Laplaceova transformacija

Katić, Marija

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Marija Katić

Laplaceova transformacija

Završni rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Marija Katić

Laplaceova transformacija

Završni rad

Mentor: doc.dr.sc.Tomislav Marošević

Osijek, 2018.

Sažetak

U ovom radu proučit ćemo pojam Laplaceove transformacije i njezinih svojstava. Vidjet ćemo na koje funkcije je možemo primijeniti. Također ćemo definirati inverznu Laplaceovu transformaciju i promotriti neke od metoda računanja inverza Laplaceove transformacije. Za kraj ćemo definirati pojam konvolucije.

Ključne riječi: Laplaceova transformacija, funkcije eksponencijalnog rasta, Heavisideova funkcija, svojstva Laplaceove transformacije, konvolucija, inverz Laplaceove transformacije, Laplaceova transformacije funkcija kompleksne varijable

Abstract

In this paper we will study Laplace transformation and some of its properties. We will see on which functions we can apply her. Also, we will define inversion of the Laplace transformation and see some of the methods of calculating the inversion of the Laplace transformation. For the end we will define the concept of convolution.

Key words: Laplace transformation, exponential order functions, Heaviside function, properties of Laplace transform, convolution, inverse Laplace transformation, Laplace transform of complex variable functions

Sadržaj

1 Uvod

Tema ovog rada je Laplaceova transformacija, njezina svojstva, te njezina primjena pri rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi. Spomenut ćemo i inverz Laplaceove transformacije kao i konvoluciju.

Engleski fizičar Heaviside je za rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi koristio način računanja zvan operatorski način, čija je svrha bila da funkciji koja uđe u račun pridružimo novu funkciju. Od posebnog značaja bile su integralne transformacije. Poznatija među njima bila je Laplaceova transformacija koja se primjenjuje u brojnim znanstvenim područjima, a ponajviše u matematici i fizici.

Ime je dobila po poznatom matematičaru i astronomu Pierre-Simon Laplaceu koji se vodio Eulerovim istraživanjima koristeći integrale kao rješenja jednadžbi. Kada pričamo o Laplaceovoj transformaciji smatramo je kao jednostranu, no možemo je definirati i kao dvostranu, šireći granice integrala po cijeloj realnoj osi.

2 Laplaceova transformacija

2.1 Definicija Laplaceove transformacije

Definicija 2.1 (Laplaceov transformat)**.** *Neka je f funkcija realnog argumenta t, definirana za $t > 0$ i s vrijednostima u skupu realnih ili kompleksnih brojeva. Neka je s realni ili kompleksni parametar. Laplaceov tranformat funkcije f je funkcija F definirana s*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

za svaki s za koji ovaj nepravi integral konvergira.

Funkcija f naziva se original eksponenta rasta ili gornja funkcija, a $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$ slika ili donja funkcija.

Da bi nam bilo što lakše zapisati i razumjeti vezu između funkcija i njihovih slika, za oznake originala koristit ćemo mala slova poput a, b, c a njihove slike velikim slovima A, B, C. Preslikavanje $f \longmapsto F$ nazivamo Laplaceova tranformacija i označavamo ga s $\mathscr{L}$.

Možemo koristiti i ovu oznaku za to pridruživanje, odnosno ako je našem originalu pridružena slika to možemo zapisati ovako

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s).$$

Laplaceov integral nepravi je integral oblika

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \lim_{M \to \infty} \int_0^M e^{-st} f(t) dt.$$

2.2 Svojstva Laplaceove transformacije

Teorem 2.2 (O linearnosti)**.** *Ako je $f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s)$, $g(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet G(s)$, tada vrijedi*

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \alpha F(s) + \beta G(s).$$

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(\alpha f + \beta g) &= \int_0^\infty e^{-st} (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t) + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t) \\ &= \alpha \mathscr{L}(f) + \beta \mathscr{L}(g) \end{aligned}$$

□

Teorem 2.3 (O prigušenju)**.** *Neka je* $c \in \mathbb{R}$, *te neka je* a_0 *red eksponencijalnog rasta funkcije* f. *Tada za svaki* $s > a_0 + c$ *vrijedi*

$$\mathscr{L}\{e^{ct}f(t)\}(s) = F(s-c).$$

Dokaz.

$$\mathscr{L}\{e^{ct}f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{ct}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t}f(t)dt = F(s-c)$$

□

Primjer 2.1. *Po teoremu o prigušenju imamo za* $u(t) = 1, \qquad t \geq 0,$

$$\mathrm{e}^{-at}u(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a},$$

jer je

$$\mathscr{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}.$$

Teorem 2.4 (O sličnosti)**.** *Neka je* $c \in \mathbb{R}$, $s > a_0$. *Tada je*

$$\mathscr{L}\{e^{ct}f(ct)\}(s) = \frac{1}{c}F(\frac{s}{c}).$$

Dokaz. Koristimo supstituciju u=ct pa imamo

$$\mathscr{L}\{f(ct)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(ct)dt = \frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-s\frac{u}{c}}f(u)du = \frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$$

□

Kako bi uveli teorem o pomaku uvodimo Step funkciju ili Heavisideovu funkciju. Ona se koristi za rješavanje diferencijalnih jednadžbi u kojima funkcija smetnje ima prekid. Nju definiramo na ovaj način

$$H(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0 \\ 1, \ t \geq 0 \end{cases}$$

odnosno,

$$H_c(t) = \begin{cases} 0, \ t < c \\ 1, \ t \geq c \end{cases}$$

(a) graf funkcije H (b) graf funkcije H_c

Slika 1. Graf Heavisideove funkcije

Teorem 2.5 (O pomaku).

(i) (translacija udesno) Pomak Laplaceovog transformata originalne funkcije udesno za $c > 0$ *jednak je Laplaceovom transformatu nepomaknute funkcije, pomnoženog s faktorom* e^{-cs}

$$\mathscr{L}\{H_c(t)f(t-c)\}(s) = e^{-cs}F(s), \qquad s > a_0,$$

gdje je a_0 *red eksponencijalnog rasta funkcije* f.

(ii) (translacija ulijevo) Pomak Laplaceovog transformata originalne funkcije ulijevo za $c > 0$ *jednak je razlici Laplaceovog transformata originalne funkcije i integrala*

$$\int_0^c e^{-st}f(t)dt$$

pomnoženog s faktorom e^{cs}

$$\mathscr{L}\{f(t+c)\}(s) = e^{cs}\left[F(s) - \int_0^c e^{-st}f(t)dt\right], \qquad s > a_0.$$

Dokaz.

(i) $\mathscr{L}\{H_c(t)f(t-c)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}H_c(t)f(t-c)dt = \int_c^\infty e^{-st}f(t-c)dt$

Koristeći supstituciju z=t-c, imamo

$$\mathscr{L}\{H_c(t)f(t-c)\}(s) = \int_0^\infty e^{-s(z+c)}f(z)dz = e^{-cs}\int_0^\infty e^{-sz}f(z)dz = e^{-cs}F(s)$$

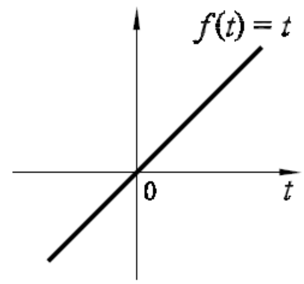
(ii) $\mathscr{L}\{f(t+c)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t+c)dt$

Koristeći supstituciju z=t+c imamo

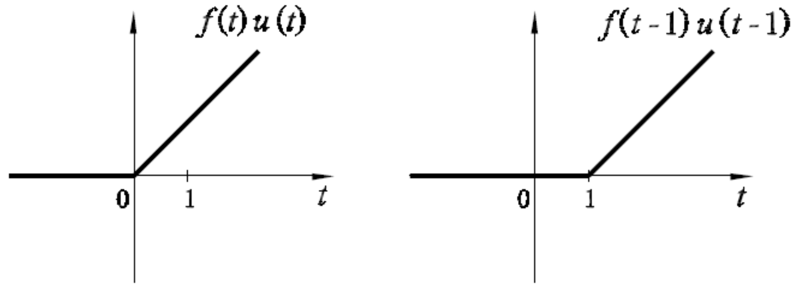
$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t+c)\}(s) &= \int_c^\infty e^{-s(z-c)}f(z)dz = e^{cs}\int_c^\infty e^{-sz}f(z)dz \\ &= e^{cs}\left(\int_0^\infty e^{-sz}f(z)dz - \int_0^c e^{-sz}f(z)dz\right) \\ &= e^{cs}\left(F(s) - \int_0^c e^{-st}f(t)dt\right)\end{aligned}$$

□

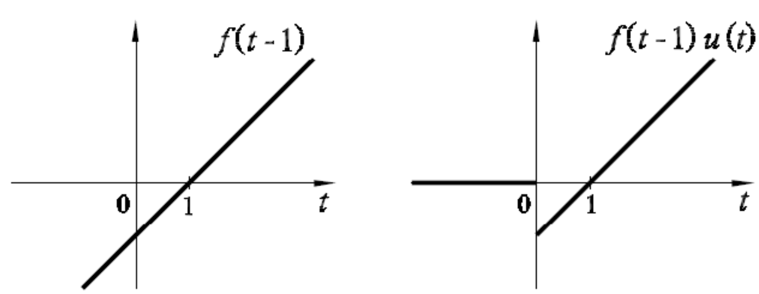
Primjer 2.2. *Neka je f(t)=t. Na slikama ispod prikazani su grafovi raznih umožaka funkcije, bez pomaka i sa pomakom, sa step funkcijom* $u(t) = H(t)$, *također bez pomaka i sa pomakom.*



Slika 2.



Slika 3.



Slika 4.

Primjer 2.3 (O pomaku originala)**.** *Poznato je da vrijedi*

$$sint \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2+1}.$$

Odatle i iz Teorema 2.5 (i) dobivamo

$$sin(t-2)u(t-2) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{e^{-2s}}{s^2+1}.$$

Teorem 2.6 (O deriviranju originala)**.** *Neka je funkcija f n-puta diferencijabilna. Tada vrijedi (uz oznaku za* $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ *)*

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, sF(s) - f(0), \tag{1}$$

i općenito

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0). \tag{2}$$

Dokaz. Izvest ćemo formulu (1).

$$\mathscr{L}(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Ako je a_0 red eksponencijalnog rasta funkcije f, onda za $s > a_0$ integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ konvergira i zato je nužno $\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$. Iz gornjeg izraza tako dobivamo

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, sF(s) - f(0).$$

Primijenimo li uzastopno ovu formulu dobit ćemo:

$$f''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s[sF(s) - f(0)] - f'(0) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Formula (2) slijedi indukcijom.

□

Teorem 2.7 (O deriviranju slike)**.** *Deriviranju u donjem području odgovara množenje s - t u gornjem području (uz oznaku za* $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ *) :*

$$(-t) f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F'(s). \tag{3}$$

Općenito:

$$(-t)^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F^{(n)}(s), \tag{4}$$

tj.

$$t^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, (-1)^n F^{(n)}(s). \tag{5}$$

Dokaz. Može se vidjeti u [4].

□

Primjer 2.4. *Pronađimo sliku funkcije f(t)=tsint.*

Koristeći Laplaceovu transformaciju :

$$sint \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{s^2+1}$$

iz (3) slijedi

$$tsint \circ\!\!-\!\!\bullet\, -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}.$$

Teorem 2.8 (O integraciji originala)**.** *Za* $\int_0^t f(\tau)d\tau$ *, gdje je f integrabilna funkcija eksponencijalnog rasta* a_0 *, vrijedi*

$$\mathscr{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)(s) = \frac{1}{s}F(s), \qquad s > a_0.$$

Dokaz. Neka je $h(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$. Funkcija h je neprekidna i diferencijabilna na $\langle 0, \infty\rangle$ te vrijedi $h' = f$ i $h(0) = 0$. Za svaki $a > a_0$ dobijemo sljedeći rezultat

$$|h(t)| = \int_0^t |f(\tau)|d\tau \leq M\int_0^t e^{a\tau}d\tau = \frac{M}{a}(e^{at} - 1) < \frac{M}{a}e^{at}$$

po čemu se vidi da je h eksponencijalnog rasta a_0. Stoga, imamo Laplaceovu transformaciju derivacije funkcije h pa iz Teorema 2.6 slijedi

$$\mathscr{L}(f)(s) = \mathscr{L}(h')(s) = s\mathscr{L}(h) - h(0), \qquad s > a_0$$

Iz $h(0) = 0$ odatle slijedi

$$\mathscr{L}(h)(s) = \mathscr{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{1}{s}F(s), \qquad s > a_0.$$

□

Teorem 2.9 (O integraciji slike)**.** *Neka je* $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$*. Ako je* $\frac{f(t)}{t}$ *original, onda vrijedi*

$$\frac{f(t)}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet \int_s^\infty F(s)ds.$$

Dokaz. Može se vidjeti u [4].

□

Primjer 2.5. *Odredimo sliku funkcije* $\frac{e^{-3t}-e^{-5t}}{t}$.

Znamo da je

$$e^{-3t} - e^{-5t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+5}.$$

Prema teoremu o integriranju slike imamo :

$$\begin{aligned}\frac{e^{-3t} - e^{-5t}}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet &\int_s^\infty \left(\frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+5}\right)ds \\ &= \left(ln(s+3) - ln(s+5)\right)\Big|_s^\infty = ln\frac{s+3}{s+5}\Big|_s^\infty \\ &= ln1 - ln\frac{s+3}{s+5} = ln\frac{s+5}{s+3}.\end{aligned}$$

U sljedećim tablicama navedena su osnovna svojstva Laplaceove transformacije i Laplaceove transformacije za neke osnovne funkcije.

br.	f	$\mathcal{L}(f)$
1	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
2	$e^{ct} f(t), \quad c > 0$	$F(s-c)$
3	$H_c(t) f(t-c), \quad c > 0$	$e^{-cs} F(s)$
4	$f(t+c), \quad c > 0$	$e^{cs} \left[F(s) - \int\limits_0^c e^{-st} f(t) dt \right]$
5	$f(ct), \quad c > 0$	$\frac{1}{c} F(\frac{s}{c})$
6	$f^{(n)}(t), \quad n \in \mathbb{N}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
7	$\int\limits_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
8	$t^n f(t), \quad n \in \mathbb{N}$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
9	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_s^\infty F(\tau) d\tau$
10	$f(t+T)$ [a]	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int\limits_0^T e^{-st} f(t) dt$
11	$(f * g)(t)$	$F(s)G(s)$

Tablica 1. Svojstva Laplaceove transformacije

U redku broj 10 iz tablice 1. f je periodična funkcija s osnovnim periodom T.

U redku broj 11 iz tablice 1. $f * g$ predstavlja konvoluciju funkcija f i g , što detaljnije navodimo u točki 4.

br.	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$
1	1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2	$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
3	$t^\alpha, \quad \alpha > 0$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad s > 0$
4	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$
5	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}, \quad s > \alpha$
6	$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}, \quad s > 0$
7	$\cos \alpha t$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}, \quad s > 0$
8	$\sin(\alpha t + \beta)$	$\frac{s \sin\beta + \alpha \cos\beta}{s^2+\alpha^2}$
9	$\cos(\alpha t + \beta)$	$\frac{s \cos\beta - \alpha \sin\beta}{s^2+\alpha^2}$
10	$\mathrm{sh}\, \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}, \quad s > \lvert\alpha\rvert$
11	$\mathrm{ch}\, \alpha t$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}, \quad s > \lvert\alpha\rvert$
12	$H_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$

Tablica 2. Laplaceove transformacije nekih osnovnih funkcija

3 Inverzna transformacija

Da bi izračunali original $f(t)$ iz zadane slike $F(s)$, moramo odrediti inverznu transformaciju

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s)).$$

Teorem 3.1 (Lerchov teorem o jedinstvenosti inverza)**.** *Neka je funkcija f:* $[0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ *po dijelovima neprekidna i eksponencijalnog rasta na* $[0, \infty\rangle$ *te različita od nul-funkcije. Tada postoji jedinstven inverz* $\mathscr{L}^{-1}(F) = f$.

Dokaz. Može se vidjeti u [4].

$\square$

br.	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}(F)}$
1	$c_1F_1(s) + c_2F_2(s)$	$c_1f_1(t) + c_2f_2(t)$
2	$H_c(s)F(s-c)$	$e^{ct}f(t)$
3	$e^{-cs}F(s), \quad c > 0$	$H_c(t)f(t-c)$
4	$F(cs)$	$\frac{1}{c}f(\frac{t}{c})$
5	$F^{(n)}(s), \quad n \in \mathbb{N}$	$(-1)^n t^n f^{(n)}(t)$
6	$\int\limits_s^\infty F(\tau)d\tau$	$\frac{f(t)}{t}$
7	$sF(s)$	$f'(t) + f(0)\delta(t)$ [a]
8	$\frac{F(s)}{s}$	$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$
9	$F(s)G(s)$	$(f * g)(t)$

Tablica 3. Svojstva inverzne Laplaceove transformacije

U retku 7 iz Tablice 3. funkcija $\delta(t)$ predstavlja Diracovu delta funkciju.
U retku 9 iz Tablice 3. konvolucija $f * g$ funkcija f i g obrađena je u točki 4.

Primjer 3.1. *Pomoću metode rastava na parcijalne razlomke odredit ćemo* $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right)$.
Imamo rastav polinoma na parcijalne razlomke:

$$\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$$

$$2s^2 - 4 = A(s-2)(s-3) + B(s+1)(s-3) + C(s+1)(s-2)$$

$$2s^2 - 4 = (A + B + C)s^2 + (-5A - 2B - C)s + (6A - 3B - 2C)$$

Izjednačimo li koeficijente s lijeve i desne strane gledajući potencije od s, imamo :

$$A = -\frac{1}{6}, B = -\frac{4}{3}, C = \frac{7}{2}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right) &= \mathscr{L}^{-1}\left(-\frac{1}{6}\frac{1}{s+1} - \frac{4}{3}\frac{1}{s-2} + \frac{7}{2}\frac{1}{s-3}\right) \\ &= -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}.\end{aligned}$$

br.	$\boldsymbol{F}(\mathbf{s})$	$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}(F)}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^n}, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
3	$\frac{1}{s^\alpha}, \quad \alpha > 0$	$\frac{t^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)}$
4	$\frac{1}{(s-\alpha)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad s > \alpha$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}$
5	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$	$\sin \alpha t$
6	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$	$\cos \alpha t$
7	$\frac{1}{s^2-\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha}\operatorname{sh} \alpha t$
7	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$	$\operatorname{ch} \alpha t$
8	$\frac{e^{-cs}}{s}$	$H_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$

Tablica 4. Inverzne Laplaceove transformacije za neke funkcije

4 Konvolucija

Jedan od oblika integralne transformacije je konvolucija.

Definicija 4.1. *Neka su f_1 i f_2 funkcije definirane na $[0,t] \subset \mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$. Funkcija $f_1 * f_2$ definirana s*

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

naziva se konvolucija funkcija f_1 i f_2.

Teorem 4.2 (O konvoluciji)**.** *Konvoluciji u "gornjem" području odgovara umnožak slika u "donjem" :*

$$f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F_1(s) F_2(s) \tag{6}$$

Dokaz. Može se vidjeti u [2].

□

Iz formule (6) slijede neka svojstva konvolucije. Vidi [2] :
asocijativnost

$$f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$$

komutativnost

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1$$

kvaziasocijativnost

$$(\lambda f_1) * f_2 = \lambda (f_1 * f_2), \lambda \in \mathbb{R}$$

distributivnost

$$f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$$

Primjer 4.1. *Pomoću teorema o konvoluciji odredimo formulu Laplaceove transformacije za integriranje originala*

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{F(s)}{s}.$$

Rješenje: Neka je dana funkcija f i neka je

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s),$$

te znamo da je

$$u(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}.$$

Konvolucija $f * u$ jednaka je

$$(f * u)(t) = \int_0^t f(t-\tau) u(t) d\tau = \int_0^t f(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

Iz (6) imamo

$$f(t) * u(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{F(s)}{s}.$$

Stoga, rješenje integrala jest

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right).$$

Zaključna napomena : Napomenimo da se Laplaceova tranformacija primjenjuje u rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog i višeg reda s konstantnim koeficijentima , te kod sustava diferencijalnih jednadžbi i kod integralnih jednadžbi tipa konvolucije.

Literatura

[1] N. Elezović, Diferencijalne jednadžbe, Zagreb, Element, 2007.

[2] N. Elezović, Fourierov red i integral, Laplaceova transformacija, Zagreb, Element, 2007.

[3] Ž. Salinger, Laplaceova transformacija, Završni rad, Odjel za matematiku, Osijek, 2011.

[4] D.V. Widder, The Laplace Transform, Princeton University Press, Princeton , 1946.

[5] S. Kurepa, Matematička analiza 2, Funkcija jedne varijable, Tehnička knjiga, Zagreb, 1980

[6] Laplace transform, Wikipedia. Dostupno na: `http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform`