

# Mooreovi grafovi

---

**Komesarović, David**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2017**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:839219>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-10-15**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science](#)



Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

David Komesarović

Mooreovi grafovi

Diplomski rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

David Komesarović

Mooreovi grafovi

Diplomski rad

Mentor:

doc.dr.sc. Snježana Majstorović

Osijek, 2017.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Osnovni pojmovi i tvrdnje iz teorije grafova i linearne algebre</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Mooreovi grafovi</b>	<b>7</b>
3.1	Definicija Mooreovih grafova . . . . .	7
3.2	Osnovna svojstva . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Mooreovi grafovi dijametra 2</b>	<b>11</b>
4.1	Mooreov graf tipa (2,2) ili ciklus s 5 vrhova . . . . .	13
4.2	Mooreov graf tipa (3,2) ili Petersenov graf . . . . .	14
4.2.1	Petersenov graf je najmanja (3,5)-rešetka . . . . .	16
4.2.2	Petersenov graf je najmanji snark . . . . .	16
4.2.3	Petersenov graf je najmanji 3-regularan graf bez mostova koji ne sadrži Hamiltonov ciklus . . . . .	19
4.2.4	Petersenov graf je najmanji hipohamiltonov graf . . . . .	22
4.2.5	Još neka svojstva Petersenovog grafa . . . . .	24
4.3	Mooreov graf tipa (7,2) ili Hoffman-Singleton graf . . . . .	26
4.3.1	Konstrukcija 1 . . . . .	28
4.3.2	Konstrukcija 2 . . . . .	29
4.3.3	Konstrukcija 3 . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Mooreovi grafovi dijametra 3</b>	<b>32</b>
	<b>Literatura</b>	<b>34</b>
	<b>Sažetak</b>	<b>35</b>
	<b>Životopis</b>	<b>36</b>

# 1 Uvod

Razni tipovi kompleksnih mreža, kao što su telekomunikacijske mreže, LAN mreže (lokalne računalne mreže) i slično, modeliraju se pomoću grafova čiji su vrhovi telekomunikacijske stanice, procesori itd., a bridovi su kablovi, 'linkovi' (veze između web stranica) i slično.

Pri konstrukciji takvih mreža javljaju se razna ograničenja na vrhove, odnosno bridove. Najčešće se zadaje uvjet na najveći stupanj vrha u mreži i na dijametar.

Tipični problemi koji se javljaju u proučavanju takvih grafova su sljedeći:

- *stupanj/dijametar problem*: za zadane prirodne brojeve  $\Delta$  i  $D$ , treba odrediti najveći mogući broj vrhova  $n_{\Delta,D}$  povezanog grafa kojemu je najveći stupanj jednak  $\Delta$ , a dijametar mu je manji ili jednak  $D$ .
- *stupanj/struk problem*: uz zadane prirodne brojeve  $d \geq 2$  i  $g \geq 3$ , treba odrediti najmanji mogući broj vrhova povezanog regularnog grafa čiji je stupanj regularnosti jednak  $d$ , a struk je  $g$ .

Proučavanje prvog problema odvija se u dva smjera: premda su nađeni dokazi o nepostojanju grafova kojima je broj vrhova vrlo blizu gornje granice za broj  $n_{\Delta,D}$ , zvane Mooreova granica, brojna istraživanja daju rezultate o postojanju grafova koji poboljšavaju donju granicu tog broja. Glavna tema ovog rada je proučavanje problema egzistencije Mooreovih grafova, odnosno onih grafova koji uz zadane uvjete imaju broj vrhova koji je jednak Mooreovoj granici.

Rad je organiziran na sljedeći način: u prvom odjeljku navedeni su osnovni pojmovi i osnovne tvrdnje iz teorije grafova i linearne algebre koji su neophodni za razumijevanje glavnog dijela rada. U drugom odjeljku precizno je definiran pojam Mooreovog grafa, dok su u trećem odjeljku navedena njegova osnovna svojstva. Četvrti odjeljak je najopsežniji i predstavlja glavni dio rada. U njemu su opisani svi Mooreovi grafovi dijametra 2, a poseban naglasak stavljen je na vrlo značajan Mooreov graf koji je puno više poznat pod nazivom Petersenov graf. Sva ključna svojstva Petersenova grafa detaljno su iskazana i dokazana, a ponuđene su i brojne sličice za bolji uvid u njegovu strukturu. Posljednji odjeljak posvećen je problemu karakterizacije Mooreova grafa dijametra 3.

## 2 Osnovni pojmovi i tvrdnje iz teorije grafova i linearne algebre

U ovom poglavlju ćemo navesti osnovne pojmove iz teorije grafova i linearne algebre koji su neophodni za proučavanje Mooreovih grafova.

**Definicija 2.1.** Graf  $G$  je uređena trojka  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$  koja se sastoji od nepraznog skupa  $V = V(G)$ , čiji su elementi vrhovi od  $G$ , skupa  $E = E(G)$  disjunktne s  $V(G)$ , čiji su elementi bridovi od  $G$  i funkcije incidencije  $\psi_G$  koja svakom bridu od  $G$  pridružuje neuređeni par (ne nužno različitih) vrhova od  $G$ .

Vrhove nekog grafa najčešće označavamo malim slovima  $u, v, w$  itd., a bridove označavamo malim slovima  $e, f, g$  itd. Ako je bridu  $e$  pridružen par vrhova  $\{u, v\}$ , onda kažemo da su  $u$  i  $v$  krajevi brida  $e$ , odnosno da je vrh  $u$  ( $v$ ) incidentan bridu  $e$ , a brid  $e$  u tom slučaju označavamo s  $e = uv$  ili  $e = vu$ .

Ako su u grafu neka dva vrha spojena s dva ili više bridova, onda kažemo da postoji *višestruki brid* između tih vrhova.

Brid koji spaja vrh sa samim sobom zove se *petlja*.

Graf je *jednostavan* ako u njemu nema ni višestrukih bridova niti petlji.

*Potpun graf*  $K_n$  je jednostavan graf s  $n$  vrhova i s najvećim mogućim brojem bridova, tj. to je graf u kojemu su svaka dva vrha spojena bridom.

*Trivijalan graf* je jednostavan graf sa samo jednim vrhom.

*Stupanj vrha* (ili valencija vrha)  $v$  grafa  $G$  je broj  $d_G(v)$  bridova u  $G$  incidentnih s  $v$ .

Najveći stupanj grafa  $G$  označavamo s  $\Delta(G)$ .

Graf je  *$r$ -regularan* ako mu je svaki vrh stupnja  $r$ , tj.  $d(v) = r \forall v \in V$ . Graf je regularan ako je  $r$ -regularan za neko  $r$ .

**Definicija 2.2.** Grafovi  $G$  i  $H$  su izomorfni, u oznaci  $G \cong H$ , ako postoje bijekcije  $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$  i  $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$  tako da vrijedi:

$$\psi_G(e) = uv \Leftrightarrow \psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v).$$

Uređeni par  $(\theta, \phi)$  zove se *izomorfizam* s  $G$  u  $H$ .

**Definicija 2.3.** Automorfizam  $\text{Aut}(G)$  jednostavnog grafa  $G$  je permutacija  $\sigma : V(G) \rightarrow V(G)$  takva da za svaka dva vrha  $u, v \in V(G)$  vrijedi:

$$uv \in E(G) \Leftrightarrow \sigma(u)\sigma(v) \in E(G).$$

Drugim riječima, automorfizam grafa  $G$  je izomorfizam od  $G$  na sebe samog.

Jednostavan graf  $G$  je tranzitivan po vrhovima ako vrijedi:

$$\forall u, v \in V(G) \exists g \in \text{Aut}(G) \text{ tako da je } g(u) = v.$$

Jednostavan graf  $G$  je tranzitivan po bridovima ako vrijedi:

$$\forall u_1v_1, u_2v_2 \in E(G) \exists h \in \text{Aut}(G) \text{ tako da je } h(u_1v_1) = u_2v_2.$$

Jednostavan graf  $G$  je simetričan ako vrijedi:

$$\begin{aligned} &\forall u_1, v_1, u_2, v_2 \in V(G) \text{ takve da } u_1v_1, u_2v_2 \in E(G) \\ &\exists f \in \text{Aut}(G) \text{ tako da je } f(u_1) = u_2, f(v_1) = v_2. \end{aligned}$$

*Podgraf*  $H$  grafa  $G$  je graf čiji je skup vrhova podskup skupa vrhova grafa  $G$ , a skup bridova od  $H$  je podskup skupa bridova od  $G$ . Razapinjujući podgraf nekog grafa je graf čiji je skup vrhova identičan skupu vrhova grafa  $G$ .

*Šetnja* u grafu  $G$  je netrivialan konačan niz  $W = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_kv_k$  čiji su članovi naizmjenice vrhovi  $v_i$  i bridovi  $e_i$ , tako da su krajevi od  $e_i$  vrhovi  $v_{i-1}$  i  $v_i$ , za svako  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Šetnja je zatvorena ako je  $v_0 = v_k$ .

Zatvorena šetnja u kojoj su svi vrhovi, osim početnog i krajnjeg, međusobno različiti zove se *ciklus*. Ciklus s  $n$  vrhova označavamo s  $C_n$ .

*Put* je šetnja s međusobno različitim vrhovima. Put s  $n$  vrhova označavamo s  $P_n$ .

*Udaljenost*  $d(v, w)$  između dva vrha  $v$  i  $w$  je duljina najkraćeg puta između  $v$  i  $w$ . Ako takav put ne postoji, onda uzimamo da je njihova međusobna udaljenost jednaka  $\infty$ .

Duljinu  $g(G)$  najkraćeg ciklusa u grafu  $G$  zovemo *struk* grafa  $G$ .

Graf  $G$  je *povezan* ako  $d_G(u, v) < \infty \forall u, v \in V(G)$ . U suprotnom, kažemo da je  $G$  *nepovezan*, a maksimalne povezane podgrafove tog grafa zovemo komponentama povezanosti grafa  $G$ .

*Stablo* je povezan graf koji ne sadrži cikluse.

*Ekscentricitet*  $e(v)$  vrha  $v$  povezanog grafa  $G$  definiran je s

$$e(v) = \max_{u \in V(G)} d(v, u).$$

*Dijametar*  $diam(G)$  grafa  $G$  definiran je s

$$diam(G) = \max_{v \in V(G)} e(v).$$

*Radijus*  $r(G)$  od  $G$  definiran je s

$$r(G) = \min_{v \in V(G)} e(v).$$

*Rezni brid* ili most grafa  $G$  zovemo brid čijim se izbacivanjem povećava broj komponenta povezanosti od  $G$ .

Neka je  $G$  proizvoljan graf sa skupom vrhova  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . *Matrica susjedstva*  $A(G)$  grafa  $G$  je kvadratna  $n \times n$  matrica s elementima  $a_{ij}$  koji su jednaki broju bridova između vrhova  $v_i$  i  $v_j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

Za graf kažemo da je *planaran* ako ga je moguće nacrtati u ravnini tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima.

*Komplement*  $G^c$  jednostavnog grafa  $G$  je jednostavan graf s istim skupom vrhova  $V(G)$  kao i  $G$ , a dva vrha u  $G^c$  su susjedna ako i samo ako nisu susjedna u  $G$ .

Za graf kažemo da je *samokomplementaran* ako je izomorfan svom komplementu.

*Linijski graf* grafa  $G$  je graf  $L(G)$  sa skupom vrhova  $E(G)$  u kojem su dva vrha spojena bridom ako i samo ako su odgovarajući bridovi u  $G$  susjedni.

*Hamiltonov ciklus* u  $G$  je ciklus u  $G$  koji sadrži sve vrhove od  $G$ . Graf je Hamiltonov ako sadrži Hamiltonov ciklus.

Za povezan graf kažemo da je *hipohamiltonov* ako nije Hamiltonov, ali izbacivanjem proizvoljnog vrha dobivamo graf koji sadrži Hamiltonov ciklus, tj. Hamiltonov graf.

Za zadani graf  $G$  podskup  $M \subseteq E(G)$  je *sparivanje* u  $G$  ako niti jedan njegov element nije petlja i nikoja dva brida iz  $M$  nisu susjedna.

Sparivanje  $M$  u  $G$  zasićuje vrh  $v \in V(G)$ , tj. vrh  $v$  je  $M$ -zasićen ako je neki brid iz  $M$  incidentan s  $v$ . Ako je svaki vrh iz  $G$   $M$ -zasićen, kažemo da je  $M$  savršeno sparivanje.

*Faktor* grafa  $G$  je razapinjujući podgraf koji je 1-regularan.

*Faktorizacija* grafa  $G$  je particija skupa bridova od  $G$  na faktore.

*Genus* grafa je najmanji prirodan broj  $n$  takav da se graf može smjestiti na sferu s  $n$  ručki tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima.

Za  $k \in \mathbb{N}$  definiramo  $k$ -bojenje vrhova grafa  $G$  kao funkciju  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  koja svakom vrhu iz  $G$  pridružuje jednu od  $k$  boja označenu s nekim brojem iz  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Za  $k$ -bojenje kažemo da je pravilno ako su svaka dva susjedna vrha obojena različitim bojama.

Za graf kažemo da je  $k$ -obojev ako dopušta pravilno  $k$ -bojenje vrhova.

*Kromatski broj*  $\gamma(G)$  grafa  $G$  je najmanji prirodan broj  $k$  takav da je  $G$   $k$ -obojev.

Graf  $G$  je bridno  $k$ -obojev ako dopušta pravilno  $k$ -bojenje bridova.



Bridno kromatski broj  $\gamma'(G)$  grafa  $G$  bez petlji je najmanji prirodan broj  $k$  takav da je  $G$  bridno  $k$ -obojev.

**Teorem 2.1.** (Vizingov teorem). *Ako je  $G$  jednostavan graf, tada je ili  $\gamma'(G) = \Delta(G)$  ili  $\gamma'(G) = \Delta(G) + 1$ .*

**Definicija 2.4.** *Neka su  $n$  i  $k$  prirodni brojevi. Kneserov graf  $K(n, k)$  je graf čiji vrhovi odgovaraju  $k$ -članim podskupovima skupa od  $n$  elemenata, a dva vrha su spojena bridom ako i samo ako odgovarajuća dva podskupa nemaju zajedničkih elemenata.*

U nastavku ćemo iskazati i dokazati neke rezultate iz linearne algebre i teorije grafova.

**Propozicija 2.1.** *Skup svih svojstvenih vektora simetrične matrice  $A$  je ortogonalan skup.*

*Dokaz.* Neka su  $v$  i  $w$  dva svojstvena vektora simetrične matrice  $A$  s pridruženim svojstvenim vrijednostima, redom  $\lambda$  i  $\mu$  pri čemu  $\lambda \neq \mu$ . Vrijedi:

$$\begin{aligned}v^\tau(Aw) &= v^\tau(\mu w) = \mu(v^\tau w) \\(v^\tau A^\tau)w &= (Av)^\tau w = \lambda(v^\tau w)\end{aligned}$$

Budući da je  $A = A^\tau$ , slijedi:

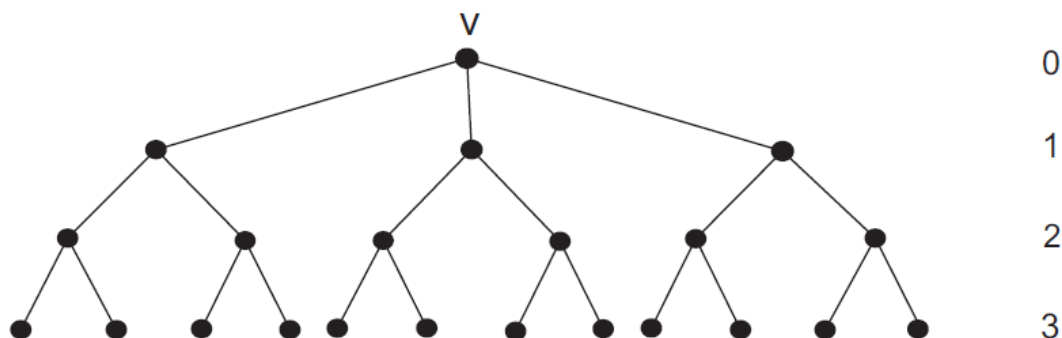
$$\begin{aligned}\mu(v^\tau w) &= \lambda(v^\tau w) \\(\lambda - \mu)v^\tau w &= 0 \leftrightarrow v^\tau w = 0, \text{ jer je } \lambda \neq \mu, \text{ a svojstveni vektori nisu nul-vektori.}\end{aligned}$$

Slijedi zaključak da su  $v$  i  $w$  međusobno okomiti, a kako smo ih birali proizvoljno, tvrdnja je dokazana.  $\square$

## 3 Mooreovi grafovi

### 3.1 Definicija Mooreovih grafova

Pojam Mooreovih grafova ćemo uvesti koristeći specijalno stablo koje se zove BFS (Breadth First Search) stablo<sup>1</sup>. Pretpostavimo da postoji povezan graf s  $n$  vrhova čiji je najveći stupanj  $\Delta$ , a dijametar  $D$ . Zanima nas najveći broj vrhova koji može imati takav graf. Slučaj  $\Delta = D = 1$  je trivijalan, tj. jedini graf dijametra 1 i najvećeg stupnja 1 je potpun graf  $K_2$  pa je  $n = 2$ . Stoga pretpostavimo da je  $\Delta \geq 2$  i  $D \geq 2$ . Konstruirajmo BFS stablo s korijenom  $v$ .



Slika 1: BFS stablo za  $\Delta = 3$  i  $D = 3$

Iz vrha  $v$  putem duljine 1 možemo posjetiti najviše  $\Delta$  vrhova. Iz vrha  $v$  putem duljine 2 možemo posjetiti najviše  $\Delta \cdot (\Delta - 1)$  vrhova itd. Konačno, iz vrha  $v$  putem duljine  $D$  možemo posjetiti najviše  $\Delta \cdot (\Delta - 1)^{D-1}$  vrhova. Vidi Sliku 1. Dobivamo

$$\begin{aligned}
 n &\leq 1 + \sum_{i=1}^D \Delta \cdot (\Delta - 1)^{i-1} = 1 + \Delta + \Delta \cdot (\Delta - 1) + \dots + \Delta(\Delta - 1)^{D-1} \\
 &= 1 + \Delta(1 + \Delta - 1 + (\Delta - 1)^2 + \dots + (\Delta - 1)^{D-1}) \quad (1) \\
 &= \begin{cases} 1 + \Delta \frac{(\Delta-1)^D - 1}{\Delta - 2}, & \Delta > 2 \\ 2D + 1, & \Delta = 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Desna strana nejednadžbe (1) zove se Mooreova granica, u oznaci  $M_{\Delta,D}$ . Ime je dobila prema profesoru Edwardu Forrestu Mooreu (vidi [11]) koji je pedesetih godina prošlog stoljeća postavio problem klasifikacije i karakterizacije grafova koji uz zadani najveći stupanj i dijametar imaju broj vrhova jednak  $M_{\Delta,D}$ . Takvi grafovi imaju poseban naziv: Mooreovi grafovi. Oni su nužno  $\Delta$ -regularni, a njihova posebnost je u tome što su rijetki. Za Mooreove grafove stupnja  $\Delta$  i dijametra  $D$  kažemo da su Mooreovi grafovi tipa  $(\Delta, D)$ .

Mooreove grafove su prvi proučavali A.J. Hoffman i R.R. Singleton 1960. godine. Njihov debitantski članak [8] govori o Mooreovim grafovima dijametra 2 i 3. U slučaju dijametra 2, pokazali su da Mooreov graf postoji jedino za  $\Delta = 2, 3, 7$  i eventualno 57.

<sup>1</sup>Ako je zadan najveći stupanj grafa, onda konstrukcijom BFS stabla dobivamo najveći broj vrhova grafa jer svaku razinu popunjavamo do maksimuma, a tek onda prelazimo na sljedeću razinu.

Za slučajeve  $\Delta = 2, 3$  i  $7$  dokazali su jedinstvenost odgovarajućih Mooreovih grafova. Za  $D = 3$  dokazali su da postoji jedinstven Mooreov graf i taj je  $C_7$  ili 7-ciklus (a znamo da je u tom slučaju  $\Delta = 2$ ). U dokazima svih ovih tvrdnji autori koriste svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice susjedstva grafa (i njenih glavnih podmatrica).

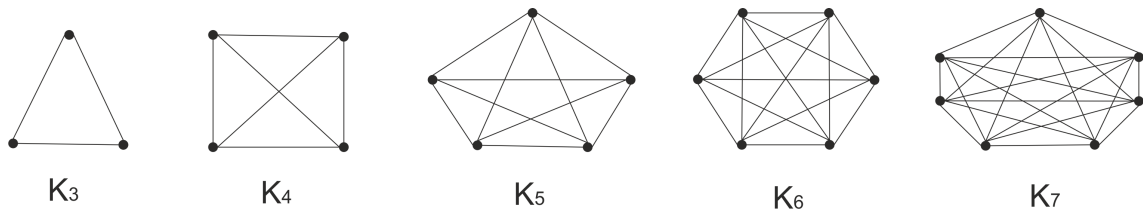
Zanimljivo je da je egzistencija Mooreova grafa tipa  $(57, 2)$  još uvijek otvoren problem u teoriji grafova. Drugim riječima, nitko još nije pronašao primjer takvog grafa iako se zna da je on aritmetički izvediv. Ukoliko bi takav graf postojao, imao bi 3250 vrhova i 92625 bridova, a Higman je u jednom svom predavanju studentima dokazao da taj graf ne može biti tranzitivan po vrhovima. Dokaz se nalazi u [1]. Time je problem egzistencije još zanimljiviji jer su svi ostali Mooreovi grafovi tranzitivni po vrhovima.

U narednom odjeljku ćemo navesti neka svojstva Mooreovih grafova.

### 3.2 Osnovna svojstva

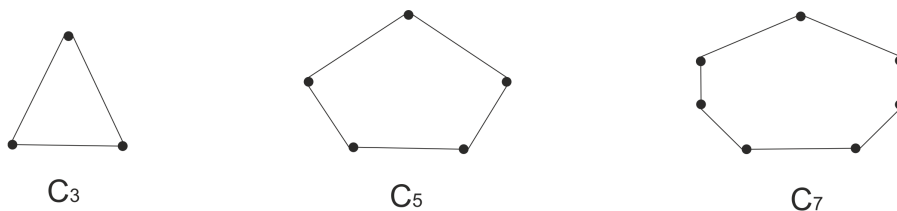
Primijetimo da je trivijalan graf Mooreov graf tipa  $(0, 0)$ .

Jedinstveni Mooreovi grafovi tipa  $(\Delta, 1)$  su potpuni grafovi  $K_{\Delta+1}$ .



Slika 2: Neki potpuni grafovi

Za svaki  $D \in \mathbb{N}$ , ciklus  $C_{2D+1}$  je jedinstven Mooreov graf tipa  $(2, D)$ .



Slika 3: Neki ciklusi

Uzmimo proizvoljan Mooreov graf tipa  $(\Delta, D)$  i izdvojimo jedan njegov vrh kojeg ćemo zvati *korijen*. Za  $i = 0, 1, \dots, D$ , definiramo *razinu*  $i$  kao skup svih vrhova na udaljenosti  $i$  od korijena te definiramo  $n_i$  kao broj vrhova na razini  $i$ . Tako se na nultoj razini nalazi jedinstven vrh: korijen, na prvoj razini se nalaze svi vrhovi na udaljenosti jedan od korijena, na drugoj razini se nalaze svi vrhovi na udaljenosti dva od korijena itd.

Jasno je da vrijedi  $n_0 = 1$  i  $n_i \leq \Delta(\Delta - 1)^{i-1}$  za sve  $1 \leq i \leq D$ . Budući da je Mooreov graf  $\Delta$ -regularan s brojem vrhova  $M_{\Delta, D}$ , bridovi mogu postojati samo između razine

$i$  i  $i + 1$ ,  $i = 0, 1, \dots, D - 1$  ili između vrhova koji se nalaze na razini  $D$ . Sada ćemo iskazati i dokazati važnu rekurziju vezanu za Mooreove grafove.

**Propozicija 3.1.** Za  $\Delta, D \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  definiramo polinome  $F_i(x)$  rekurzivno na sljedeći način:

$$\begin{aligned} F_{i+1}(x) &= xF_i(x) - (\Delta - 1)F_{i-1}(x), \\ F_1(x) &= x + 1 \\ F_0(x) &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Ako je  $A$  matrica susjedstva Mooreovog grafa tipa  $(\Delta, D)$ , onda je  $F_D(A) = J$ , pri čemu je  $J$  kvadratna matrica čiji su svi elementi jednaki 1.

*Dokaz.* Za fiksne  $\Delta$  i  $D$  pretpostavimo da postoji Mooreov graf tipa  $(\Delta, D)$  i označimo ga s  $G = (V, E)$ . Za  $0 \leq m \leq D$  i  $x, y \in V$  pokazati ćemo da vrijedi:

$$[F_m(A)]_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{ako postoji put od } x \text{ do } y \text{ duljine najviše } m \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Drugim riječima, element u matrici  $F_m(A)$  koji se nalazi u retku koji odgovara vrhu  $x$  i u stupcu koji odgovara vrhu  $y$  jednak je 1 ako postoji  $(x, y)$ -put i ako vrijedi  $d(x, y) \leq m$ . U suprotnom je pripadni element matrice jednak nuli.

Ovu tvrdnju ćemo dokazati metodom matematičke indukcije po broju  $m$ . Za  $m = 0$  imamo  $F_0(A) = I$  jer put duljine 0 postoji samo između vrhova koji su identični pa polinom  $F_0$  izjednačen u matrici  $A$  daje jediničnu matricu  $I$ .

Za  $m = 1$  promatramo sve puteve duljine nula ili jedan između vrhova u  $G$ . Jasno je da je u tom slučaju  $F_1(A) = A + I$ .

Pretpostavimo da je  $2 \leq m \leq D$ . Prema definiciji umnoška dviju matrica, imamo

$$[AF_m(A)]_{x,y} = \sum_{z \in V} A_{x,z} [F_m(A)]_{z,y} \tag{3}$$

Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je vrh  $y$  korijen. Neka se vrh  $x$  nalazi na razini  $j$ . Promotrimo sljedeće slučajeve:

1. slučaj:  $0 \leq j < m$

Obzirom da je  $x$  na razini  $j$ , znamo da postoji put od korijena  $y$  do  $x$ , a kako je  $j < m$ , to prema pretpostavci indukcije vrijedi  $[F_{m-1}(A)]_{x,y} = 1$ .

Nadalje, vrijedi  $A_{x,z} [F_m(A)]_{z,y} = 1$  ako i samo ako  $zx \in E$ . Ako su  $x$  i  $z$  susjedni, onda se  $z$  nalazi ili na razini  $j - 1$  (ovo vrijedi samo ako je  $j \geq 1$ ) ili na razini  $j + 1$ . Kako je  $d(x, y) = j < m$ , vrijedi da je  $[F_m(A)]_{z,y} = 1$  pa je  $A_{x,z} [F_m(A)]_{z,y} = 1$ .

Obratno, ako je  $A_{x,z} [F_m(A)]_{z,y} = 1$ , onda su oba faktora različita od nule, odnosno jednaka 1 pa su  $x$  i  $z$  susjedni vrhovi.

Postoji točno  $\Delta$  takvih  $z \in V$  pa je suma u (3) jednaka  $\Delta$ . Koristeći definiciju polinoma  $F_i(x)$  zaključujemo da vrijedi

$$[F_{m+1}(A)]_{x,y} = \Delta - (\Delta - 1) = 1,$$

a to smo i trebali pokazati.

2. slučaj:  $m \leq j \leq m + 1$

Sada je udaljenost između vrhova  $x$  i  $y$  najmanje  $m$  pa mora vrijediti  $[F_{m-1}(A)]_{x,y} = 0$ .

Slično kao u prvom slučaju, vrijedi  $A_{x,z}[F_m(A)]_{z,y} = 1$  ako i samo ako  $zx \in E$  i dodatno vrijedi da je  $z$  na razini  $j - 1$ . Kada bi  $z$  bio na razini  $j + 1$ , onda bi udaljenost između  $z$  i  $y$  bila veća od  $m$  pa bismo imali  $[F_m(A)]_{z,y} = 0$ . No, imamo samo jedan takav  $z \in V$ , pa je suma u (3) jednaka 1. Dakle,

$$[F_{m+1}(A)]_{x,y} = 1,$$

što smo i trebali pokazati.

### 3. slučaj: $j > m + 1$

Vrh  $x$  je udaljen za više od  $m + 1$  od korijena  $y$ . Stoga mora vrijediti  $[F_{m-1}(A)]_{x,y} = 0$ . No, tada je i  $A_{x,z}[F_m(A)]_{z,y} = 0$  za svaki  $z \in V$ , jer ako su  $x$  i  $z$  susjedni, onda je  $z$  na razini koja je najmanje  $m + 1$ . Dobivamo da je

$$[F_{m+1}(A)]_{x,y} = 0.$$

Dokaz indukcijom je završen. Budući da je  $G$  dijametra  $D$ , to između svaka dva vrha postoji put duljine manje ili jednake  $D$  pa vrijedi  $F_D(A) = J$ .

