Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Diplomski studij matematike, smjer: financijska matematika i statistika

Kristina Jelić

Martingali i obrnuti martingli

Diplomski rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike, smjer: financijska matematika i statistika

Kristina Jelić

Martingali i obrnuti martingali

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2017.

Sadržaj

Uvod

Martingalna kockarska strategija pojavila se te je bila vrlo popularna tijekom 18. stoljeća u Francuskoj. Najjednostavnija ovakva strategija je originalno nastala za igru u kojoj kockar pobjeđuje ako se na novčiću okrene glava i gubi ako se na novčiću okrene pismo. Strategija je bila takva da kockar udvostručuje svoj ulog nakon svake izgubljene partije pri čemu prva pobjeda u igri donosi profit kojim bi kockar vratio početni ulog te još ostvario dodatni prihod u iznosu jednakom početnom ulogu. Ova martingalna strategija se također primjenjivala i u ruletu jer je vjerojatnost pogađanja crvene ili crne boje približno jednaka $\frac{1}{2}$ (isto kao i pismo/glava u bacanju novčića). Što se kockarov imetak i raspoloživo vrijeme više približavalo beskonačnosti, vjerojatnost okretanja glave na novčiću se približavala 1, čime se ovakva strategija činila kao sigurna stvar onima koji su je zastupali. Naravno, nitko od kockara ne posjeduje beskonačno bogatstvo pa će eksponencijalni rast uloga kroz partije u konačnici dovesti do bankrota kockara koji je odlučio koristiti martingale. U realnim situacijama, kockar obično ostvaruje malu neto zaradu. Međutim, kockarova očekivana dobit i dalje ostaje jednaka nuli (ili čak manja od nule). Postoje situacije kada vjerojatnost katastrofalnog gubitka ne mora biti jako mala. Znamo da veličina uloga raste ekponencijalno. Upravo to, u kombinaciji sa činjenicom da se niz uzastopnih gubitaka pojavljuje češće nego što nam intuicija nalaže, govori da postoje situacije kada se vrlo brzo može doći do kockarove propasti, tj. bankrota.

Koncept martingala u teoriji vjerojatnosti je 1934. predstavio Paul Lévy iako ih nije tako nazvao. Izraz "martingal" 1939. uvodi Jean-André Ville koji je dodatno proširio definiciju na neprekidne martingale. Veliku ulogu u razvoju ove teorije je imao Joseph Leo Doob čije ćemo rezultate iskazati u ovome diplomskom radu. Jedna od motivacija za uvođenje ove teorije je bila da se dokaže da je nemoguće ostvariti uspješnu kockarsku strategiju (tj. strategiju koja bi nam osigurala sigurnu dobit).

U teoriji vjerojatnosti, martingal je familija slučajnih varijabli za koji vrijedi da je u svakom promatranom trenutku očekivana sljedeća vrijednost jednaka trenutačnoj vrijednosti pri čemu su nam poznate sve prethodne vrijednosti procesa, uključujući sadašnju. Usporedbe radi, u procesima koji nisu martingali može se dogoditi da je očekivana vrijednost procesa u nekom trenutku jednaka njegovoj očekivanoj vrijednosti u sljedećem trenutku. Međutim, znanje o prethodnim ishodima (npr. koje su sve karte već izvučene iz špila) može reducirati neizvjesnost budućih ishoda. Prema tome, očekivana vrijednost budućih ishoda igre sa znanjem o sadašnjosti i svim prethodnim ishodima može biti veća nego stvarna vrijednost ukoliko se ostvaruje uzastopni niz pobjeda. Martingali isključuju ostvarivanje profita na temelju informacija o povijesti igre pa su oni stoga model za poštene igre.

1 Martingali

1.1. Motivacija i definicija martingala u diskretnom vremenu

U daljnjem tekstu ćemo kroz primjere vidjeti da je jako korisno promatrati martingale kroz kockanje, tj. poistovjetiti ih sa kockarskom strategijom. Međutim, velika važnost martingalne teorije proizlazi iz činjenice da se martingali pojavljuju u mnogim drugim kontekstima. Naprimjer, teorija difuzija koja se ranije proučavala metodama iz teorije o Markovljevim lancima, teorije o parcijalnim diferencijalnim jednadžbama i slično, a koja je sada evoluirala u martingalnu teoriju.
U ovom poglavlju cilj nam je doći do definicije martingala za što nam je potrebno definirati osnovne pojmove kao što su filtracija i adaptiranost. Navesti ćemo neke primjere koji će nam koristiti za bolje razumijevanje same definicije martingala, a kasnije dodatne primjere najčešćih martingala te primjere njihove primjene na druge matematičke pojmove.

Definicija 1.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je za svaki prirodan broj n, X_n slučajna varijabla na tom prostoru. Tada se familija $X = (X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ naziva slučajni proces (s diskretnim vremenom).*

Primjer 1.1. *Neka je $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih, jednakodistribuiranih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s očekivanjem μ. Slučajna šetnja je slučajni proces $X = (X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ definiran na sljedeći način:*

$$X_0 = 0$$

$$X_n = Y_1 + \cdots + Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0)$ familija slučajnih varijabli definirana na sljedeći način:

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n), \quad n \geq 1.$$

Uočimo: kako je $Y_i = X_i - X_{i-1}$, vrijedi $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. U $\mathcal{F}_n$ su sadržane sve informacije o slučajnom procesu X koje su poznate do trenutka n. Očigledno je $\mathbb{F}$ neopadajuća familija σ-podalgebri od $\mathcal{F}$, tj. $\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n, \forall n \geq 1$. Uočimo i da su slučajne varijable Y_k nezavisne od σ-algebre $\mathcal{F}_n$, za $k \geq n+1$.
Sada pretpostavimo da nam je poznata informacija o slučajnom procesu X do trenutka n, tj. poznata nam je $\mathcal{F}_n$. Tada, zbog svojstva linearnosti uvjetnog očekivanja s obzirom na σ-algebru (vidi [14]), vrijedi:

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n + Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n + \mathbb{E}Y_{n+1} = X_n + \mu.$$

U slučaju kada je $\mu = 0$, za sve $n \geq 0$ vrijedi $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$ g.s. Prema tome, najbolje što možemo reći o procesu X u trenutku $n+1$ s obzirom na poznate informacije o tom procesu zaključno s trenutkom n je X_n. Međutim, ukoliko na X_n stavimo dodatne pretpostavku, a to je da su one kvadratno-integrabilne, gornju tvrdnju interpretiramo na sljedeći način: X_n je najbolja $\mathcal{F}_n$-predikcija od X_{n+1} u smislu najmanjih kvadrata (vidi [9]). Takav slučajni proces zvat ćemo martingal.

Definicija 1.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjerivi prostor. Familija $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ σ-podalgebri od $\mathcal{F}$ takvih da za svaki $n \geq 0$ vrijedi $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ zove se filtracija na $(\Omega, \mathcal{F})$.*

Definicija 1.3. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjerivi prostor i $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ filtracija. Slučajni proces $X = (X_n, n \geq 0)$ je adaptiran na filtraciju $\mathbb{F}$ ako je za svaki $n \geq 0$ slučajna varijabla X_n $\mathcal{F}_n$-izmjeriva, tj. ako je $\sigma(X_n) \subset \mathcal{F}_n$.*

Definicija 1.4. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjerivi prostor i $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces na njemu. Za $n \geq 0$ definiramo*

$$\mathcal{F}_n^0 := \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n).$$

Tada filtraciju $\mathbb{F}^0 = \{\mathcal{F}_n^0 : n \geq 0\}$ zovemo prirodna filtracija od X.

Primjedba 1.1. *Svaki slučajni proces je adaptiran na svoju prirodnu filtraciju.*

Sljedećim primjerom ćemo objasniti ideju martingala i što oni u biti predstavljaju.

Primjer 1.2. *Kockarsku strategiju koju ćemo razmatrati u ovom primjeru zovemo martingalna strategija. Pretpostavimo da kockar ima veliko bogatstvo. On ulaže jedinični ulog u igri za koju je vjerojatnost dobitka i gubitka jednaka. Ako izgubi, u sljedećem krugu on ulaže iznos od dvije novčane jedinice. Ako izgubi prvih n partija, u sljedećoj partiji ulaže 2^n. U nekoj partiji on treba dobiti, pretpostavimo da je to u partiji T. Kockar tada prestaje s igrom pri čemu ostvaruje profit u sljedećem iznosu*

$$2^T - (1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{T-1}).$$

Prema tome, ovakvom strategijom kockanja, kockar si osigurava profit u iznosu od 2^T pa pretpostavljamo da je ovo dobra strategija.
Označimo s Y_n iznos kojeg kockar posjeduje nakon n-te partije. Tada je

$$Y_0 = 0, \qquad Y_n \leq 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Nadalje, $Y_{n+1} = Y_n$ ako je kockar prestao sa igrom u trenutku $n+1$ i

$$Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n - 2^n, & \text{s vjerojatnošću } \frac{1}{2} \\ Y_n + 2^n, & \text{s vjerojatnošću } \frac{1}{2} \end{cases}$$

inače. Neka je $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ i uvodimo filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$. Kako Y_{n+1} ovisi samo o Y_n, vrijedi sljedeće

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = Y_n.$$

Prema tome, Y je martingal s obzirom na definiranu filtraciju.
Međutim, ovaj martingal ima izrazito negativno svojstvo. Naime, za slučajnu varijablu T koja broji partije igre prije pobjede (slučajno vrijeme) vrijedi

$$\mathbb{P}(T = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 1,$$

tj. ona ima geometrijsku distribuciju s parametrom $\frac{1}{2}$.
Kockar u trenutku T nosi 2^{T-1}, a do tada je izgubio

$$\sum_{k=1}^{T-1} 2^{k-1} = 2^{T-1} - 1.$$

Prema tome, očekivani ukupni ulog do trenutka T, tj. do dobitka iznosi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[2^{T-1} - 1] = \mathbb{E}[2^{T-1}] - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \mathbb{P}(T = n) - 1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1}{2^n} - 1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} - 1
\end{aligned}$$

gdje prva suma divergira.
Iz ovoga primjera vidimo da ovakva strategija ima smisla samo ako posjedujemo beskonačno bogatstvo, što nije realno pa si u stvarnosti ovakvom strategijom ne osiguravamo profit.

Sljedeći primjer prikazuje primjenu martingala na financijskom tržištu. Naime, na ovom se tržištu postavlja bitno pitanje, a to je pronalazak nearbitražne cijene specifičnih financijskih instrumenata (vidi [11]). Do odgovora na ovo pitanje se dolazi upravo primjenom martingala, tj. martingalnog svojstva.

Primjer 1.3. *Pretpostavimo da na financijskom tržištu imamo i financijskih instrumenata za $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$. Tada diskontiranu vrijednost i-tog financijskog instrumenta u trenutku t označavamo s $\tilde{S}_t^i$ i definiramo izrazom*

$$\tilde{S}_t^i = \frac{1}{(1 + r')^t} S_t^i,$$

gdje je r' efektivna kamatna stopa.
Ovako definirana diskontirana vrijednost predstavlja vrijednost koju bi u trenutku $t = 0$ imao rizični i-ti financijski instrument ukoliko bismo ga tretirali kao nerizični.
Za nerizični financijski instrument uz efektivnu kamatnu stopu r' vrijedi

$$\tilde{S}_t^0 = \frac{1}{(1+r')^t} S_t^0 = S_0^0 = \frac{1}{(1+r')^{t+1}} S_{t+1}^0 = \tilde{S}_{t+1}^0$$

pa je

$$\mathbb{E}[\tilde{S}_{t+1}^0 \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\tilde{S}_t^0 \mid \mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t^0 = S_0^0$$

što zovemo martingalnim svojstvom. U slučaju kada imamo rizični financijski instrument, to svojstvo ne vrijedi. Stoga se na financijskom tržištu postavlja pitanje pronalaska vjerojatnosti P^* t.d. s obzirom na nju vrijedi

$$\mathbb{E}^*[\tilde{S}_{t+1}^k \mid \mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t^k.$$

Takvu vjerojatnost P^* ćemo zvati vjerojatnost neutralna na rizik ili ekvivalentna martingalna mjera koja će osiguravati da na već spomenutom tržištu ne postoji arbitraža (detaljnije u [11]).

Sada kada smo definirali osnovne pojmove potrebne za definiranje martingala te u primjerima vidjeli neke njihove tipične primjene, možemo izvesti traženu definiciju martingala, ali i definicije submartingala i supermartingala.

Definicija 1.5. *Slučajni proces $X = (X_n, n \geq 0)$ je martingal s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ ako vrijedi:*

1. $\mathbb{E}[\mid X_n \mid] < \infty, \quad \forall n \geq 0,$
2. *X je adaptiran na $\mathbb{F}$,*
3. $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n, \quad \forall n \geq 0.$

Definicija 1.6. *Slučajni proces $X = (X_n, n \geq 0)$ je supermartingal s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ ako vrijedi:*

1. $\mathbb{E}[\mid X_n \mid] < \infty, \quad \forall n \geq 0,$
2. *X je adaptiran na $\mathbb{F}$,*
3. $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq X_n, \quad \forall n \geq 0.$

Definicija 1.7. *Slučajni proces $X = (X_n, n \geq 0)$ je submartingal s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ ako vrijedi:*

1. $\mathbb{E}[\mid X_n \mid] < \infty, \quad \forall n \geq 0,$

2. *X je adaptiran na $\mathbb{F}$,*

3. $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq X_n, \quad \forall n \geq 0.$

Primjedba 1.2. *X je supermartingal ako i samo ako je $(-X)$ submartingal.*

Primjedba 1.3. *X je martingal ako i samo ako je on istovremeno i submartingal i supermartingal.*

Oučimo još jedno bitno svojstvo martingala. Dani proces $X = (X_n, n \geq 0)$ t.d. je $X_0 \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{F}_0, \mathbb{P})$, gdje je $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{F}_0, \mathbb{P})$ prostor slučajnih varijabli na Ω s konačnim očekivanjem, je martingal ako i samo ako je proces $X - X_0 = (X_n - X_0, n > 0)$ također martingal. Analogna tvrdnja vrijedi i za supermartingale i submartingale.

U daljnjem tekstu, ukoliko filtracija $\mathbb{F}$ nije specificirana, govorimo o prirodnoj filtraciji $\mathbb{F}^0$.

Primjedba 1.4. *Neka su $Y_1, Y_2, \ldots$ nezavisne nenegativne slučajne varijable takve da za sve $n \geq 1$ vrijedi $\mathbb{E}Y_n = 1$. Definiramo:*

$$X_0 := 1, \quad \mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$$

$$X_n := Y_1 \cdot Y_2 \cdots Y_n, \quad \mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n), \quad n \geq 1.$$

Slučajna varijabla X_n je integrabilna zbog nezavisnosti i integrabilnosti slučajnih varijabli $Y_1, \ldots, Y_n$. Kako su Y_{n+1} i $\mathcal{F}_n$ nezavisni za $n \geq 1$, slijedi:

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n \mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n \mathbb{E}Y_{n+1} = X_n \quad g.s.$$

pri čemu druga jednakost slijedi iz svojstva uvjetnog očekivanja (vidi [14]) Ovime smo pokazali da vrijedi martingalno svojstvo, pa je X martingal.

U nastavku ovoga rada navodimo bitna svojstva martingala kroz razne teoreme i propozicije koji će nam dati širu sliku važnosti martingala te će nam koristiti u nastavku martingalne teorije.

Propozicija 1.1. *Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ supermartingal, tada za sve $0 \leq m < n$ vrijedi*

$$\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_m] \leq X_m \quad g.s.$$

Ako je X martingal, tada za sve $0 \leq m < n$ vrijedi

$$\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_m] = X_m \quad g.s.$$

<u>**Dokaz**</u>

Za $n = m + 1$ tvrdnja slijedi iz definicije. Neka je $n = m + k$, $k \geq 2$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{m+k} \mid \mathcal{F}_m] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{m+k} \mid \mathcal{F}_{m+k-1}] \mid \mathcal{F}_m] \\ &\leq \mathbb{E}[X_{m+k-1} \mid \mathcal{F}_m] \leq \cdots \leq \mathbb{E}[X_{m+1} \mid \mathcal{F}_m] \\ &\leq X_m \quad g.s.\end{aligned}$$

Prva jednakost je posljedica tzv. *tower property* (vidi [2]), dok nejednakost slijedi iz tvrdnje da je X supermartingal.
Pokažimo i tvrdnju za martingal. Za $n = m+1$ tvrdnja slijedi iz definicije martingala. Neka je stoga $n = m + k$, $k \geq 2$. Slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{m+k} \mid \mathcal{F}_m] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{m+k} \mid \mathcal{F}_{m+k-1}] \mid \mathcal{F}_m] \\ &= \mathbb{E}[X_{m+k-1} \mid \mathcal{F}_m] = \cdots = \mathbb{E}[X_{m+1} \mid \mathcal{F}_m] \\ &= X_m \quad g.s.\end{aligned}$$

Kao i gore, prva jednakost je svojstvo uvjetnog očekivanja kojeg zovemo *tower property*, a nejednakost slijedi iz definicije martingala.

□

Propozicija 1.2.

1. *Ako je* $X = (X_n : n \geq 0)$ *martingal i* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konveksna funkcija takva da je* $\mathbb{E} \mid \phi(X_n) \mid < \infty$ *za sve* $n \geq 0$*, tada je* $(\phi(X_n) : n \geq 0)$ *submartingal.*

2. *Ako je* $X = (X_n : n \geq 0)$ *submartingal i* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *neopadajuća konveksna funkcija takva da je* $\mathbb{E} \mid \phi(X_n) \mid < \infty$ *za sve* $n \geq 0$*, tada je* $(\phi(X_n) : n \geq 0)$ *submartingal.*

(dokaz: vidi [14])

Definicija 1.8. *Familiju* $(X_n : 1 \leq n \leq N)$ *integrabilnih slučajnih varijabli zovemo približno-martingal s obzirom na filtraciju* $\{\mathcal{F}_n : 1 \leq n \leq N\}$ *ako je*

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n], \quad \forall 1 \leq n \leq N-1.$$

Analogno se definira približno-submartingal i približno-supermartingal.

Primjedba 1.5. *Uočimo da je jednakost iz prethodne definicije ekvivalentna sljedećoj jednakosti*

$$\mathbb{E}[X_m \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n], \quad \forall 1 \leq n \leq m \leq N-1.$$

Također, ako je familija $(X_n : 1 \leq n \leq N)$ *adaptirana na* $\{\mathcal{F}_n : 1 \leq n \leq N\}$*, tada je približno-martingal martingal. Analogno vrijedi i za približno-submartingale i približno-supermartingale.*

Primjer 1.4. *Neka je* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *niz nezavisnih slučajnih varijabli s očekivanjem* 0 *i* $Var(\xi_n) = \sigma_n^2$. *Neka je* $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_k : 1 \leq k \leq n\}$. *Definiramo*

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \qquad X_n = S_n S_N - \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2, \qquad 1 \leq n \leq N.$$

Lako se vidi da vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\big[S_{n+1} S_N - \sum_{k=1}^{n+1} \sigma_k^2 \mid \mathcal{F}_n\big] \\
&= \mathbb{E}[(S_n + \xi_{n+1})(S_n + \xi_{n+1} + \cdots + \xi_N) \mid \mathcal{F}_n] - \sum_{k=1}^{n+1} \sigma_k^2 \\
&= S_n^2 + \sigma_{n+1}^2 - \sum_{k=1}^{n+1} \sigma_k^2 \\
&= S_n^2 - \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2.
\end{aligned}$$

Slično se izvede

$$\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] = S_n^2 - \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2.$$

Iz prethodnih jednakosti slijedi da je $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n]$. *Stoga je* $(X_n, 1 \leq n \leq N)$ *približno-martingal, gdje je* $X_n = S_n S_N - \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$.
Nadalje, neka je $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *niz nezavisnih slučajnih varijabli s očekivanjem* 0 *i* $Var(\xi_n) = \sigma_n^2$. *Definiramo* $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_k : 1 \leq k \leq n\}$. *Neka su* S_n *i* X_n *definirani kao na početku primjera. Za fiksan* N, $(X_n : 1 \leq n \leq N)$ *je približno-martingal. Također, familija* $(X_n, n \geq N)$ *je martingal.*

Primjer 1.5. *Neka je* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *niz nezavisnih slučajnih varijabli s očekivanjem* 0 *i* $Var(\xi_n) = \sigma_n^2$. *Stavimo da je* $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_k : 1 \leq k \leq n\}$. *Definiramo* $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. *Za fiksan* N, *promotrimo familiju* $(X_n, 1 \leq n \leq N)$, *gdje je* $X_n = S_n S_N$. *Pokažimo prvo da je ova familija približno-submartingal. Lako se vidi da je*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[S_{n+1} S_N \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[(S_n + \xi_{n+1})(\xi_1 + \cdots + \xi_N) \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[(S_n + \xi_{n+1})^2 \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[S_n^2 + 2S_n \xi_{n+1} + \xi_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] \\
&= S_n^2 + \sigma_{n+1}^2.
\end{aligned}$$

Također vrijedi

$$\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n S_N \mid \mathcal{F}_n] = S_n \mathbb{E}[S_N \mid \mathcal{F}_n] = S_n^2.$$

Stoga je $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n]$ *g.s. pa je* $(X_n, 1 \leq n \leq N)$ *približno-submartingal.*

Teorem 1.1. (Doobova dekompozicija) *Neka je* $X = (X_n, n \geq 0)$ *submartingal. Tada postoji martingal* $M = (M_n, n \geq 0)$ *i slučajni proces* $A = (A_n, n \geq 0)$ *takav da je*

$$0 = A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \cdots \quad g.s.,$$

A_n *je* $\mathcal{F}_{n-1}$*-izmjeriva za sve* $n \geq 1$, *te vrijedi*

$$X = M + A$$

i ta dekompozicija je jedinstvena g.s.

Primjedba 1.6. *Slučajni proces* $A = (A_n, n \geq 0)$ *sa svojstvom*

$$A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \cdots \quad g.s.$$

zovemo neopadajući proces. Slučajni proces $Y = (Y_n, n \geq 1)$ *takav da je* Y_n $\mathcal{F}_{n-1}$*-izmjerivo za sve* $n \geq 1$ *zove se predvidiv proces. Dakle, slučajni proces* A *iz tvrdnje gornjeg teorema je predvidiv, neopadajući proces koji se naziva kompenzator submartingala* X.

Dokaz

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Za početak definirajmo

$$A_0 = 0, \quad M_0 = X_0 \quad t.d. \quad X_0 = M_0 + A_0.$$

Nadalje, induktivno definiramo

$$A_n := A_{n-1} + \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1}, \quad M_n := X_n - A_n.$$

Kako je

$$\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \geq X_{n-1},$$

slijedi

$$A_n \geq A_{n-1} \quad g.s.$$

Iz pretpostavke indukcije znamo da je $A_{n-1}\mathcal{F}_{n-2} \subset \mathcal{F}_{n-1}$-izmjerivo, a $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1}$ je $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjerivo. Prema tome, A_n je $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriv. Sada računamo sljedeće uvjetno očekivanje

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[X_n - A_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - A_n \\
&= (X_{n-1} + A_n - A_{n-1}) - A_n \\
&= X_{n-1} - A_{n-1} \\
&= M_{n-1}.
\end{aligned}$$

Pokažimo sada jedinstvenost. U tu svrhu, neka je $X = M' + A'$ dodatna dekompozicija. Tada je proces $Y := M - M' = A' - A$ martingal pa je

$$\mathbb{E}[Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = Y_{n-1} \quad g.s.$$

Proces Y je i predvidiv pa je

$$\mathbb{E}[Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = Y_n \quad g.s.$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako je $Y_0 = A'_0 - A_0 = 0$, iterativno dobivamo da je $Y_n = 0$ g.s. za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa je tražena dekompozicija jedinstvena gotovo sigurno.

□

Doobova dekompozicija koja prikazuje submartingal kao sumu martingala i predvidivog rastućeg procesa je važan rezultat koji je temelj za teoriju stohastičkih integrala (vidi [14]).

Definicija 1.9. *Slučajni proces $X = (X_n, n \geq 0)$ za koji vrijedi $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$ za sve $n \geq 0$ zovemo kvadratno-integrabilan slučajni proces.*

Primjer 1.6. *Doobova dekompozicija se analogno definira za približno-submartingal. Stoga pronađimo ovu dekompoziciju za približno-submartingal iz Primjera 1.5. Prisjetimo se iz Primjera 1.4. da je familija $(Z_n, 1 \leq n \leq N)$ približno-submartingal, gdje je $Z_n = S_n S_N - \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$.*
Ovo nas motivira da definiramo M_n i A_n na sljedeći način:

$$M_n = \begin{cases} S_1 S_N, & n = 1 \\ S_n S_N - \sum_{k=2}^n \sigma_k^2, & n \geq 2, \end{cases}$$

$$A_n = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ \sum_{k=2}^n \sigma_k^2, & n \geq 2. \end{cases}$$

Uočimo da je $M_n = Z_n + \sigma_1^2$. Stoga je M_n približno-submartingal. Sada se lako vidi da je Doobova dekompozicija od $S_n S_N$ dana s

$$S_n S_N = M_n + A_n, \qquad 1 \leq n \leq N.$$

Potrebno je istaknuti razliku između martingalnog slučaja i približno-martingalnog. Prepostavimo da je X_n kvadratno integrabilan martingal. Tada je X_n^2 submartingal. Međutim, za kvadratno integrabilan približno-martingal X_n, generalno ne vrijedi da je X_n^2 približno-submartingal.

1.2. Martingalna transformacija i teorem o opcionalnom zaustavljanju

U sljedećem poglavlju razmatrat ćemo specifične strategije kockanja. Upravo s tim razmatranjima zaključit ćemo da igre na sreću u pravilu nisu poštene i idu u korist kockarnice. Pogledajmo kako ćemo to matematički zapisati. Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces takav da su slučajne varijable X_n integrabilne i $\Delta_n = X_n - X_{n-1}$ dobitak/gubitak po jedinici uloga u n-toj igri, tada za našu igru vrijedi

$$0 \geq \mathbb{E}[\Delta_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}].$$

Također, kada govorimo o pravednoj igri, u gornjem izrazu imamo jednakost. Prema tome, pravednu igru modeliramo martingalom, dok je supermartingal logičan model za realne igre na sreću.
U ovom poglavlju želimo otkriti kako efikasno kockati, tj. želimo pronaći strategiju kockanja koja će nam omogućiti pravednu igru. Pretpostavimo da neposredno prije n-te igre uložimo iznos H_n u nekoj igri na sreću. Taj iznos smije ovisiti o ishodima igre u prethodnim trenucima i također ne može ovisiti o ishodu u trenutku n. Matematičkim rječnikom, ako je $\mathbb{F}^0$ prirodna filtracija procesa X, H_n mora biti $\mathcal{F}^0_{n-1}$-izmjeriva slučajna varijabla. Dobitak/gubitak u n-toj igri jednak je

$$H_n\Delta_n = H_n(X_n - X_{n-1}),$$

a ukupni dobitak do n-te igre

$$\sum_{m=1}^{n} H_m\Delta_m = \sum_{m=1}^{n} H_m(X_m - X_{m-1}).$$

Probajmo sada pronaći traženu strategiju kockanja.

Definicija 1.10. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor s filtracijom $\mathbb{F}$, neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ adaptiran slučajni proces i $H = (H_n : n \geq 0)$ predvidiv slučajni proces. Martingalna transformacija procesa X s obzirom na proces H je slučajni proces $H \cdot X = ((H \cdot X)_n : n \geq 0)$ definiran sa:*

$$(H \cdot X)_n := H_0X_0 + \sum_{m=1}^{n} H_m(X_m - X_{m-1}), \quad n \geq 0.$$

Sljedeći teorem nam govori: *ne možeš prevariti sustav.*

Teorem 1.2. *Neka je $H = (H_n : n \geq 0)$ predvidiv proces takav da je H_n ograničena slučajna varijabla za svaki $n \geq 0$.*

1. *Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ supermartingal i $H_n \geq 0$ za sve $n \geq 0$, tada je $H \cdot X$ također supermartingal.*

2. *Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ submartingal i $H_n \geq 0$ za sve $n \geq 0$, tada je $H \cdot X$ također submartingal.*

3. *Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ martingal , tada je $H \cdot X$ također martingal.*

Dokaz

Primjetimo da iz nejednakosti trokuta slijedi sljedeća nejednakost:

$$\mathbb{E} \mid (H \cdot X)_n \mid \leq \mathbb{E}\Big(\mid H_0 \mid\mid X_0 \mid + \sum_{m=1}^{n} \mid H_m \mid\mid X_m - X_{m-1} \mid \Big).$$

Desna strana je integrabilna jer je to zbroj produkata integrabilnih slučajnih varijabli s ograničenim slučajnim varijablama. Uočimo i da je $H \cdot X$ adaptiran. Dokažimo sada tvrdnje teorema:

1. Pretpostavimo da je X supermartingal i neka je $n \geq 0$. Računamo:
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(H \cdot X)_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(H \cdot X)_n + H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n] \\ &= (H \cdot X)_n + \mathbb{E}[H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n] \\ &= (H \cdot X)_n + H_{n+1}\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n]\end{aligned}$$
jer je H_{n+1} $\mathcal{F}_n$-izmjerivo i
$$\leq (H \cdot X)_n$$
jer je $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n] \leq 0$ i $H_{n+1} \geq 0$.

2. Pretpostavimo da je X submartingal i neka je $n \geq 0$. Računamo:
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(H \cdot X)_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(H \cdot X)_n + H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n] \\ &= (H \cdot X)_n + \mathbb{E}[H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n] \\ &= (H \cdot X)_n + H_{n+1}\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n]\end{aligned}$$
jer je H_{n+1} $\mathcal{F}_n$-izmjerivo i
$$\geq (H \cdot X)_n$$
jer je $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n] \geq 0$ i $H_{n+1} \geq 0$.

3. Pretpostavimo da je X martingal i neka je $n \geq 0$. Računamo:
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(H \cdot X)_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(H \cdot X)_n + H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n] \\ &= (H \cdot X)_n + \mathbb{E}[H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n] \\ &= (H \cdot X)_n + H_{n+1}\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n]\end{aligned}$$
jer je H_{n+1} $\mathcal{F}_n$-izmjerivo i
$$= (H \cdot X)_n$$
jer je $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n] = 0$.

□

Sada ćemo definirati vrijeme zaustavljanja T. Primjerice, T je trenutak u kojemu kockar može odlučiti odustati od igre. Hoće li on zaista odmah odustati nakon n-te partije ovisi samo o prethodnim partijama (uključujući i n-tu).

Definicija 1.11. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor s filtracijom $\mathbb{F}$. Funkcija $T : \Omega \to \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ zove se vrijeme zaustavljanja s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$ ako vrijedi:*

$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad za \quad sve \quad n \geq 0.$$

Na primjer, konstantno vrijeme je (trivijalno) vrijeme zaustavljanja.

Primjer 1.7. *1. Neka je $T = m$ determinističko vrijeme, tj. $T(\omega) = m, \forall \omega \in \Omega$. Kako je T konstanta, a znamo da konstanta generira trivijalnu σ-algebru, vrijedi:*

$$\{T = n\} = \Omega, \quad n = m$$

$$\{T = n\} = \emptyset, \quad n \neq m.$$

Stoga je T vrijeme zaustavljanja nekog slučajnog procesa X.

2. Neka je $X = (X_n, n \geq 0)$ slučajni proces adaptiran na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ i neka je $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Vrijeme prvog pogađanja skupa B definiramo s

$$T_B = \min\{n \geq 0 : X_n \in B\}.$$

Kako je

$$\begin{aligned}\{T_B = n\} &= \{\omega \in \Omega : T_B(\omega) = n\} \\ &= \{\omega \in \Omega : X_0(\omega) \notin B, X_1(\omega) \notin B, \ldots, X_{n-1}(\omega) \notin B, X_n(\omega) \in B\} \\ &= \{X_0 \in B^c, X_1 \in B^c, \ldots, X_{n-1} \in B^c, X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \geq 0,\end{aligned}$$

T_B je vrijeme zaustavljanja procesa X.

3. Vrijeme zadnjeg izlaska iz skupa B definiramo s

$$L_B = \max\{n \geq 0 : X_n \in B\}, \quad \max \emptyset = 0.$$

L_B nije vrijeme zaustavljanja jer $\{L_B = n\}$ ovisi o slučajnim varijablama $(X_{m+n}, m \geq 0)$, $\quad n \geq 0$, tj. ovisi o budućnosti procesa X nakon trenutka n pa $\{L_B = n\} \notin \mathcal{F}_n$.

Definicija 1.12. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces i T vrijeme zaustavljanja. Proces zaustavljen u vremenu T, $X^T = (X_n^T : n \geq 0)$ definira se sljedećim izrazom:*

$$X_n^T := X_{T\wedge n} = \begin{cases} X_n & n < T \\ X_T & n \geq T \end{cases}, \quad n \geq 0.$$

Propozicija 1.3. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ (super)martingal i T vrijeme zaustavljanja. Tada je zaustavljeni proces X^T također (super)martingal. U slučaju supermartingala vrijedi*

$$\mathbb{E}X_{T\wedge n} \leq \mathbb{E}X_0, \quad za \quad sve \quad n \geq 0,$$

a u slučaju martingala:

$$\mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_0, \quad za \quad sve \quad n \geq 0.$$

Dokaz

Dokaz propozicije slijedi iz Teorema 1.2. Definirajmo sljedeću strategiju $H = (H_n : n \geq 0)$:

$$H_0 = 0, \quad H_n = 1_{\{n \leq T\}} \quad za \quad n \geq 1,$$

tj. ulažemo jedinični ulog sve do vremena T nakon kojeg prestajemo kockati. Kako je

$$\{n \leq T\} = \{T < n\}^c = \{T \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1},$$

proces H je predvidiv, a i ograničen. Sada računamo martingalnu transformaciju $H \cdot X$:

$$(H \cdot X)_n = \sum_{m=1}^{n} H_m(X_m - X_{m-1}) = \sum_{m=1}^{n} 1_{\{m \leq T\}}(X_m - X_{m-1}) = \sum_{m=1}^{T\wedge n}(X_m - X_{m-1}) = X_{T\wedge n} - X_0.$$

Kako je $H_n \geq 0$, slijedi da je martingalna transformacija (super)martingala opet (super)martingal. Jednakost i nejednakost iz propozicije slijedi direktno iz svojstava (super)martingala.

$\square$

Bitno je uočiti da prethodni teorem ne zahtijeva nikakve dodatne uvjete na integrabilnost (osim naravno onih koji proizlaze iz definicija martingala i supermartingala). Međutim, ovdje treba biti oprezan. Evo i zašto. Neka je X slučajna šetnja na $\mathbb{N}$ koja kreće iz 0. Tada je X martingal (pod uvjetom da je očekivanje spomenute slučajne šetnje jednako 0). Neka je sada T vrijeme zaustavljanja:

$$T := \inf\{n : X_n = 1\}.$$

Znamo da je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Međutim, iako je

$$\mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_0, \quad \forall n,$$

vrijedi dodatno

$$1 = \mathbb{E}X_T \neq \mathbb{E}X_0 = 0.$$

Želimo znati kada ćemo moći tvrditi da je $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$ za martingal X. Sljedeći teorem će nam dati dovoljne uvjete.

Teorem 1.3. (Doobov teorem o opcionalnom zaustavljanju) *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor te neka je* T *vrijeme zaustavljanja t.d. je* $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.

1. *Neka je* $X = (X_n : n \geq 0)$ *supermartingal. Pretpostavimo da vrijedi jedan od sljedećih uvjeta:*

   (a) T *je omeđeno, tj. postoji* $N > 0$ *t.d. je* $T(\omega) \leq N$ *za sve* $\omega \in \Omega$;

   (b) X *je omeđen, tj. postoji* $K > 0$ *t.d. je* $\mid X_n(\omega) \mid \leq K$ *za sve* $\omega \in \Omega$ *i za sve* $n \geq 0$;

   (c) $\mathbb{E}T < \infty$, *te postoji* $K \geq 0$ *t.d.* $\mid X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega) \mid \leq K$ *za sve* $\omega \in \Omega$ *i sve* $n \geq 0$.

   Tada je X_T *integrabilna slučajna varijabla i vrijedi* $\mathbb{E}X_T \leq \mathbb{E}X_0$.

2. *Ako je* X *martingal i vrijedi jedno od svojstava (a)-(c), tada je* X_T *integrabilna i vrijedi* $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$.

<u>**Dokaz**</u>

1. Iz Propozicije 1.2. znamo da je $(X_{T\wedge n} : n \geq 0)$ supermartingal i da je $\mathbb{E}X_{T\wedge n} \leq \mathbb{E}X_0$ za sve $n \geq 0$.

   (a) Ako stavimo da je $n = N$, dobivamo: $X_{T\wedge N} = X_T$ i $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_{T\wedge N} \leq \mathbb{E}X_0$.

   (b) Kako je $\mid X_{T\wedge n} \mid \leq K$, možemo primjeniti teorem o dominiranoj konvergenciji (vidi [12]). Prema tome:

   $$\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{T\wedge n} \leq \mathbb{E}X_0.$$

   (c) Uočimo:

   $$\mid X_{T\wedge n} \mid = \mid X_0 + \sum_{m=1}^{T\wedge n}(X_m - X_{m-1}) \mid \leq \mid X_0 \mid + \sum_{m=1}^{T\wedge n} \mid X_m - X_{m-1} \mid \leq \mid X_0 \mid + KT$$

   Prema pretpostavci teorema, slučajna varijabla $\mid X_0 \mid + KT$ je integrabilna, pa tvrdnju dokazujemo primjenom teorema o dominiranoj konvergenciji.

2. Kako je X martingal, X^T je također martingal i vrijedi $\mathbb{E}[X_n^T] = \mathbb{E}[X_0], \forall n \in \mathbb{N}_0$.

   (a) Pretpostavimo da je T ograničena. Tada za $n = N$ vrijedi $X_{T\wedge N} = X_T$ pa je $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_{T\wedge N} = \mathbb{E}X_0$.

   (b) Pretpostavimo da je X ograničen, tj. $\mid X_{T\wedge n} \mid\leq K$. Tada je

$$\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} X_n^T] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{T\wedge n}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}X_0.$$

   (c) Tvrdnja slijedi iz dokaza tvrdnji 1.(c) i 2.(b)

□

Primjer 1.8. *Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s vrijednostima -1 i 1 i parametrom $p \in (0, \frac{1}{2})$ t.d. $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p$. Sada definirajmo proces X na sljedeći način:*

$$X_0 = 0, \quad X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j.$$

Za $p = \frac{1}{2}$, proces X je martingal, a kad p poprima vrijednosti iz intervala $(0, \frac{1}{2})$, X je supermartingal. U sljedećem koraku definiramo strategiju kockanja $H = (H_n : n \geq 1)$ i to na sljedeći način:

$$H_1 = 1, \qquad H_n = \begin{cases} 2H_{n-1}, & Y_{n-1} = -1 \\ 1, & Y_{n-1} = 1 \end{cases} \quad za \quad n \geq 2.$$

Ovako definirana strategija nam zapravo govori da u slučaju gubitka, u sljedećem koraku udvostručimo naš ulog. Ukoliko dobijemo, ova strategija nam govori da uložimo jednu novčanu jedinicu. Takva kockarska strategija se naziva martingal. Prema teoremu o martingalnoj transformaciji, proces $H \cdot X$ je supermartingal za $p \in (0, \frac{1}{2})$, dok je za $p = \frac{1}{2}$, taj proces martingal. Za vrijeme zaustavljanja T uzimamo geometrijsku slučajnu varijablu s parametrom p, tj. $T = min\{n \geq 1 : Y_n = 1\}$. Vrijedi: $\mathbb{E}T = \frac{1}{p}$ i $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Zanima nas koliki je ukupni dobitak u trenutku kada prvi put dobijemo u igri, tj. zanima nas $(H \cdot X)_T$. Kako su vrijednosti strategije H u trenucima $1, 2, \ldots, T$ bile redom jednake $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{T-2}, 2^{T-1}$, te su u istim trenucima dobici $H_m(X_m - X_{m-1}) = H_m Y_m$ bili jednaki $-1, -2, -2^3, \ldots, -2^{T-2}, -2^{T-1}$, slijedi:

$$(H \cdot X)_T = \sum_{m=1}^{T} H_m(X_m - X_{m-1}) = \sum_{m=1}^{T-1} -2^{m-1} + 2^{T-1} = 1.$$

Nadalje, uočimo da je zaustavljeni proces $(H \cdot X)^T$ supermartingal za $p \in (0, \frac{1}{2})$ i martingal za $p = \frac{1}{2}$. Kako je $(H \cdot X)_T = 1$, zaključujemo da ne vrijedi sljedeće:

$$\mathbb{E}[(H \cdot X)_T] \leq \mathbb{E}[(H \cdot X)_1] = 0.$$

Prethodnim razmatranjima zaključili smo da je naš dobitak u trenutku kada prestanemo sa kockanjem, u trenutku T jednak 1. Znači da ovako definirana strategija sigurno vodi do dobitka koji je jednak početnom ulogu. Izračunajmo sada ukupni očekivani ulog do prve igre u kojoj dobivamo:

$$\sum_{m=1}^{T-1} = 2^{T-1} - 1.$$

Također, vrijedi:

$$\mathbb{E}[2^{T-1}] = \sum_{n=1} 2^{n-1} p(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=0}^{\infty} [2(1-p)]^n = \infty.$$

1.3. Primjeri martingala u diskretnom vremenu

Primjer 1.9. (De Moivreov martingal) *Oko jednog stoljeća prije nego su martingali postali popularni među pariškim kockarima, Abraham de Moivre je koristio (matematičke) martingale da bi odgovorio na pitanje "kockarove propasti". Jednostavna slučajna šetnja na skupu $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ se zaustavlja kada prvi puta pogodi apsorbirajuću barijeru u 0 ili u N. Kolika je vjerojatnost da će se zaustaviti u barijeri 0, tj. da će doći do totalnog gubitka?*
Neka su $X_1, X_2, \ldots$ koraci šetnje i neka je S_n pozicija nakon n koraka, pri čemu je $S_0 = k$. S_0 nam predstavlja početni kapital kockara, a S_n iznos s kojim on raspolaže u n-toj igri. Koraci šetnje, tj. varijable X_i označavaju iznos kockarevog dobitka ili gubitka u i-toj partiji igre. Definiramo $Y_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ gdje je $p = \mathbb{P}(X_i = 1)$, $\quad p + q = 1$ i $0 < p < 1$. Uvodimo filtraciju: $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Sada tvrdimo da je

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = Y_n, \quad \forall n.$$

Ako je S_n jednako 0 ili N tada je proces zaustavljen u vremenu n što povlači da je $S_{n+1} = S_n$ pa je $Y_{n+1} = Y_n$. Ako je $0 < S_n < N$, tada je

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{q}{p}\Big)^{S_n + X_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\Big] \\ &= \Big(\frac{q}{p}\Big)^{S_n}\Big[p\frac{q}{p} + q\Big(\frac{q}{p}\Big)^{-1}\Big] = Y_n,\end{aligned}$$

pa smo pokazali navedenu tvrdnju. Promotrimo li očekivanje od $\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$, slijedi da je $\mathbb{E}[Y_{n+1}] = \mathbb{E}[Y_n]$ za sve n pa je $\mathbb{E} \mid Y_n \mid = \mathbb{E} \mid Y_0 \mid = \left(\frac{q}{p}\right)^k$, za sve n. Specijalno, Y je martingal s obzirom na filtraciju $\mathcal{F}$.
Neka je T broj koraka prije apsorbcije u trenutku ili 0 ili N. De Moivre je tvrdio sljedeće: $\mathbb{E}[Y_n] = \left(\frac{q}{p}\right)^k$ za sve n pa je stoga $\mathbb{E}[Y_T] = \left(\frac{q}{p}\right)^k$. Ukoliko prihvatimo ovu tvrdnju kao točnu, tada je odgovor na početno pitanje sljedeća njezina jednostavna

posljedica. Raspisivanjem $\mathbb{E}[Y_T]$*, dobivamo*

$$\mathbb{E}(Y_T) = \left(\frac{q}{p}\right)^0 p_k + \left(\frac{q}{p}\right)^N (1 - p_k),$$

gdje je $p_k = \mathbb{P}(apsorbirano\ u\ 0 \mid S_0 = k)$*. Nadalje, prema pretpostavci je* $\mathbb{E}[Y_T] = \left(\frac{p}{q}\right)^k$ *zbog čega je*

$$p_k = \frac{\rho^k - \rho^N}{1 - \rho^N}, \qquad \rho = \frac{q}{p}.$$

Ovo je vrlo korisna metoda koja se oslanja na činjenicu da je $\mathbb{E}[Y_T] = \mathbb{E}[Y_0]$*.*

Primjer 1.10. *Neka je* $(Y_n : n \geq 1)$ *niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli s distribucijom zadanom na sljedeći način:*

$$\mathbb{P}(Y_n = -1) = \mathbb{P}(Y_n = +1) = \frac{1}{2}.$$

Nadalje, neka je $S = (S_n : n \geq 0)$ *jednostavna simetrična slučajna šetnja, tj.:*

$$S_0 = 0, \quad S_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n.$$

Sa T *definirajmo vrijeme prvog pogađanja stanja 1:*

$$T := min\{n > 0 : S_n = 1\}$$

te pokažimo da je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ *i odredimo distribuciju slučajne varijable* T*. Da bismo to napravili, najbitnije nam je pronaći pogodan martingal.*
Neka je $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \sigma(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ *i* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$*. Kako za fiksan realan broj* λ *vrijedi da je*

$$\mathbb{E}\big[e^{\lambda Y_n}\big] = \frac{1}{2}\big(e^{\lambda} + e^{-\lambda}\big) = \cosh\lambda$$

slijedi:

$$\mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda Y_n}}{\cosh\lambda}\right] = 1.$$

Uočimo i da je niz $(\frac{e^{\lambda Y_n}}{\cosh\lambda}, n \geq 1)$ *niz nezavisnih slučajnih varijabli. Definirajmo novi slučajni proces* $X = (X_n, n \geq 0)$ *na sljedeći način:*

$$X_0 := 1, \quad X_n := \prod_{j=1}^{n} \frac{e^{\lambda Y_j}}{\cosh\lambda} = \frac{e^{\lambda S_n}}{(\cosh\lambda)^n}, \quad n \geq 1.$$

Ovako definiran slučajni proces je martingal (vidi [14] Primjer 1.48.). Znamo da je T *vrijeme zaustavljanja s obzirom na filtraciju* $\mathbb{F}$ *pa možemo primjeniti teorem o opcionalnom zaustavljanju na ograničeno vrijeme zaustavljanja* $T \wedge n$ *iz čega dobivamo:*

$$1 = \mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}[X_{T\wedge n}] = \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda S_{T\wedge n}}}{(\cosh\lambda)^{T\wedge n}}\right], \quad n \geq 1.$$

Pretpostavimo sada da je $\lambda > 0$. *Uočimo da je* $S_{T\wedge n} \leq 1$ *iz čega slijedi da je za svaki* $n \geq 1$, $e^{\lambda S_{T\wedge n}} \leq e^{\lambda}$. *Znamo i da je* $\cosh x \geq 1$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *iz čega slijedi da je* $X_{T\wedge n} \leq e^{\lambda} \leq e^{\lambda}$ *za svaki* $n \geq 1$. *Nadalje, vrijedi:*

$$1 = \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda S_{T\wedge n}}}{(\cosh\lambda)^{T\wedge n}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda S_{T\wedge n}}}{(\cosh\lambda)^{T\wedge n}} 1_{\{}T < \infty\}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda S_n}}{(\cosh\lambda)^{n}} 1_{T=\infty}\right]. \tag{1.1}$$

Pustimo $n \to \infty$. *Za događaj* $\{T = \infty\}$ *vrijedi:* $S_n \leq 0$ *iz čega slijedi da je* $e^{\lambda S_n} \leq 1$ *za sve* $n \geq 0$. *Kako* $(\cosh\lambda)^n \to \infty$, *prema teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[\frac{e^{\lambda S_n}}{(\cosh\lambda)^{n}} 1_{T=\infty}\big] = 0.$$

Promotrimo sada događaj $\{T < \infty\}$. *Za njega vrijedi sljedeće:*

$$\lim_{n\to\infty} e^{\lambda S_{T\wedge n}} = e^{\lambda S_T} = e^{\lambda}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} (\cosh\lambda)^{T\wedge n} = (\cosh\lambda)^{T}. \tag{1.2}$$

Sada, iz teorema o dominiranoj konvergenciji dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[\frac{e^{\lambda S_{T\wedge n}}}{(\cosh\lambda)^{T\wedge n}} 1_{\{T<\infty\}}\big] = \mathbb{E}\big[\frac{e^{\lambda}}{(\cosh\lambda)^{T}} 1_{\{T<\infty\}}\big]. \tag{1.3}$$

Sada iz 1.1., 1.2. i 1.3. slijedi:

$$1 = \mathbb{E}\big[\frac{e^{\lambda}}{(\cosh\lambda)^{T}} 1_{\{T<\infty\}}\big],$$

tj.

$$\mathbb{E}\big[\frac{1}{(\cosh\lambda)^{T}} 1_{\{T<\infty\}}\big] = e^{-\lambda}. \tag{1.4}$$

Pustimo sada $\lambda \to \infty$. *Vrijedi:*

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\cosh\lambda} = 1.$$

Kako je $0 < \frac{1}{\cosh\lambda} \leq 1$, *možemo primjeniti teorem o dominiranoj konvergenciji iz čega dobivamo:*

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \mathbb{E}[1_{\{T<\infty\}}] = \lim_{\lambda\to 0} e^{-\lambda} = 1.$$

Iz izraza 1.4. slijedi:

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{(\cosh\lambda)^{T}}\right] = e^{-\lambda}. \tag{1.5}$$

Stavimo da je

$$\alpha = \frac{1}{\cosh\lambda} = \frac{2}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}} < 1,$$

odakle rješavanjem kvadratne nejednadžbe dobivamo:

$$e^{-\lambda} = \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} < 1.$$

Uvrstimo to u 1.5. i iskoristimo razvoj u Taylorov red funkcije $\alpha \to \sqrt{1 - \alpha^2}$ *pa dobivamo:*

$$\mathbb{E}[\alpha^T] = \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \binom{\frac{1}{2}}{m} \alpha^{2m-1}.$$

Nadalje, funkcija izvodnica vjerojatnosti od T *je jednaka:*

$$\mathbb{E}[\alpha^T] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T = n)\alpha^n$$

pa je

$$\mathbb{P}(T = n) = \begin{cases} (-1)^{m+1}\binom{\frac{1}{2}}{m} & n = 2m - 1 \\ 0 & n = 2m \end{cases}.$$

Primjer 1.11. *Markovljev lanac (vidi [14]) ima svojstvo da je njegovo ponašanje u neposrednoj budućnosti, uvjetno na njegovu sadašnjost i prošlost jednako ponašanju tog Markovljevog lanca u neposrednoj budućnosti uvjetno samo na sadašnjost. U ovom primjeru cilj nam je pronaći vezu između Markovljevih lanaca i supermartingala. Za početak, definirajmo dva pojma koja će nam kasnije biti potrebna:*

Neka je S *prebrojiv skup i neka je* $h : S \to [0, \infty)$ *nenegativna funkcija. Definiramo novu funkciju* $Ph : S \to [0, \infty)$ *na sljedeći način:*

$$Ph(i) := \sum_{j \in S} p(i, j)h(j). \tag{1.6}$$

1. *Funkcija* h *se zove superharmonijska ako vrijedi:* $Ph \leq h$ *na* S.

2. *Funkcija* h *se zove harmonijska ako vrijedi:* $Ph = h$ *na* S.

Neka je S *prebrojivi skup, a* $X = (X_n : n \geq 0)$ *slučajni proces na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *koji ima vrijednosti u skupu* S *s početnom distribucijom* μ *takvom da je:*

$$\mu(j) = \mathbb{P}(X_0 = j), \quad P = (p(i, j) : i, j \in S),$$

gdje je $[P]$ *stohastička matrica. Za* $n \geq 0$ *definiramo* σ*-podalgebre*

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n), \quad n \geq 0.$$

Pretpostavimo sada da je X *Markovljev lanac, tj. vrijedi Markovljevo svojstvo:*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid \mathcal{F}_n) = p(X_n, j).$$

Ako je $f : S \to [0, \infty)$, tada prethodno Markovljevo svojstvo poprima sljedeći oblik:

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\sum_{j\in S} f(X_{n+1})1_{\{X_{n+1}=j\}} \mid \mathcal{F}_n],$$

dok iz uvjetnog teorema o monotonoj konvergenciji slijedi dodatno:

$$\mathbb{E}\big[\sum_{j\in S} f(j)1_{\{X_{n+1}=j\}} \mid \mathcal{F}_n\big] = \mathbb{E}\sum_{j\in S} f(j)\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid \mathcal{F}_n) = \sum_{j\in S} p(X_n, j)f(j).$$

Neka je funkcija h definirana sa 1.6. superharmonijska. Iz prethodne jednakosti slijedi:

$$\mathbb{E}[h(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \sum_{j\in S} p(X_n, j)h(j) = Ph(X_n) \leq h(X_n), \quad n \geq 0.$$

pa je slučajni proces $(h(X_n) : n \geq 0)$ nenegativni supermartingal. Primjetimo kako to vrijedi za svaku početnu distribuciju μ.
Definiramo novu funkciju f:

$$f(i, j) := \mathbb{P}_i(T_j < \infty), \quad i, j \in S,$$

gdje je $\mathbb{P}_i(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = i)$, a $T_j = min\{n \geq 1 : X_n = j\}$ prvo vrijeme povratka u j. Pretpostavimo da je X ireducibilan (svako stanje ovoga Markovljevog lanca je dostižno iz svih ostalih stanja) i povratan (Markovljev lanac se vraća u svako stanje iz kojega je krenuo). To znači da je $f(i, j) = 1$ za sve $i, j \in S$. Vrijedi sljedeća implikacija:

$$\mathbb{P}_i(T_j < \infty) = f(i, j) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}_i[h(X_{T_j}] = h(j).$$

Kako je $(h(X_n) : n \geq 0)$ supermartingal, vrijedi:

$$\mathbb{E}_i[h(X_{T_j})] \leq h(i).$$

Prethodne dvije tvrdnje nam zajedno daju da je $h(j) < h(i)$ za proizvoljne $i, j \in S$ iz čega slijedi da je funkcija h konstantna funkcija. Prema tome, svaka superharmonijska funkcija ireducibilnog i povratnog Markovljevog lanca je konstanta.

Primjer 1.12. (Markovljevi lanci) *Neka je X Markovljev lanac u diskretnom vremenu sa prebrojivim skupom stanja S i matricom prijelaza $\boldsymbol{P}$. Pretpostavimo da je $\psi : S \to S$ omeđena harmonijska funkcija, tj.*

$$\sum_{j\in S} p_{ij}\psi(j) = \psi(i), \quad \forall i \in S.$$

Direktnom primjenom Markovljevog svojstva se vidi da je $Y = (\psi(X_n) : n \geq 0)$ martingal s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \geq 0)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$:

$$\mathbb{E}\big[\psi(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\big] = \mathbb{E}\big[\psi(X_{n+1}) \mid X_n\big] = \sum_{j\in S} p_{X_{n,j}}\psi(j) = \psi(X_n).$$

Općenitije, pretpostavimo da je ψ desni svojstveni vektor od $\boldsymbol{P}$. Tada, po definiciji svojstvenog vektora, postoji $\lambda \neq 0$ takav da je

$$\sum_{j \in S} p_{ij} \psi(j) = \lambda \psi(i), \quad i \in S.$$

Tada je

$$\mathbb{E}[\psi(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = \lambda \psi(X_n),$$

što implicira da je sa $\lambda^{-n}\psi(X_n)$ definiran martingal dokle god je $\mathbb{E} \mid \psi(X_n) \mid < \infty$ za sve n.

1.4. Konvergencija martingala

U ovom poglavlju se bavimo konvergencijom martingala i to gotovo sigurno i u prostoru $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), p > 1$ svih slučajnih varijabli X na Ω t.d. je

1. $\mathbb{E}[X^p] < \infty$
2. $\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$.

Za konvergenciju gotovo sigurno bitna nam je sljedeća karakterizacija konvergencije niza realnih brojeva. Neka je $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ niz realnih brojeva i neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$. Definiramo:

$$t_0 := -1,$$

$$t_{2k-1} := \min\{m > t_{2k-2} : x_m \leq a\}, \quad k \geq 1,$$

$$t_{2k} := \min\{m > t_{2k-1} : x_m \geq b\}, \quad k \geq 1,$$

pri čemu je $\min \emptyset = \infty$. Primjetimo da je $x(t_{2k-1}) \leq a$ i $x(t_{2k}) \geq b$, što interpretiramo na sljedeći način: niz x između t_{2k-1} i t_{2k} radi prijelaz od ispod nivoa a do iznad nivoa b. Sada možemo definirati sljedeća dva pojma. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Ukupan broj prelazaka intervala $[a, b]$ prema gore niza x do trenutka n označavamo sa u_n i definiramo sa

$$u_n = u_n([a, b]) = \max\{k : t_{2k} \leq n\}.$$

Ukupan broj prelazaka intervala $[a, b]$ prema gore niza x označavamo sa u i definiramo sa

$$u = u([a, b]) = \lim_{n \to \infty} u_n([a, b]) = \sup\{k : t_{2k} < \infty\}.$$

Sljedeća lema nam daje bitno svojstvo nizova realnih brojeva. U ovom radu će biti i dokazana, a potrebna nam je da bismo dokazali *teorem o konvergenciji submartingala.*

Lema 1.1. *Neka je $x : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ niz realnih brojeva. Tada $\lim_{n\to\infty} x_n \in [-\infty, +\infty]$ postoji ako i samo ako za sve $a, b \in \mathbb{Q}$ takve da je $a < b$ vrijedi da je $u([a, b]) < \infty$.*

Dokaz

$\Rightarrow$ Pretpostavimo da je $u([a.b]) < \infty$ za sve $a, b \in \mathbb{Q}, a < b$. Treba pokazati da $\lim_{n\to\infty} x_n \in [-\infty, +\infty]$ postoji. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da niz $(x_n : n \geq 0)$ ne konvergira u. Tada je $\liminf_n x_n < \limsup_n x_n$ pa postoje $a, b \in \mathbb{Q}$ za koje vrijedi $\liminf_n x_n < a < b < \limsup_n x_n$. Iz toga slijedi da je $u([a, b]) = \infty$ što je kontradikcija sa pretpostavkom. Prema tome, $\lim_{n\to\infty} x_n \in [-\infty, +\infty]$ postoji.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da $\lim_{n\to\infty} x_n \in [-\infty, +\infty]$ postoji. Treba pokazati da je tada $u([a, b]) < \infty$. Pretpostavimo suprotno: neka postoje $a, b \in \mathbb{Q}, a < b$ takvi da je $u([a, b]) = \infty$. Tada niz $(x_n : n \geq 0)$ sadrži beskonačno mnogo članova manjih od a i beskonačno mnogo člnanova većih od b. Prema tome, $\liminf_n x_n \leq a < b \leq \limsup_n x_n$ pa niz $(x_n : n \geq 0)$ ne kovergira, a to je kontradikcija sa pretpostavkom. Prema tome, $u([a, b]) < \infty$.

$\square$

Sada ćemo razmatranje s početka poglavlja provesti i za submartingal $X = (X_n : n \geq 0)$. Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Definiramo

$$T_0 := -1,$$

$$T_{2k-1} := \min\{m > T_{2k-2} : X_m \leq a\}, \quad k \geq 1,$$

$$T_{2k} := \min\{m > T_{2k-1} : X_m \geq b\}, \quad k \geq 1.$$

Tako definirani, T_{2k-1} i T_{2k} za $k \geq 1$ su vremena zaustavljanja. Kako je $X(T_{2k-1}) \leq a$ i $X(T_{2k}) \geq b$, prethodne definicije možemo koristiti za sljedeću interpretaciju: submartingal X u vremenskom razdoblju između vremena zaustavljanja T_{2k-1} i T_{2k} napravi prijelaz od ispod nivoa a do iznad nivoa b . Neka je sada $n \in \mathbb{N}$. Ukupan broj prelazaka intervala $[a, b]$ prema gore submartingala X do trenutka n označavamo sa U_n i definiramo sa

$$U_n = U_n([a, b]) = \max\{k : T_{2k} \leq n\}.$$

Ukupan broj prelazaka intervala $[a, b]$ prema gore submartingala X označavamo sa U i definiramo sa

$$U = U([a, b]) = \lim_{n\to\infty} U_n([a, b]) = \sup\{k : T_{2k} < \infty\}.$$

Uočimo da vrijedi

$$\{T_{2k-1} < m \leq T_{2k}\} = \{T_{2k-1} \leq m - 1\} \cap \{T_{2k} \leq m - 1\}^c \in \mathcal{F}_{m-1}.$$

Prema tome, ukoliko slučajni proces $H = (H_m : m \geq 0)$ definiramo izrazom

$$H_m := \begin{cases} 1, & \text{ako je } m \in (T_{2k-1}, T_{2k}] \text{ za neki } k \geq 0 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

H je predvidiv proces. Primijetimo i da je $H_m = 1$ za sve trenutke m u kojima submartingal X radi prijelaz od ispod nivoa a do iznad nivoa b.

Lema 1.2. (Nejednakost prelazaka) *Neka je $X = (X_m : m \geq 0)$ submartingal. Tada za sve $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ i sve $n \geq 0$ vrijedi:*

$$(b-a)\mathbb{E}[U_n] \leq \mathbb{E}[(X_n - a)^+] - \mathbb{E}[(X_0 - a)^+],$$

pri čemu je $U_n = U_n([a, b])$ i gdje je

$$(X_n - a)^+ = \max\{0, X_n - a\}$$

$$(X_0 - a)^+ = \max\{0, X_0 - a\}.$$

Dokaz

Definirajmo novi proces $Y = (Y_m : m \geq 0)$ sa $Y_m := (X_m - a)^+$. Proces Y je submartingal. Uočimo da je broj prelazaka prema gore segmenta $[0, b-a]$ za Y jednak broju prelazaka prema gore segmenta $[a, b]$ za X. Neka su T_{2k-1} i T_{2k} vremena zaustavljanja za Y i neka je $H = (H_m : m \geq 0)$ predvidivi proces za proces Y. Sada računamo martingalnu transformaciju $(H \cdot Y)_n$:

$$(H \cdot Y)_n = \sum_{m=1}^{n} H_m(Y_m - Y_{m-1}) = \sum_{m=1}^{n} 1_{\{H_m = 1\}}(Y_m - Y_{m-1}).$$

Uočimo da je $H_m = 1$ samo za trenutke m za koje vrijedi da je $T_{2k-1} < m \leq T_{2k}$ za proizvoljni k, tj. za trenutke m u kojima Y radi prijelaz od ispod nivoa 0 do iznad nivoa $b - a$. Zbroj prirasta $Y_m - Y_{m-1}$ po svim trenucima m unutar takvog dovršenog prijelaza nije manji od $b - a$. Kako smo U_n definirali kao broj dovršenih prijelaza do vremena n, oni u prethodnoj sumi doprinose barem $(b-a)U_n$. Posebno još promotrimo zadnji prijelaz koji bi mogao biti nedovršen. Pretpostavimo da taj prijelaz započinje u vremenu $K < n$. Tada je $Y_K = 0$ pa je

$$\sum_{m=K}^{n} (Y_m - Y_{m-1}) = Y_n - Y_K = Y_n \geq 0.$$

Iz toga slijedi:

$$(H \cdot Y)_n \geq (b-a)U_n.$$

Sada za $m \geq 1$ definiramo $K_m := 1 - H_m$. Tada je:

$$Y_n - Y_0 = ((H + K) \cdot Y)_n = (H \cdot Y)_n + (K \cdot Y)_n.$$

Iz druge tvrdnje Teorema 1.2. slijedi da je martingalna transformacija $K \cdot Y$ submartingal, pa vrijedi:

$$0 = \mathbb{E}[(K \cdot Y)_0] \leq \mathbb{E}[(K \cdot Y)_n].$$

Sada dobivamo:

$$\mathbb{E}[Y_n] - \mathbb{E}[Y_0] = \mathbb{E}[Y_n - Y_0] \geq \mathbb{E}[(H \cdot Y)_n] \geq (b - a)\mathbb{E}[U_n],$$

što smo i trebali pokazati.

□

Teorem 1.4. (O konvergenciji submartingala) *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ submartingal za koji vrijedi:*

$$\sup_n \mathbb{E}X_n^+ < \infty.$$

Tada postoji $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s. i vrijedi $\mathbb{E} \mid X_\infty \mid < \infty$.

Dokaz ovoga teorema se oslanja na procjenu broja prelazaka submartingala između razina $a < b$.

Dokaz

Neka su $a, b \in \mathbb{Q}$ takvi da je $a < b$. Kako je $(X_n - a)^+ \leq X_n^+ + \mid a \mid$, iz Leme 1.2. dobivamo:

$$\mathbb{E}U_n\big([a, b]\big) \leq \frac{1}{b - a}\big(\mid a \mid + \mathbb{E}X_n^+\big) \leq \frac{1}{b - a}\big(\mid a \mid + \sup_m \mathbb{E}X_m^+\big) < \infty.$$

Niz $(U_n([a, b]) : n \geq 0)$ monotono raste prema $U([a, b])$, pa iz teorema o monotonoj kovergenciji (vidi [12]) dobivamo:

$$\mathbb{E}U([a, b]) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}U_n([a, b]) \leq \frac{1}{b - a}\big(\mid a \mid + \sup_m \mathbb{E}X_m^+\big) < \infty.$$

Prema tome, $U([a, b]) < \infty$ g.s. Kako prebrojivom unijom $\mathbb{P}$-nul skupova dobivamo $\mathbb{P}$-nul skup, vrijedi:

$$\mathbb{P}(U([a, b]) < \infty \quad za \quad sve \quad a, b \in \mathbb{Q}, a < b) = 1.$$

Iz Leme 1.1. zaključujemo:

$$\limsup_{n\to\infty} X_n = \liminf_{n\to\infty} X_n \quad g.s.$$

Sada definiramo:

$$X_\infty := \begin{cases} \limsup_{n\to\infty} X_n, & X_n \quad t.d. \quad \limsup_{n\to\infty} X_n = \liminf_{n\to\infty} X_n \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Ovako definiran X_∞ je slučajna varijabla i vrijedi:

$$X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n \quad g.s.$$

Pokažimo sada da je $\mathbb{E} \mid X_\infty \mid < \infty$. Iz prethodno dokazane tvrdnje slijedi:

$$X_\infty^+ = \lim_{n\to\infty} X_n^+,$$

pa iz Fatouove leme (vidi [12]) dobivamo:

$$\mathbb{E}X_\infty^+ \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n^+ \leq \sup_n \mathbb{E}X_n^+ < \infty.$$

Uočimo da vrijedi:

$$\mathbb{E}X_0 \leq \mathbb{E}X_n \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}X_n^- = \mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_0,$$

pa iz Fatouove leme slijedi i sljedeća tvrdnja:

$$\mathbb{E}X_\infty^- \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n^- < \infty.$$

Dakle, $\mathbb{E} \mid X_\infty \mid < \infty$.

$\square$

Teorem 1.5. (Doobova maksimalna nejednakost) *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ submartingal i $\lambda > 0$. Za $n \geq 0$ definiramo*

$$A = \{\max_{0\leq m\leq n} X_m \geq \lambda\}.$$

Tada vrijedi

$$\lambda\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{E}[X_n 1_A] \leq \mathbb{E}[X_n^+].$$

Dokaz

Definiramo vrijeme T na sljedeći način:

$$T = \inf\{m \geq 0 : X_m \geq \lambda\} \wedge n.$$

Može se pokazati da je T vrijeme zaustavljanja. $X_T \geq \lambda$ na događaju A pa slijedi

$$\lambda\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\lambda 1_A] \leq \mathbb{E}[X_T 1_A]. \tag{1.7}$$

Kako je T omeđeno vrijeme zaustavljanja ($T \leq n$), prema tvrdnji za submartingal iz Teorema 1.3. vrijedi $\mathbb{E}X_T \leq \mathbb{E}X_n$. Na događaju A^c je $T = n$, pa je

$$\mathbb{E}[X_T 1_{A^c}] = \mathbb{E}[X_n 1_{A^c}]$$

iz čega slijedi

$$\mathbb{E}[X_T 1_A] \leq \mathbb{E}[X_n 1_A]. \tag{1.8}$$

Iz tvrdnji 1.7. i 1.8. slijedi $\lambda\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{E}[X_n 1_A]$. Druga nejednakost iz teorema slijedi iz sljedećih nejednakosti

$$X_n 1_A \leq X_n^+ 1_A \leq X_n^+.$$

□

Korolar 1.1. (Kolmogorovljeva nejednakost) *Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}Y_n = 0$ i $\mathbb{E}Y_n^2 < \infty$ za svaki $n \geq 1$, te neka je $S_0 = 0$ i $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n, \quad n \geq 1$. Tada za svaki $x \geq 0$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq m\leq n} | S_m | \geq x) \leq \frac{1}{x^2} Var(S_n).$$

Dokaz

Slučajni proces $(S_n : n \geq 0)$ je martingal. Proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran s $X_n = S_n^2$ je submartingal. Sada, ukoliko u Teoremu 1.5. stavimo $\lambda = x^2$, slijedi

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq m\leq n} | S_m | \geq x) = \mathbb{P}(\max_{1\leq m\leq n} X_m \geq x^2) \leq \frac{1}{x^2}\mathbb{E}[X_n^+] = \frac{1}{x^2}\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{1}{x^2} Var(S_n).$$

□

Lema 1.3. *Neka je Z nenegativna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada za svaki $p \geq 1$ vrijedi*

$$\mathbb{E}[Z^p] = \int_0^\infty pt^{p-1}\mathbb{P}(Z > t)dt.$$

Dokaz

Pomoću Fubinijevog teorema (vidi [12]) računamo

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty pt^{p-1}\mathbb{P}(Z > t)dt &= \int_0^\infty pt^{p-1}\left(\int_\Omega 1_{\{Z>t\}} d\mathbb{P}\right)dt \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^\infty pt^{p-1} 1_{\{Z>t\}} dt\right)d\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^Z pt^{p-1} dt\right)d\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}[Z^p]
\end{aligned}$$

□

Teorem 1.6. (Doobova nejednakost) *Neka je* $X = (X_n : n \geq 0)$ *submartingal i*

$$\overline{X}_n := \max_{0 \leq m \leq n} X_m^+.$$

Tada za svaki $p > 1$ *vrijedi*

$$\mathbb{E}[\overline{X}_n^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[(X_n^+)^p].$$

Specijalno, ako je $Y = (Y_n : n \geq 0)$ *martingal i*

$$Y_n^* := \max_{0 \leq m \leq n} | Y_m |,$$

tada za sve $p > 1$ *vrijedi*

$$\mathbb{E}[| Y_n^* |^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[| Y_n |^p].$$

Dokaz

Kako je $(Y_n, n \geq 0)$ martingal, iz Propozicije 1.2. je $X_n :=| Y_n |$ submartingal i vrijedi $X_n^+ =| Y_n |$ i $\overline{X}_n = Y_n^*$. Prema tome, druga nejednakost teorema slijedi iz prve nejednakosti teorema. Dokažimo i tu nejednakost. $(X_n^+ : n \geq 0)$ je submartingal pa primjenjujemo Teorem 1.5. i dobivamo

$$\mathbb{P}(\overline{X}_n > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[X_n^+ 1_{\{\overline{X}_n > \lambda\}}\right].$$

Iz prethodno dokazane nejednakosti, Leme 1.3. i Fubinijevog teorema slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\overline{X}_n^p] &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathbb{P}(\overline{X}_n > \lambda)d\lambda \\
&\leq \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\left(\lambda^{-1}\int_\Omega X_n^+ 1_{\{\overline{X}_n > \lambda\}} d\mathbb{P}\right)d\lambda \\
&= \int_\Omega X_n^+ \left(\int_0^{\overline{X}_n} p\lambda^{p-2} d\lambda\right) d\mathbb{P} \\
&= \frac{p}{p-1}\int_\Omega X_n^+ \overline{X}_n^{p-1} d\mathbb{P} \\
&\leq q\Big(\mathbb{E}[| X_n^+ |^p]\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\mathbb{E}[| \overline{X}_n |^p]\Big)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

□

Teorem 1.7. (Hoeffdingova nejednakost) *Neka je* Y *martingal. Pretpostavimo da postoji niz realnih brojeva* $K_1, K_2, \ldots$ *t.d. je* $\mathbb{P}(| Y_n - Y_{n-1} | \leq K_n) = 1$ *za sve* n. *Tada je*

$$\mathbb{P}\big(| Y_n - Y_0 | \geq x\big) \leq 2exp\left(\frac{-\frac{1}{2}x^2}{\sum_{i=1}^n K_i^2}\right), \quad x > 0.$$

Gornji teorem nam govori: ako je niz martingalnih razlika omeđen (gotovo sigurno), tada je vjerojatnost da Y_n puno odstupa od svoje inicijalne vrijednosti Y_0 jako mala.

Dokaz

Ako je $\psi > 0$, funkcija $g(d) = e^{\psi d}$ je konveksna, pa je

$$e^{\psi d} \leq \frac{1}{2}(1-d)e^{-\psi} + \frac{1}{2}(1+d)e^{\psi} \quad za \quad | d | \leq 1.$$

Primjenimo to na slučajnu varijablu Δ koja ima očekivanje 0 i zadovoljava $\mathbb{P}(| \Delta | \leq 1) = 1$ te dobivamo

$$\mathbb{E}[e^{\psi \Delta}] \leq \frac{1}{2}(e^{-\psi} + e^{\psi}) < e^{\frac{1}{2}\psi^2}. \tag{1.9}$$

Dokažimo sada tvrdnju teorema. Prema Markovljevoj nejednakosti (vidi [14]) je

$$\mathbb{P}(Y_n - Y_0 \geq x) \leq e^{-\theta x}\mathbb{E}[e^{\theta(Y_n - Y_0)}], \quad \theta > 0. \tag{1.10}$$

Stavimo $\Delta_n = Y_n - Y_{n-1}$, pa je

$$\mathbb{E}[e^{\theta(Y_n - Y_0)}] = \mathbb{E}[e^{\theta(Y_{n-1} - Y_0)} e^{\theta \Delta_n}].$$

Uvjetovanjem na $\mathcal{F}_{n-1}$, dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{\theta(Y_n - Y_0)} \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= e^{\theta(Y_{n-1} - Y_0)}\mathbb{E}[e^{\theta \Delta_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\ &\leq e^{\theta(Y_{n-1} - Y_0)} exp(\frac{1}{2}\theta^2 K_n^2),\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili činjenicu da je razlika $Y_{n-1} - Y_0$ $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriva i tvrdnju 1.9. primjenjenu na slučajnu varijablu $\frac{\Delta_n}{K_n}$. Sada računamo očekivanje prethodnog izraza i taj postupak ponavljamo iterativno čime dobivamo

$$\mathbb{E}[e^{\theta(Y_n - Y_0)}] \leq \mathbb{E}[e^{\theta(Y_{n-1} - Y_0)}] exp(\frac{1}{2}\theta^2 K_n^2) \leq exp(\frac{1}{2}\theta^2 \sum_{i=1}^{n} K_i^2).$$

Prema tome, iz 1.10. slijedi

$$\mathbb{P}(Y_n - Y_0 \geq x) \leq exp(-\theta x + \frac{1}{2}\theta^2 \sum_{i=1}^{n} K_i^2), \qquad \theta > 0.$$

Pretpostavimo sada da je $x > 0$ i stavimo

$$\theta = \frac{x}{\sum_{i=1}^{n} K_i^2},$$

tada je

$$\mathbb{P}(Y_n - Y_0 \geq x) \leq exp\Big(\frac{-\frac{1}{2}x^2}{\sum_{i=1}^{n} K_i^2}\Big), \qquad x > 0.$$

Analogno se pokazuje tvrdnja za $Y_0 - Y_n$, pa tvrdnja teorema slijedi iz tih dviju nejednakosti.

□

Primjer 1.13. *Neka su $X_1, X_2, \dots$ nezavisne slučajne varijable koje imaju Bernoulli-jevu distribuciju sa parametrom p. Stavimo da je $S_n = X_1+X_2+\dots+X_n$ i $Y_n = S_n - np$ da bismo dobili martingal Y. Kao posljedicu Hoeffdingove nejednakosti dobivamo*

$$\mathbb{P}(\mid S_n - np \mid \geq x\sqrt{n}) \leq 2exp\Big(\frac{-\frac{1}{2}x^2}{\mu}\Big), \qquad x > 0,$$

gdje je $\mu = \max\{p, 1-p\}$. Ova nejednakost je jedna od modifikacija Bernsteinove nejednakosti (vidi [13]).

Teorem 1.8. (Konvergencija u $\mathcal{L}^p$) *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ martingal takav da za $p > 1$ vrijedi*

$$\sup_n \mathbb{E}[\mid X_n \mid^p] < \infty.$$

Tada postoji slučajna varijabla X_∞ takva da je $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s. i u $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Dokaz

Prvo primjetimo da vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_n^+ \leq \mathbb{E} \mid X_n \mid &= \mathbb{E}\big[\mid X_n \mid 1_{\{|X_n|\leq 1\}}\big] + \mathbb{E}\big[\mid X_n \mid 1_{\{|X_n|>1\}}\big] \\ &\leq 1 + \mathbb{E}\big[\mid X_n \mid^p 1_{\{|X_n|>1\}}\big] \\ &\leq 1 + \mathbb{E}\big[\mid X_n \mid^p \big].\end{aligned}$$

Zbog gornje nejednakosti i pretpostavke teorema da je

$$\sup_n \mathbb{E}[\mid X_n \mid^p] < \infty,$$

vrijedi

$$\sup_n \mathbb{E}X_n^+ \leq \sup_n (1 + \mathbb{E}[\mid X_n \mid]^p) < \infty.$$

Tada, prema Teoremu 1.4. postoji slučajna varijabla X_∞ takva da je $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s.

Dokažimo sada drugu tvrdnju teorema, tj. konvergenciju u $\mathcal{L}^p$. Definiramo:

$$X_n^* = \max_{1\leq m\leq n} \mid X_m \mid, \qquad X^* = \sup_m \mid X_m \mid .$$

Uz ovakve oznake, za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$X_n^* \leq X_{n+1}^* \leq X^*, \qquad X^* = \lim_{n\to\infty} X_n^*.$$

Iz Teorema 1.6. dobivamo

$$\mathbb{E}\big[(X_n^*)^p\big] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[\mid X_n \mid^p] \leq (\frac{p}{p-1})^p \sup_n \mathbb{E}[\mid X_n \mid^p] < \infty.$$

Zbog pretpostavke teorema, iz Lebesguevog teorema o monotonoj konvergenciji slijedi

$$\mathbb{E}[(X^*)^p] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n^*)^p] \leq \frac{p}{p-1}^p \sup_n \mathbb{E}[\mid X_n \mid^p] < \infty,$$

tj. $X^* \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Kako su slučajne varijable $|X_n|$ i $|X_\infty|$ dominirane p-integrabilnom slučajnom varijablom X^*, po teoremu o dominiranoj konvergenciji zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \mid X_n - X_\infty \mid^p = 0.$$

$\square$

Definicija 1.13. *Neka su* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ *i* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ *dva vjerojatnosna prostora. Skup*

$$\mathcal{A} = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}$$

zovemo π*-sustav podskupova skupa* $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. *Dodatno definiramo produkt* σ*-algebri sa*

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma(A)$$

i uvodimo oznaku $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$.

Korolar 1.2. *Pretpostavimo da je* $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *i definiramo* $X_n = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n], \quad n \geq 0$, *gdje je* $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ *filtracija. Ako stavimo da je*

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma\big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n\big),$$

tada je

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\infty] \quad g.s. \quad i \quad u \quad \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

Dokaz

Kako je $\mid \cdot \mid^p$ konveksna funkcija, prema uvjetnoj Jensenovoj nejednakosti (vidi [14]) vrijedi

$$\mathbb{E}[\mid X_n \mid^p] = \mathbb{E}[\mid \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n] \mid^p] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mid X \mid^p \mid \mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[\mid X \mid^p],$$

iz čega slijedi

$$\sup_n \mathbb{E}[\mid X_n \mid^p] \leq \mathbb{E}[\mid X \mid^p] < \infty.$$

Prema Teoremu 1.8. postoji

$$X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n \quad g.s. \quad i \quad u \quad \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

Znamo da je X_n izmjeriva s obzirom na filtraciju $\mathcal{F}_\infty \supset \mathcal{F}_n$, pa je stoga i X_∞ $\mathcal{F}_\infty$-izmjeriva. Odredimo sada X_∞ i $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\infty]$. Neka je $A \in \mathcal{F}_n$. Iz Hölderove nejednakosti slijedi

$$\limsup_{m\to\infty} \mathbb{E}[\mid X_m - X_\infty \mid 1_A] \leq \limsup_{m\to\infty} \Big(\mathbb{E} \mid X_m - X_\infty \mid^p \Big)^{\frac{1}{p}} \mathbb{P}(A)^{\frac{1}{q}} = 0,$$

što povlači da je

$$\mathbb{E}[X_\infty 1_A] = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}[X_m 1_A].$$

Zbog martingalnog svojstva je $\mathbb{E}[X_m 1_A] = \mathbb{E}[X 1_A]$ za svaki $m \geq n$ ($A \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m$), zbog čega je $\mathbb{E}[X 1_A] = \mathbb{E}[X_\infty 1_A]$. Ovdje je $n \geq 0$ bio proizvoljan, pa vrijedi

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A X_\infty d\mathbb{P}, \quad za \quad sve \quad A \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$$

(ovakvu vrstu integrala zovemo stohastički integral, detaljnije u [10]). Familija $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$ je π-sustav i generira σ-agebru $\mathcal{F}_\infty$. Stoga gornja relacija vrijedi i za sve $A \in \mathcal{F}_\infty$, što znači da je $X_\infty = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\infty]$.

$\square$

1.5. Primjena teorema o konvergenciji martingala

Primjer 1.14. *Neka su $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne jednakodistribuirane slučajne varijable sa zajedničkom funkcijom gustoće f. Pretpostavimo da je poznato da je $f(\cdot)$ jednako ili $p(\cdot)$ ili $q(\cdot)$, gdje su p i q dane (različite) gustoće. Matematički je problem odrediti koja od ove dvije funkcije je prava gustoća. To se često pokazuje koristeći koeficijent vjerodostojnosti definiran s*

$$Y_n = \frac{p(X_1)p(X_2)\cdots p(X_n)}{q(X_1)q(X_2)\cdots q(X_n)}$$

(pretpostavljamo $q(x) > 0$ za sve x) te usvajanjem sljedeće strategije:

$$\textit{biramo } p \textit{ ako je } Y_n \geq a, \textit{biramo } q \textit{ ako je } Y_n < a,$$

pri čemu je a neka unaprijed odabrana pozitivna veličina.
Neka je sada $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Ako je $f = q$, slijedi:

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = Y_n \mathbb{E}\left[\frac{p(X_{n+1})}{q(X_{n+1})}\right] = Y_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} q(x) dx = Y_n$$

jer je p funkcija gustoće. Nadalje,

$$\mathbb{E} \mid Y_n \mid = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{p(x_1)p(x_2)\cdots q(x_n)}{q(x_1)q(x_2)\cdots q(x_n)} p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = 1.$$

Iz toga slijedi da je Y martingal, pod pretpostavkom da je q zajednička funkcija gustoće od X_i. Iz teorema o konvergenciji, limes $Y_\infty = \lim_{n\to\infty} Y_n$ postoji gotovo sigurno pod ovim pretpostavkama. Y_∞ možemo eksplicitno izračunati na sljedeći način:

$$\log Y_n = \sum_{i=1}^{n} log\left(\frac{p(X_i)}{q(X_i)}\right),$$

što je suma nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli. Logaritamska funkcija je konkavna pa prema Jensenovoj nejednakosti slijedi:

$$\mathbb{E}\left[log\Big(\frac{p(X_1)}{q(X_1)}\Big)\right] = 0.$$

Primjenom jakog zakona velikih brojeva, zaključujemo da $n^{-1}\log Y_n$ *kovergira gotovo sigurno u neku točku iz intervala* $[-\infty, 0)$*, što povlači sljedeću tvrdnju:* $Y_n \to Y_\infty = 0$ *gotovo sigurno. (ovo je slučaj kada niz* Y_n *ne konvergira prema* Y_∞ *u srednjem reda* 1 *i kada je* $Y_n \neq \mathbb{E}[Y_\infty \mid F_n]$*.)*
Rezultat koji nam govori da $Y_n \to 0$ *gotovo sigurno nam govori da je* $Y_n < a$ *za sve velike n te da stoga naše pravilo odlučivanja daje točan rezultat (tj. da je f=q) za sve velike n.*

Primjer 1.15. *Neka je* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *izmjeriva funkcija takva da je*

$$\int_0^1 \mid f(x) \mid dx < \infty.$$

Pokazati ćemo da postoji niz step funkcija $(f_n : n \in \mathbb{N}_0)$ *takvih da* $f_n(x) \to f(x)$ *kada* $n \to \infty$*, osim možda na nekom skupu Lebesgueove mjere 0.*
Neka je X uniformno distribuirana na skupu $[0,1]$*. Definiramo* X_n *na sljedeći način*

$$X_n = k2^{-n} \quad ako \quad je \quad k2^{-n} \leq X \leq (k+1)2^{-n}$$

pri čemu su k i n nenegativni cijeli brojevi. Lako se vidi da $X_n \uparrow X$ *g.s. kada* $n \to \infty$ *te da je* $2^n(X_n - X_{n-1})$ *jednako n-tom koeficijentu u binomnoj formuli za X.*
Definiramo $Y = f(X)$ *i* $Y_n = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_n]$ *gdje je* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$*. Sada je* $\mathbb{E} \mid f(X) \mid< \infty$ *pa je Y uniformno integrabilan martingal. Sada slijedi da* $Y_n \to Y_\infty = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_\infty]$ *gotovo sigurno gdje je* $\mathcal{F}_\infty = \sigma(X_0, X_1, X_2, \ldots) = \sigma(X)$*. Stoga je* $Y_\infty = \mathbb{E}[f(X) \mid X] = f(X)$ *te dodatno vrijedi:*

$$Y_n = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y \mid X_0, X_1, \ldots, X_n] = \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} f(u)2^n du = f_n(X)$$

gdje je $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *step funkcija definirana sa*

$$f_n(x) = 2^n \int_{x_n} x_n + 2^{-n} f(u)du,$$

x_n *je broj oblika* $k2^{-n}$ *koji zadovoljava* $x_n \leq x \leq x_n + 2^{-n}$*. Kako znamo da* $f_n(X) \to f(X)$ *gotovo sigurno, stoga* $f_n(x) \to f(x)$ *za skoro sve x i dodatno vrijedi*

$$\int_0^1 \mid f_n(x) - f(x) \mid dx \to 0 \quad kada \quad n \to \infty$$

.

Primjer 1.16. (Problem pakiranja) *Dano nam je n objekata sa veličinama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i neograničen broj kutija volumena 1. Postavlja se pitanje koliki je minimalan broj kutija potrebnih da bismo spakirali ove objekte. U slučajnoj verziji ovoga problema pretpostavljamo da objekti imaju nezavisne slučajne veličine $X_1, X_2, \ldots$ koje imaju neku zajedničku distribuciju na $[0, 1]$. Neka je B_n (slučajan) broj kutija potrebnih da bismo učinkovito spakirali redom $X_1, X_2, \cdots, X_n$, tj. B_n je minimalan broj kutija sa ukupnim kapacitetom jednak kapacitetu svih objekata koje treba spakirati takav da suma veličina objekata u svakoj kutiji ne premašuje ukupni kapacitet. Može se pokazati da B_n raste približno linearno u n, tj. postoji pozitivna konstanta β takva da $n^{-1}B_n \to \beta$ g.s. kada $n \to \infty$. Ovo nećemo pokazivati, ali uočimo posljedicu toga:*

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[B_n] \to \beta, \quad n \to \infty. \tag{1.11}$$

Sljedeće pitanje koje se postavlja je koliko je B_n blizu svom očekivanju $\mathbb{E}[B_n]$ i tu možemo iskoristiti Hoeffdingovu nejednakost. Za $i \leq n$, neka je $Y_i = \mathbb{E}[B_n \mid \mathcal{F}_i]$, gdje je $\mathcal{F}_i$ σ-algebra generirana sa $X_1, X_2, \ldots$. Lako se vidi da je $Y = (Y_i, i \leq n)$ martingal i to čak konačan. Nadalje, $Y_n = B_n$ i $Y_0 = \mathbb{E}[B_n]$ jer je $\mathcal{F}_0$ trivijalna σ-algebra.
Neka je sada $B_n(i)$ minimalan broj kutija potrebnih za pakiranje svih objekata osim i-tog. Kako objekte pakiramo učinkovito, mora vrijediti $B_n(i) \leq B_n \leq B_n(i) + 1$. Računamo:

$$\mathbb{E}[B_n(i) \mid \mathcal{F}_{i-1}] \leq Y_{i-1} \leq \mathbb{E}[B_n(i) \mid \mathcal{F}_{i-1}] + 1,$$

$$\mathbb{E}[B_n(i) \mid \mathcal{F}_i] \leq Y_i \leq \mathbb{E}[B_n(i) \mid \mathcal{F}_i] + 1.$$

Također, $\mathbb{E}[B_n(i) \mid \mathcal{F}_{i-1}] = \mathbb{E}[B_n(i) \mid \mathcal{F}_i]$ jer ne pakiramo i-ti objekt pa je stoga informacija o X_i nebitna. Iz prethodne dvije nejednakosti slijedi da je $\mid Y_i - Y_{i-1} \mid \leq 1$. Sada primjenjujemo Hoeffdingovu nejednakost (Teorem 1.7.) i dobivamo

$$\mathbb{P}(\mid B_n - \mathbb{E}(B_n) \mid \geq x) \leq 2exp\Big(\frac{-\frac{1}{2}x^2}{n}\Big), \quad x > 0.$$

Na primjer, ako stavimo $x = \varepsilon n$, vidimo da vjerojatnost da B_n odstupa od svog očekivanja za εn (ili više) raste eksponencijalno u n kada $n \to \infty$. Također, iz 1.11. dobivamo da kada $n \to \infty$ vrijedi

$$\mathbb{P}\big(\mid B_n - \beta n \mid \geq \varepsilon n\big) \leq 2exp\Big\{ -\frac{1}{2}\varepsilon^2 n\big[1 + o(1)\big]\Big\}.$$

Primjer 1.17. (Problem trgovačkog putnika) *Trgovački putnik treba posjetiti n gradova pri čemu si sam bira rutu. Postavlja se pitanje kako će pronaći najkraću rutu i koliko će ona biti duga. Postavimo problem matematički. Neka su $P_1 = (U_1, V_1), P_2 = (U_2, V_2), \ldots, P_n = (U_n, V_n)$ nezavisne i uniformno distribuirane točke u jediničnom kvadratu $[0, 1]^2$, tj. pretpostavljamo da su $U_1, U_2, \ldots, U_n, V_1, V_2, \ldots, V_n$ nezavisne slučajne* *varijable s uniformnom distribucijom na* $[0,1]$. *Potrebno je obići sve ove točke koristeći avion. Ukoliko ih posjećujemo sljedećim redosljedom:* $P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}, \ldots, P_{\pi(n)}$ *za neku permutaciju* π *skupa* $\{1,2,\ldots,n\}$, *ukupna duljina puta iznosi*

$$d(\pi) = \sum_{i=1}^{n-1} \mid P_{\pi(i+1)} - P_{\pi(i)} \mid + \mid P_{\pi(n)} - P_{\pi(1)} \mid,$$

gdje je $\mid \cdot \mid$ *Euklidska udaljenost. Najkraća ruta ima duljinu* $D_n = \min_\pi d(\pi)$. *Može se pokazati da se asimptotsko ponašanje od* D_n *za velike* n *može opisati na sljedeći način: postoji pozitivna konstanta* τ *takva da* $D_n/\sqrt{n} \to \tau$ *g.s. To nećemo dokazati, ali uočimo posljedicu*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}[D_n] \to \tau, \qquad n \to \infty. \tag{1.12}$$

Koliko je D_n *blizu svog očekivanja? Kao i u prošlom primjeru, na ovo pitanje se može odgovoriti pomoću Hoeffdingove nejednakosti. Neka je* $Y_i = \mathbb{E}[D_n \mid \mathcal{F}_i]$ *za* $i \leq n$, *gdje je* $\mathcal{F}_i$ σ*-algebra generirana sa* $P_1, P_2, \ldots, P_i$. Y *je martingal te je* $Y_n = D_n$ *i* $Y_0 = \mathbb{E}[D_n]$. *Neka je* $D_n(i)$ *duljina minimalnog puta kroz točke* $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_n$ *i uočimo da je* $\mathbb{E}[D_n(i) \mid \mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[D_n(i) \mid \mathcal{F}_{i-1}]$. *Bitna nam je sljedeća nejednakost*

$$D_n(i) \leq D_n \leq D_n(i) + 2Z_i, \qquad i \leq n-1, \tag{1.13}$$

gdje je Z_i *najkraća udaljenost od točke* P_i *do jedne od točaka* $P_{i+1}, P_{i+2}, \ldots, P_n$. *Očito je* $D_n \geq D_n(i)$ *jer svaka tura koja sadrži svih* n *točaka sadrži i turu sastavljenu od podskupa* $P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_n$. *Pokažimo sada drugu nejednakost u 1.13. Pretpostavimo da je točka* P_j *najbliža točki* P_i *od svih točaka iz skupa* $\{P_{i+1}, P_{i+2}, \ldots, P_n\}$. *Jedan od načina kako možemo posjetiti svih* n *točaka je da idemo optimalnom turom* $P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_n$ *i da se kada dođemo u* P_j *vratimo u* P_i. *Rezultirajuća putanja nije prava tura, ali se može preformulirati da dobijemo turu i to tako da pri povratku ne slijećemo u* P_j *nego idemo direktno u sljedeću točku. Tako dobivamo turu čija duljina nije veća od* $D_n(i) + 2Z_i$.
Sada uzimamo uvjetno očekivanje s obzirom na $\mathcal{F}_{i-1}$ *i* $\mathcal{F}_i$ *od 1.13. i dobivamo*

$$\mathbb{E}[D_n(i) \mid \mathcal{F}_{i-1}] \leq Y_{i-1} \leq \mathbb{E}[D_n(i) \mid \mathcal{F}_{i-1}] + 2\mathbb{E}[Z_i \mid \mathcal{F}_{i-1}],$$

$$\mathbb{E}[D_n(i) \mid \mathcal{F}_i] \leq Y_i \leq \mathbb{E}[D_n(i) \mid \mathcal{F}_i] + 2\mathbb{E}[Z_i \mid \mathcal{F}_i],$$

iz čega slijedi

$$\mid Y_i - Y_{i-1} \mid \leq 2\max\{\mathbb{E}[Z_i \mid \mathcal{F}_i], \mathbb{E}[Z_i \mid \mathcal{F}_{i-1}]\}, \qquad i \leq n-1. \tag{1.14}$$

Da bismo odredili desnu stranu, stavimo da je $Q \in [0,1]^2$ *i neka je* $Z_i(Q)$ *najkraća udaljenost od* Q *do najbliže točke iz skupa od* $n-i$ *točaka koje su izabrane uniformno na slučajan način iz jediničnog kvadrata. Ako je* $Z_i(Q) > x$, *tada nijedna točka ne leži unutar kruga* $C(x,Q)$ *radijusa* x *sa središtem u* Q. *Primjetimo da je* $\sqrt{2}$ *najveća* *moguća udaljenost dviju točaka iz ovoga kvadrata. Sada postoji c takav da, za svaki $x \in (0, \sqrt{2}]$, presjek od $C(x,Q)$ sa jediničnim kvadratom ima površinu barem cx^2, uniformno na Q. Prema tome*

$$\mathbb{P}(Z_i(Q) > x) \leq (1 - cx^2)^{n-i}, \qquad 0 < x \leq \sqrt{2}.$$

Integriranjem po x dobivamo

$$\mathbb{E}[Z_i(Q)] \leq \int_0^{\sqrt{2}} (1 - cx^2)^{n-i} dx \leq \int_0^{\sqrt{2}} e^{-cx^2(n-i)} dx < \frac{C}{\sqrt{n-i}},$$

za neku konstantu C. Vraćanjem na 1.14., zaključujemo da su slučajne varijable $\mathbb{E}[Z_i \mid \mathcal{F}_i]$ i $\mathbb{E}[Z_i \mid \mathcal{F}_{i-1}]$ ograničene s $C/\sqrt{n-i}$ odakle je

$$\mid Y_i - Y_{i-1} \mid \leq 2\frac{C}{\sqrt{n-i}}, \qquad i \leq n-1.$$

U slučaju kada je $i = n$, koristimo trivijalnu među $\mid Y_n - Y_{n-1} \mid \leq 2\sqrt{2}$, što je dvostruka duljina dijagonale kvadrata.
Sada primjenjujemo Hoeffdingovu nejednakost. Dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mid D_n - \mathbb{E}D_n \mid \geq x) &\leq 2exp\left(- \frac{x^2}{2\left(8 + \sum_{i=1}^{n-1} 4\frac{C^2}{i}\right)}\right) \\ &\leq 2exp\left(\frac{-Ax^2}{\log n}\right), \qquad x > 0,\end{aligned}$$

za neku pozitivnu konstantu A. Ova tvrdnja, zajedno sa 1.12. daje

$$\mathbb{P}(\mid D_n - \tau\sqrt{n} \mid \geq \epsilon\sqrt{n}) \leq 2exp(-B\epsilon^2 \frac{n}{\log n}), \qquad \epsilon > 0,$$

za neku pozitivnu konstantu B i sve velike n.

Primjer 1.18. (Waldov identitet) *Neka su $X_1, X_2, \dots$ nezavisne jednakodistribuirane slučajne varijable sa zajedničkom funkcijom izvodnicom momenata $M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$. Pretpostavimo da postoji barem jedna vrijednost $t \neq 0$ takva da je $1 \leq M(t) < \infty$ i fiksirajmo takav t. Neka je $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Definiramo*

$$Y_0 = 1, \qquad Y_n = \frac{e^{tS_n}}{M(t)^n}, \quad n \geq 1,$$

i stavimo da je $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Očito je Y martingal s obzirom na filtraciju $\mathcal{F}$. Sada nas zanima kada će vrijediti

$$\text{postoji konstanta } c \text{ t.d. } \mathbb{E}\big[\mid Y_{n+1} - Y_n \mid \big| \mathcal{F}_n \big] \leq c \quad \forall n < T, \tag{1.15}$$

gdje je T vrijeme zaustavljanja. U slučaju kada prethodna nejednakost vrijedi, imati ćemo: $\mathbb{E}[Y_T] = \mathbb{E}[Y_0]$. *Neka T ima konačno očekivanje i uočimo*

$$\mathbb{E}\big[\mid Y_{n+1} - Y_n \mid \big|\mathcal{F}_n\big] = Y_n \mathbb{E}\left[\left|\frac{e^{tX}}{M(t)} - 1\right|\right] \leq \frac{Y_n}{M(t)} \mathbb{E}\big[e^{tX} + M(t)\big] = 2Y_n. \qquad (1.16)$$

Pretpostavimo sada da je T takav da je

$$\mid S_n \mid \leq C \quad za \quad n < T, \qquad (1.17)$$

gdje je C konstanta. Sada je $M(t) \geq 1$ i

$$Y_n = \frac{e^{tS_n}}{M(t)^n} \leq \frac{e^{|t|C}}{M(t)^n} \leq e^{|t|C}, \quad za \quad n < T$$

što nam daje tvrdnju 1.16. pa je zadovoljeno svojstvo 1.15.. Prema tome, ako je T vrijeme zaustavljanja sa konačnim očekivanjem t.d. je zadovoljeno 1.17., tada je

$$\mathbb{E}[e^{tS_T} M(t)^{-T}] = 1 \text{ kad god je } M(t) \geq 1$$

i ovu jednadžbu zovemo Waldov identitet.

Pogledajmo sada jednu primjenu Waldovog identiteta. Pretpostavimo da X_i ima strogo pozitivnu varijancu i neka je $T = \min\{n : S_n \leq -a \text{ ili } S_n \geq b\}$ gdje su $a, b > 0$ (T zovemo vrijeme prvog izlaska iz intervala $(-a, b)$). Zasigurno je $\mid S_n \mid \leq \max\{a, b\}$ ako je $n < T$. Nadalje, $\mathbb{E}T < \infty$ što se može pokazati na sljedeći način. Prema nedeterminiranosti od X_i, postoje M i $\varepsilon > 0$ takvi da je $\mathbb{P}(\mid S_M \mid > a + b) > \varepsilon$. Ako bilo koji od $\mid S_M \mid, \mid S_{2M} - S_M \mid, \ldots, \mid S_{kM} - S_{(k-1)M} \mid$ pređe iznos od $a + b$, tada je proces u vremenu kM morao premašiti $(-a, b)$. Prema tome, $\mathbb{P}(T \geq kM) \leq (1 - \epsilon)^k$ što implicira

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq i) \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq kM) < \infty.$$

Zaključujemo da je zadovoljen Waldov identitet. U puno slučajeva primjene Waldovog identiteta postoji $\theta \neq 0$ takav da je $M(\theta) = 1$. Ako u Waldov identitet stavimo $t = \theta$, dobivamo $\mathbb{E}(e^{\theta S_T}) = 1$ ili

$$\eta_a \mathbb{P}(S_T \leq -a) + \eta_b \mathbb{P}(S_T \geq b) = 1$$

gdje je

$$\eta_a = \mathbb{E}[e^{\theta S_T} \mid S_T \leq -a]$$

$$\eta_b = \mathbb{E}[e^{\theta S_T} \mid S_T \geq b]$$

pa je

$$\mathbb{P}(S_T \leq -a) = \frac{\eta_b - 1}{\eta_b - \eta_a}$$

$$\mathbb{P}(S_T \geq b) = \frac{1 - \eta_a}{\eta_b - \eta_a}.$$

Za velike a i b, razumno je pretpostaviti da je $\eta_a \simeq e^{-\theta a}$ *i* $\eta_b \simeq e^{\theta b}$ *što nam daje sljedeće aproksimacije*

$$\mathbb{P}(S_T \leq -a) \simeq \frac{e^{\theta b} - 1}{e^{\theta b} - e^{-\theta a}}$$
$$\mathbb{P}(S_T \geq b) \simeq \frac{1 - e^{-\theta a}}{e^{\theta b} - e^{-\theta a}}$$

Ove aproksimacije su točne ako je S jednostavna slučajna šetnja i ako su a i b pozitivni cijeli brojevi.

2 Obrnuti martingali

2.1. Motivacija i definicija obrnutih martingala

Obrnuti martingali su, kako se može zaključiti iz imena, suprotni standardnim martingalima. Naime, u ovoj kockarskoj strategiji se i dalje povećava ulog, ali za razliku od martingala, ovdje to radimo nakon pobjede. Cilj je prije doći do pobjede (vratiti uloženo) kroz pobjednički niz. Naime, znamo da ćemo u nekom trenutku izgubiti ulog. Ukoliko povisujemo svoj ulog nakon pobjede, u samo jednoj partiji možemo ostati bez kapitala ukoliko nismo disciplinirani te tako ispadamo iz igre. Stoga je nužno strogo se držati prakse upravljanja novcem. Potrebno je sačuvati profit tokom cijele igre i ponoviti početni ulog u sljedećoj partiji. Tada se sve svodi na to da li možemo precizno procijeniti koliko dugo će trajati naš pobjednički niz.
Obrnuti martingali su martingali indeksirani vremenom iz $\mathbb{Z}_-$. Oni su nešto "finiji" u odnosu na klasične martingale jer automatski imaju svojstvo uniformne integrabilnosti pošto je $X_0 \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ i $\mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_n] = X_n, \quad \forall n \leq 0$.

Pretpostavimo da igramo rulet i to Parolijev sustav koji koristi obrnute martingale. Podsjetimo se, to znači da udvostručujemo svoj ulog nakon dobitka. Ono što kockari preporučuju jeste da se izabere jedna boja (crvena ili crna) na koju ćemo se "kladiti". To znači, ako izaberemo crvenu boju, čekamo trenutak kada će se pojaviti crvena boja kao pobjednička (prije toga ne sudjelujemo u igri) te u sljedećem trenutku stavljamo svoj ulog opet na crvenu i tako nastavljamo kroz sve partije. Također, bitno je zapamtiti da dokle god ne dođemo do trenutku u kojemu ćemo odustati, gubimo jednu novčanu jedinicu. Objasnimo to primjerom. Neka smo izabrali crvenu boju kako je ranije objašnjeno te da odustajemo nakon sedam crvenih karata za redom i opet čekamo da se pojavi crvena da se vratimo u igru. Nakon što se pojavila crvena, opet ulažemo i odnosimo pet pobjeda te na zadnjem ulogu izgubimo. Da nismo izgubili, osvojili bi $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$. Sljedeći ulog bi bio u iznosu od 32 novčane jedinice koji smo izgubili pa smo ukupno kroz cijeli niz partija izgubili jednu novčanu jedinicu. S obzirom na činjenicu da gubimo jednu novčanu jedinicu svaki put kada nismo u trenutku u kojemu odustajemo od igre, dolazimo do puno malih gubitaka koji se vrlo brzo nagomilaju.

Definicija 2.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjerivi prostor. Familija $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ σ-podalgebri od $\mathcal{F}$ takvih da za svaki $n \geq 0$ vrijedi $\mathcal{F}_n \supseteq \mathcal{F}_{n+1}$ zove se obrnuta filtracija na $(\Omega, \mathcal{F})$.*

Definicija 2.2. *Slučajni proces $X = (X_n, n \geq 0)$ je obrnuti martingal s obzirom na obrnutu filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ ako vrijedi:*

1. $\mathbb{E}[| X_n |] < \infty, \quad \forall n \geq 0,$

2. *X je adaptiran na* $\mathbb{F}$,

3. $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n+1}] = X_{n+1}, \quad \forall n \geq 0.$

Definicija 2.3. *Slučajni proces* $X = (X_n, n \geq 0)$ *je obrnuti supermartingal s obzirom na obrnutu filtraciju* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ *ako vrijedi:*

1. $\mathbb{E}[\mid X_n \mid] < \infty, \quad \forall n \geq 0,$

2. *X je adaptiran na* $\mathbb{F}$,

3. $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n+1}] \leq X_{n+1}, \quad \forall n \geq 0.$

Definicija 2.4. *Slučajni proces* $X = (X_n, n \geq 0)$ *je obrnuti submartingal s obzirom na obrnutu filtraciju* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ *ako vrijedi:*

1. $\mathbb{E}[\mid X_n \mid] < \infty, \quad \forall n \geq 0,$

2. *X je adaptiran na* $\mathbb{F}$,

3. $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n+1}] \geq X_{n+1}, \quad \forall n \geq 0.$

Definicija 2.5. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Funkcija* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *je uniformno integrabilna u odnosu na mjeru* μ *ako za svaki* $\epsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da je*

$$\int_E |f| d\mu < \epsilon$$

za $\mu(E) < \delta$.

Teorem 2.1. *Neka je* X_n *obrnuti martingal. Tada*

$$\lim_{n \to -\infty} X_n = X_{-\infty}$$

postoji gotovo sigurno u prostoru $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.

Dokaz

Neka je

$$\begin{aligned} \Lambda :&= \{\omega : X_n(\omega) \text{ ne konvergira prema limesu iz } [-\infty, \infty]\} \\ &= \{\omega : \liminf_n X_n(\omega) < \limsup_n X_n(\omega)\} \\ &= \bigcup_{a,b \in \mathbb{Q}} \{\omega : \liminf_n X_n(\omega) < a < b < \limsup_n X_n(\omega)\}. \end{aligned}$$

Neka je $U_N[a,b](\omega)$ jednako najvećem k koji zadovoljava sljedeće: postoje

$$0 \leq s_1 < t_1 < \ldots < s_k < t_k \leq N$$

takvi da je

$$X_{s_i}(\omega) < a < b < X_{t_i}(\omega), \quad 1 \le i \le k.$$

Ovako definiran, $U_N[a,b]$ je broj prelazaka intervala $[a,b]$ prema gore do trenutka N. Očito je $U_N[a,b](\omega)$ neopadajući u N. Neka je sada

$$U_\infty[a,b](\omega) = \lim_{N\to\infty} U_N[a,b](\omega).$$

Tada raspis s početka dokaza možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$\Lambda = \bigcup_{a<b; a,b\in\mathbb{Q}} \{\omega : U_\infty[a,b](\omega) = \infty\} = \bigcup_{a<b; a,b\in\mathbb{Q}} \Lambda_{a,b}.$$

Nejednakost prelazaka nam daje da je $\mathbb{P}(\Omega_{a,b}) = 0$ za sve $a < b$ pa je stoga $\mathbb{P}(\Omega) = 0$. Podsjetimo se, $U_n[a,b]$ je broj prelazaka intervala $[a,b]$ prema gore od X_n kada $n \to -\infty$. Prema nejednakosti prelazaka slijedi

$$(b-a)\mathbb{E}[U_n[a,b]] \le \mathbb{E}[\mid X_0 \mid] + \mid a \mid .$$

Kako $U_n[a,b] \nearrow U_\infty[a,b]$, iz teorema o monotonoj konvergenciji slijedi

$$\mathbb{E}[U_\infty[a,b]] < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(\Lambda_{a,b}) = 0.$$

Ova tvrdnja povlači da X_n konvergira gotovo sigurno prema $X_{-\infty}$.
Sada, $X_n = \mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{F}_n]$. Prema tome, X_n je uniformno integrabilan što znači da $X_n \to X_{-\infty}$ u $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.

□

Teorem 2.2. *Ako je* $X_{-\infty} = \lim_{n\to-\infty} X_n$ *i* $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_n \mathcal{F}_n$*, tada je*

$$X_{-\infty} = \mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{F}_{-\infty}].$$

Dokaz

Neka je $X_n = \mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{F}_n]$. Ako je $A \in \mathcal{F}_{-\infty} \subset \mathcal{F}_n$, tada je $\mathbb{E}[X_n|A] = \mathbb{E}[X_0|A]$. Sada vrijedi

$$\begin{aligned}
\mid \mathbb{E}[X_n|A] - \mathbb{E}[X_{-\infty}|A] \mid &= \mid \mathbb{E}[X_n - X_{-\infty}|A] \mid \\
&\le \mathbb{E}[\mid X_n - X_{-\infty} \mid |A] \\
&\le \mathbb{E}[\mid X_n - X_{-\infty} \mid] \to 0, \quad n \to -\infty (\text{prema prethodnom teoremu})
\end{aligned}$$

Nadalje, $\mathbb{E}[X_{-\infty}|A] = \mathbb{E}[X_0|A]$. Prema tome, $X_{-\infty} = \mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{F}_{-\infty}]$.

□

Teorem 2.3. *Neka* $\mathcal{F}_n \searrow \mathcal{F}_{-\infty}$ *i* $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. *Tada*

$$\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_n] \to \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_{-\infty}] \quad g.s. \quad u \quad \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}).$$

Dokaz

$X_n = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_n]$ je obrnuti martingal po definiciji. Nadalje,

$$X_n \to X_{-\infty} \quad g.s. \quad u \quad \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}).$$

Prema prethodnom teoremu

$$X_{-\infty} = \mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{F}_{-\infty}] = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_{-\infty}].$$

Prema tome,

$$\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_n] \to \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_{-\infty}].$$

□

Primjer 2.1. (Jaki zakon velikih brojeva) *Jaki zakon velikih brojeva se može dokazati koristeći obrnute martingale. Da bismo to vidjeli, prvo iskažimo ovaj teorem: Neka je* $(X_i, i \geq 1)$ *familija nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli u* $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ *sa* $\mu = \mathbb{E}[X_1]$. *Definiramo* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, *za* $n \geq 1$ *i* $S_0 = 0$. *Tada* $S_n/n \to \mu$ *kada* $n \to \infty$ *u prostoru* $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.
Dokaz:
Neka je $\mathcal{G}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots) = \sigma(S_n, X_{n+1}, \ldots)$. *Sada ćemo pokazati da je* $(M_n, n \leq -1) = (S_{-n}/(-n), n \leq -1)$ *obrnuti martingal s obzirom na* $\{\mathcal{F}_n : n \leq -1\} = \{\mathcal{G}_{-n} : n \leq -1\}$. *Za* $m \leq -1$ *vrijedi*

$$\mathbb{E}\big[M_{m+1} \mid \mathcal{F}_m\big] = \mathbb{E}\big[\frac{S_{-m-1}}{-m-1} \mid \mathcal{G}_{-m}\big].$$

Kako je X_n *nezavisno od* $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$, *ako stavimo da je* $n = -m$ *dobivamo*

$$\mathbb{E}[\frac{S_{n-1}}{n-1} \mid \mathcal{G}_n] = \mathbb{E}\big[\frac{S_n - X_n}{n-1} \mid \mathcal{G}_n\big] = \frac{S_n}{n-1} - \mathbb{E}\big[\frac{X_n}{n-1} \mid S_n\big].$$

Koristeći simetriju, uočimo da je $\mathbb{E}[X_k \mid S_n] = \mathbb{E}[X_1 \mid S_n]$ *za sve* k. *Zaista, za svaki* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mathbb{E}[X_k 1(S_n \in A)]$ *ne ovisi o* k. *Očito je*

$$\mathbb{E}[X_1 \mid S_n] + \cdots + \mathbb{E}[X_n \mid S_n] = \mathbb{E}[S_n \mid S_n] = S_n,$$

pa je stoga $\mathbb{E}[X_n \mid S_n] = S_n/n$ *g.s. Konačno dobivamo*

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_{n-1}}{n-1} \mid \mathcal{G}_n\right] = \frac{S_n}{n-1} - \frac{S_n}{n(n-1)} = \frac{S_n}{n} \quad g.s.$$

Prema teoremo o konvergenciji obrnutih martingala, zaključujemo da S_n/n konvergira kada $n \to \infty$ u prostoru $\mathcal{L}^1(\mu)$ prema nekoj slučajnoj varijabli, recimo $Y = \lim_{n\to\infty} S_n/n$. Očito je za svaki k

$$Y = \lim_{n\to\infty} \frac{X_{k+1} + \cdots + X_{k+n}}{n},$$

pa je Y $\mathcal{T}_k = \sigma(X_{k+1}, \ldots)$-izmjerivo, za svaki k pa je i $\cap_k \mathcal{T}_k$-izmjerivo. Prema Kolmogorovljevom $0-1$ zakonu (vidi [12]), zaključujemo da postoji konstanta $c \in \mathbb{R}$ takva da je $\mathbb{P}(Y = c) = 1$ i tada je

$$c = \mathbb{E}[Y] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n/n] = \mu.$$

Teorem 2.4. (De Finettijev teorem) *Neka je $X_1, X_2, \ldots$ izmjenjivi niz, tj. za svaki n i $\pi_n \in S_n$ vrijedi*

$$(X_1, \ldots, X_n) \triangleq (X_{\pi_n(1),\ldots,X_{\pi_n(n)}})$$

(postoji permutacija koja jedan niz preslikava u drugi). Neka je ξ izmjenjiva σ-algebra takva da je

$$\xi_n = \{A : \pi_n A = A, \forall \pi_n \in S_n\}, \quad \xi = \bigcup_n \xi_n.$$

Tada, uvjetno na ξ, $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ je niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli.

Dokaz

Definiramo

$$A_n(\phi) = \frac{1}{n_{p_k}} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)} \phi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}).$$

Zbog izmjenjivosti vrijedi

$$\begin{aligned} A_n(\phi) = \mathbb{E}[A_n(\phi) \mid \xi_n] &= \mathbb{E}[\phi(X_1, \ldots, X_n) \mid \xi_n] \\ &\to \mathbb{E}[\phi(X_1, \ldots, X_n) \mid \xi] \end{aligned}$$

prema teoremu o konvergenciji obrnutih martingala. Kako $X_1, X_2, \ldots$ ne može biti niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli, slijedi da ξ može biti netrivijalna. Prema tome, limes ne treba biti jednak konstanti. Definirajmo sada dvije pomoćne funkcije

$$f : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Nadalje, neka je $I_{n,k}$ skup koji sadrži sve brojeve za koje vrijedi $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$. Tada je

$$\begin{aligned} n_{p_{k-1}} A_n(f) n A_n(g) &= \sum_{i \in I_{n,k-1} f(X_{i_1},\ldots,X_{i_{k-1}})} \sum_{m \leq n} g(X_m) \\ &= \sum_{i \in I_{n,k}} f(X_i, \ldots, X_{i_{k-1}}) g(X_{i_k}) + \sum_{i \in I_{n,k-1}} \left[f(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{k-1}}) \sum_{j=1}^{k-1} g(X_{i_j}) \right]. \end{aligned}$$

Neka su sada

$$\phi_j(X_1,\dots,X_{k-1}) = f(X_1,\dots,X_{k-1})g(X_j), \quad 1 \le j \le k-1$$

$$\phi(X_1,\dots,X_k) = f(X_1,\dots,X_{k-1})g(X_k).$$

Tada je

$$n_{p_{k-1}} A_n(f) n A_n(g) = n_{p_k} A_n(\phi) + n_{p_{k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} A_n(\phi_j).$$

Gornji izraz podijelimo sa n_{p_k} te dobivamo

$$\frac{n}{n-k+1} A_n(f)A_n(g) = A_n(\phi) + \frac{1}{n-k+1}\sum_{j=1}^{k} A_n(\phi_j)$$

Kako je $\| \ f \ \|_\infty < \ \infty$ i $\| \ g \ \|_\infty < \ \infty$, iz prethodan dva raspisa dobivamo sljedeću jednakost

$$\mathbb{E}[f(X_1,\dots,X_{k-1} \mid \xi)]\mathbb{E}[g(X_1) \mid \xi] = \mathbb{E}[f(X_1,\dots,X_{k-1})g(X_k) \mid \xi]$$

Na temelju prethodne jednakosti, zaključujemo da za svaku kolekciju omeđenih funckija $f_1,\dots,f_k$ vrijedi

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{k} f_i(X_i) \mid \xi\Big] = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}\Big[f_i(X_i) \mid \xi\Big]$$

□

2.2. Primjeri obrnutih martingala

Primjer 2.2. *Neka su $X_1, X_2, \dots$ nezavisne jednakodistribuirane slučajne varijable sa vrijednostima u $0, 1, 2, \dots$ te neka je $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Tvrdimo da je*

$$\mathbb{P}(S_k \ge k \quad za \quad neke \quad 1 \le k \le N \mid S_N = b) = min(1, \frac{b}{N}), \tag{2.1}$$

za sve b takve da je $\mathbb{P}(S_N = b) > 0$. Nije odmah očito da ovo implicira Ballot teorem (vidi [1]), međutim možemo to promotriti i na sljedeći način. U tome teoremu, svaki od N glasača ima dva glasa; on ili ona dodjeljuje oba glasa ili kandidatu A ili kandidatu B. Označimo sa X_i broj glasova koje je i-ti glasač dodijelio osobi A (prema tome, X_i je jednak ili 0 ili 2) te pretpostavimo da su X_i nezavisni. Sada je $S_k \ge k$ za neke $1 \le k \le N$ ako i samo ako B nije uvijek u vodstvu. Izraz 2.1. povlači

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B\ uvijek\ vodi \mid A\ dobiva\ svih\ 2a\ glasova) &= 1 - \mathbb{P}(S_k \ge k \quad za \quad neke \quad 1 \le k \le N \mid S_n) \\
&= 2a \\
&= 1 - \frac{2a}{N} \\
&= \frac{p-q}{p+q},
\end{aligned}$$

ako je $0 \leq a \leq \frac{1}{2}N$*, gdje je* $p = 2N - 2a$ *broja glasova koje je dobila osoba* B*, a* $q = 2a$ *broj glasova dodijeljenih osobi* A*. Ovo je tzv. teorem o glasačkim listićima. Da bi smo dokazali 2.1., stavimo da je* $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$ *i podsjetimo se da je* $\frac{S_n}{n}$ *obrnuti martingal s obzirom na filtraciju* $\mathcal{F}$*. Fiksirajmo* N *i stavimo da je*

$$T = \begin{cases} max\{k : S_k \geq k \quad i \quad 1 \leq k \leq N\}, & ako\ ovo\ postoji \\ 1, & inače. \end{cases}$$

Ovo možda ne izgleda kao vrijeme zaustavljanja, ali jeste. Uostalom, za $1 < n \leq N$*,*

$$T = n = S_n \geq n, \quad S_k < k \quad za \quad n < k \leq N,$$

je događaj definiran preko $S_n, S_{n+1}, \ldots$ *pa prema tome on leži u* σ*-algebri* $\mathcal{F}_n$ *generiranom ovim slučajnim varijablama. Sličnim zaključivanjem dobivamo da je* $\{T = 1\} \in \mathcal{F}_j$*.*

Možemo pretpostaviti da je $S_N = b < N$ *jer je 2.1. očito za* $b \geq N$*. Neka je*

$$A = \{S_k \geq k \quad za \quad neke \quad 1 \leq k \leq N\}.$$

Kako je $S_N < N$ *to znači da, ako se* A *dogodi, to mora biti slučaj da je* $S_T \geq T$ *i* $S_{T+1} < T + 1$*. U ovom slučaju je* $X_{T+1} = S_{T+1} - S_T < 1$*, pa je* $X_{T+1} = 0$ *iz čega slijedi* $\frac{S_T}{T} = 1$*. U drugom slučaju, ako se* A *nije dogodio, tada je* $T = 1$ *i također* $S_T = S_1 = 0$ *što povlači da je* $\frac{S_T}{T} = 0$*. Iz toga slijedi da je* $\frac{S_T}{T} = I_A$ *ako je* $S_N < N$*, gdje je* I_A *indikator događaja* A*. Primjenjujući očekivanje, dobivamo:*

$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{T}S_T \mid S_N = b\Big] = \mathbb{P}\Big(A \mid S_N = b\Big) \quad ako \quad je \quad b < N.$$

Na kraju, kako je $\frac{S_n}{n}$ *obrnuti martingal dobivamo*

$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{T}S_T \mid S_N = b\Big] = \mathbb{P}\Big(\frac{1}{N}S_N \mid S_N = b\Big) = \frac{b}{N}.$$

Spajanjem posljednje dvije jednakosti, dobivamo tvrdnju 2.1.

□

Literatura

[1] L. Addario-Berry, *Ballot theorems, old and new*, Department od Statistics, University of Oxford, Oxford, 2007.

[2] J. Bae, *Probability and Statistics*, Stanford University, Stanford, 2014.

[3] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[4] D. Gamarnik, *Advanced Stochastic Processes*, Massachusetts Institute of technology, Massachusetts, 2013.

[5] G. Grimmett, D. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, Oxford University Press Inc., Oxford, 2001.

[6] H-H. Kuo, K. Saito, *Doob's decomposition theorem for near-submartingales*, Serials publications, Louisiana, 2015.

[7] B. Marković, *Vreme zaustavljanja i primena na američke opcije*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2009.

[8] G. Miermont, *Advanced Probability*, University of Cambridge, Cambridge, 2006.

[9] J. Moura, *The theory of linear prediction*, Morgan&Claypool, Pennsylvania, 2008.

[10] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[11] A.N. Shiryaev, *Essential of Stochastic Finance*, World Scientific, Moskva 1999.

[12] P. Sousi, *Advanced Probability*, University of Cambridge, Cambridge, 2013.

[13] K. Sridharan, *A Gentle Introduction to Concentration Inequalities*, Toyota Technological Institute at Chicago, Chicago 2013.

[14] Z. Vondraček, *Slučajni procesi*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2010.

Sažetak

U ovome radu promatramo specifičnu vrstu slučajnih procesa koje zovemo *martingalima*. Zbog njihove velike primjene u raznim matematičkim aspektima, navodimo primjere gdje se upravo primjenom tzv. *martingalnog svojstva* dolazi do bitnih rezultata u tim matematičkim područjima. Kroz cijeli rad navodimo razne definicije potrebne za iskazivanje bitnih tvrdnji o martingalima. U drugom dijelu uvodimo drugu vrstu slučajnih procesa koju ćemo zvati *obrnuti martingali*. Navodimo razlike u odnosu na klasične martingale te modificiramo tvrdnje koje vrijede za martingale.

Ključne riječi: slučajni procesi, martingali, martingalno svojstvo, martingali u diskretnom vremenu, martingali u neprekidnom vremenu, obrnuti martingali

Summary

In this paper, we observe a specific type of random processes that we call *martingales*. Due to their great application in various mathematical aspects, we list examples where we see important results which arise from *martingal property*. Through the whole paperwork, we list the various definitions that are needed to express the important statements about martingales. In second part, we introduce a second type of random processes that we call *reverse (or backward) martingales*. We mention the differences compared to the classic martingales and we modify the claims that apply to martingales.

Keywords: random processes, martingales, martingal property, martingales in a discrete time, martingales in a continuous time, backwards martingales

Životopis

Rođena sam 2. prosinca 1992. godine u Vinkovcima. Godine 2007. završavam Osnovnu školu fra. Bernardina Tome Leakovića u Bošnjacima te upisujem Gimnaziju u Županji, smjer prirodoslovno-matematička gimnazija. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja bilježim nastupe na natjecanjima iz matematike, hrvatskog jezika, njemačkog jezika te informatike. Nakon završene srednje škole, upisujem se na Odjel za matematiku u Osijeku gdje u razdoblju od 2011.-2014. pohađam preddiplomski studij matematike nakon kojega upisujem diplomski studij matematike, smjer financijska matematika i statistika. Na drugoj godini diplomskog studija odrađujem stručnu praksu u *Hrvatskoj agenciji za hranu* (HAH) gdje provodim statističku analizu njihovih podataka i to deskriptivnu statistiku za podatke dobivene iz *Hrvatskog epidemiološkog zavoda*, procjenu rizika za količinu žive u ribi te procjenu rizika za količinu nitrata u povrću (podaci dobiveni vlastitim mjerenjima HAH-a). Od 18. travnja 2017. sam zaposlena u Erste&Steiermärkische Bank d.d. kao mlađi stručni suradnik za upravljanje risk podacima i izvještavanje u Sektoru upravljanja rizicima, Direkcija za strategiju i izvještavanje u Zagrebu.