanjanje na njih.

Ključne riječi: kopula, Sklarov teorem, Fréchet-Hoeffdingova nejednakost, Kopule preživljenja, Dualne kopule, ko – kopule, eliptične kopule, Arhimedove kopule

Copulas

Summary

In this thesis we have defined copulas and, through examples, presented their properties and types. We have shown how copulas are used to calculate dependence between variables. Applications of copulas are explained, including their role in risk management, portfolio optimization and derivatives pricing. We have seen what their benefits are as well as what potential dangers overreliance on them can bring.

Key words: copula, Sklarov theorem, independent, Fréchet-Hoeffding inequality, survival copulas, dual copulas, co-copulas, elliptical copulas, Archimedean copulas

Životopis

Rođena sam 12. kolovoza 1994. godine u Požegi. Osnovnu školu fra Kaje Adžića u Pleternici pohađala sam u razdoblju od 2001. godine do 2009. godine. Tijekom tog razdoblja redovno sam sudjelovala na natjecanjima iz matematike što je rezultiralo upisivanjem Prirodoslovno-matematičke gimnazije u Požegi, a istu sam završila 2013. godine. Nakon završene srednje škole odlučujem upisati Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku. Naziv sveučilišne prvostupnice matematike stječem 2016. godine završnim radom pod nazivom "RSA Kriptosustav" uz mentorstvo doc. dr. sc. Mirele Jukić Bokun. Odmah nakon toga upisala sam Diplomski studij matematike, smjer Financijska matematika i statistika također na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom diplomskog studija bila sam aktivan član studentske udruge Financijski impuls i obavila sam stručnu studentsku praksu u Privrednoj banci Zagreb d.d. u Osijeku na odjelu Naplate potraživanja. Trenutno radim u Privrednoj banci Zagreb d.d. u Zagrebu na mjestu analitičara na razvoju u SME dijelu.