□

## 4 Mooreovi grafovi dijametra 2

Neka je  $G$  Mooreov graf tipa  $(\Delta, 2)$  i neka je  $A$  matrica susjedstva od  $G$ . Tada iz formule (1) slijedi

$$n = M_{\Delta,2} = 1 + \sum_{i=1}^2 \Delta(\Delta - 1)^{i-1} = 1 + \Delta + \Delta(\Delta - 1) = 1 + \Delta^2.$$

U nastavku ćemo opisati spektar matrice susjedstva grafa  $G$ . S  $u$  ćemo označiti vektor čije su sve komponente jednake 1.

**Lema 4.1.** *Matrica susjedstva Mooreova grafa  $G$  ima točno 3 različite svojstvene vrijednosti. Jedna je  $\Delta$ , a ostale dvije su dane jednadžbama*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-1 + \sqrt{4\Delta - 3}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{-1 - \sqrt{4\Delta - 3}}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

*Svojstvena vrijednost  $\Delta$  ima kratnost 1.*

*Dokaz.* Prema Propoziciji 3.1, matrica susjedstva  $A$  zadovoljava jednadžbu:

$$A^2 + A - (\Delta - 1)I = J \tag{5}$$

Primjećujemo da je  $Ju = nu$  i  $Au = \Delta u$ , pa je  $u$  svojstveni vektor matrice  $J$ , ali i matrice  $A$ , a  $\Delta$  je svojstvena vrijednost od  $A$ . Kako je  $G$   $\Delta$ -regularan graf, svojstvena vrijednost  $\Delta$  od  $A$  ima kratnost 1 (dokaz se može pronaći u [3]).

Pretpostavimo da je  $v \neq u$  svojstveni vektor od  $A$  sa svojstvenom vrijednosti  $\lambda$ . Prema Propoziciji 2.1, slijedi  $u^T v = 0$  pa zaključujemo da su je suma svih komponenta vektora  $v$  jednaka nuli. Slijedi  $Jv = 0$ . Množeći (5) s  $v \neq 0$  dobivamo:

$$\begin{aligned} A^2v + Av - (\Delta - 1)v &= Jv \\ A(Av) + Av - (\Delta - 1)v &= 0 \\ \lambda Av + \lambda v - (\Delta - 1)v &= 0 \\ \lambda^2 v + \lambda v - (\Delta - 1)v &= 0 \\ v(\lambda^2 + \lambda - (\Delta - 1)) &= 0 \\ \lambda^2 + \lambda - (\Delta - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Dobivena kvadratna jednadžba ima dva različita realna rješenja dana formulama (4).  $\square$

U nastavku ćemo analizirati brojeve  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , tj. razmotrit ćemo slučaj kada su ti brojevi iracionalni, a onda i slučaj kada su racionalni.

**Lema 4.2.** *Ako su  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  iracionalni brojevi, onda je  $\Delta = 2$ .*

*Dokaz.* Prema Lemi 4.1, zbroj kratnosti svojstvenih vrijednosti  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  matrice susjedstva  $A$  iznosi  $n - 1$ . Neka je  $a$  kratnost svojstvene vrijednosti  $\lambda_1$ , a  $b$  kratnost svojstvene vrijednosti  $\lambda_2$ . Slijedi  $a + b = n - 1 = \Delta^2$ . Znamo da je trag  $tr(A)$  matrice  $A$  jednak sumi njenih

dijagonalnih elemenata pa je u našem slučaju  $tr(A) = 0$ . No, trag matrice  $A$  možemo dobiti i kao sumu njenih svojstvenih vrijednosti, pa koristeći Lemu 4.1 dobivamo:

$$\begin{aligned}
a\lambda_1 + b\lambda_2 + \Delta &= 0 \\
a\left(\frac{\sqrt{4\Delta-3}}{2} - \frac{1}{2}\right) + b\left(\frac{-\sqrt{4\Delta-3}}{2} - \frac{1}{2}\right) + \Delta &= 0 \\
\frac{\sqrt{4\Delta-3}}{2}(a-b) - \frac{1}{2}(a+b) + \Delta &= 0 \\
\frac{\sqrt{4\Delta-3}}{2}(a-b) - \frac{1}{2}\Delta^2 + \Delta &= 0 \\
\frac{\sqrt{4\Delta-3}}{2}(a-b) &= \frac{\Delta^2}{2} - \Delta \\
\sqrt{4\Delta-3}(a-b) &= \Delta^2 - 2\Delta \\
a-b &= \frac{\Delta(\Delta-2)}{\sqrt{4\Delta-3}}.
\end{aligned}$$

Lijeva strana posljednje jednakosti je cijeli broj obzirom da je dobiven kao razlika dvaju prirodnih brojeva. Desna strana te iste jednakosti je kvocijent cijelog i iracionalnog broja (kako su prema pretpostavci  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  iracionalni brojevi, to  $4\Delta - 3$  nije kvadrat niti jednog prirodnog broja). Dakle, posljednja jednakost ima smisla ako i samo ako vrijedi  $a = b$ , odnosno

$$\Delta(\Delta - 2) = 0.$$

Slučaj  $\Delta = 0$  nije moguć jer je dijametar od  $G$  jednak 2. Zaključujemo da vrijedi  $\Delta = 2$ .  $\square$

Sada možemo iskazati i dokazati glavni rezultat ovog odjeljka:

**Teorem 4.1.** *Mooreov graf tipa  $(\Delta, 2)$  postoji samo za  $\Delta = 2, 3, 7$  ili  $57$ .*

*Dokaz.* U Lemi 4.2 smo pokazali egzistenciju Mooreovih grafova za  $\Delta = 2$ . Za ostale slučajeve treba pretpostaviti da su  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  racionalni brojevi, odnosno da vrijedi  $4\Delta - 3 = s^2$ , pri čemu je  $s$  neki prirodan broj. Označimo s  $m$  kratnost svojstvene vrijednosti  $\lambda_1$ . Tada prema Lemi 4.1, kratnost svojstvene vrijednosti  $\lambda_2$  iznosi  $n - 1 - m$ .

Kako je trag matrice  $A$  jednak 0, vrijedi:

$$\Delta + m\left(\frac{s-1}{2}\right) + (n-1-m)\left(\frac{-s-1}{2}\right) = 0$$

Budući da vrijedi  $n = \Delta^2 + 1$  i  $\Delta = \frac{s^2 + 3}{4}$ , nakon uvrštavanja i sređivanja dobivamo:

$$s^5 + s^4 + 6s^3 - 2s^2 + (9 - 32m)s - 15 = 0 \quad (6)$$

Zanimaju nas samo nenegativna cjelobrojna rješenja  $s$  jednadžbe (6). Kako je ovo polinom s cjelobrojnim koeficijentima, to cjelobrojna nultočka  $s$  mora dijeliti slobodni član 15. Dobivamo:

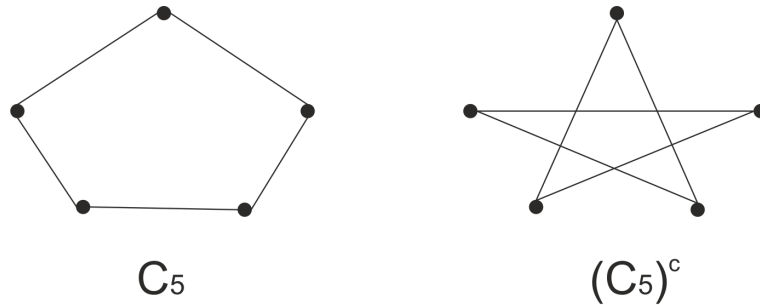
$$\begin{aligned}
s = 1 & \quad m = 0 & \quad \Delta = 1 & \quad n = 2 \\
s = 3 & \quad m = 5 & \quad \Delta = 3 & \quad n = 10 \\
s = 5 & \quad m = 28 & \quad \Delta = 7 & \quad n = 50 \\
s = 15 & \quad m = 1729 & \quad \Delta = 57 & \quad n = 3250.
\end{aligned} \quad (7)$$

Primijetimo da slučaj  $\Delta = 1$  nije moguć jer je dijametar od  $G$  jednak 2 pa nam ostaje samo  $\Delta = 3, 7$  i 57.

□

#### 4.1 Mooreov graf tipa (2,2) ili ciklus s 5 vrhova

Najjednostavniji Mooreov graf dijametra 2 je ciklus  $C_5$ . Graf je specifičan jer je jedini ciklus koji je samokomplementaran, odnosno vrijedi  $C_5 \cong C_5^c$ .



Slika 4: Ciklus  $C_5$  i njegov komplement

Ciklusi su vrlo zanimljivi grafovi, a iako se ubrajaju u najjednostavnije tipove grafova, proučavanje njihove matrice susjedstva nije nimalo jednostavan zadatak. U nastavku ćemo iskazati i dokazati teorem koji u potpunosti karakterizira spektar matrice susjedstva ciklusa  $C_n$ .

**Teorem 4.2.** *Spektar matrice susjedstva  $A$  ciklusa  $C_n$  je skup*

$$\sigma(A) = \left\{ 2 \cos \left( \frac{2\pi l}{n} \right) : l = 1, \dots, n \right\}.$$

*Dokaz.* Neka je  $W$  kvadratna matrica reda  $n$  čiji je prvi red jednak  $(0, 1, 0, \dots, 0)$ . Svaki sljedeći red dobiven je od prethodnog tako da se svaki element pomakne za jedno mjesto udesno, a posljednji element dolazi na prvo mjesto. Tako je drugi red  $(0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ,... predzadnji red je  $(0, 0, \dots, 0, 1)$ , a zadnji red je  $(1, 0, \dots, 0)$ . Drugim riječima,  $W$  ima jedinice samo iznad glavne dijagonale i u donjem lijevom kutu. Za proizvoljan cijeli broj  $k$ , matrica  $W^k$  je permutacijska matrica koja u prvom redu na poziciji  $k + 1$  ima jedinicu, svi ostali elementi su nule, a svaki sljedeći redak nastao je od prethodnog pomicanjem svakog elementa udesno za jednu poziciju. Ovo je smisljeno za proizvoljan  $k$  obzirom da za  $k > n$  uzimamo brojeve modulo  $k$  umjesto  $k$ . Za matricu susjedstva ciklusa vrijedi:

$$A(C_n) = W + W^{-1}.$$

Pomoću svojstvenih vrijednosti matrice  $W$  ćemo odrediti svojstvene vrijednosti matrice  $A(C_n)$ . Matrica  $W$  djeluje na proizvoljan vektor tako da mu elemente pomjeri za jedno mjesto gore, a prvi element stavi na zadnje mjesto. Dakle, ako je  $v = (v_1, \dots, v_n)^T$  svojstveni vektor od  $W$  kojemu odgovara svojstvena vrijednost  $\lambda$ , onda vrijedi:

$$v_1 = \lambda v_n = \lambda^2 v_{n-1} = \dots = \lambda^n v_1.$$



Dobivamo  $\lambda^n = 1$ . Ova jednadžba ima  $n$  međusobno različitih kompleksnih korijena. Prema *de Moivreovoj* formuli za korjenovanje kompleksnih brojeva, korijene broja 1 možemo zapisati kao  $\omega^l$  pri čemu je  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ,  $l = 0, 1, \dots, n-1$ . Zaista, svaka od svojstvenih vrijednosti  $\lambda_l = \omega^l$  ima kratnost 1, jer ako izaberemo  $v_1 = 1$ , prethodna jednakost nam daje vektor:

$$u_l = (1, \omega^l, \omega^{2l}, \dots, \omega^{(n-1)l})^\tau.$$

Slijedi da je spektar matrice  $W^k$  za proizvoljan  $k$  jednak:

$$\sigma(W^k) = \{1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{(n-1)k}\}.$$

Budući da je svojstveni vektor za  $\lambda_k$  matrice  $W^k$  neovisan o izboru  $k$ , lako možemo dobiti svojstvene vrijednosti od  $C_n$ :

$$A(C_n)u_l = Wu_l + W^{-1}u_l = (\omega^l + \omega^{-l})u_l.$$

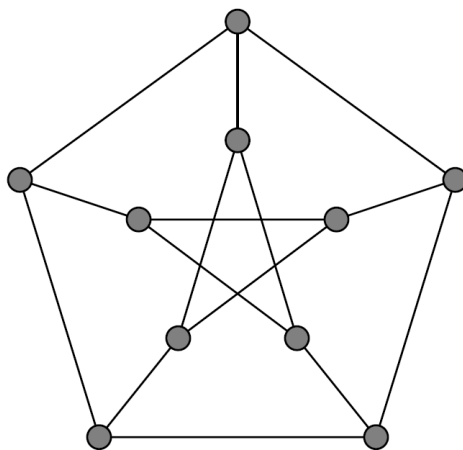
Slijedi:

$$\omega^l + \omega^{-l} = 2 \cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right), \quad l = 0, 1, \dots, n-1.$$

□

## 4.2 Mooreov graf tipa (3,2) ili Petersenov graf

Mooreov graf tipa (3,2) mnogo je popularniji pod nazivom *Petersenov graf*. Graf je izuzetno zanimljiv i teško ga je zaobići obzirom da se vrlo često pojavljuje kao protuprimjer mnogim tvrdnjama. U nastavku ćemo se baviti nekim istaknutim svojstvima Petersenova grafa.



Slika 5: Petersenov graf

Petersenov graf je jednostavan 3-regularan graf s 10 vrhova i 15 bridova. Nazvan je po Juliusu Petersenu koji je 1898. godine otkrio da je taj graf najmanji 3-regularan graf bez mostova koji nije 3-bridno obojiv. Julius Petersen je dao značajan doprinos teoriji grafova dokazavši teorem koji danas nosi njegovo ime: Petersenov teorem. On glasi:

*"Povezan 3-regularan graf sadrži 1-faktor".*

Petersenov graf je protuprimjer Taitovoj tvrdnji da je svaki 3-regularan graf 1-faktorabilan. To znači da je Tait pogriješio kada je zaključio da se skup bridova 3-regularnog grafa može rastaviti na međusobno disjunktne podskupove pri čemu je svaki takav podskup savršeno sparivanje.

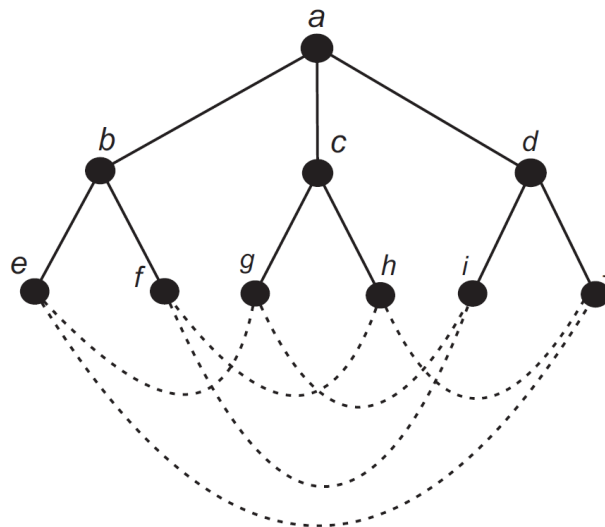
Sada ćemo navesti nekoliko jednostavnih svojstava Petersenova grafa. Dokazi su elementarni pa ih nećemo navoditi. Petersenov graf  $P$  je:

- 3-povezan i 3-bridno povezan
- radijusa 2 i dijametra 2
- struka 5
- kromatskog broja 3 i bridno kromatskog broja 4
- simetričan
- graf koji sadrži savršeno sparivanje (vidi [10], str. 2)

Jasno je da je Petersenov graf najveći 3-regularan graf dijametra 2, jer prema formuli (1) takav graf ne može imati više od 10 vrhova, a upravo toliko ih ima Petersenov graf. Preostaje dokazati jedinstvenost Petersenova grafa.

**Propozicija 4.1.** *Mooreov graf tipa (3, 2) (Petersenov graf) je jedinstven.*

*Dokaz.* Prvo konstruiramo BFS stablo s 10 vrhova kao na Slici 6. Bridovi stabla nacrtani su punom crtom. Svi vrhovi osim listova imaju stupanj 3. Potrebno je dodati još 6 bridova između listova  $e, f, g, h, i$  i  $j$ , pazeći pri tom da rezultirajući graf bude 3-regularan i da mu je dijametar jednak 2. To je moguće učiniti na jedinstven način. Na Slici 6 je novih 6 bridova nacrtano isprekidanom crtom. Dobiveni graf je Petersenov graf (pogledati [10], str. 3).



Slika 6: Konstrukcija Petersenova grafa ([10], str. 4)

□

### 4.2.1 Petersenov graf je najmanja (3,5)-rešetka

U nastavku rada bavit ćemo se određivanjem najmanjeg mogućeg broja vrhova grafa kojemu poznajemo najmanji stupanj i struk. Također ćemo uspostaviti vezu tog problema s problemom određivanja najvećeg mogućeg broja vrhova grafa kojemu je poznat najveći stupanj i dijametar.

Pretpostavimo da postoji povezan graf koji nije stablo i neka mu je najmanji stupanj jednak  $\delta \geq 2$ , a struk  $g \geq 3$ . Za slučaj  $g = 2k + 1$  krećemo prvo s konstrukcijom BFS stabla. Na razini 0 nalazi se korijen  $v$ . Na razini 1 imamo najmanje  $\delta$  vrhova, na razini 2 najmanje  $\delta(\delta - 1)$  vrhova, ..., na razini  $k$  se nalazi najmanje  $\delta(\delta - 1)^{k-1}$  vrhova. Za  $1 \leq i \leq k - 1$  ne postoje bridovi među vrhovima razine  $i$  jer bi tada imali cikluse duljine manje od  $g$ . Slično zaključujemo da ne postoje niti bridovi između vrhova koji se nalaze na različitim razinama. Jedino je moguće dodavati bridove između onih vrhova koji se nalaze na  $(k - 1)$ -oj razini ([10], str.4). Imamo:

$$n \geq 1 + \sum_{i=0}^k \delta(\delta - 1)^{i-1} = \begin{cases} 1 + \delta \frac{(\delta-1)^k - 1}{\delta-2}, & \delta > 2 \\ 2k + 1, & \delta = 2. \end{cases} \quad (8)$$

U slučaju parnog struka,  $g = 2k$ , konstruiramo BFS stablo slično kao u prethodnom slučaju, ali uz pretpostavku da korijen čine dva vrha spojena bridom. Dobivamo:

$$n \geq 2 \sum_{i=0}^{k-1} (\delta - 1)^i = \begin{cases} 2 \frac{(\delta-1)^k - 1}{\delta-2}, & \delta > 2 \\ 2k, & \delta = 2. \end{cases}$$

Regularan graf koji ima najmanji mogući broj vrhova, stupnja  $\delta = \Delta$  i struka  $g$  zove se  $(\Delta, g)$ -rešetka. Godine 1963. P. Erdős i H. Sachs [5] dokazali su egzistenciju  $(\Delta, g)$ -rešetki za sve  $\Delta \geq 2$  i  $g \geq 3$ . Zanimljivo je da su ovakvi grafovi vrlo rijetki. Do sada je pronađeno njih 38 i to za  $\Delta \leq 14$  i  $g \leq 12$  ([10], str 5.).

Usporedimo li desne strane nejednadžbi (1) i (8), vidimo da je svaka  $(\Delta, g)$ -rešetka ujedno i Mooreov graf ukoliko vrijedi  $g = 2D + 1$ . Možemo primijetiti da Mooreova granica  $M_{\Delta, D}$  ne daje samo najveći mogući broj vrhova grafa s maksimalnim stupnjem  $\Delta$  i dijametrom  $D$ , već daje i najmanji mogući broj vrhova u regularnom grafu stupnja  $\Delta$  i struka  $2D + 1$ . Štoviše, vrijedi sljedeća tvrdnja koju vrijedi navesti u ovome radu, ali bez dokaza:

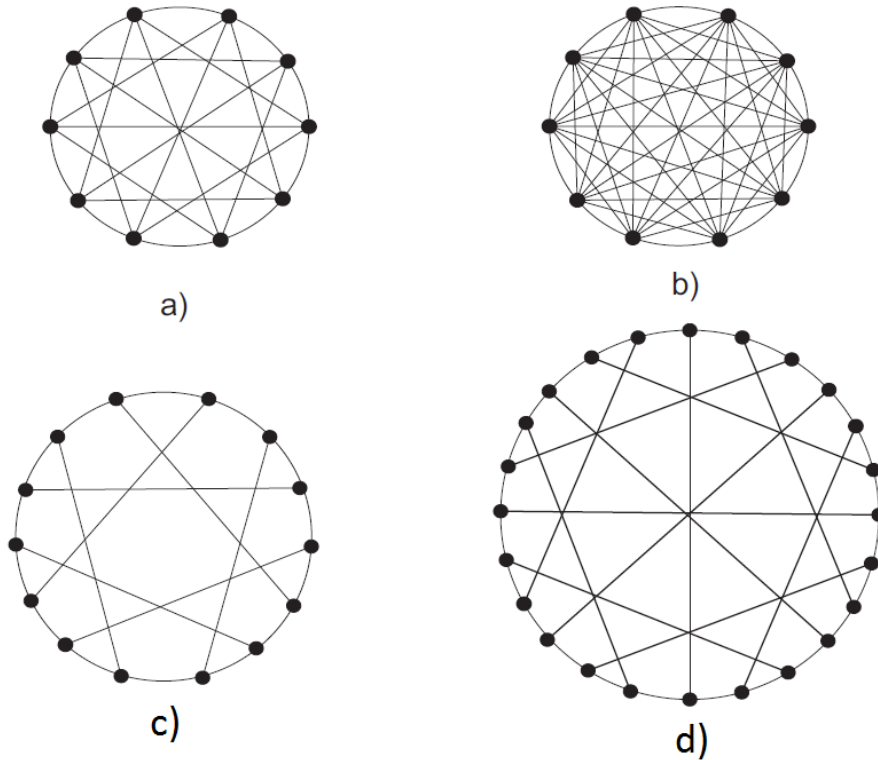
**Propozicija 4.2.** *Svaki graf dijametra  $D$  i struka  $2D + 1$  je regularan.*

Za dokaz pogledati [14].

Dakle, Petersenov graf pripada još jednoj zanimljivoj klasi grafova:  $(\Delta, g)$ -rešetkama. Štoviše, Petersenov graf je jedina (3, 5)-rešetka, tj. on je jedini najmanji 3-regularan graf struka 5. Minimalnost slijedi iz formule (8), dok se jedinstvenost dokazuje konstrukcijom na način da se izgradi BFS stablo s 10 vrhova kao na slici 6, a zatim se spoje listovi tog stabla tako da se pazi na uvjete o stupnju i struku ([10], str.6.).

### 4.2.2 Petersenov graf je najmanji snark

Najprije ćemo reći nešto o podrijetlu pojma "snark". Naime, pojam snark je usko vezan za bojanje bridova grafa. Po teoremu o četiri boje, znamo da ne postoji planaran 3-regularan graf bez mostova čije bridove ne možemo obojati s tri boje. Ali izuzetno je teško pronaći primjere neplanarnih grafova takve vrste. M. Gardner [6] je takvim grafovima nadjenio ime



Slika 7: a) Potpun bipartitan graf  $K_{5,5}$  kao (5, 4)-rešetka, b) potpun graf  $K_{10}$  kao (9, 3)-rešetka, c) Haewoodov graf ili (3, 6)-rešetka i d) McGeeov graf ili (3, 7)-rešetka ([10], str. 9)

*snarks*, prema poznatoj baladi Lewisa Carolla<sup>2</sup>: "The Hunting of the Snark". U toj baladi snark je ime zamišljene, a teško uhvatljive životinje koju ni sam autor ne zna opisati. U teoriji grafova snark definiramo na sljedeći način:

**Definicija 4.1.** *Snark je netrivijalan 3-regularan graf koji nije 3-bridno obojiv.*

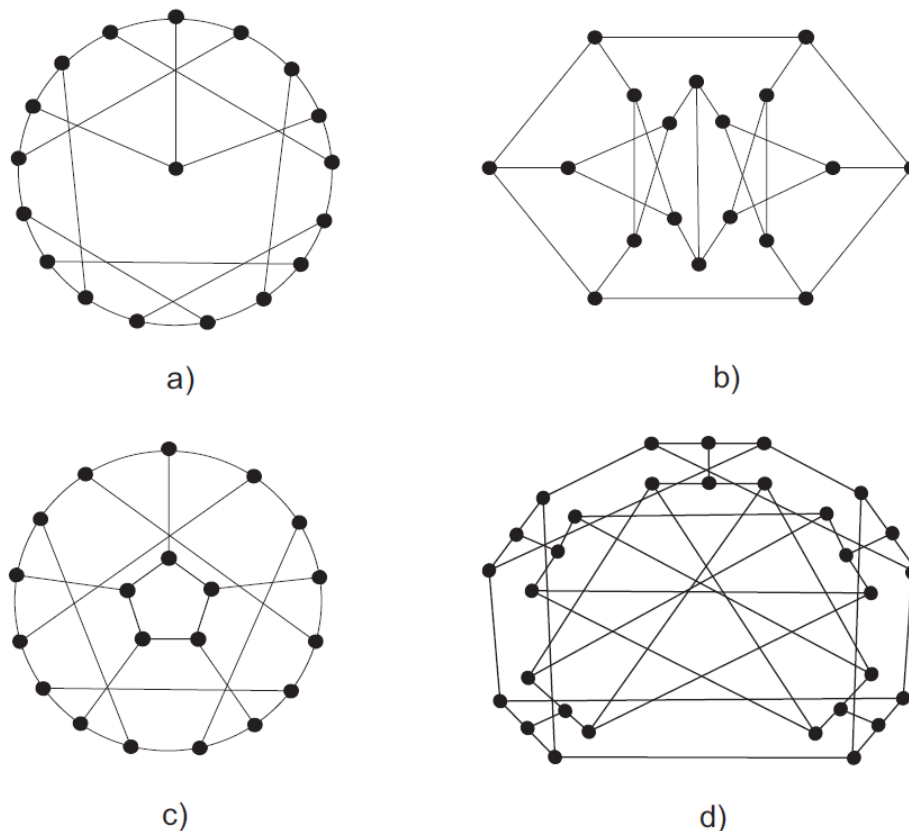
Prema Vizingovom teoremu snark možemo definirati i kao netrivijalan 3-regularan graf s bridno kromatskim brojem 4. Treba još pojasniti pojam "netrivijalan" iz definicije snark grafa. Objašnjenje koje ćemo ponuditi preuzeto je iz [12], a mi ćemo ga navesti bez previše detalja.

"Netrivijalan" prvenstveno znači da graf nema mostova. Također, to znači i da je struk grafa najmanje 5 jer ako bi uzeli u obzir snarkove koji sadrže cikluse s 2 ili 3 vrha, onda se dodavanjem ili uklanjanjem takvih ciklusa iz grafa ništa ne mijenja glede bridne obojivosti, tj. graf i dalje neće biti 3-bridno obojiv. Snark graf nema ni 4-cikluse jer se takvi grafovi mogu reducirati na manje snark grafove, i to na način da se ciklus  $C_4$  prigodno zamijeni s dva brida.

Sada ćemo reći nešto o postupku otkrivanja snark grafova kroz povijest. Prvi snark je otkriven 1898. godine i to je upravo Petersenov graf. Zatim je hrvatski matematičar Danilo Blanuša 1946. godine pronašao dva nova snarka. Njegovi snarkovi imaju 18 vrhova, a danas su poznati pod nazivom *Blanušini snarkovi* (Slika 8 pod a) i b)). Bill Tutte je otkrio

<sup>2</sup>Lewis Carroll je pseudonim engleskog književnika Charlesa Lutwidgea Dodgsona, popularnog zbog svojeg remek-djela: *Alisa u zemlji čudesa*, knjige dječje fantastike iz 1865. godine.

četvrtog snarka poznatog pod nazivom *Descartesov snark*, a on ima 210 vrhova. 1973. godine je otkriven *Szekeresov snark* koji ima 50 vrhova. Sljedeći veliki korak u pronalasku snark grafova napravio je Rufus Isaacs 1975. godine. Uspio je konstruirati dvije beskonačne familije snarkova. Jedna se zove *Cvjetni snarkovi* (Slika 8 pod c)), a druga *BDS snarkovi* i uključuje sve ranije otkrivene snarkove osim Petersenova grafa. Isaacs je uspio pronaći još jedan snark koji ne pripada niti jednoj od navedenih familija. Taj snark se zove *Dvostruka zvijezda* (Slika 8 pod d)) i ima 30 vrhova ([10], str. 5-6).



Slika 8: a) Prvi Blanušin snark, b) Drugi Blanušin snark, c) Cvjetni snark i d) Dvostruka zvijezda snark ([10], str. 6)

Uz *Drugi Blanušin snark* je vezana jedna velika zanimljivost. Naime, taj graf se nalazi u logotipu Hrvatskog matematičkog društva (HMD), ali s malo drugačijim ravninskim smještanjem. Osim toga, HMD je predložio Hrvatskoj pošti da obilježi Svjetsku matematičku godinu 2000. (World Mathematical Year 2000) izdavanjem prigodne marke. Hrvatska pošta je taj prijedlog prihvatila, izdala marku i promovirala ju 15. lipnja 2000. godine na dan početka Drugog hrvatskog matematičkog kongresa.

Sljedeća propozicija je kruna ovog pododjeljka:

**Propozicija 4.3.** *Petersenov graf je najmanji snark s 10 vrhova i on je jedinstven.*

*Dokaz.* Neka je  $G$  snark graf i neka je  $X$  proizvoljan bridni rez u  $G$ . To znači da se  $G - X$  sastoji od dvije komponente povezanosti, a svaka komponenta sadrži ciklus s najmanje 5 vrhova, jer je struk snarka najmanje 5. Slijedi  $|V(G)| \geq 10$ . Budući da je Petersenov graf snark s 10 vrhova, zaključujemo da je on ujedno i najmanji snark. Treba još dokazati jedinstvenost, tj. ako postoji neki drugi snark s 10 vrhova, on mora biti izomorfan Petersenovom

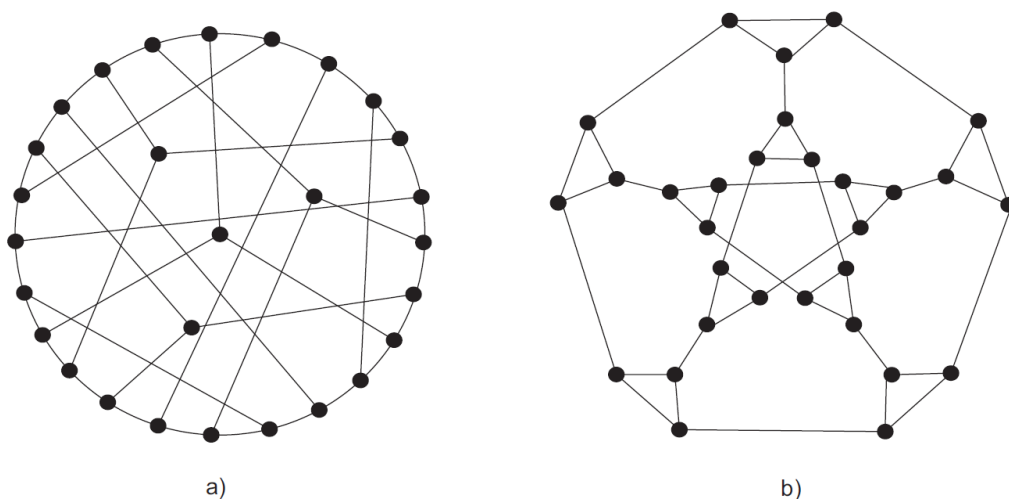
grafu. Neka je  $G$  snark s 10 vrhova te neka je  $Y$  ciklički bridni rez u  $G$ . Onda svaka komponenta u  $G - Y$  ima 5 vrhova, zbog pretpostavke o struku grafa  $G$ . Ako bi  $|Y| = 4$ , tada bi u svakoj komponenti povezanosti postojalo 4 vrha stupnja 2 i jedan vrh stupnja 3, što je nemoguće jer je u svakom grafu broj vrhova neparanog stupnja paran broj. Slučaj  $|Y| > 5$  nije moguć jer bi tada ostalo najviše 9 bridova za dvije komponente u  $G - Y$ , a znamo da svaka komponenta mora imati najmanje 5 bridova zbog pretpostavke o struku grafa  $G$ . Slijedi  $|Y| = 5$ . neka je  $Y = \{u_i v_i : 1 \leq i \leq 5\}$ . Dakle,  $G - Y$  se sastoji od dva 5-ciklusa. Pretpostavimo da jedan od tih ciklusa ima skup vrhova  $T = \{u_i : 1 \leq i \leq 5\}$ . Neka je  $v_i$  treći susjed od  $u_i$  koji ne pripada skupu  $T$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Kada bi vrijedilo  $v_1 v_2 \in E(G)$  ili  $v_1 v_5 \in E(G)$ , tada bi  $G$  sadržavao ciklus s 4 vrha, što je nemoguće. Zbog 3-regularnosti grafa  $G$  zaključujemo da mora vrijediti  $v_1 v_3 \in E(G)$  i  $v_1 v_4 \in E(G)$ . Slično zaključujemo da je  $v_2 v_4 \in E(G)$ ,  $v_2 v_5 \in E(G)$  i  $v_3 v_5 \in E(G)$ . Slijedi da je graf  $G$  izomorfan Petersenovom grafu i time smo dokazali jedinstvenost ([10], str. 6-7).  $\square$

### 4.2.3 Petersenov graf je najmanji 3-regularan graf bez mostova koji ne sadrži Hamiltonov ciklus

Prvo ćemo reći nešto o problemu egzistencije Hamiltonova puta i Hamiltonova ciklusa. Godine 1969. Lovasz predstavlja slutnju [9] koja povezuje simetrije u grafovima s Hamiltonovim ciklusima i Hamiltonovim putevima. Slutnja glasi:

*”Svaki povezan graf koji je tranzitivan po vrhovima sadrži Hamiltonov put.”*

Zanimljivo je da do danas nije otkriven niti jedan graf koji je tranzitivan po vrhovima, a da nema Hamiltonov put. Gornja slutnja se pokazala istinitom za razne klase grafova, ali dokaza još uvijek nema. Gotovo svi grafovi koji potvrđuju ovu slutnju zaista jesu Hamiltonovi. Međutim, postoje izuzeci. Do danas ih je poznato samo četiri, tj. četiri povezana, po vrhovima tranzitivna grafa s najmanje 3 vrha koji nemaju Hamiltonov ciklus. Radi se o Petersenovom grafu, Coxeterovom grafu i o još dva grafa dobivena od njih zamjenom svakog vrha s 3-ciklusom (Slika 9). Također, ovoj skupini grafova pripada i potpun graf  $K_2$ , ali se on zbog svoje jednostavnosti često niti ne navodi ([10], str.7).



Slika 9: a) Coxeterov graf i b) graf nastao od Petersenovog zamjenom vrhova s 3-ciklusima ([10], str. 8)

Stoga, imamo alternativnu i prilično nespretnu verziju Lovaszove slutnje:

*”Svaki povezan, po vrhovima tranzitivan graf s najmanje 3 vrha sadrži Hamiltonov ciklus osim četiri poznata protuprimjera.”*

Slijedi iskaz i dokaz tvrdnje da je Petersenov graf najmanji 3-regularan graf bez mostova koji ne sadrži Hamiltonov ciklus. Dokaz ćemo kompletirati kroz dokazivanje dvije propozicije.

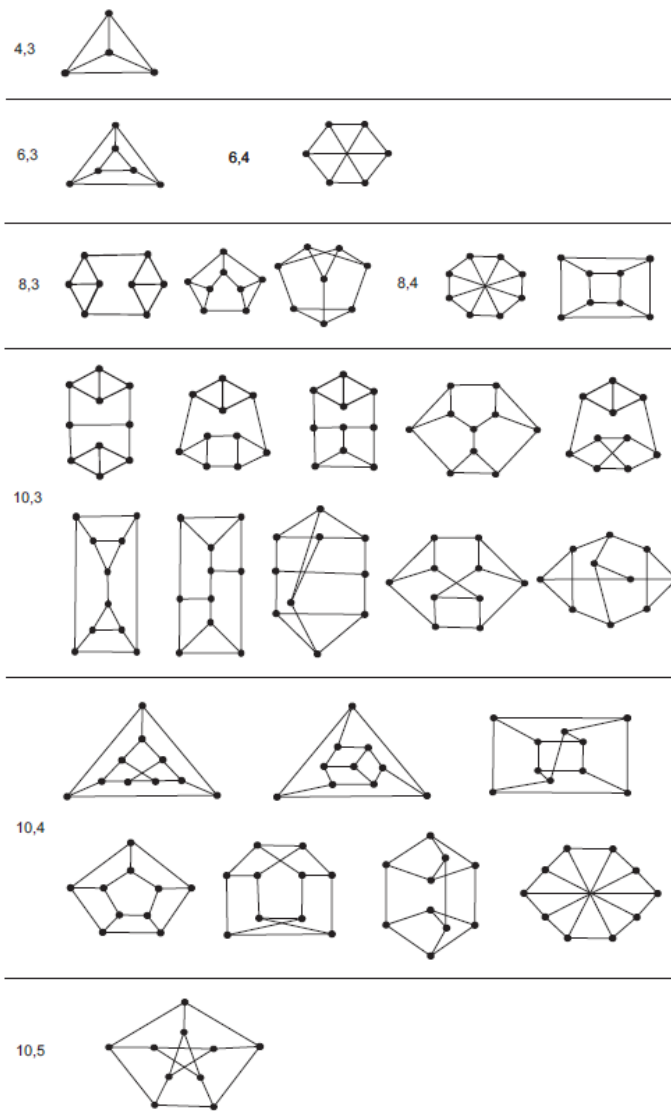
**Propozicija 4.4.** *Petersenov graf nije Hamiltonov.*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, tj. neka je  $C$  Hamiltonov ciklus u Petersenovom grafu  $P$ . Tada se  $P$  sastoji od ciklusa  $C_{10}$  i još 5 dodatnih bridova. Kada bi svaki od tih 5 bridova spajao dijametralno suprotne vrhove u  $C$ , tada bi  $P$  sadržavao 4-ciklus što nije moguće zbog činjenice da je struk Petersenova grafa jednak 5. Dakle, postoji najmanje jedan brid koji spaja vrhove na udaljenosti 4 u  $C$ . Ne može spajati vrhove na manjoj udaljenosti jer bismo u tom slučaju dobili cikluse s 3 ili 4 vrha. Označimo s  $e$  jedan takav brid, a njegove krajeve s  $u$  i  $v$ :  $e = uv$ . Odaberimo vrh  $w$  dijametralno suprotan jednom od vrhova  $u$  i  $v$ . Tada svaki brid s jednim krajem u  $w$  tvori ciklus s najviše 4 vrha. Dakle, nemoguće je dodati 5 novih bridova u  $C$  tako da dobiveni graf ima struk veći od 4. Time smo dokazali da  $P$  ne može imati Hamiltonov ciklus, odnosno da nije Hamiltonov ([10], str.8.).  $\square$

**Propozicija 4.5.** *Petersenov graf je jedinstven najmanji 3-regularan graf bez mostova koji nije Hamiltonov.*

*Dokaz.* Ako je graf 3-regularan, onda zbog uvjeta da je suma stupnjeva u grafu jednaka dvostrukom broju bridova, takav graf mora imati paran broj vrhova. Stoga u obzir dolaze jedino grafovi s  $n = 4, 6, 8$  i  $10$  vrhova. Za  $n = 4$  postoji jedinstven 3-regularan graf i to je graf  $K_4$ , a za njega je odmah jasno da je Hamiltonov. Za  $n = 6$  imamo dva neizomorfna 3-regularna grafa, jedan struka 3 i on je graf  $\Pi_3$  trostrane prizme, a drugi struka 4 i taj je potpun bipartitan graf  $K_{3,3}$ . Oba grafa su Hamiltonovi. Za  $n = 8$  imamo 5 grafova koji zadovoljavaju naše pretpostavke, tri grafa imaju struk 3, a ostala dva imaju struk 4 (slika 10). Svi su ti grafovi Hamiltonovi. Za  $n = 10$  imamo ukupno 18 grafova koji su 3-regularni i nemaju mostova. Među njima imamo 12 grafova struka 3, 5 grafova struka 4, a jedini graf struka 5 je Petersenov graf. Sa slike 10 možemo uočiti da su svi ti grafovi Hamiltonovi osim Petersenova grafa ([10], str.8.).  $\square$

S prethodnim dokazom smo pokazali još nešto, a to je da je Petersenov graf jedan od rijetkih protuprimjera tvrdnje da je svaki povezan, po vrhovima tranzitivan graf ujedno i Hamiltonov.



Slika 10: 3-regularni grafovi bez mostova s 4,6,8 i 10 vrhova ([10], str. 9)



#### 4.2.4 Petersenov graf je najmanji hipohamiltonov graf

Hipohamiltonovi grafovi nisu rijetki. Štoviše, otkriveni su svi hipohamiltonovi grafovi s najviše 17 vrhova, a dokazano je da oni postoje i za svaki  $n \geq 18$ , gdje je  $n$  broj vrhova. Prvo ćemo iskazati i dokazati neka osnovna svojstva hipohamiltonovih grafova.

**Propozicija 4.6.** *Hipohamiltonov graf  $G$  ima sljedeća svojstva:*

- a) 3-povezan je,
- b)  $\delta(G) \geq 3$ ,
- c)  $\Delta(G) \leq \frac{n-1}{2}$ ,
- d) ako  $G$  sadrži vrh  $v$  stupnja 3, tada  $v$  nije vrh niti jednog 3-ciklusa.

*Dokaz.* a) Ako iz  $G$  uklonimo jedan vrh, dobijemo Hamiltonov graf, a on je povezan. Ako uklonimo dva vrha iz  $G$ , dobit ćemo Hamiltonov put, što je opet povezan graf. Stoga je potrebno ukloniti najmanje 3 vrha da bismo dobili nepovezan graf.

b) Kada bi u  $G$  postojao vrh stupnja 1, tada bismo uklanjanjem njegovog susjeda dobili graf s izoliranim vrhom (a to bi onda bilo u kontradikciji s tvrdnjom a)). Ako bi  $G$  sadržavao vrh  $v$  stupnja 2, onda bi uklanjanjem jednog njegovog susjeda dobili graf koji ne bi bio Hamiltonov, jer bi u tom grafu vrh  $v$  bio stupnja 1 (to bi bilo u kontradikciji s pretpostavkom da je  $G$  hipohamiltonov graf).

c) Neka je  $v$  vrh maksimalnog stupnja  $\Delta(G)$ . Tada  $v$  ne može biti susjed s 2 međusobno susjedna vrha Hamiltonova ciklusa  $C$  iz  $G - v$  jer bi u suprotnom  $G$  bio Hamiltonov graf. Stoga  $v$  može biti susjed najviše svakom drugom vrhu na  $C$  pa vrijedi nejednakost  $\Delta(G) \leq \frac{n-1}{2}$ .

d) Ukoliko bismo pretpostavili suprotno, onda bi se lako pokazalo da je  $G$  Hamiltonov, što ne može biti ([10], str.9).  $\square$

Prije nego iskažemo i dokažemo glavni rezultat u ovom pododjeljku, navesti ćemo korisnu tvrdnju o Hamiltonovim grafovima.

**Teorem 4.3.** *(Diracov teorem)*

*Ako u grafu  $G$  s  $n \geq 3$  vrhova vrijedi  $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ , tada je  $G$  Hamiltonov.*

Za dokaz pogledati [4].

**Propozicija 4.7.** *Petersenov graf je najmanji hipohamiltonov graf.*

*Dokaz.* Dokazati da je Petersenov graf  $P$  hipohamiltonov nije teško jer se radi o grafu koji je tranzitivan po vrhovima. Dovoljno je ukloniti proizvoljan vrh iz  $P$  i odmah naći Hamiltonov ciklus u tako dobivenom grafu. Za dokaz minimalnosti ćemo se ipak morati više potruditi, tj. morati ćemo pokazati da niti jedan graf s manje od 10 vrhova nije hipohamiltonov. U tome će nam pomoći svojstva hipohamiltonovih grafova iz propozicije 4.6 i Diracov teorem. Zbog svojstva b) iz Propozicije 4.6 i Diracova teorema, ne uzimamo u obzir grafove s manje od 7 vrhova. Pretpostavimo stoga da postoji hipohamiltonov graf  $G$  s točno 7 vrhova. U tom slučaju svi vrhovi moraju biti stupnja 3, a to je nemoguće jer imamo graf s neparnim brojem vrhova.

Slično zaključujemo da ako imamo hipohamiltonov graf s 8 vrhova, onda on mora biti 3-regularan. Fiksirajmo neki vrh  $v \in V(G)$ . Neka je  $C$  Hamiltonov ciklus u  $G - v$ . Budući da  $v$  ima tri susjeda u  $C$ , to prema svojstvu d) iz Propozicije 4.6 niti jedan par tih susjeda nije spojen bridom. Jedinu moguću raspored susjeda od  $v$  prikazan je na Slici 11a. Na toj slici vrh  $v$  je susjed s vrhovima 2,4 i 7. Još moramo međusobno spojiti vrhove 1,3,5 i 6 s još dva

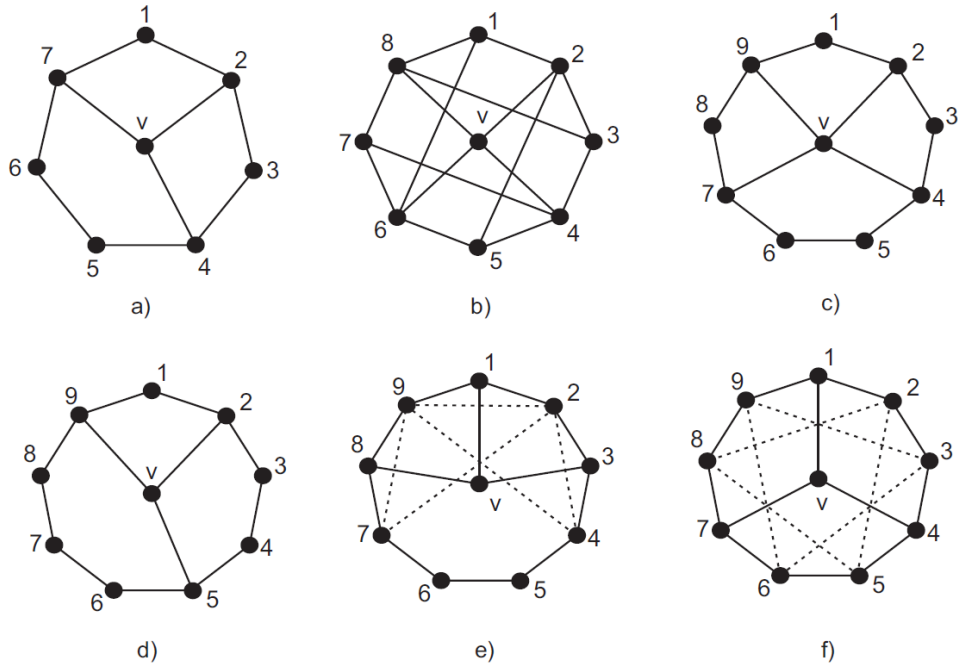
brida, jer je  $|E(G)| = 12$ . No, svaki mogući raspored bridova među njima daje Hamiltonov ciklus u  $G$ . Dakle, ne postoji hipohamiltonov graf s 8 vrhova.

Ukoliko je  $|V(G)| = 9$ , onda je  $3 \leq d(u) \leq 4 \forall u \in V(G)$  i mora postojati jedan vrh, označimo ga s  $v$ , koji je stupnja 4. Samo je jedan mogući raspored vrhova koji su susjedi od  $v$  u Hamiltonovom ciklusu  $G - v$ , a o tome svjedoči Slika 11b. Svaki od vrhova 1,3,5,6 i 8 mora biti incidentan s još najmanje jednim bridom. Ukoliko bi postojao brid između tih vrhova, tada bi  $G$  bio Hamiltonov. Dakle, svaki takav vrh mora biti susjed nekom susjedu od  $v$ . Jedini mogući raspored bridova među tim vrhovima je prikazan na Slici 11b. Dobiveni graf ima najveći mogući broj bridova, ali nije hipohamiltonov jer graf koji dobivamo uklanjanjem nekog od vrhova 2,4,6 i 8 ne sadrži Hamiltonov ciklus.

Za slučaj  $|V(G)| = 10$  imamo  $3 \leq d(u) \leq 4 \forall u \in V(G)$ . Neka postoji vrh  $v$  stupnja 4 u  $G$ . Na Slici 11c je prikazan jedini mogući raspored susjeda vrha  $v$  u Hamiltonovom ciklusu  $G - v$ . Ukoliko bi postojao brid među vrhovima iz skupa  $S = \{1, 3, 5, 6, 8\}$ , tada bi  $G$  bio Hamiltonov graf. Dakle, svaki vrh iz  $C$  mora biti povezan bridom s nekim vrhom iz skupa  $T = \{2, 4, 7, 9\}$ . Prema Dirichletovom principu zaključujemo da postoji vrh iz skupa  $T$  koji će imati susjeda u  $S$ . No, to je nemoguće jer vrhovi iz skupa  $T$  ne mogu imati stupanj veći od 4. Dakle, ne postoji vrh stupnja 4 u  $G$ .

Pretpostavimo da su svi vrhovi u  $G$  stupnja 3. Odaberimo proizvoljan vrh  $v$  u  $G$ . Svi mogući rasporedi vrhova-susjeda od  $v$  na Hamiltonovom ciklusu u  $G - v$  prikazani su na Slici 11 pod d), e) i f). Pogledajmo Sliku 11d. Vrh 1 može biti susjed jedino sa 7, jer svi ostali slučajevi daju Hamiltonov ciklus u  $G$ . No tada je vrh 3 susjed s 8, jer brid 3 - 6 daje Hamiltonov ciklus. Dakle, nužno je vrh 4 susjed sa 6, ali i tako dobiveni graf je Hamiltonov. Na Slici 11e isprekidanom crtom su označeni zabranjeni bridovi. Ako imamo bridove 2 - 5 i 6 - 9, tada nužno imamo i brid 4 - 7, ali dobiveni graf nije hipohamiltonov, jer npr. uklanjanjem vrha 4 ne dobivamo Hamiltonov graf. Ukoliko imamo bridove 2 - 6 i 5 - 9, onda opet nužno imamo i brid 4 - 7, ali tada  $G$  nije Hamiltonov graf.

Promotrimo Sliku 11f. Kada bi postojao brid 2 - 9, onda bi imali i bridove 3 - 5 i 6 - 8, ali takav graf nije Hamiltonov. Stoga su jedini dozvoljeni bridovi 2 - 6, 5 - 9 i 3 - 8, a to je upravo Petersenov graf ([10], str.10-11).



Slika 11: Sličice koje pomažu u dokazivanju minimalnosti grafa  $P$  ([10], str. 11)

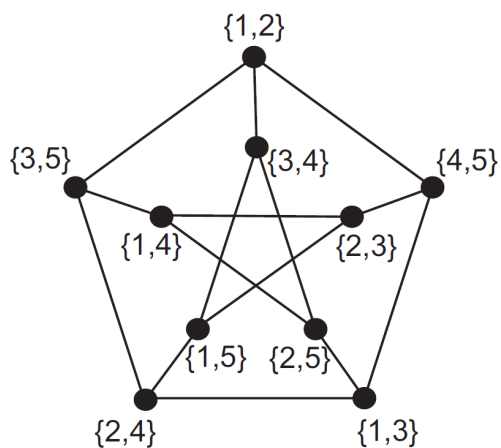
□

#### 4.2.5 Još neka svojstva Petersenovog grafa

Navesti ćemo još neka zanimljiva svojstva Petersenova grafa za čije će dokaze biti dovoljna po jedna sličica.

**Propozicija 4.8.** *Petersenov graf je Kneserov graf  $K(5, 2)$ .*

*Dokaz.*

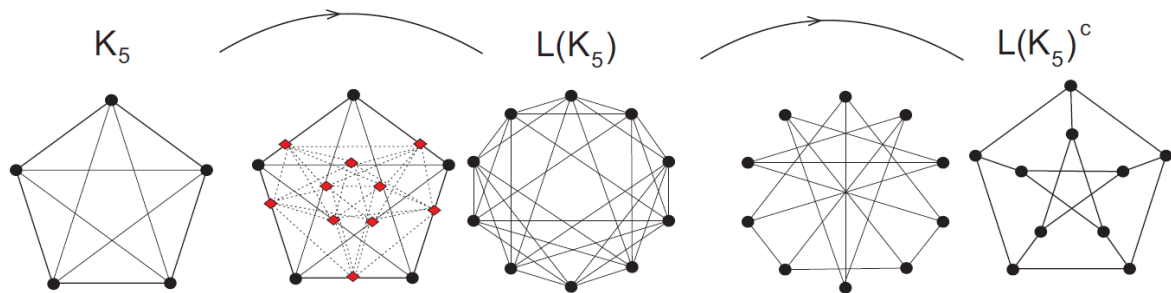


Slika 12: Petersenov graf kao Kneserov graf  $K(5, 2)$  ([10], str. 11)

□

**Propozicija 4.9.** Petersenov graf je komplement linijskog grafa potpunog grafa  $K_5$ .

*Dokaz.*

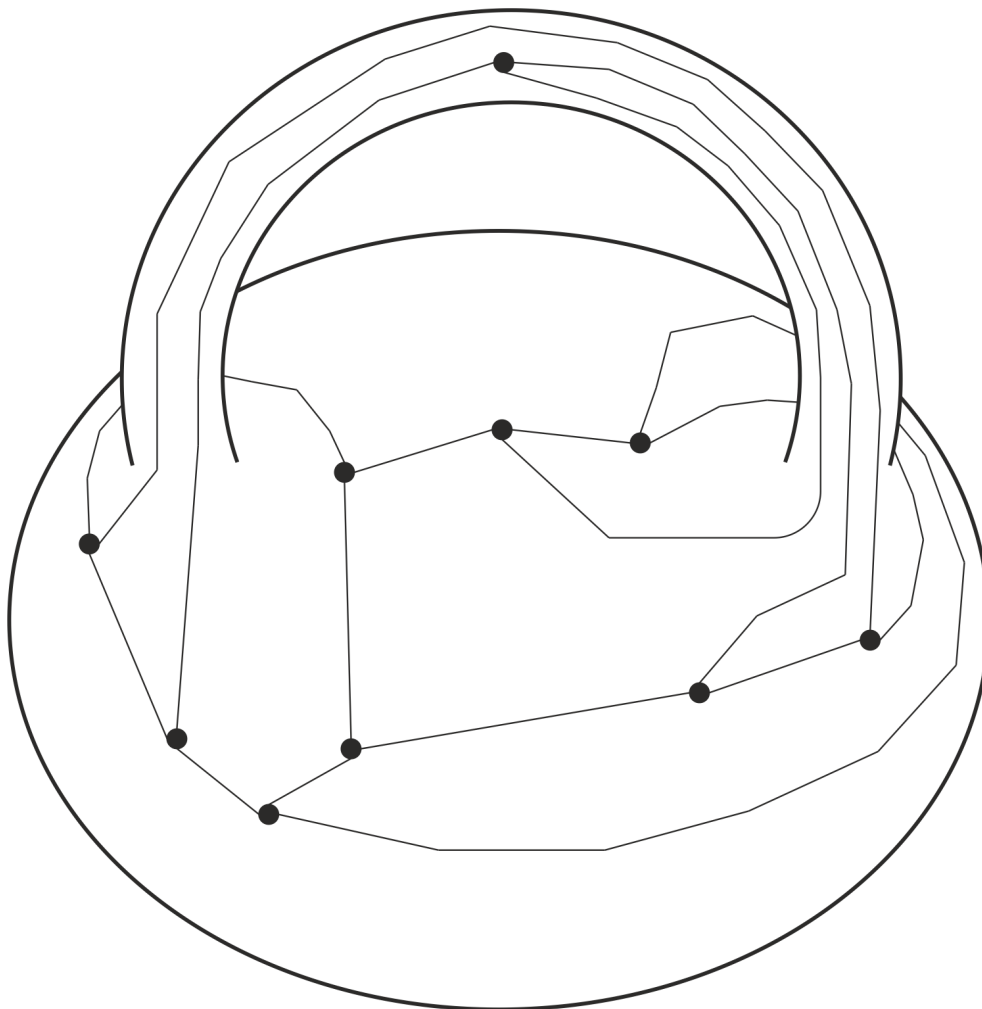


Slika 13: Petersenov graf kao  $(L(K_5))^c$  ([10], str. 12)

□

**Propozicija 4.10.** Genus Petersenova grafa je 1.

*Dokaz.*



Slika 14: Petersenov graf smješten na sferu s jednom ručkom

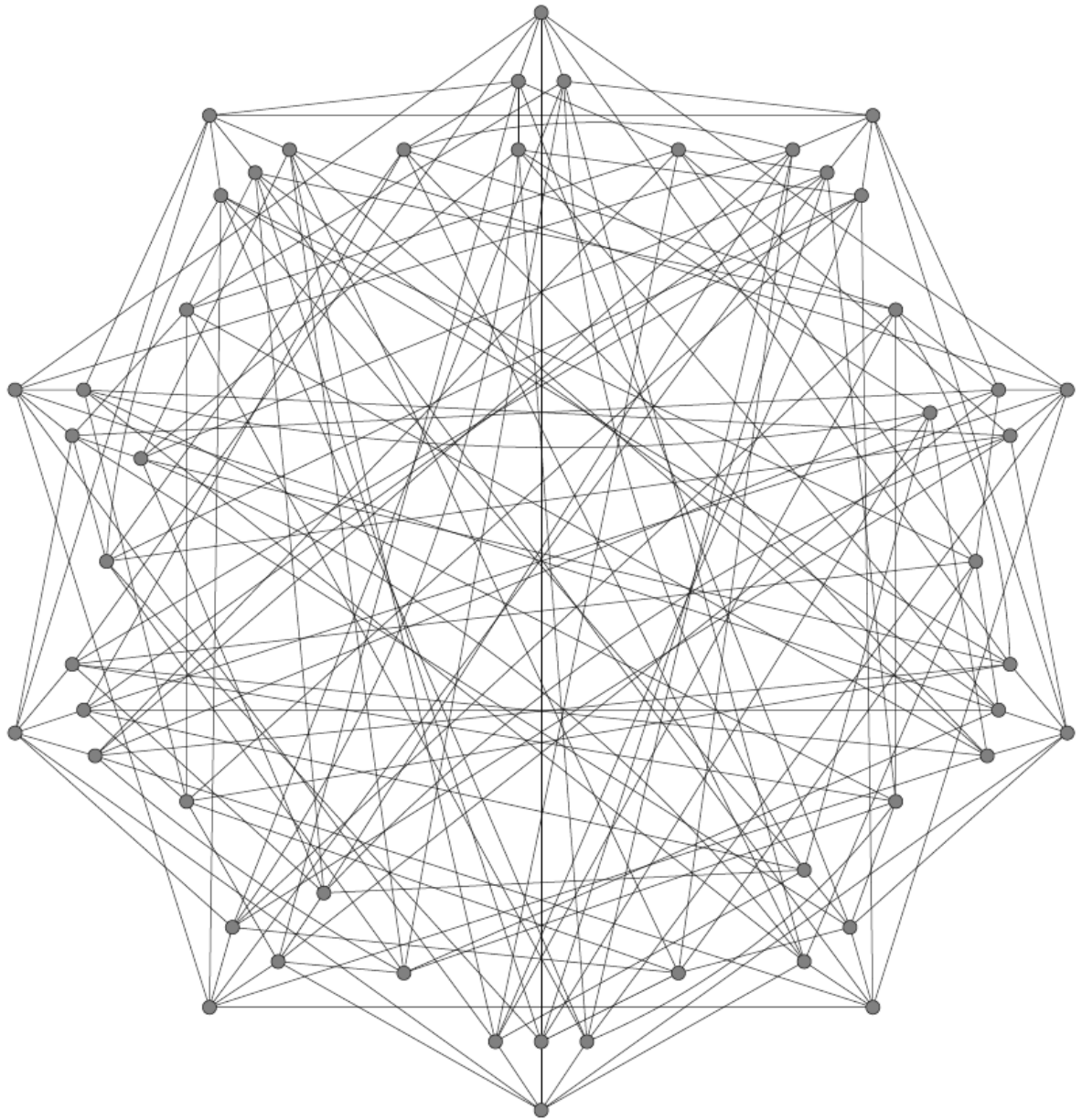
### 4.3 Mooreov graf tipa (7,2) ili Hoffman-Singleton graf

Hoffman-Singleton graf je 7-regularan graf s 50 vrhova i 175 bridova. Konstruirali su ga A. Hoffman i R. Singleton dok su pokušavali klasificirati sve Mooreove grafove. On je najveći Mooreov graf (u smislu broja vrhova) koji je uspješno konstruiran. Budući da je Mooreov graf, on je 7-regularan i ima struk 5 pa je ujedno i (7,5)-rešetka. Štoviše, on pripada klasi takozvanih *jako regularnih grafova*, a to znači da postoje prirodni brojevi  $\mu$  i  $\nu$  takvi da svaka dva susjedna vrha imaju točno  $\mu$  zajedničkih susjeda, a svaka dva nesusjedna vrha imaju točno  $\nu$  zajedničkih susjeda. Prije nego se usredotočimo na nekoliko zanimljivih konstrukcija ovog grafa, nabrojati ćemo mu niz lijepih svojstava.

Hoffman-Singleton graf je:

- Hamiltonov
- simetričan
- kromatskog broja 4 i bridno kromatskog broja 7
- genusa 29
- graf s 250 000 automorfizama
- graf čija matrica susjedstva ima najveću svojstvenu vrijednost 7 kratnosti jedan, svojstvenu vrijednost 2 kratnosti 28 i svojstvenu vrijednost  $-3$  kratnosti 21
- graf koji sadrži 1260 ciklusa s 5 vrhova
- graf koji sadrži 525 kopija Petersenova grafa.

U nastavku ćemo navesti nekoliko različitih načina za konstruiranje Hoffman-Singletonova grafa, što je ujedno i glavni cilj ovog pododjeljka.

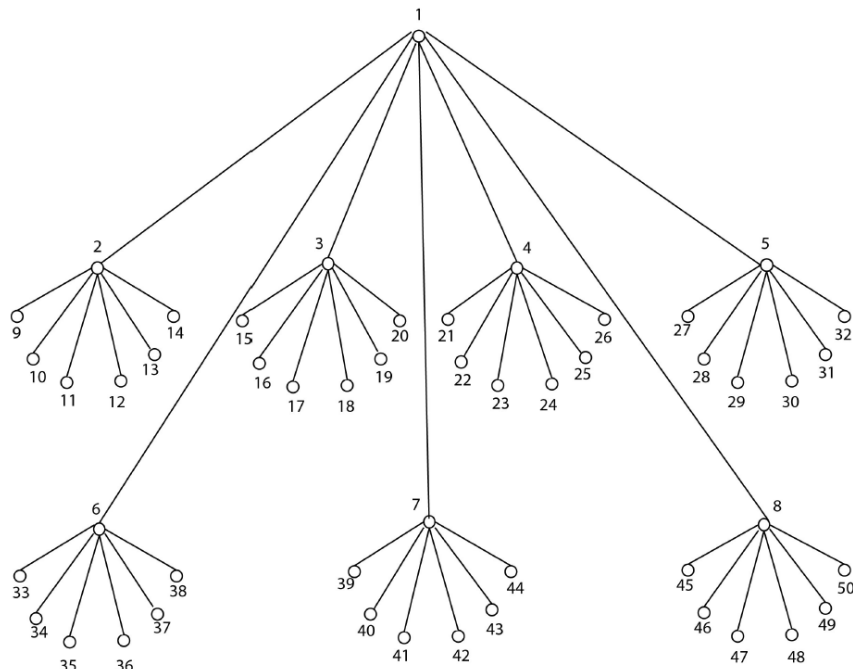


Slika 15: Hoffman-Singleton graf

### 4.3.1 Konstrukcija 1

Prva konstrukcija Hoffman-Singletonova grafa je originalna konstrukcija iz rada A.J. Hoffmana i R.R. Singletona [8].

Kao i kod konstrukcije Petersenova grafa, upotrijebit ćemo BFS stablo. Krenut ćemo od nekog inicijalnog vrha kojeg ćemo zvati korijen i označiti brojem 1. On će se nalaziti na razini 0. (Zbog simetričnosti grafa, izbor inicijalnog vrha je proizvoljan.) Inicijalni vrh 1 je stupnja 7 pa se na razini 1 nalazi još 7 vrhova koji su s njim susjedni. Dakle, tih 7 vrhova je na udaljenosti jedan od inicijalnog vrha. Budući da je Hoffman-Singleton graf 7-regularan i dijametra 2, treba nam još i razina 2 na kojoj se nalazi ukupno  $7 \cdot 6 = 42$  vrhova. Zbog struka koji iznosi 5, ne postoje bridovi koji spajaju vrhove na razini 1. Da bi konstrukcija bila uspješna, potrebno je dodati još 126 bridova između vrhova na razini 2. Na Slici 16 se nalazi BFS stablo za konstrukciju Hoffman-Singletonova grafa, a nakon njega je prikazana matrica susjedstva koja odgovara oznakama vrhova kao na slici, a pridružena je Hoffman-Singletonovom grafu. Iz nje se može vidjeti na koji način je dodano preostalih 126 bridova među vrhove na razini 2.



Slika 16: BFS stablo za konstrukciju Hoffman-Singletonova grafa ([13], str. 5)

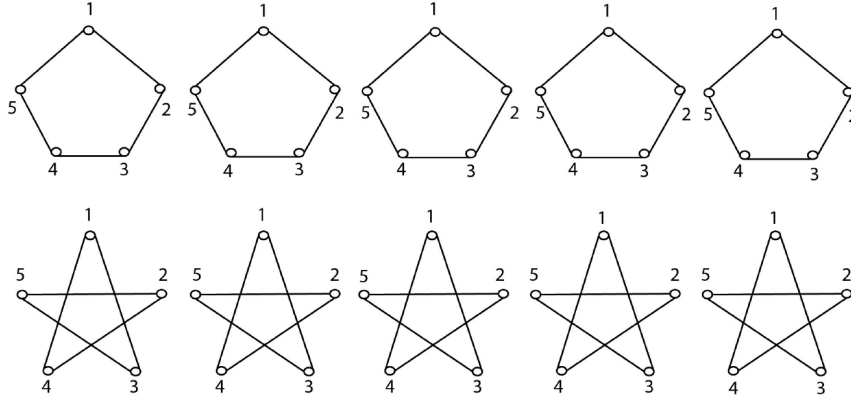
0	1111111	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000
1	0000000	1111111	000000	000000	000000	000000	000000	000000
1	0000000	000000	111111	000000	000000	000000	000000	000000
1	0000000	000000	000000	111111	000000	000000	000000	000000
1	0000000	000000	000000	000000	111111	000000	000000	000000
1	0000000	000000	000000	000000	000000	111111	000000	000000
1	0000000	000000	000000	000000	000000	000000	111111	000000
1	0000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	111111
0	1000000	000000	100000	100000	100000	100000	100000	100000
0	1000000	000000	010000	010000	010000	010000	010000	010000
0	1000000	000000	001000	001000	001000	001000	001000	001000
0	1000000	000000	000100	000100	000100	000100	000100	000100
0	1000000	000000	000010	000010	000010	000010	000010	000010
0	1000000	000000	000001	000001	000001	000001	000001	000001
0	0100000	100000	000000	010000	001000	000100	000010	000001
0	0100000	010000	000000	100000	000010	000001	000100	001000
0	0100000	001000	000000	000100	100000	000010	000001	010000
0	0100000	000100	000000	001000	000001	100000	010000	000010
0	0100000	000010	000000	000001	010000	001000	100000	000100
0	0100000	000001	000000	000010	000100	010000	001000	100000
0	0010000	100000	010000	000000	000001	000010	001000	000100
0	0010000	010000	100000	000000	000100	001000	000001	000010
0	0010000	001000	000100	000000	000010	010000	100000	000001
0	0010000	000100	001000	000000	000001	010000	000001	000010
0	0010000	000010	000001	000000	001000	100000	000100	010000
0	0010000	000001	000010	000000	100000	000100	001000	000100
0	0001000	100000	001000	000001	000000	010000	000100	000010
0	0001000	010000	000010	000100	000000	100000	001000	000001
0	0001000	001000	100000	000010	000000	000001	010000	000100
0	0001000	000100	000001	010000	000000	000010	100000	001000
0	0001000	000010	010000	001000	000000	000100	000001	100000
0	0001000	000001	000100	100000	000000	001000	000010	010000
0	0000100	100000	000100	000010	010000	000000	000001	001000
0	0000100	010000	000001	001000	100000	000000	000010	000100
0	0000100	001000	000010	010000	000001	000000	000100	100000
0	0000100	000100	100000	000001	000010	000000	001000	010000
0	0000100	000010	001000	100000	000100	000000	010000	000001
0	0000100	000001	001000	000100	001000	000000	100000	000010
0	0000010	100000	000010	001000	000100	000001	000000	010000
0	0000010	010000	000100	000001	001000	000010	000000	100000
0	0000010	001000	000001	100000	010000	000100	000000	000010
0	0000010	000100	010000	000010	100000	001000	000000	000001
0	0000010	000010	100000	000100	000001	010000	000000	001000
0	0000010	000001	001000	010000	000010	100000	000000	000100
0	0000001	100000	000001	000100	000010	001000	010000	000000
0	0000001	010000	001000	000010	000001	000100	100000	000000
0	0000001	001000	010000	000001	000100	100000	000010	000000
0	0000001	000100	000010	100000	001000	010000	000001	000000
0	0000001	000010	000100	010000	100000	000001	001000	000000
0	0000001	000001	100000	001000	010000	000010	000100	000000

Tablica 1: Matrica susjedstva Hoffman-Singletonova grafa.

### 4.3.2 Konstrukcija 2

Sada ćemo objasniti vrlo jednostavnu konstrukciju Hoffman-Singletonova grafa koju je napravio Niel Robertson, a prezentirao ju je Paul R. Hafner [7]. Svih 50 vrhova tog grafa particionirati ćemo u 10 podgrafova s po 5 vrhova. Pet podgrafova su prikazani kao peterokuti, a drugih pet kao pentagrami. Vrhovi moraju biti označeni tako da je odmah uočljivo da su peterokuti i pentagrami komplementi jedno drugome, kao što je prikazano na Slici 17.





Slika 17: 5 peterokuta i 5 pentagrama ([13], str. 2)

Trebamo dodati još 125 bridova. To ćemo učiniti na sljedeći način: za  $i$ -ti vrh,  $1 \leq i \leq 5$  u peterokutu  $P_j$ ,  $1 \leq j \leq 5$ , postoji vrh u pentagramu  $Q_k$ ,  $1 \leq k \leq 5$ , označen s  $i + jk \pmod{5}$  kojeg ćemo spojiti bridom s vrhom  $i$ . (Za  $i + jk = 5$  uzimamo vrh 5.) Na taj način smo dodali sve preostale bridove, pretpostavka o struku 5 nije narušena, a treba primijetiti da nema bridova koji spajaju vrhove iz dva različita peterokuta ili dva različita pentagrama. Dobiveni graf je 7-regularan, dijametra 2 i struka 5. Dakle, dobili smo Hoffman-Singleton graf.

### 4.3.3 Konstrukcija 3

Posljednja konstrukcija koju ćemo prezentirati u ovom radu ujedno je i najsloženija, ali je ključna za dokazivanje jedinstvenosti Hoffman-Singletonova grafa. Konstrukciju su izveli P.J. Cameron i J.H. Van Lint [2].

Odaberemo dva susjedna vrha:  $u$  i  $v$ . Vrh  $u$  će biti susjed svakom vrhu koji pripada potpunom grafu  $K_6$ , a vrh  $v$  će biti susjed svakom vrhu koji predstavlja jednu od 6 faktorizacija potpunog grafa  $K_6$ . (Bavimo se samo vrhovima i onim što ti vrhovi predstavljaju u  $K_6$  i u grafu faktorizacija od  $K_6$ ). Evo pojašnjenja:

faktor grafa  $K_6$  se sastoji od 3 međusobno disjunktna brida (tj. bridova koji nemaju zajedničke krajeve). U  $K_6$  imamo točno 15 različitih faktora.

Faktorizacija  $K_6$  znači particija skupa od 15 bridova na 5 faktora, pri čemu svaki sadrži tri brida.

Postoji 6 različitih, ali međusobno izomorfnih faktorizacija od  $K_6$ . Još vrijedi da je svaki faktor sadržan u točno dvije faktorizacije, a svake dvije faktorizacije imaju jednog zajedničkog faktora. Dakle, za neki konkretan faktor možemo naći par faktorizacija koje ga sadrže, a svakom paru faktorizacija možemo pridružiti jedan (zajednički) faktor. Upravo iz tih razloga možemo generirati nešto drugačiju verziju grafa  $K_6$ , označimo ju s  $Q$ : uzmemo vrhove koji predstavljaju 6 faktorizacija grafa  $K_6$ , a spajamo svaka dva vrha bridom koji je zajednički faktor za ta dva vrha-faktorizacije.

Jasno je da su  $K_6$  i  $Q$  izomorfni grafovi. Bridovi od  $K_6$  su u bijekciji s faktorima u  $Q$ , a vrhovi od  $K_6$  su u bijekciji s faktorizacijama u  $Q$ .

Vratimo se na konstrukciju Hoffman-Singletonova grafa.

Zasad imamo 14 vrhova: imamo  $u$  i  $v$ , zatim još 6 vrhova-susjeda od  $u$  koji pripadaju  $K_6$  i 6 vrhova-susjeda od  $v$  koji pripadaju  $Q$ . Treba nam još 36 vrhova. Njih ćemo dobiti pomoću

Kartezijskog produkta skupa vrhova od  $K_6$  i skupa vrhova od  $Q$ , tj. stavimo

$$V(K_6) \times V(Q) = \{(a, x) : a \in V(K_6), x \in V(Q)\}.$$

Svaki par-vrh  $(a, x)$  spojimo bridom s vrhom  $a$  iz  $K_6$  i bridom s vrhom-faktorizacijom  $x$  iz  $Q$ .

Kada to učinimo, svaki vrh-par imati će stupanj 2, a svaki vrh iz  $K_6$  i svaki vrh iz  $Q$  bit će stupnja 7. Ostaje nam da pravilno spojimo bridovima vrhove-parove.

Vrhove-parove  $(a, x)$  i  $(b, y)$  spojiti ćemo bridom ako i samo ako su  $x$  i  $y$  različite faktorizacije u  $Q$ , a brid  $ab$  pripada faktoru koji je zajednički za  $x$  i  $y$ . Time ćemo završiti konstrukciju. Dobiveni graf je Hoffman-Singletonov! Odmah je jasno da smo dobili graf s 50 vrhova, svaki vrh je stupnja 7, a dijametar je 2.

Ipak, nije odmah jasno da je struk dobivenog grafa jednak 5. Nađimo  $C_5$  u dobivenom grafu. Uzmemo proizvoljan vrh  $(a, x)$ . On je susjed s  $a$  u  $K_6$ ,  $a$  je susjed s  $u$ ,  $u$  je susjed s  $v$ , a  $v$  je susjed s  $x$ . No,  $x$  je susjed s  $(a, x)$  pa smo dobili  $C_5$ ! Zbog pravila konstrukcije, u grafu ne postoji ciklus duljine manje od 5.

**Propozicija 4.11.** *Hoffman-Singleton graf je jedinstven.*

*Dokaz.* Dokaz slijedi iz konstrukcije br. 3. pa ga ovdje nećemo posebno isticati. □

## 5 Mooreovi grafovi dijametra 3

U ovom odjeljku ćemo dokazati da Mooreov graf tipa  $(\Delta, 3)$  postoji ako i samo ako je  $\Delta = 2$ , odnosno da je jedini Mooreov graf dijametra 3 ciklus  $C_7$ .

Za dokaz te tvrdnje bit će nam potreban sljedeći pomoćni rezultat:

**Lema 5.1.** *Neka su polinomi  $F_i(x)$  definirani kao u Propoziciji 3.1 i neka vrijedi  $\Delta, D \geq 2$ . Ako je  $F_D(x)$  ireducibilan<sup>3</sup> nad  $\mathbb{Q}$ , onda Mooreov graf tipa  $(\Delta, D)$  postoji jedino u slučaju  $\Delta = 2$ .*

*Dokaz.* Kao u dokazu Leme 4.1, ako je  $\lambda \neq \Delta$  svojstvena vrijednost matrice  $A$ , tada se odmah pokaže da je  $\lambda$  korijen od  $F_D(x)$ . Obzirom da je  $F_D(x)$  ireducibilan nad  $\mathbb{Q}$ , to  $F_D(x)$  mora dijeliti karakteristični polinom matrice  $A$ . Zaključujemo da je korijen od  $F_D(x)$  svojstvena vrijednost od  $A$ .

Iz konstrukcije polinoma  $F_D(x)$ , jasno je da se radi o polinomu stupnja  $D$  i da su mu koeficijenti uz  $x^D$  i  $x^{D-1}$  jednaki 1. Neka su  $\lambda_1, \dots, \lambda_D$  korijeni polinoma  $F_D(x)$  koji su različiti od  $\Delta$ . Prema Vietovim formulama dobivamo:

$$\sum_{i=1}^D \lambda_i = -1.$$

Zbog ireducibilnosti polinoma  $F_D(x)$ , svojstvene vrijednosti  $\lambda_1, \dots, \lambda_D$  moraju imati jednake kratnosti koje ćemo označiti s  $m$ . Iz jednadžbe (1), za  $\Delta > 2$  imamo:

$$n = 1 + \Delta \left( \frac{(\Delta - 1)^D - 1}{\Delta - 2} \right).$$

Nadalje,

$$m = \frac{n - 1}{D} = \frac{\Delta}{D} \left( \frac{(\Delta - 1)^D - 1}{\Delta - 2} \right).$$

Kako je trag matrice  $A$  jednak nuli, dobivamo:

$$0 = \Delta + m \sum_{i=1}^D \lambda_i = \Delta - m.$$

Koristeći našu formulu za  $m$ , zaključujemo da vrijedi

$$(\Delta - 1)^D - D(\Delta - 1) + (D - 1) = 0. \quad (9)$$

Ako lijevu stranu u (9) promatramo kao polinom u varijabli  $\Delta - 1$ , onda zbog uvjeta  $D \geq 2$ , po Descartesovom pravilu predznaka<sup>4</sup> jednadžba (9) ima najviše dva pozitivna rješenja. Međutim,  $\Delta = 2$  je dvostruko rješenje te jednadžbe pa niti jedan  $\Delta > 2$  ne može biti rješenje. □

<sup>3</sup>Polinom  $P$  je ireducibilan nad nekim poljem ako se ne može zapisati kao produkt dva polinoma nad tim istim poljem, a čiji su stupnjevi najmanje jedan.

<sup>4</sup>Descartesovo pravilo predznaka je tehnika za određivanje gornje granice broja pozitivnih ili negativnih korijena polinoma. Gornja granica broja pozitivnih korijena se dobije promatranjem broja alterniranja predznaka u koeficijentima od  $f(x)$ , a gornja granica broja negativnih korijena se dobije promatranjem broja alterniranja predznaka u koeficijentima od  $f(-x)$ .

**Teorem 5.1.** *Mooreov graf tipa  $(\Delta, 3)$  postoji ako i samo ako  $\Delta = 2$ .*

*Dokaz.* Prema Propoziciji 3.1 imamo:

$$F_3(x) = x^3 + x^2 - 2(\Delta - 1)x - (\Delta - 1).$$

Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji Mooreov graf tipa  $(\Delta, 3)$  za neki  $\Delta > 2$ . Prema Lemi 5.1,  $F_3(x)$  ima racionalan korijen  $r$ . Kako je  $F_3(x) \in \mathbb{Z}[x]$  i vodeći koeficijent mu je 1, možemo pretpostaviti da je  $r$  cijeli broj. Iz  $F_3(x) = 0$  dobivamo

$$\Delta - 1 = \frac{r^2(r + 1)}{2r + 1}.$$

Primijetimo da je najveći zajednički djelitelj brojeva  $2r + 1$  i  $r$  jednak jedan, a toliki je i najveći zajednički djelitelj od  $2r + 1$  i  $r + 1$ . Stoga imamo  $2r + 1 = \pm 1$  iz čega dobivamo  $\Delta = 1$ , a to je u kontradikciji s pretpostavkom  $\Delta > 2$ .

□

## Literatura

- [1] P. J. CAMERON, Automorphism groups of graphs, *in: Selected Topics in Graph Theory 2*, Academic Press, 1983.
- [2] P. J. CAMERON, J. H. VAN LINT, Designs, Graphs, Codes and their Links, *London Mathematical Society Student Texts*, Cambridge University Press 22, 1991.
- [3] D. CVETKOVIĆ, M. DOOB, H. SACHS, Spectra of graphs: Theory and Applications, 3rd ed. New York: Wiley, 1998.
- [4] R. DIESTEL, Graph Theory, *Electronic Edition*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [5] P. ERDÖS, H. SACHS, Reguläre graphen gegebener taillenweite mit minimaler knotenzahl, *Wiss. Z. Uni. Halle (Math. Nat.)*, 12, 251–257, 1963.
- [6] M. GARDNER, Mathematical Games: Snarks, Boojums and other conjectures related to the fourcolor-map theorem, *Scientific American*, 1976, 234 (4), 126–130.
- [7] P. R. HAFNER, The Hoffman-Singleton Graph and its Automorphisms, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 18, 7–12, 2003.
- [8] A. J. HOFFMAN, R. R. SINGLETON, On Moore Graphs with Diameters 2 and 3, *IBM Journal of Research and Development*, 4, 497–504, 1960.
- [9] L. LOVASZ, Combinatorial structures and their applications *in: Proc. Calgary Internat. Conf. Calgary, Alberta, 1969*, Gordon and Breach, New York, 1970, 343–246, Problem 11.
- [10] S. MAJSTOROVIĆ, L. BORAS, Petersenov graf, *Hrvatski matematički elektronički časopis*, 2015.
- [11] M. MILLER, J. ŠIRAN, Moore graphs and beyond: A survey of the degree/diameter problem, *The electronic journal of combinatorics*, 2013.
- [12] R. NEDELA, M. ŠKOVIERA, Decompositions and Reductions of Snarks, *Journal of Graph Theory*, 22 (3), 253–279, 1996.
- [13] E. ORTEGA, Hoffman-Singleton Graph, *Fall*, 2007.
- [14] R. R. SINGLETON, There is no irregular Moore graph, *American Mathematical Monthly*, 75 (1), 42–43, 1968.
- [15] A. ZAMAN, Moore graphs of diameter 2 and 3,  
*URL:*<http://www.math.toronto.edu/asif/wp-content/uploads/2016/03/hoffman-singleton.pdf>
- [16] F. DE ZEEUW, Eigenvalues of graphs, *Advanced Discrete Mathematics*, 2013.
- [17] [HTTP://LINEAR.UPS.EDU/EAGTS/SECTION-19.HTML](http://LINEAR.UPS.EDU/EAGTS/SECTION-19.HTML)

## Sažetak

Mooreovi grafovi su vrlo rijetka klasa grafova s vrlo zanimljivim svojstvima. To su ekstremalni grafovi, tj. grafovi s ekstremalnim svojstvima: za zadani najveći stupanj i dijametar imaju najveći mogući broj vrhova. Mooreovih grafova je tako malo da ih možemo nabrojati "na prste". U ovom radu su detaljno obrađena svojstva tih grafova, a posebno je analiziran Mooreov graf tipa  $(3, 2)$  ili Petersenov graf. Njegova posebnost je u tome što se često pojavljuje kao kontraprimjer kod pokušaja dokazivanja mnogih tvrdnji. Mooreovi grafovi su regularni pa ih nije suviše teško konstruirati. Najveći Mooreov graf koji je uspješno konstruiran je Hoffman-Singleton graf ili Mooreov graf tipa  $(7, 2)$ . Radi se o 7-regularnom grafu s 50 vrhova i 175 bridova. U radu su navedene neke konstrukcije tog grafa. Najveći izazov u proučavanju Mooreovih grafova je konstrukcija Mooreova grafa tipa  $(57, 2)$ . Iako je graf aritmetički izvediv, nitko ga dosad nije uspio konstruirati, tj. i dalje se ne zna postoji li. Kada bi postojao, imao bi 3250 vrhova i 92625 bridova. Stoga je egzistencija Mooreovog grafa tipa  $(57, 2)$  još uvijek otvoren problem u teoriji grafova. Budući da su Mooreovi grafovi otkriveni tek 1960. godine, možemo zaključiti da je ovaj dio teorije grafova dosta "mlad" pa postoji još dosta prostora za napredak i dokazivanje egzistencije Mooreovog grafa tipa  $(57, 2)$ .

**Ključne riječi:** Mooreovi grafovi, Petersenov graf, Hoffman-Singleton graf, dijametar.

## Summary

Moore graphs is a very rare class of graphs with an interesting properties. These graphs are extremal, that is, they have extremal properties: for fixed maximum degree and diameter, they have the largest possible number of vertices. There are only few Moore graphs, so we can count them in a few seconds. The main part of this diploma thesis is concerned with the analysis of properties of Moore graphs, and a special attention is given to Moore graph of type  $(3, 2)$  or Petersen graph. It is a very special graph because it appears very often as a counterexample when one tries to prove some statement. Moore graphs are regular graphs, which makes their construction not to difficult. The largest Moore graph which was successfully constructed is the Hoffman – Singleton graph, that is, the Moore graph of type  $(7, 2)$ . This graph is 7-regular with 50 vertices and 175 edges. The biggest challenge in the study of Moore graphs is the construction of Moore graph  $(57, 2)$ . Although this graph is arithmetically feasible, nobody has proved its existance. If such graph would exist, it would have 3250 vertices and 92625 edges. So the existance of Moore graph of type  $(57, 2)$  is still an open problem in graph theory. Since Moore graph have been discovered in 1960s, we can conclude that this part of graph theory is still "young", so there is enough time for progress in proving the existance of Moore graph  $(57, 2)$ .

**Key words:** Moore graphs, Petersen graph, Hoffman-Singleton graph, diameter.

## Životopis

Rođen sam 26. srpnja 1993. godine u Vinkovcima u Hrvatskoj. Osnovnu školu sam završio u Vinkovcima 2008. godine te odmah upisao Tehničku školu Ruđera Boškovića u Vinkovcima. Nakon završetka obrazovanja u Tehničkoj školi stekao sam zvanje Tehničar za mehatroniku te položio državnu maturu. Budući da sam imao odlične ocjene u srednjoj školi, stekao sam izravni upis na Elektrotehnički fakultet u Osijeku. Kako se nisam vidio u tom pozivu, nakon uspješno položene državne mature upisao sam Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku.