

# Torzijsko njihalo, Coulombov zakon

---

**Aladenić, Anton**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2017**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Physics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za fiziku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:160:945139>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-15**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Department of Physics in Osijek](#)



**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU**  
**ODJEL ZA FIZIKU**



**ANTON ALADENIĆ**

**TORZIJSKO NJIHALO - COULOMBOV ZAKON**

**Diplomski rad**

**Osijek, 2017.**

**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU**  
**ODJEL ZA FIZIKU**



**ANTON ALADENIĆ**

**TORZIJSKO NJIHALO - COULOMBOV ZAKON**

**Diplomski rad**

predložen Odjelu za fiziku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku

radi stjecanja akademskog naziva MAGISTAR EDUKACIJE FIZIKE I INFORMATIKE

**Osijek, 2017.**

**Ovaj diplomski rad izrađen je u Osijeku, pod vodstvom mentora izv. prof. dr. sc. Branka Vukovića i komentora Igora Miklavčića pred. u sklopu Sveučilišnog diplomskog studija fizike i informatike na Odjelu za fiziku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.**

## Sadržaj

1. UVOD .....	1
1.1. Zadatak diplomskog rada .....	1
2. TEORIJSKI DIO .....	2
2.1. Coulombov pokus.....	2
2.2. Opći matematički zapis Coulombova zakona .....	11
3. EKSPERIMENT .....	17
3.1. Materijali i metode.....	17
3.2. Izvedba eksperimenta .....	23
<b>3.2.1 Određivanje konstante torzije žice .....</b>	<b>23</b>
<b>3.2.2 Prvi dio eksperimenta: Ispitivanje veze elektrostatska sila - udaljenost (<math>F_{el} - R</math>).....</b>	<b>27</b>
<b>3.2.3 Drugi dio eksperimenta: Ispitivanje veze elektrostatska sila - naboji (<math>F_{el} - Q1, Q2</math>) .....</b>	<b>36</b>
4. ZAKLJUČAK.....	43
5. LITERATURA.....	44

## TORZIJSKO NJIHALO – COULOMBOV ZAKON

ANTON ALADENIĆ

### Sažetak

U diplomskom radu predstavljen je Coulombov zakon te eksperiment za potvrdu tog zakona pomoću torzijske vage. Cilj rada bio je prikazati povijesni prikaz otkrića Coulombova zakona, definirati i matematički zapisati taj zakon te ga eksperimentalno potvrditi izvedbom pokusa pomoću torzijske vage. Kao uvod u problematiku rada opisana je Coulombova metoda potvrde zakona, a ujedno je prikazana i matematička teorijska podloga. Glavni dio rada isključivo je eksperimentalne prirode i temelji se na pripremi postava torzijske vage u laboratoriju Odjela za fiziku te izvedbi eksperimenta u svrhu dokazivanja Coulombova zakona. Eksperiment je podijeljen na dva dijela kako bi ispitali različite ovisnosti kuta otklona (sile). U posljednjem dijelu rada, podaci dobiveni iz oba dijela eksperimenta, se tablično i grafički analiziraju te se provjerava potvrda Coulombova zakona elektrostatike.

(44 stranice; 10 slika; 4 tablice; 7 grafova)

**Rad je pohranjen u knjižnici Odjela za fiziku**

**Ključne riječi:** Coulombov zakon, torzijska vaga, naboj, elektrostatska sila

**Mentor:** izv. prof. dr. sc. Branko Vuković

**Komentor:** Igor Miklavčić, predavač

**Ocjenjivači:** izv. prof. dr. sc. Branko Vuković; Igor Miklavčić, predavač; doc. dr. sc. Zvonko Glumac; mr. sc. Slavko Petrinšak

**Rad prihvaćen:** 07. studenog 2017.

## TORSION BALANCE – COULOMB'S LAW

ANTON ALADENIĆ

### Abstract

This master thesis presents Coulomb's law and experiment with torsion balance as confirmation of this law. The purpose of this paper is to present historic discovery of Coulomb's law, to determine mathematically this law and to experimentally analyze and confirm this law with torsion balance as main device. As an introduction to this paper we gave the explanation of Coulomb's method of finding the law and after that we analyzed in detail theoretical mathematical background of this law. The main part of the paper is of experimental nature and is based on preparation of torsion balance in possession of our Department of Physics and performing the actual experiment for confirming the law. Experiment is divided into two parts with purpose of testing different dependences of torsion displacement angle (force). In the last part, there are shown graphic and tabular analysis of data collected from both parts of experiment with purpose of confirming the Coulomb's law of electrostatics.

(44 pages; 10 pictures; 4 tables; 7 graphs)

**The Thesis is deposited in the Department of Physics library**

**Keywords:** Coulomb's law, torsion balance, charge, electrostatic force

**Supervisor:** associate professor dr. sc. Branko Vuković

**Co- Supervisor:** Igor Miklavčić, lecturer

**Reviewers:** associate professor Branko Vuković, Ph.D.; Igor Miklavčić, lecturer; assistant professor Zvonko Glumac, Ph.D. ; Master of Science Slavko Petrinšak

**Thesis accepted:** 07. november 2017.

# 1. UVOD

## 1.1. Zadatak diplomskog rada

Ovaj radi bavi se jednim od temeljnih zakona elektrostatike, Coulombovim zakonom. Taj zakon je otkrio francuski fizičar Charles-Augustin de Coulomb (1736. – 1806.), još 1785. godine uz pomoć torzijske vage. Izum takvog instrumenta se pripisuje engleskom geologu Johnu Michellu 1750. godine, iako je njegov uređaj služio za mjerenja gravitacijske prirode. Za razliku od Michella, Coulomb je konstruirao svoju verziju torzijske vage u svrhu provjere elektrostatske interakcije između nabijenih tijela. Uspjeh Coulombovih mjerenja potakao je brojne znanstvenike nakon njega na korištenje takvog uređaja jer mu je jedna od najvećih prednosti mogućnost preciznog mjerenja vrlo malih iznosa sila.

Cilj ovog rada je eksperimentalnim putem, pomoću torzijske vage provjeriti valjanost Coulombova zakona elektrostatike. Svrha eksperimenta je odrediti kako elektrostatska sila, između dvije nabijene kuglice, ovisi o njihovoj međusobnoj udaljenosti te o količini naboja na njima.

Motivacija za ovaj rad je bila osposobiti postojeći nekorišteni postav torzijske vage u prostorijama Odjela za fiziku kako bi uređaj radio ispravno i kako bi imali određene upute za korištenje. Svrha je omogućiti budućim generacijama studenata korištenje tog uređaja u obliku izvođenja vježbe provjere Coulombova zakona iz praktikuma fizike.



## 2. TEORIJSKI DIO

### 2.1. Coulombov pokus

Tijekom 18. stoljeća znanstvenici su pokušavali izraditi brojne uređaje kako bi proučili ponašanje i svojstva električnog naboja. Do tada je Newtonov zakon gravitacije već bio poznat, a on kaže da je gravitacijska sila između dvaju tijela masa  $m_1$  i  $m_2$  na međusobnoj udaljenosti  $r$  proporcionalna umnošku masa tih tijela i obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti tih tijela:

$$F_G \sim \frac{m_1 m_2}{r^2} .$$

Tada je uspjeh tog zakona pokrenuo revoluciju u svijetu fizike, te su neki fizičari vjerovali kako je princip tog zakona primjenjiv ne samo na pojave gravitacijske prirode nego i na drugim područjima fizike. Potaknuti ovim zakonom neki znanstvenici su raspravljali o tome kako bi se i elektrostatski naboj mogao ponašati po sličnom principu, no za to nije bilo nikakvog egzaktnog dokaza. Većina zaključaka i teorija o elektricitetu je tada bila više opisne prirode, bez konkretnih kvantitativnih i matematički definiranih pravilnosti. Među tim znanstvenicima su bili Henry Cavendish i Joseph Priestly koji su raspravljali da bi privlačenje ili odbijanje nabijenih tijela moglo biti opisano upravo relacijom sličnom kao za gravitacijsku silu, s time da naboji igraju ulogu mase, a intenzitet odbijanja ili privlačenja je obrnuto proporcionalan udaljenosti naboja.

Činilo se kako bi se naboji vrlo vjerojatno ponašali po toj pravilnosti, no što se više nagađalo o tome, sumnja u istinitost ove pravilnosti je bila sve veća. Jednostavno se nije moglo prihvatiti da bi se samo na temelju pretpostavke o sličnosti sa gravitacijskim utjecajem sa takvom sigurnošću moglo tvrditi da se tako ponašaju i elektrostatski naboji. Bila je potrebna eksperimentalna potvrda.

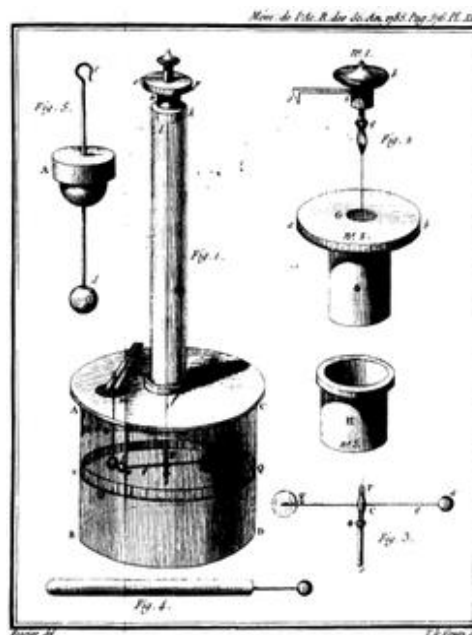
1785. godine u raspravu se uključuje Charles-Augustin de Coulomb, bivši vojni inženjer francuske vojske. Bio je poznat po svojoj čvrstoj matematičkoj podlozi i inženjerskoj intuiciji koja ga je i vodila do otkrića koje je postigao. Njegova motivacija je bila eksperimentalno potvrditi nagađanja oko ponašanja naboja, te je tvrdio kako je osmislio uređaj koji može mjeriti vrlo male iznose sila između naboja, te da je pri izvedbi eksperimenta našao kako je elektrostatska sila između naboja zaista obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti između naboja i proporcionalna iznosima naboja, slično kao što je to u Newtonovom zakonu gravitacije. Taj uređaj je poznat kao torzijska vaga. Sličan uređaj je ranije koristio znanstvenik John Michell za proučavanje gravitacije, no bez znatnog uspjeha. Coulomb se svojom bogatom inženjerskom

podlogom dosjetio kako bi mogao konstruirati sličan uređaj koji bi potvrdio teorije o elektricitetu te je tako proslavio taj uređaj koji je kasnije među brojnim fizičarima bio popularan alat za mnoga fizikalna mjerenja. Tijekom nekoliko idućih godina napravljeno je sve više mjerenja koja su upućivala jedino na istinitost ovog zakona. Tako je Coulomb zapamćen kao revolucionar na području elektriciteta, jer je uspio čista nagađanja i opisne teorije pretvoriti u konceptualno točan i strogo matematički definiran zakon, što je u to vrijeme bilo iznimno postignuće i napredak u svijetu znanosti.



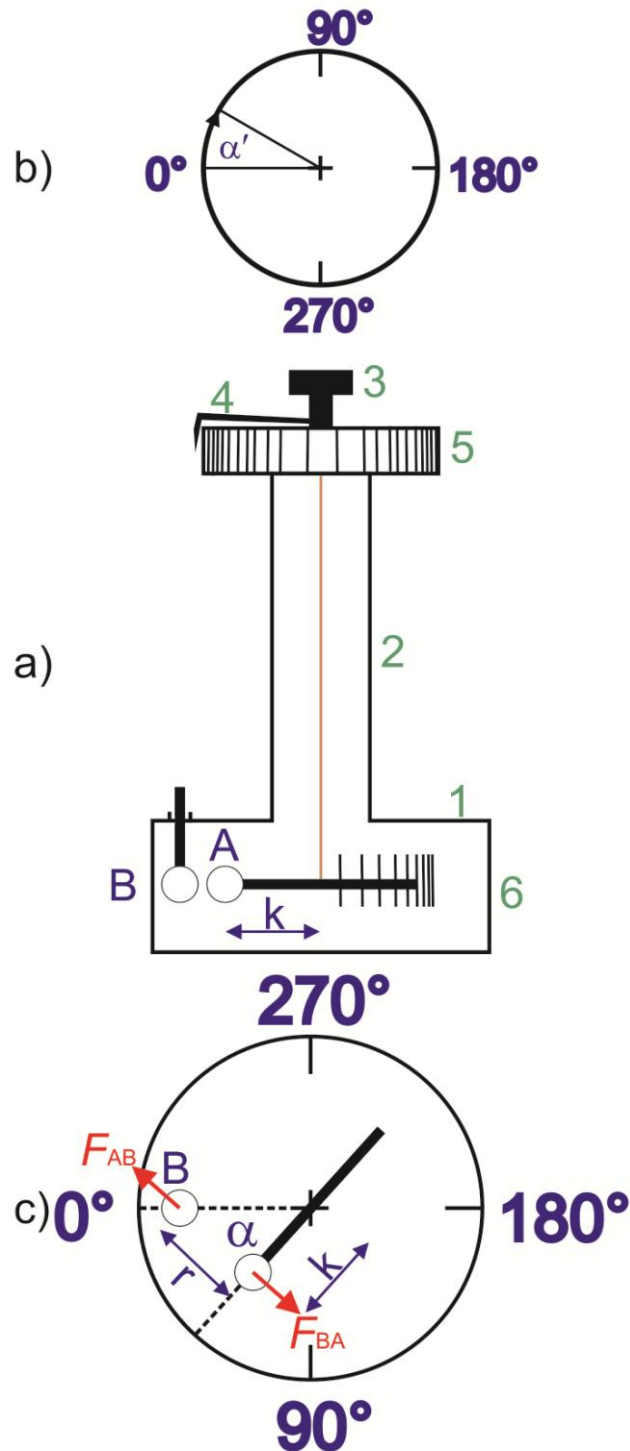
**Slika 1:** *Charles-Augustin de Coulomb*

Na slici 2. može se vidjeti originalni Coulombov nacrt torzijske vage s kojom je izvršio svoja mjerenja.



**Slika 2:** *Izvorni Coulombov nacrt torzijske vage*

Pomoću shematskog prikaza Coulombove torzijske vage se može u potpunosti i najrazumljivije objasniti sve dijelove tog postava te na koji način je Coulomb izveo eksperiment. Shema je prikazana na slici 3, a izrađena je uz pomoć programa Corel Draw.<sup>1</sup>



**Slika 3:** Shematski prikaz Coulombove torzijske vage

<sup>1</sup> Skica preuzeta iz udžbenika: Mladen Paić- Osnove fizike III- Elektricitet i Magnetizam, str. 10.

Prvo će biti opisan središnji dio slike 3, odnosno odjeljak 3. a). Tanka vertikalna žica koja ima svojstvo torzije prikazana je brojem 2, a pričvršćena je na svom gornjem kraju na vijak koji je prikazan brojem 3. Taj vijak se može zakretati oko vertikalne osi pod kutom  $\alpha'$  kojeg se mjeri pomoću kazaljke 4 koja je pričvršćena za vijak i skale za očitavanje tog kuta označene brojem 5. Na donjoj strani žice obješena je tanka horizontalna šipka u svom težištu. Ta horizontalna šipka je izrađena od električki izolirajućeg materijala. Na jednom kraju šipke nalazi se lagana kuglica označena slovom A. Ta kuglica je izvana presvučena slojem metala, pa se površina te kuglice ponaša kao vodič. Kuglicu A može se zakretanjem torzijske žice dovesti u kontakt sa kuglicom B, koja ima isti polumjer kao i kuglica A, presvučena je slojem metala i nalazi se na izoliranom dršku. Praktički je istih svojstava i dimenzija kao kuglica A.

Zakretanje horizontalne šipke na kojoj je kuglica A sa duljinom kraka  $k$  može se odrediti na skali prikazanoj brojem 6, koja se nalazi na stjenci posude u kojoj se nalazi vaga. To zakretanje označavati će se kutom  $\alpha$ .

Promotrimo sada gornji i donji dio slike 3, označene sa b) i c). Dio pod b) prikazuje skalu za očitavanje kuta  $\alpha'$  sa pogledom odozgo na torzijsku vagu, odnosno kuta za koji je zakrenut gornji vijak 3. Pozitivan smjer kuta  $\alpha'$  označen je strelicom, u smjeru kazaljke na satu. Dio pod c) prikazuje skalu za očitavanje kuta  $\alpha$  sa pogledom na torzijsku vagu također odozgo. Kut  $\alpha$  zapravo prikazuje kut pod kojim je zakrenuta horizontalna šipka u vagi u odnosu na početni položaj. Pozitivan smjer kuta  $\alpha$  naznačen je strelicom u smjeru suprotnom od gibanja kazaljke na satu, dakle također i suprotno od pozitivnog smjera kuta zakreta vijka  $\alpha'$ . Ti pozitivni smjerovi kutova  $\alpha'$  i  $\alpha$  su međusobno suprotni zbog toga što je Coulomb proučavao utjecaj dva istoimena naboja, odnosno kuglice A i B imaju jednaku količinu istoimenog naboja nakon doticanja. Taj naboj može biti pozitivan ili negativan, ovisno o sredstvu s kojim se naelektrizira kuglicu B. Sam predznak naboja nije toliko bitan koliko činjenica da se naboji istoimenog predznaka odbijaju i zbog toga razloga je pozitivan smjer kuta zakretanja vijka suprotan od smjera kuta zakreta horizontalne šipke u posudi torzijske vage.

Označi li se sa  $\vec{D}$  direkcijska sila žice, tada je vrijednost momenta torzije jednaka umnošku iznosa direkcijske sile žice i ukupnog kuta torzije žice.<sup>2</sup> Kako odrediti ukupan kut zakreta, odnosno torzije žice? Prema dogovoru, pozitivan smjer kuta zakreta gornjeg vijka  $\alpha'$  je u smjeru gibanja kazaljke sata. Ako je vijak zakrenut za kut  $\alpha'$ , tada je i žica zakrenuta za kut  $\alpha'$ . No postoji još i kut zakreta horizontalne šipke sa kuglicom A koji iznosi  $\alpha$  u suprotnom smjeru, a

---

<sup>2</sup> Mladen Paić- Osnove fizike III- Elektricitet i Magnetizam, str 9.

to je ujedno i kut zakreta same žice u suprotnom smjeru. Sada je vidljivo da je ukupan kut zakreta žice jednak zbroju kuta za koji gornji vijak zakrene žicu i kuta za koji šipka sa kuglicom zakrene žicu, odnosno  $\alpha + \alpha'$ .

Može se pisati kako je iznos momenta torzije jednak:

$$|\vec{M}| = |\vec{D}| \cdot (\alpha + \alpha').$$

No iznos momenta torzije također je i jednak produktu elektrostatske sile  $\vec{F}$  između kuglica A i B te kraka te sile koji je označen sa  $k$ :

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot k.$$

Iz toga slijedi da je:

$$|\vec{D}| \cdot (\alpha + \alpha') = |\vec{F}| \cdot k.$$

Iz ove jednadžbe može se izvući direktan zaključak kako je elektrostatska sila proporcionalna ukupnom kutu torzije žice:

$$|\vec{F}| \sim (\alpha + \alpha') \quad (2.1.1)$$

Promotrimo još jednom donji dio slike 3, odnosno 3.c). Udaljenost između kuglica A i B označili smo sa  $r$ . Za dovoljno male kutove  $\alpha$  zakreta šipke sa kuglicom A, ta udaljenost između kuglica je jednaka luku kružnice, kojeg opisuje kuglica A dok se udaljava od kuglice B. Duljina luka te kružnice proporcionalna je kutu zakreta šipke, pa se zaključuje da je onda i udaljenost između kuglica A i B proporcionalna tom kutu:

$$r \sim \alpha \quad (2.1.2)$$

Jednadžbe, odnosno proporcionalnosti (2.1.1) i (2.1.2.) su temeljne polazne jednadžbe s kojima je Coulomb krenuo u svoj eksperiment i mjerenja ovisnosti elektrostatske sile o međusobnoj udaljenosti naboja. U nastavku će se teorijski razmotriti opis Coulombovih postupaka izvođenja eksperimenta u dva dijela. Prvi dio se odnosi na provjeru odnosa između elektrostatske sile i udaljenosti naboja, a drugi dio se odnosi na provjeru odnosa između elektrostatske sile i količine naboja.

### Odnos elektrostatske sile i udaljenosti među nabojima:

Na samom početku kuglica A je nenabijena, odnosno nema nikakav električni naboj. Tu kuglicu se dovede u položaj gdje je kut zakreta šipke  $\alpha = 0^\circ$ , odnosno posve uz kuglicu B koja je također nenabijena i stoji u svom postolju na vagi, a da pri tom žica nije usukana (tordirana), odnosno potpuno je ravna, tako da je kut zakreta vijka također  $\alpha' = 0$ .

Kuglicu B se električki nabije te se doticanjem sa kuglom A naboj sa kuglice B se ravnomjerno raspoređuje tako da je polovina početnog naboja na kuglici A, a druga polovina početnog naboja na B. Zašto je to tako? Doticanjem kugli zapravo se izjednačava njihov električni potencijal, a ne sam naboj! Da su kuglice različitog polumjera, taj naboj se ne bi ravnomjerno rasporedio po polovinama, nego ovisno o polumjerima kuglica. Pokažimo to sada i matematički. Doticanjem kugli A i B njihov električni potencijal se izjednačava:

$$\varphi_A = \varphi_B,$$

$$k \frac{q_A}{r_A} = k \frac{q_B}{r_B},$$

gdje su  $q_A$  i  $q_B$  naboji na kuglici A, odnosno B. Analogno tome sa  $r_A$  smo označili polumjer kuglice A, a sa  $r_B$  polumjer kuglice B. Znamo da su ti polumjeri međusobno jednaki, odnosno kuglice su istih dimenzija, dakle  $r_A = r_B$ . Ako to uvrstimo u gornju jednadžbu potencijala, dobivamo :

$$k \frac{q_A}{r_A} = k \frac{q_B}{r_A}.$$

Sada množenjem gornjeg izraza sa  $\frac{r_A}{k}$  dobivamo potvrdu da se naboj doticanjem tih kugli istog polumjera zaista ravnomjerno rasporedio na kuglicu A i na kuglicu B, te sada svaka od kuglica posjeduje polovinu početnog naboja s kojim smo naelektrizirali kuglicu B u početku:

$$k \frac{q_A}{r_A} = k \frac{q_B}{r_A} / \cdot \frac{r_A}{k},$$

$$q_A = q_B.$$

Sada kad je razjašnjeno zašto se naboj raspodjeljuje ravnomjerno na dva jednaka djela, promotrimo što se dalje događa.

Zbog odbojne sile između A i B, kuglica A sa šipkom na torzijskoj žici dobiva impuls te se udaljava od kuglice B koja je stacionarna na svom položaju u vagi. Kuglica A, odnosno cijela horizontalna šipka tada oscilira zbog tog primljenog impulsa, a nakon nekog vremena kada se oscilacije priguše, kuglica A se umiruje i zauzima neki ravnotežni položaj, odnosno kut kojeg ćemo označiti sa  $\alpha_1$ .

Cilj je promotriti silu između tih dvaju naboja. Ranije je rečeno kako je glavni Coulombov zaključak bio taj da je elektrostatska sila između kuglica A i B proporcionalna ukupnom kutu torzije žice  $|\vec{F}| \sim (\alpha + \alpha')$ . Međutim sada je kut zakreta vijka  $\alpha_1' = 0$ , pa je stoga ukupan kut torzije jednak samo kutu zakreta šipke  $\alpha_1$ . Stoga slijedi da je sila između naboja na kuglicama A i B međusobno udaljenih za  $r_1$ :

$$r_1 \sim \alpha_1,$$

$$|\vec{F}_1| \sim \alpha_1.$$

Nadalje, Coulomb je htio provjeriti kolika će biti sila ako se udaljenost između nabijenih kuglica A i B smanji na pola. Torzijom žice u smjeru pozitivnih  $\alpha'$  smanjuje se  $\alpha_1$ , odnosno  $r_1$  na polovicu. Dakle zakretanjem vijka u pozitivnom smjeru žica se dodatno tordira kako bi se smanjila udaljenost između naboja, odnosno kut zakreta šipke na polovicu. Kad je udaljenost smanjena na polovicu, sila između naboja A i B je:

$$r_2 \sim \frac{\alpha_1}{2},$$

$$F_2 \sim \frac{\alpha_1}{2} + \alpha_2'.$$

Što je zapravo  $\alpha_2'$ ? To je kut za koji se zakrene gornji vijak vage u pozitivnom smjeru kako bi se udaljenost između naboja smanjila na pola, odnosno dodatno se mora tordirati žicu zbog svladavanja sve veće elektrostatske sile između kuglica smanjujući udaljenost kuglica  $r_1$  odnosno kut  $\alpha_1$  na pola.

Po postavljenim jednadžbama za udaljenost kuglica  $r_1$  i  $r_2$  vidljivo je da su se udaljenosti smanjile na polovicu:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2},$$

a elektrostatske sile su se povećale u omjeru :

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\frac{\alpha_1}{2} + \alpha_2'}{\alpha_1}.$$

Sa ovim izrazom Coulomb je vrlo jednostavno mogao izračunati omjere sila u ovisnosti o udaljenosti naboja jednostavnim mjerenjem kuta  $\alpha_1$  i kuta  $\alpha_2'$ . U literaturi je nađeno jedno od Coulombovih mjerenja koje je dalo sljedeće rezultate:

$$\alpha_1 = 36^\circ, \quad \alpha_2' = 126^\circ,$$

što daje omjer sila:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\frac{\alpha_1}{2} + \alpha_2'}{\alpha_1} = \frac{\frac{36^\circ}{2} + 126^\circ}{36^\circ} = \frac{144^\circ}{36^\circ} = 4.$$

Što nam pokazuje ovaj izračun? Pokazuje upravo to da se elektrostatska sila između naboja A i B povećala četiri puta kad se udaljenost između nabijenih kuglica smanjila na polovicu. Coulombu je to izravno ukazalo na činjenicu da je elektrostatska sila obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti dvaju naboja, odnosno:

$$F_{el} \sim \frac{1}{r^2}.$$

Naravno jedno mjerenje ne potvrđuje zakon pa je Coulomb odradio veliki broj raznovrsnih mjerenja varirajući udaljenosti odnosno kutove i naboje. Ustanovio je da pravilo zaista vrijedi bez obzira na udaljenosti, količinu i vrste naboja, odnosno bez obzira jesu li elektrostatske sile između naboja odbojne ili privlačne. Na pravilnost također nije utjecala niti vrsta vodljivog materijala od kojih su kuglice izrađene.

U ovom Coulombovom konkretnom mjerenju valja primijetiti kako je početni kut zakreta šipke  $36^\circ$ , a kada se zakretom gornjeg vijka morao je poprilično tordirati žicu i to za kut od  $126^\circ$  kako bi kut zakreta šipke, odnosno udaljenost između kuglica smanjio na polovicu. Naravno to ovisi i o karakteristikama same žice, neke žice može se tordirati lako, a neke puno teže. Važno je uočiti prirodu elektrostatske sile između dva naboja, a po ovoj popriličnoj torziji vidljivo je da je elektrostatska sila relativno intenzivna u odnosu na recimo gravitacijsku silu između dvije kuglice sličnih svojstava kao u mjerenju elektrostatske sile. To je danas opće poznato pošto su svi ti



zakoni davno otkriveni i potvrđeni, pa se zna da primjerice omjer elektrostatske sile i gravitacijske sile između dvaju elektrona iznosi  $4 \cdot 10^{42}$ . Pokažimo to i kratkim računom:

$$\frac{F_{el}}{F_G} = \frac{k \frac{e^2}{r^2}}{G \frac{m_e^2}{r^2}} = \frac{k}{G} \left( \frac{e}{m_e} \right)^2 = \frac{9 \cdot 10^9}{6,67 \cdot 10^{-11}} \left( \frac{1,67 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}} \right)^2 = 4 \cdot 10^{42} .$$

Vidi se da je elektrostatska sila zaista znatno intenzivnije prirode nego gravitacijska sila.

### **Odnos elektrostatske sile i količine naboja na kuglicama:**

Nakon prikaza Coulombovih mjerenja ovisnosti elektrostatskih sila o udaljenosti naboja, promotriti će se kako se ponaša sila s obzirom na količine naboja na kuglicama. Coulomb nije vršio mjerenja za takvu vrstu potvrde, no ta mjerenja su učinili drugi znanstvenici i istraživači. Problem je bio kako točno odrediti omjere naboja na kuglicama. Dosjetljivošću i poznavanjem osnovnih zakona elektrostatičke, došlo se do zaključka da se do naboja koji iznose polovinu, četvrtinu, osminu, šesnaestinu, ... početnog naboja može doći ako prvobitno nabijenu kuglicu, sa nekom količinom naboja, dotaknemo nenabijenom vodljivom kuglicom istog polumjera. Na taj način se polovica naboja prenese na drugu kuglicu zbog izjednačavanja njihovih električnih potencijala tijekom dodira. Istim postupkom se nastavlja dijeljenje naboja i to tako da se drugu kuglicu, koja sada ima polovinu naboja, dotakne trećom također nenabijenom kuglicom istog polumjera, tada ta kuglica posjeduje četvrtinu početnog naboja sa prve kuglice. Postupak se ponovi sa proizvoljnim brojem kuglica, ovisno do kojeg omjera se želi raspodijeliti naboj.

Brojnim mjerenjima pokazano je kako je elektrostatska sila između dvije nabijene kuglice sa količinama naboja iznosa  $Q_1$  i  $Q_2$ , proporcionalna produktu tih dvaju naboja na kuglicama. Dakle elektrostatska sila između dva naboja raste ukoliko raste i produkt naboja na tim dvjema kuglicama.

Matematički to izgleda kao:

$$|\vec{F}_{el}| \sim |Q_1| \cdot |Q_2|$$

Zašto produkt apsolutnih vrijednosti naboja, iako naboj nije vektorska veličina, nego skalarna? Iz jednostavnog razloga jer je naboj dvojake prirode, može biti pozitivan ili negativan. Za sam iznos sile nije bitan smjer vektora sile, pa se tako apsolutnim vrijednostima naboja automatski

isključuje negativan predznak iz igre, te se dobiva čisti iznos produkta tih naboja. Kod vektorskog, odnosno općenitog zapisa elektrostatske sile mora se obratiti pozornost i na predznak naboja, jer sila može biti odbojna ili privlačna pa se u tom izrazu neće koristiti apsolutne vrijednosti naboja.

Kada se sažmu zaključci oba dijela Coulombovih mjerenja, dobiva se definicija Coulombovog zakona:

**Elektrostatska sila između dva nabijena točkasta tijela u vakuumu proporcionalna je produktu količina naboja prvog i drugog tijela, a obrnuto je proporcionalna kvadratu međusobne udaljenosti tih dvaju nabijenih točkastih tijela:**

$$F_{el} \sim \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

## 2.2. Opći matematički zapis Coulombova zakona

U prošlom poglavlju zapisano je kako je iznos Coulombove elektrostatske sile između dvaju naboja proporcionalan produktu apsolutnih vrijednosti tih dvaju naboja. Međutim u tom slučaju važna je bila samo činjenica kako se iznos sile ponaša s obzirom na količine naboja na kuglicama. Sada će se razmatrati širi, općeniti slučaj u kojemu će se pokazati o kojim čimbenicima ovise iznos, smjer i orijentacija elektrostatske Coulombove sile s obzirom na iznose i predznake naboja, vrstu sredstva u kojoj se naboji nalaze te na njihovu međusobnu udaljenost.

Kod općenitog matematičkog zapisa Coulombova zakona mora se uzeti u obzir činjenica da naboji međusobno jedan na drugog djeluju istim iznosom sile, na istom pravcu, ali suprotnog smjera! To je posljedica III. Newtonovog zakona. Ovisno o predznacima tih naboja ta sila može biti privlačna ili odbojna. Iz tog razloga opći izraz za Coulombovu silu prikazuje samo jednu od tih dvaju sila.

Coulombov zakon je u prošlom odjeljku zapisan kao:

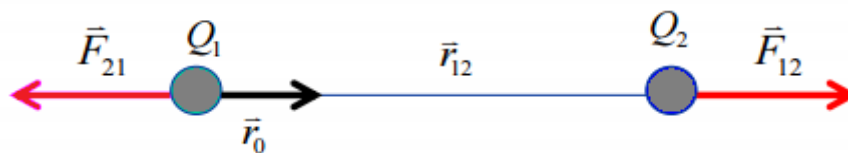
$$F_{el} \sim \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Međutim iz tog zapisa može se iščitati samo proporcionalnost između Coulombove sile te produkta naboja i njihove međusobne udaljenosti, a to zapravo nije jednadžba. Da bi se dobila

jednadžba, u izrazu mora biti znak jednakosti, a da bi se to postiglo, izraz s desne strane će se pomnožiti s pozitivnom konstantom iznosa  $k$ . Više o samoj konstanti ćemo napisati malo poslije. Jednadžba Coulombova zakona sada izgleda kao:

$$F_{el} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Ovo nije konačan opći izraz za Coulombov zakon, no predstavlja čistu apsolutnu vrijednost elektrostatske Coulombove sile ukoliko su poznati iznosi naboja i njihova međusobna udaljenost. Da bi se u potpunosti definiralo Coulombov zakon, silu treba prikazati vektorski, a u tu svrhu promotrimo sljedeću sliku:



**Slika 4:** Shematski prikaz naboja, njihove međusobne udaljenosti i vektora sila

Na pravcu nosiocu naboja  $Q_1$  i  $Q_2$  odredi se vektor udaljenosti naboja  $\vec{r}_{12}$ , koji počinje u jednom od naboja, primjerice kod naboja  $Q_1$ , a završava kod drugog naboja  $Q_2$ . Sada će vektorski izraz za Coulombovu silu izgledati kao:

$$\vec{F}_{el} = k \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^3} \cdot \vec{r}_{12}.$$

Ovaj eksponent 3 u nazivniku može biti zbunjujući, no on je tu upravo iz razloga što je u jednadžbu uključen vektor udaljenosti između naboja. No da bismo imali jednostavniji zapis prisjetimo se jednostavnog vektorskog računa. Kod Coulombovog zakona ustvari nije potreban zapis tog vektora udaljenosti  $\vec{r}_{12}$ , bitan je samo smjer jediničnog vektora udaljenosti  $\vec{r}_0$ , jer će on pokazati smjer Coulombove sile kojom naboj  $Q_1$  djeluje na  $Q_2$ , odnosno  $\vec{F}_{12}$ . Obrnuto, silu kojom naboj  $Q_2$  djeluje na naboj  $Q_1$  označiti će se sa  $\vec{F}_{21}$ . Kao što je ranije navedeno, po III. Newtonovom zakonu, te dvije sile su međusobno istog iznosa, ali suprotnog smjera:

$$\vec{F}_{el} = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

U Coulombovom zakonu izražava se samo jedna od tih sila, a prema ovoj jednadžbi vidi se da će opći zapis Coulombove sile  $\vec{F}_{el}$  predstavljati upravo silu  $\vec{F}_{12}$ , odnosno silu kojom prvi naboj

djeluje na drugi. U literaturi je to najčešći slučaj, a može se postaviti i da bude suprotno, no u ljudskoj prirodi lakše je i logičnije da se u ovakvim slučajevima prati prirast brojeva (1, 2, 3, ...), a ne opadanje (... , 3, 2, 1) pa se zato za opći zapis Coulombove sile uzima upravo silu kojom prvi naboj djeluje na drugi, imajući na umu da je sila kojom drugi naboj djeluje na prvi tada suprotnog smjera (i predznaka u jednadžbi).

Vratimo se sada određivanju jediničnog vektora udaljenosti naboja. Jedinični vektor udaljenosti dobiva se tako da se vektor udaljenosti  $\vec{r}_{12}$  podijeli s njegovom apsolutnom vrijednošću, odnosno iznosom vektora udaljenosti. Jedinični vektor udaljenosti naboja uvelike pojednostavljuje sam vektorski zapis Coulombova zakona.

Jedinični vektor udaljenosti naboja je:

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}.$$

Iznos tog jediničnog vektora je 1 pa on pri množenju ne utječe na iznos Coulombove sile, nego izričito određuje smjer sile, što je i bio cilj postići te tako pojednostavniti izraz za Coulombov zakon u poznatiji oblik. Smjer tog jediničnog vektora ujedno prikazuje i smjer vektora udaljenosti između naboja kao što je prikazano na slici 4.

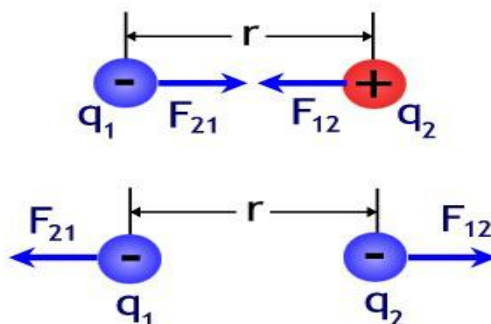
Sada zapis Coulombovog zakona izgleda ovako:

$$\vec{F}_{el} = k \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \cdot \vec{r}_0.$$

Ovakav zapis je jednostavniji i nama poznatiji nego prvi vektorski zapis Coulombovog zakona nekoliko redova iznad.

Također treba napomenuti kako ovakav izraz Coulombova zakona vrijedi općenito za točkaste naboje, a za nabijena tijela nepravilna oblika i određenog volumena u obzir se uzimaju još neki drugi dodatni faktori. No ovdje ćemo se zadržati na općoj razini Coulombova zakona između točkastih nabijenih tijela.

Nadalje se razmatra kada će sile među nabojima biti privlačne, a kada odbojne. Ako su naboji raznoimeni, odnosno ukoliko je prvi naboj pozitivan, a drugi negativan i obrnuto, tada je Coulombova sila između tih dvaju naboja privlačna. Međutim ukoliko su naboji istoimeni, odnosno ukoliko postoji međudjelovanje dva negativna ili dva pozitivna naboja, tada će Coulombova sila između njih biti odbojna. To se lakše vidi uz pomoć skice:



**Slika 5:** Raznoimeni naboji se privlače, a istoimeni se odbijaju

Matematički, odbojne sile biti će pozitivnog predznaka jer produkt dva istoimena naboja uvijek daje pozitivan broj. Privlačne sile bit će negativnog predznaka, jer produkt negativnog i pozitivnog broja (naboja) uvijek daje negativan broj.

Dakle za odbojne sile je uvijek:  $\vec{F}_{el} \geq 0$ ,

a za privlačne sile vrijedi:  $\vec{F}_{el} \leq 0$ .

### **Konstanta Coulombova zakona i dielektrična konstanta:**

Nakon što je ustanovljeno kako se ponaša Coulombova sila u ovisnosti o nabojima i njihovoj međusobnoj udaljenost, jedino čime se još treba pozabaviti jest vrijednost konstante  $k$  Coulombova zakona. Od sad pa nadalje vektorski zapis Coulombove sile neće biti potreban pa se radi jednostavnosti računa prelazi na već ranije navedeni osnovni i jednostavniji izraz:

$$F_{el} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad k = ?$$

Koliko iznosi vrijednost konstante  $k$ ? Možemo provesti kratku dimenzijsku analizu: ako se Coulombova sila izrazi u njutnima (N), količinu naboja u kulonima (C), a udaljenost između naboja u metrima (m), tada će mjerna jedinica konstante  $k$  biti:

$$k = \frac{F_{el} \cdot r^2}{Q_1 Q_2} \rightarrow [k] = \left[ \frac{Nm^2}{C^2} \right].$$

Konstanta se određuje eksperimentom gdje su poznati iznosi naboja koji međudjeluju, njihova međusobna udaljenost i iznos Coulombove sile među nabojima. Brojnim mjerenjima izračunata je egzaktna vrijednost konstante koja iznosi:

$$k = 8,987552 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2},$$

ili približno kao što se većinom koristi u aproksimativnim izračunima u raznim srednjoškolskim i sveučilišnim zadacima:

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}.$$

Sada kada je određena vrijednost konstante Coulombova zakona, promotrimo još jedan čest način zapisa Coulombova zakona, koji je možda i prikladniji za opću i praktičnu upotrebu, jer je ova vrijednost konstante prikladna samo za slučajeve razmatrane u vakuumu. Za naboje koji međudjeluju u zraku vrijednost ove konstante bi bila malo drukčija, no često se u takvim slučajevima samo prihvaća gore navedena vrijednost kao aproksimacija jer je vrijednost vrlo slična.

Konstanta  $k$  se često zapisuje i obliku:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

odnosno Coulombov zakon u obliku:

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

gdje  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$  predstavlja **permitivnost vakuuma** ili **dielektričnu konstantu vakuuma**. To je vrijednost koja je eksperimentalno otkrivena na sličan način kao i konstanta  $k$ . Međutim ako se promatra slučaj u kojem dva naboja međudjeluju u sredstvu koje nije vakuum ili zrak, nego ako je između njih izolator, mijenja se iznos Coulombove sile među nabojima. Sila se smanjuje, a koliko je to smanjenje ovisi o vrsti sredstva između naboja. Konstanta koja govori koliko se puta Coulombova sila u tom određenom sredstvu u odnosu na silu u vakuumu smanji zove se **relativna dielektrična konstanta** i označava se simbolom  $\epsilon_r$ . Općenito permitivnost dielektrika ili dielektričnu konstantu označava se sa  $\epsilon$  i po iznosu ona je jednaka umnošku dielektrične konstante vakuuma i relativne dielektrične konstante sredstva:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r .$$

Može se reći da je to „ukupna“ dielektrična konstanta ili permitivnost, ovisno o sredstvu. Iz te jednadžbe lako se vidi da relativna dielektrična konstanta govori upravo koliko se puta Coulombova sila smanjila u sredstvu odnosu na silu u vakuumu:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} .$$

Primjerice za vakuum je  $\varepsilon_r = 1$ , pa je očito zašto se ova konstanta izostavlja iz zapisa gdje se promatra međudjelovanje u vakuumu. Za zrak je  $\varepsilon_r = 1,00594$ , pa bi u pravilu i to trebalo uračunati pri izračunu Coulombove sile među nabojima u zraku. No zbog malog smanjenja to se najčešće zanemaruje i aproksimira se da je Coulombova sila između dva ista naboja u vakuumu i u zraku približno jednaka.

Međutim ako je to sredstvo voda, tada se to smanjenje ne može ignorirati jer relativna dielektrična konstanta za vodu iznosi  $\varepsilon_r = 81$ . Ova vrijednost kaže da se Coulombova sila između dva naboja u vodi u odnosu na silu među tim dvama nabojima u vakuumu smanji čak 81 puta! Naravno udaljenost između naboja se ne mijenja, odnosno svi ostali parametri ostaju konstantni. Mijenja se isključivo iznos sile. Coulombov zakon tada općenito zapisujemo u obliku :

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} ,$$

i to je ujedno i najpravičniji i najtočniji zapis Coulombovog zakona jer su uključeni svi parametri koji utječu na silu između naboja. Također ovakav zapis je općenito prikladniji zbog pojednostavljenja jednadžbi u elektricitetu.

### 3. EKSPERIMENT

#### 3.1. Materijali i metode

Uređaj, odnosno torzijska vaga koja je korištena za potvrdu zakona je uređaj koji se nalazi u prostoriji praktikuma na Odjelu za fiziku u Osijeku. Uređaj nije bio u upotrebi, nije bilo uputa za korištenje te je eksperiment u početku bio neizvediv. Motivacija je bila osposobiti uređaj za rad kako bi se mogao koristiti za vježbe na praktikumima fizike. Uz pomoć komentora predavača Miklavčića izvršene su određene promjene na uređaju kako bi se mogli dobiti mjerljivi rezultati. Uređaj radi na sličan princip kao i izvorna Coulombova torzijska vaga s kojom je on potvrdio zakon. Uz komentorovu pomoć pronađene su upute za vrlo sličan postav uređaja proizvođača PASCO na internetu. Uz upute su se s lakoćom mogli uvidjeti potencijalni nedostaci na našem uređaju koji su zatim, nakon izvršenih promjena, popravljani.



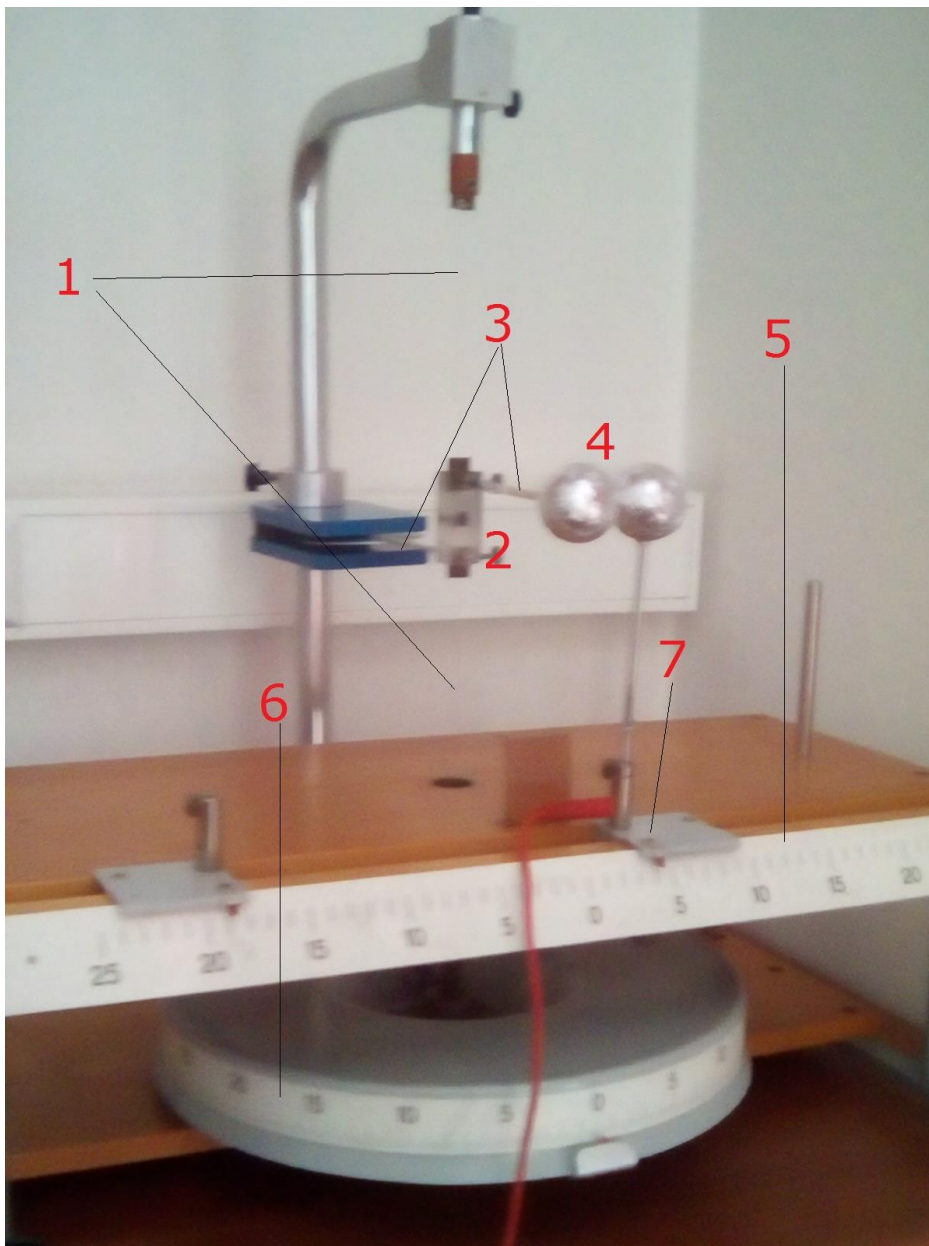
**Slika 6:** *Postav torzijske vage u početnom stanju*

Na slici 6 prikazan je postav torzijske vage u početnom stanju prije izvršenih izmjena. Neke komponente uređaja nisu bile u funkciji, stoga je izmjena tih komponenti bila prvi korak u



omogućavanju mjerenja. Prva stvar koja je izmijenjena je žica jer je bila hrđava te je zamijenjena novom žicom približno jednakog promjera od 0,25 mm (metalna žica za gitaru). Zatim su izmijenjene kuglice za naboje, jer stare grafitne kuglice gotovo uopće nisu zadržavale naboj koji se na njih dovede. Nove kuglice su izrađene od loptica za stolni tenis (šuplje sfere) promjera 4 cm, koje su precizno obložene aluminijskom folijom kako bi vodljivost na površini kuglice bila bolja i kako bi se naboj duže zadržavao.

Nakon što su izvršene navedene promjene, dobiveni su znatno bolji rezultati. Na slici 7 prikazan je postav uređaja nakon izvršenih izmjena sa označenim komponentama.



**Slika 7:** Konačni izgled postava torzijske vage

Brojem **1** označena je žica torzijske vage koja je s gornje strane pričvršćena na vijak na vrhu konstrukcije, s kojim se može regulirati napetost žice. Od tog vijka žica se proteže okomito prema dolje do kotača sa kružnom skalom označenog brojem 6.

Brojem **2** označen je zglob koji je veza gornjeg i donjeg dijela žice, a u utore tog zgloba se sa prednje i zadnje strane umetnu šipke označene brojem 3.

Brojem **3** su označene šipke koje se umetnu u zglob na sredini žice. S prednje strane umetnuta je šipka izolatora (plastična slamčica) na čijem je vrhu prva kuglica (naboj). Sa zadnje strane umetnuta je metalna šipka sa metalnom pločicom (aluminijском) na svom kraju koja služi za prigušenje titraja. Prigušenje se događa jer metalna pločica u gibanju prolazi između polova magneta te na taj način dolazi do pojave vrtložnih struja koje uzrokuju prigušenje titraja šipke sa pločicom. Na taj način se prigušuje i titranje šipke i kuglice s prednje strane, što omogućava brže očitavanje rezultata.

Brojem **4** označene su kuglice, odnosno naboji. Lijeva kuglica predstavlja prvi naboj, a desna predstavlja drugi naboj. Valja napomenuti da su ove kuglice šuplje sfere, a raspodjela naboja na površini sfere je ravnomjerna, sa centrom raspodjele naboja u središtu sfere. Na taj način je omogućen rad sa kuglicama, bez da se moraju koristiti točkasti naboji s kojima bi eksperiment bio teže izvediv.

Brojem **5** označena je linearna skala u centimetrima na kojoj očitavamo udaljenost između središta dviju kuglica.

Brojem **6** označen je kotač na kojemu se nalazi kružna skala u centimetrima. Taj kotač rotira zajedno sa žicom te nam direktno prikazuje kolika je duljina luka kotača pri nekom kutu torzije žice.

Brojem **7** označeno je postolje od izolatora sa šipkom na kojoj se nalazi druga kuglica (naboj). To postolje ima oznaku koja označava središte te druge kuglice, čiji položaj se tada direktno očitava na linearnoj skali (5).

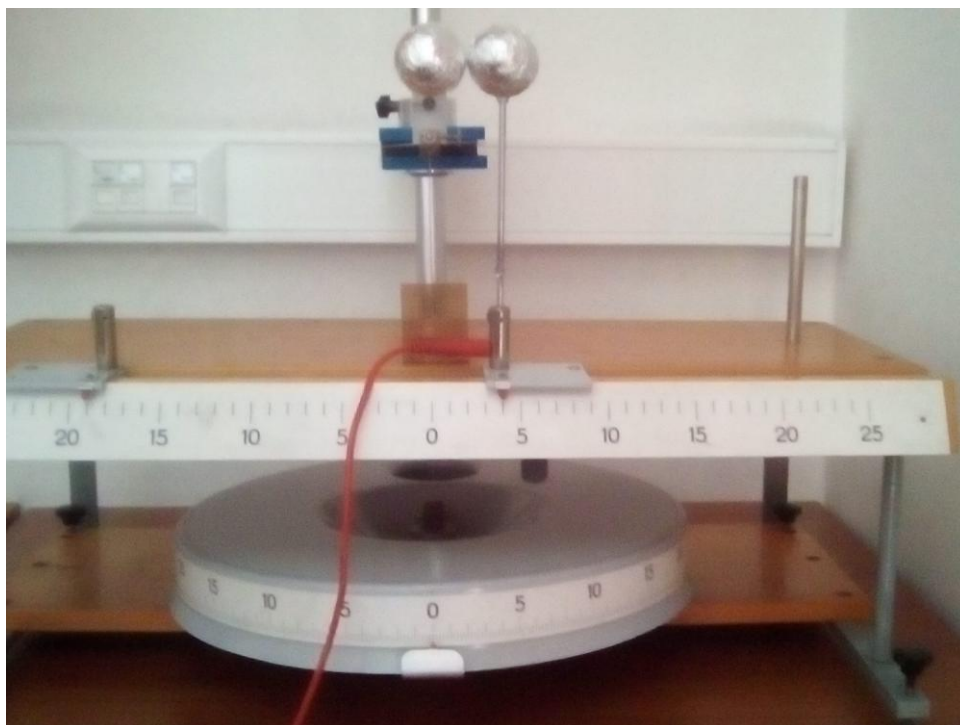
Za nabijanje kuglica korišten je visokonaponski uređaj tvrtke PHYWE koji može postići maksimalan napon 11,5 kV, a prikazan je na slici 8.



**Slika 8:** Visokonaponski uređaj tvrtke PHYWE

**Princip rada uređaja:**

U početnom položaju, lijeva kuglica je u položaju 0 cm na gornjoj skali, što je ujedno i ravnotežni položaj te kuglice. Na donjoj kružnoj skali se također namjesti početni položaj od 0 cm dok je žica netordirana. Kuglice su nenabijene, dotiču se i središta su im udaljena 4 cm, što se direktno očitava na gornjoj linearnoj skali kao što je prikazano na slici 9.



**Slika 9:** Kuglice u početnom položaju

Zatim se desnu kuglicu na linearnom klizaču postavi desno na određenu udaljenost od lijeve kuglice. Nabijanjem desne kuglice te kratkim doticanjem sa prvom kuglicom, kuglicama se izjednačava potencijal, a pošto su od istog materijala i istog polumjera, tada je i naboj na tim kuglicama jednak. Zbog istoimenog naboja na kuglicama, dolazi do odbijanja lijeve kuglice ulijevo, te se cijeli sustav kuglica-šipka rotira ulijevo. Os rotacije je sama žica. Do odbijanja dolazi jer sada između kuglica postoji elektrostatska (Coulombova) sila koja uzrokuje to odbijanje. Po III. Newtonovom zakonu, lijeva kuglica djeluje na desnu jednakim iznosom sile kao što i desna djeluje na lijevu, ali u suprotnom smjeru, a nadalje će se za te obje sile koristiti izraz  $F_{el}$ , jer će za naše razmatranje biti važan samo iznos sile:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = F_{el}$$

Nadalje, rotacijom kotača sa donjom kružnom skalom udesno, cilj je vratiti lijevu kuglicu u početni položaj od 0 cm na linearnoj skali. Zajedno sa rotacijom kotača udesno, žica se tordira za određeni kut, što se lako izračuna iz duljine kružnog luka za koji smo zarotirali kotač udesno, a ta duljina kružnog luka  $l$  se direktno iščitava na donjoj kružnoj skali u centimetrima.

Opseg punog kruga kotača iznosi 110 cm pa se iz omjera:

$$\frac{\theta}{l \text{ (cm)}} = \frac{360^\circ}{110 \text{ cm}},$$

dobiva relacija koja povezuje kut torzije i duljinu kružnog luka na kotaču:

$$\theta = \frac{l \text{ (cm)}}{110 \text{ (cm)}} \cdot 360^\circ.$$

Na taj način se torzijskom silom žice svladava elektrostatska sila između kuglica, a kako je to jedina sila u sustavu koja djeluje između kuglica te uzrokuje torziju žice, u trenutku kada se lijevu kuglicu vrati u početni položaj, torzijska sila žice jednaka je elektrostatskoj sili između kuglica:

$$F_{torzije} = F_{el}.$$

Torzijska sila žice je proporcionalna kutu torzije, iz čega slijedi da je i elektrostatska sila između kuglica također proporcionalna kutu torzije:

$$F_{torzije} \sim \theta_{torzije},$$

$$F_{el} \sim \theta_{torzije}.$$

Svrha eksperimenta je provjeriti kako elektrostatska sila, odnosno kut torzije ovisi o međusobnoj udaljenosti kuglica pri konstantnim nabojima, a u drugom dijelu provjeriti kakav je taj kut s obzirom na količine naboja na kuglicama pri konstantnoj udaljenosti:

1. Ispitati ovisnost:  $\theta_{torzije} - r$
2. Ispitati ovisnost:  $\theta_{torzije} - Q_1, Q_2$

### **Vanjski faktori koji utječu na eksperiment:**

Nakon opisa načina rada torzijske vage, valja napomenuti ključne vanjske faktore koji mogu utjecati na eksperiment i na taj način ga znatno otežati ili u potpunosti onemogućiti. Navedeni su postupci kako minimizirati vanjske utjecaje u svrhu dobivanja što boljih rezultata:

- Ukoliko se postav eksperimenta nalazi u prostoriji sa velikom vlagom zraka, vrlo teško je dobiti točne rezultate jer se statički naboj na kuglicama vrlo teško zadržava u vlažnoj atmosferi. Vlažan zrak bolje vodi naboj te dolazi do brže neutralizacije kuglice. Treba ostvariti što manju vlagu zraka u prostoriji uz pomoć klima uređaja.
- Cirkulacija zraka u prostoriji bi trebala biti minimalna, najbolje je da su svi prozori i vrata zatvoreni.
- Postav eksperimenta bi trebao biti na postolju od izolirajućeg materijala (drveni ili plastični stol).
- Savjetuje se korištenje izvora visokog napona u svrhu preciznog i proizvoljnog nabijanja kuglica.
- Postav se treba udaljiti bar 30 cm od svih zidova zbog potencijalnog utjecaja vodiča koji se nalaze u zidovima i smanjenja utjecaja Zemljinog naboja u zidovima iako taj utjecaj nije značajan.
- Naboj na kuglicama neće dugo ostati konstantan tako da je potrebno izvršiti svako pojedino mjerenje što brže. Za svako iduće mjerenje ponovno nabiti kuglice.

- Ne nositi majicu (odjeću) od sintetičkih materijala jer se mogu stvoriti veliki statički naboji koji uvelike mogu utjecati na izvedbu eksperimenta. Savjetuje se nositi pamučnu majicu kratkih rukava.
- Pri očitavanju rezultata, tijelom i glavom se udaljiti što više od postava kako bi se minimizirao potencijalni utjecaj naboja sa odjeće i našeg tijela te utjecaj vlažnosti daha koji može uzrokovati bržu neutralizaciju kuglica.

Nakon što su osigurani optimalni uvjeti pomoću prethodno navedenih postupaka, eksperiment je spreman za izvedbu.

## 3.2. Izvedba eksperimenta

Prije same izvedbe eksperimenata za provjeru Coulombovog zakona, izveden je eksperiment u kojem je određena konstanta torzije. Taj dio je izveden u svrhu određivanja elektrostatskih sila iz odgovarajućih kutova torzije.

Shodno kao u teorijskom dijelu, eksperiment provjere Coulombovog zakona rastavljen je na dva dijela kako bi se jasnije odredili odnosi između elektrostatske sile i međusobne udaljenosti među nabojima u prvom dijelu, a u drugom dijelu eksperimenta ispituje se veza između elektrostatske sile i količina naboja na kuglicama.

### 3.2.1 Određivanje konstante torzije žice

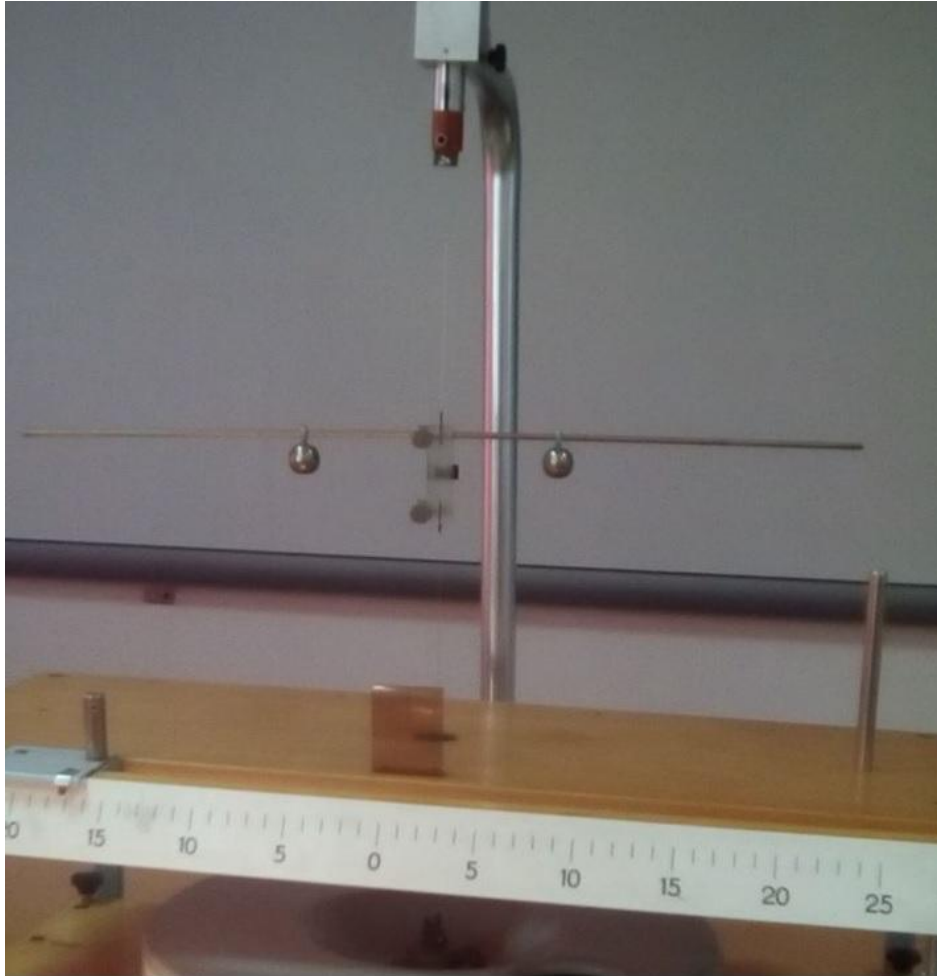
Kako bi se iz određenog kuta torzije dobio odgovarajući iznos torzijske sile, potrebno je odrediti konstantu torzije žice  $C$  (tj. potrebno je baždariti torzijsku vagu). Kako je sila koja uzrokuje torziju žice u našem slučaju elektrostatska sila između kuglica, na taj način se dobiva direktan iznos elektrostatske sile za odgovarajući kut torzije. Konstantu torzije možemo odrediti različitim metodama, a mi smo se odlučili za dinamičku metodu.

#### **Pribor:**

2 jednaka utega masa  $m = 26 \text{ g} = 0,026 \text{ kg}$

Tanka šipka duljine  $l = 0,48 \text{ m}$

Postav torzijske vage koji je korišten za ispitivanje Coulombovog zakona



**Slika 10:** *Postav za mjerenje konstante torzije žice*

**Teorijska podloga:**

Moment sile koja uzrokuje torziju žice definiran je kao umnožak konstante torzije  $C$  i kuta torzije  $\theta$ :

$$M = C \cdot \theta,$$

treba napomenuti kako je mjera kuta torzije u radijanima. Kako je u našem slučaju elektrostatska sila između kuglica (naboja) jedina sila koja uzrokuje torziju žice, tada taj moment sile možemo zapisati i kao produkt elektrostatske sile i radijusa rotacije s kojim sustav kuglica-šipka rotira oko žice (vektor sile je okomit na polumjer u trenutku kada se očitava kut torzije) :

$$M = F_{el} \cdot r.$$

Obje jednadžbe predstavljaju isti moment sile te se izjednačavanjem izraza dobiva sljedeća jednadžba:

$$C \cdot \theta = F_{el} \cdot r .$$

Jednostavnim računom dobiva se izraz za elektrostatsku silu u ovisnosti o kutu torzije:

$$F_{el} = \frac{C \cdot \theta}{r} \quad (3.2.1.1)$$

gdje je iznos radijusa rotacije sustava kuglica-šipka:  $r = 0,12$  m.

Jedina nepoznanica je konstanta torzije  $C$  koju će se odrediti sljedećim postupkom.

### **Postupak :**

Sa slike 10 je vidljivo kako je za mjerenje konstante torzije žice korišten isti postav kao za provjeru Coulombovog zakona. Iz zgloba koji dijeli žicu na dva dijela izvađena je šipka sa kuglicom te šipka sa pločicom s druge strane.

Kada je zglob oslobođen, kroz njega se umetne tanka horizontalna šipka na polovicu svoje duljine kako bi bila u ravnoteži i zadržala horizontalni položaj tijekom titranja. Na šipku se sa svake strane stave dva utega jednakih masa i to na jednakim razmacima od žice da šipka bude horizontalna.

Sustav se pusti u titranje na način da titranje bude isključivo torzijsko, bez gravitacijskih oscilacija. Ukoliko se izmjere dva različita perioda titranja  $T_1$  i  $T_2$  za dva različita položaja utega na štapu, poznavajući masu tih utega te njihove udaljenosti od osi rotacije  $r_1$  i  $r_2$ , lako se može izračunati konstanta torzije  $C$ .

Kada se utega postavi na udaljenost  $r_1$  od osi rotacije, pripadajući moment inercije je  $I_1$ , a na udaljenosti  $r_2$  od osi rotacije moment inercije je  $I_2$ . Pripadni periodi titranja za svaki slučaj su:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{C}} ,$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{C}} .$$

Nakon kraćeg matematičkog računa dobiva se izraz za konstantu torzije:

$$C = \frac{I_2 - I_1}{T_2^2 - T_1^2} 4\pi^2 ,$$



odnosno konačan izraz kad se raspišu izrazi za momente tromosti:

$$C = \frac{2m(r_2^2 - r_1^2)}{T_2^2 - T_1^2} 4\pi^2 .$$

**Rezultat:**

Mase utega su  $m = 26 \text{ g} = 0,026 \text{ kg}$  .

U prvom slučaju utezi su postavljeni na  $r_1 = 7,0 \text{ cm} = 0,070 \text{ m}$  od osi rotacije (žica), te je 5 puta izmjeren period titranja  $T_1$ .

U drugom slučaju utezi su postavljeni na  $r_1 = 10,0 \text{ cm} = 0,100 \text{ m}$  od žice te je 5 puta izmjeren period  $T_2$  što je prikazano u tablici 1:

**Tablica 1:** Periodi titranja torzijskog njihala pri razmacima utega 7,0 i 10,0 cm od osi rotacije

mjerenje	$T_1$	$T_2$
jedinica	s	s
1.	9,2	10,3
2.	9,1	10,2
3.	9,2	10,3
4.	9,3	10,3
5.	9,2	10,2
	$\bar{T}_1 = 9,2 \text{ s}$	$\bar{T}_2 = 10,3 \text{ s}$

Uz ostale podatke, iznose srednjih vrijednosti perioda uvrsti se u konačni izraz za konstantu torzije  $C$  te se dobiva sljedeći rezultat:

$$C = \frac{2m(r_2^2 - r_1^2)}{T_2^2 - T_1^2} 4\pi^2 ,$$

$$C = \frac{2 \cdot 0,026 \cdot (0,1^2 - 0,07^2)}{10,3^2 - 9,2^2} \cdot 4 \cdot 3,14^2 ,$$

$$C = 4,9 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} .$$

Uvrštavajući iznos konstante torzije u ranije izvedeni izraz (3.2.1.1), za svaki kut torzije može izračunati odgovarajuća elektrostatska sila koja je uzrokovala tu torziju.

### 3.2.2 Prvi dio eksperimenta: Ispitivanje veze elektrostatska sila - udaljenost ( $F_{el} - R$ )

**Polazna hipoteza:** Elektrostatska sila između dvaju naboja obrnuto je proporcionalna kvadratu udaljenosti između tih naboja. Elektrostatska sila proporcionalna je kutu torzije žice, tako da je matematički zapis hipoteze:

$$F_{el} \sim \theta \sim \frac{1}{R^2}$$

#### **Postupak izvođenja:**

1. Postaviti torzijsku vagu u početni položaj: kuglice su nenabijene, središte (lijeve) kuglice je na početnoj poziciji 0,0 cm na linearnoj skali, a tik do nje desno je druga kuglica na klizaču koji pokazuje položaj središta druge kuglice (ujedno i razmak između središta kuglica) od  $R = 4,0$  cm. Žica je netordirana, donja kružna skala je također na 0,0 cm.
2. Zatim se desna kuglica na klizaču postavi na udaljenost od  $R = 5,0$  cm, dakle udaljenost središta kuglica je 5,0 cm. Izvor visokog napona postaviti na 11,5 kV, jedan pol se uzemlji, a na drugi pol se priključi žica s kojom direktno nabijamo desnu kuglicu. Nakon što se ta kuglica kratkotrajno nabije, istim iznosom napona treba se nabiti i lijevu kuglicu.
3. Zbog jednakih iznosa istoimenog naboja između kuglica nastaje odbojna elektrostatska sila koja uzrokuje da se sustav lijeva kuglica-šipka-žica zarotira ulijevo, odnosno odbija se od desne kuglice.
4. Cilj je rotacijom kotača sa donjom skalom udesno tordirati žicu te na taj način uzrokovati torzijsku silu kako bi se lijeva kuglica vratila u početni položaj 0 cm na linearnoj skali, tj kako bi udaljenost središta kuglica bila  $R = 5,0$  cm. U tom trenutku su torzijska sila žice i elektrostatska sila između kuglica jednake.
5. Očitati na donjoj skali za koju duljinu kružnog luka  $l$  smo zarotirali kotač udesno kako bi se lijevu kuglicu vratilo u početni položaj.
6. Mjerenje se ponavlja još dva puta te se izračuna srednja vrijednost luka torzije:  $\bar{l} = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{3}$ .
7. Izračunati odgovarajući srednji kut torzije za određeni kružni luk uz pomoć ranije izvedenog izraza:  $\theta = \frac{l}{110} \cdot 360^\circ$

8. U tablicu se zapišu sve vrijednosti  $l_1, l_2, l_3, \bar{l}, \bar{\theta}$  i  $R$ .
9. Kad se izvrše ostala dva mjerenja, ponovno postaviti vagu u početno stanje te ponoviti postupke opisane koracima od 1 do 8, ali na udaljenosti kuglica od  $R = 5,5$  cm. Zatim isti postupak ponoviti za udaljenosti od 6,0 cm, 6,5 cm, 7,0 cm, 7,5 cm, ....

**Zadaci:**

1. Ispitati vezu između Coulombove elektrostatske sile, odnosno kuta torzije  $\theta$  i međusobne udaljenosti naboja  $R$ .
2. Nacrtati graf:  $(\theta - \frac{1}{R^2})$ .

**Rezultati:**

Shodno opisanim postupcima, izvršena su mjerenja i dobiveni su sljedeći tablični i grafički rezultati:

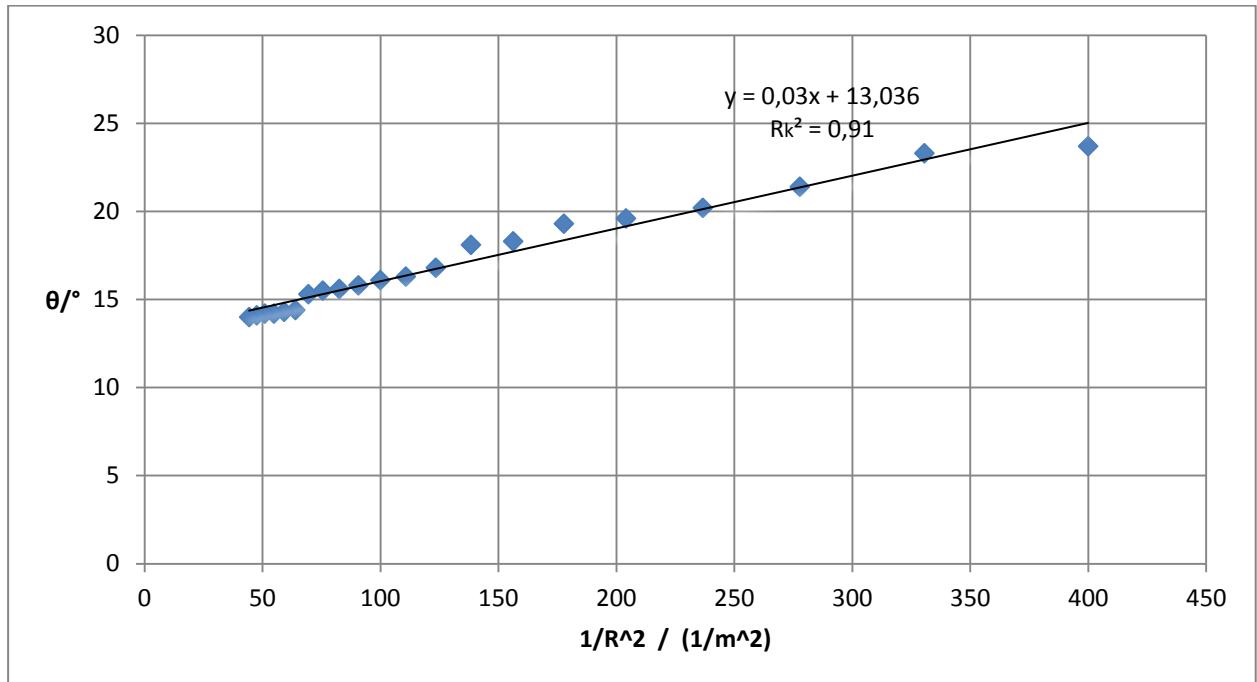
**Tablica 2:** Rezultati ispitivanja ovisnosti kuta torzije i udaljenosti kuglica

mjerenje	$R$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$\bar{l}$	$\bar{\theta}$	$\frac{1}{R^2}$
jedinica	cm	cm	cm	cm	cm	°	m <sup>-2</sup>
1.	5,0	7,2	7,3	7,2	7,2	23,7	400
2.	5,5	7,0	7,1	7,1	7,1	23,3	330
3.	6,0	6,5	6,5	6,5	6,5	21,4	277
4.	6,5	6,0	6,2	6,3	6,2	20,2	236
5.	7,0	6,1	6,0	5,9	6,0	19,6	204
6.	7,5	5,9	5,9	6,0	5,9	19,3	177
7.	8,0	5,7	5,5	5,7	5,6	18,3	156
8.	8,5	5,5	5,5	5,6	5,5	18,1	138
9.	9,0	5,1	5,1	5,0	5,1	16,8	123
10.	9,5	5,0	4,9	5,0	5,0	16,3	110
11.	10,0	4,9	4,9	4,9	4,9	16,1	100
12.	10,5	4,8	4,9	4,8	4,8	15,8	90
13.	11,0	4,7	4,8	4,8	4,8	15,6	82
14.	11,5	4,7	4,7	4,7	4,7	15,5	75
15.	12,0	4,8	4,7	4,7	4,7	15,3	69
16.	12,5	4,4	4,4	4,5	4,4	14,4	64
17.	13,0	4,4	4,3	4,4	4,4	14,3	59
18.	13,5	4,3	4,3	4,3	4,3	14,2	54
19.	14,0	4,2	4,4	4,3	4,3	14,2	51
20.	14,5	4,3	4,3	4,2	4,3	14,1	47
21.	15,0	4,2	4,1	4,1	4,1	14,0	44

Gdje je:

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{l}}{110} \cdot 360^\circ$$

Na temelju tablice izrađen je graf ovisnosti kuta torzije o recipročnoj vrijednosti kvadrata udaljenost između kuglica, odnosno graf  $\left(\theta - \frac{1}{R^2}\right)$  iz kojeg se nadalje očitava ovisnost između promatranih varijabli.



**Graf 1:** Ovisnost kuta torzije o recipročnoj vrijednosti kvadrata udaljenosti  $\left(\theta - \frac{1}{R^2}\right)$

Pomoću programa MS Excel, metodom najmanjih kvadrata, izrađen je graf ovisnosti kuta torzije o recipročnoj vrijednosti kvadrata udaljenosti. Dobivena je jednačba pravca koja najbolje opisuje eksperimentalno dobivene točke:

$$y = 0,03x + 13,036.$$

Os apcise predstavlja  $\frac{1}{R^2}$ , a os ordinate predstavlja  $\theta$ , tako da naša jednačba pravca glasi:

$$\theta = 0,03 \frac{1}{R^2} + 13,036^\circ,$$

uz stupanj korelacije od:

$$R_k^2 = 0,91,$$

što znači da se točke na grafu i pravac poklapaju sa 91% točnosti.

Iz grafa 1 vidljivo je kako pri većim vrijednostima  $\frac{1}{R^2}$  ovisnost između kuta torzije i recipročne vrijednosti kvadrata udaljenosti uočljivo odstupa od pravca. Zašto je to tako?

To se događa iz razloga što nabijene kuglice (sfere) nisu materijalne točke. Nabijena vodljiva sfera se ponaša kao točkasti naboj ako oko nje nema nikakvih drugih elektrostatskih utjecaja u blizini, s time da bi pozicija gdje je taj točkasti naboj bio koncentriran bilo samo središte sfere.

No to nije tako ukoliko oko te sfere ima ostalih elektrostatskih utjecaja, kao što je to u našem slučaju druga vodljiva sfera. Kada se dvije nabijene sfere nalaze na međusobnoj udaljenosti koja nije značajna u odnosu na njihove dimenzije (mali  $R$ , veliki  $\frac{1}{R^2}$ ), tada se naboj raspoređuje po sferama na drugačiji način sa svrhom da se postigne minimum elektrostatske energije između njih. Tada će i sama sila između tih naboja biti nešto manja nego što bi bila u slučaju s dva točkasta naboja.

U svrhu korekcije podataka, postoji korekcijski faktor  $B$ , te da bi se kutove torzije ispravilo na točnije vrijednosti, potrebno je svaku od vrijednosti  $\theta$  pomnožiti sa  $\frac{1}{B}$ , te se tako dobiva korigirani kut torzije. Korekcijski faktor je definiran kao:

$$B = 1 - 4 \frac{r^3}{R^3},$$

gdje su :  $r$  – polumjer kuglica

$R$  – međusobna udaljenost središta kuglica.

Korigirani iznos kuta torzije je tada:

$$\theta_{kor} = \frac{1}{B} \cdot \theta .$$

Uz vrijednosti korigiranog kuta torzije dobiju se vrijednosti koje bi odgovarale Coulombovoj sili kad bi umjesto kuglica imali točkaste naboje.

### Za nastavak analize rezultata napraviti sljedeće:

1. Za svaku vrijednost kuta torzije  $\theta$  izračunati pripadajući korigirani kut torzije  $\theta_{kor}$  i upisati podatke u tablicu.
2. Treba nacrtati novi grafikon koji povezuje sile i udaljenosti, ali umjesto  $\theta$  koristiti  $\theta_{kor}$ , dakle nacrtati grafikon s korigiranim vrijednostima kuta:

$$\left( \theta_{kor} - \frac{1}{R^2} \right),$$

te proučiti kako je ova korekcija utjecala na izgled grafa.

3. Na temelju poznate vrijednosti konstante torzije  $C$  izračunati odgovarajuću elektrostatsku silu ( $F_{el}$ ) između naboja za odgovarajući korigirani kut torzije  $\theta_{kor}$ , te usporediti sa teorijskim vrijednostima elektrostatske sile ( $F_T$ ) između naboja.
4. Nacrtati graf ( $F_{el} - \frac{1}{R^2}$ ).

### Rezultati korekcije:

Korekcijski faktor te korigirani kut torzije, zajedno sa izračunatim eksperimentalnim vrijednostima elektrostatske sile i teorijskim vrijednostima, u svrhu usporedbe rezultata, prikazani su u tablici 3 te je stoga ta tablica ustvari proširena verzija tablice 2.

Eksperimentalni iznos elektrostatske sile  $F_{el}$  dobiva se iz ranije izvedenog izraza (3.2.1.1) uz pomoć izračunate konstante torzije, s time da će sada umjesto  $\theta$  biti  $\theta_{kor}$ :

$$F_{el} = \frac{C \cdot \theta_{kor}}{r}.$$

Kada se uvrste stalne vrijednosti konstante torzije i radijusa rotacije kuglice i šipke:

$$C = 4,9 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2},$$

$$r = 0,12 \text{ m},$$

dobiva se izraz :

$$F_{el} = 4,1 \cdot 10^{-3} \cdot \theta_{kor}.$$

Prije računanja i ubacivanja u tablicu svakako pretvoriti korigirani kut u radijane. Teorijski iznos elektrostatske sile dobiva se iz izraza za Coulombov zakon:

$$F_T = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2}.$$

Konstanta  $k$  ima vrijednost:  $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$ .

Naboji su u ovom dijelu eksperimenta stalni i međusobno jednakog iznosa, a dobivaju se iz napona s kojim se kuglice nabijaju te kapaciteta šuplje sfere  $C_s$ :

$$C_s = 4\pi\epsilon_0 r,$$

$$Q_1 = Q_2 = Q = C_s \cdot U,$$

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r \cdot U = 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,02 \cdot 11500 = 25,5 \text{ nC}.$$

Izraz za teorijski iznos elektrostatske sile je tada:

$$F_T = 9 \cdot 10^9 \frac{25,5 \cdot 10^{-9} \cdot 25,5 \cdot 10^{-9}}{R^2},$$

$$F_T = \frac{5,9 \cdot 10^{-6}}{R^2}.$$

**Tablica 3:** Proširena tablica sa dodanim korekcijskim faktorom i korigiranim kutom torzije, zajedno sa eksperimentalno i teorijski dobivenim silama

mjerjenje jedinica	$R$	$\bar{l}$	$\theta$	$B$	$\theta_{kor}$	$\frac{1}{R^2}$	Eksperimentalno $F_{el}$	Teorijski $F_T$
	cm	cm	°		°	m <sup>-2</sup>	mN	mN
1.	5,0	7,2	23,7	0,744	31,9	400	2,3	2,4
2.	5,5	7,1	23,3	0,808	28,8	330	2,1	1,95
3.	6,0	6,5	21,4	0,852	25,1	277	1,8	1,64
4.	6,5	6,2	20,2	0,884	22,9	236	1,6	1,4
5.	7,0	6	19,6	0,907	21,7	204	1,55	1,2
6.	7,5	5,9	19,3	0,924	20,9	177	1,5	1,04
7.	8,0	5,6	18,3	0,938	19,5	156	1,4	0,93
8.	8,5	5,5	18,1	0,948	19,1	138	1,37	0,82
9.	9,0	5,1	16,8	0,956	17,6	123	1,26	0,75
10.	9,5	5,0	16,3	0,963	17,0	110	1,2	0,65
11.	10,0	4,9	16,1	0,968	16,6	100	1,19	0,59
12.	10,5	4,8	15,8	0,973	16,2	90,7	1,16	0,54
13.	11,0	4,8	15,6	0,976	16	82,6	1,14	0,49
14.	11,5	4,7	15,5	0,979	15,8	75,6	1,13	0,45
15.	12,0	4,7	15,3	0,982	15,6	69,5	1,12	0,41
16.	12,5	4,4	14,4	0,984	14,6	64,0	1,06	0,38
17.	13,0	4,4	14,3	0,986	14,5	59,2	1,04	0,35
18.	13,5	4,3	14,2	0,987	14,4	54,9	1,03	0,32

19.	14,0	4,3	14,2	0,988	14,4	51,0	1,03	0,3
20.	14,5	4,3	14,1	0,99	14,3	47,6	1,02	0,28
21.	15,0	4,1	14,0	0,991	14,1	44,4	1,01	0,26

Ako se promotre vrijednosti korekcijskog faktora  $B$  s obzirom na udaljenost kuglica, vidi se da korekcija na kraćim udaljenostima znatna u odnosu na korekciju pri većim udaljenostima ( $R > 7,0$  cm), gdje je korekcijski faktor 0,907. Za sve kraće udaljenosti kut torzije i korigirani kut torzije se znatno razlikuju, dok se pri većim udaljenostima uglavnom poklapaju.

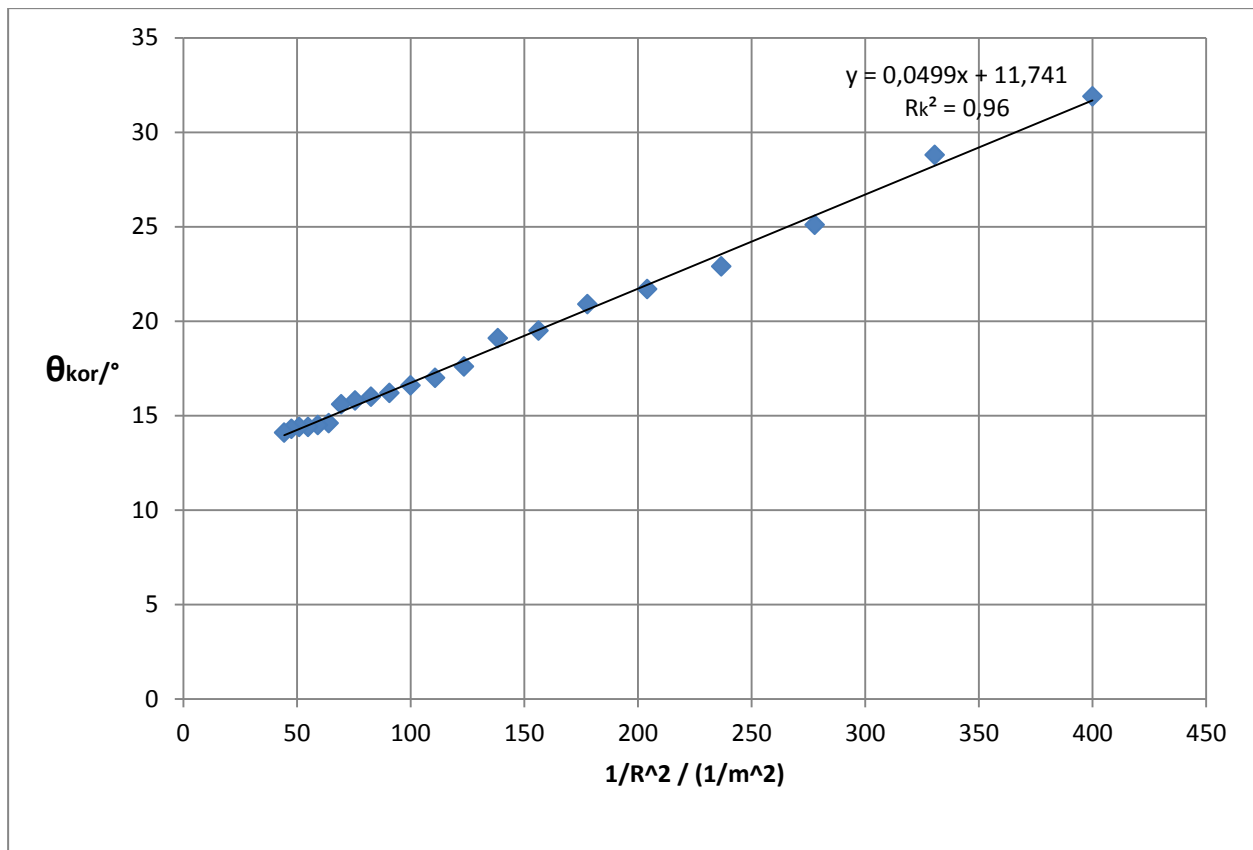
Također uočljivo je kako se eksperimentalni i teorijski iznosi elektrostatske sile vrlo dobro poklapaju za male udaljenosti, a kako udaljenost raste, povećava se i razlika između tih iznosa. Red veličine sila koji je dobiven teorijski i eksperimentalno je sličan,  $\sim 10^{-3}$  N, što je i bilo važno pokazati.

Egzaktne vrijednosti se mogu poklapati ili razlikovati u određenoj mjeri što ovisi o brojnim faktorima koji su uz određene pogreške izmjereni te više puta izračunati. To se najviše odnosi na točnost izračunavanja naboja gdje je postoji mogućnost da dobiveni kapaciteti šuplje sfere možda ne odgovaraju baš točno tim teorijskim iznosima, pa je stoga moguć i nešto drugačiji iznos naboja na kuglicama. Također se moglo dogoditi da je pri mjerenju kuta torzije došlo do nekih manjih pogrešaka koje mogu utjecati na konačan iznos eksperimentalno dobivene sile.

Primjerice za prvu udaljenost  $R = 5,0$  cm razlika između eksperimentalno i teorijski dobivenog iznosa sile iznosi samo 4%, dok već za udaljenost  $R = 7,0$  cm ta razlika iznosi 22%. Na većoj udaljenosti kao primjerice  $R = 12,0$  cm, ta razlika iznosi 64%. No kao što je navedeno, najvažnije je bilo potvrditi kako se i eksperimentalnom metodom može dobiti red veličine sile koji se dobije teorijskim izračunom, što je dodatak na uspješno izveden eksperiment provjere obrnute proporcionalnosti kuta torzije i kvadrata udaljenosti kuglica.

Nakon analize podataka iz tablice, u nastavku je prikazan graf  $\left( \theta_{kor} - \frac{1}{R^2} \right)$ .





**Graf 2:** Ovisnost korigiranog kuta torzije i recipročne vrijednost kvadrata udaljenosti

$$\left(\theta_{kor} - \frac{1}{R^2}\right)$$

Iz grafa je vidljivo kako je korekcija kuta torzije znatno utjecala na izgled grafa. Najveća razlika između ovog i prvog grafa najuočljivija je upravo u području malih udaljenosti kuglica  $R$ , odnosno u području velikih  $\frac{1}{R^2}$  za što je korekcija najviše i bila potrebna.

Metodom najmanjih kvadrata uz pomoć programa MS Excel izvršena je statistička analiza podataka.

Dobivena je jednadžba pravca oblika:

$$y = 0,0499x + 11,741 ,$$

$\frac{1}{R^2}$  predstavlja os  $x$ , dok  $\theta_{kor}$  predstavlja  $y$ , tako da fizikalno ta jednadžba izgleda kao:

$$\theta_{kor} = 0,0499 \frac{1}{R^2} + 11,741^\circ ,$$

uz stupanj korelacije:

$$R_k^2 = 0,96,$$

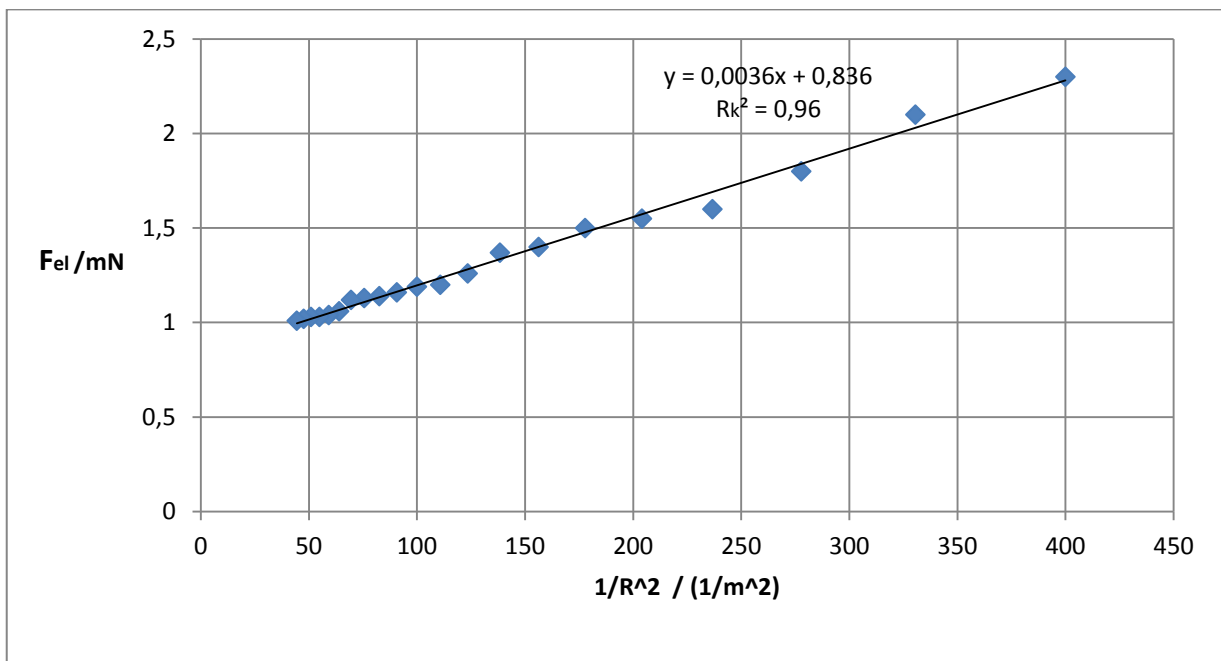
što znači da se točke na grafu i pravac poklapaju sa 96% točnosti.

Iz grafa i statističke analize može se zaključiti da je korigirani kut torzije obrnuto proporcionalan kvadratu udaljenosti među nabojima:

$$\theta_{kor} \sim \frac{1}{R^2},$$

što potvrđuje polaznu hipotezu prvog dijela eksperimenta.

Nakon statističke analize prvog grafa, u nastavku je prikazan i graf ( $F_{el} - \frac{1}{R^2}$ ).



**Graf 3:** Ovisnost elektrostatske sile o recipročnoj vrijednosti kvadrata udaljenosti ( $F_{el} - \frac{1}{R^2}$ )

Ovaj graf samo potvrđuje dobivene rezultate iz prethodnog grafa sa korigiranim kutom torzije. Vidljivo je kako su eksperimentalno dobivena elektrostatska sila i recipročna vrijednost kvadrata udaljenost između naboja u linearnoj vezi:

$$F_{el} \sim \frac{1}{R^2}.$$

Uz pomoć programa MS Excel dobivena je jednadžba pravca prikazana na grafu te također iznos korelacije između pravca i eksperimentalnih točaka od 96% točnosti, jednako kao i u prethodnom grafu. Fizikalna reprezentacija jednadžbe sa grafa je:

$$F_{el} = 0,0036 \frac{1}{R^2} + 0,836 \text{ mN.}$$

Zaključak koji se može izvući iz oba grafa jest taj da oba grafa potvrđuju početnu hipotezu da je **Coulombova elektrostatska sila među nabojima, odnosno pripadajući kut torzije obrnuto proporcionalan kvadratu udaljenosti među nabojima:**

$$F_{el} \sim \theta \sim \frac{1}{R^2}.$$

Nakon analize prvog dijela eksperimenta, slijedi analiza drugog dijela eksperimenta u kojem se ispituje veza između kuta torzije i naboja na kuglicama, odnosno ovisnost elektrostatske sile i naboja na kuglicama.

### 3.2.3 Drugi dio eksperimenta: Ispitivanje veze elektrostatska sila - naboji ( $F_{el} - Q_1, Q_2$ )

#### Polazna hipoteza:

Elektrostatska sila između dvije kuglice proporcionalna je umnošku naboja na kuglicama. Elektrostatska sila je proporcionalna kutu torzije žice pod utjecajem te sile tako da polazna hipoteza matematički izgleda kao:

$$F_{el} \sim \theta \sim Q_1 \cdot Q_2$$

#### Postupak izvedbe drugog dijela eksperimenta:

1. Kuglice se postavljaju na konstantnu udaljenost od  $R = 7,0 \text{ cm}$
2. Proučava se veza između kuta torzije i naboja na kuglicama. Naboj na prvoj kuglici  $Q_1$  drži se stalnim tijekom eksperimenta, a naboj na desnoj kuglici  $Q_2$  se varira mijenjanjem napona  $U$  koji se dovodi na tu kuglicu. Napon koji se dovede na kuglicu proporcionalan je naboju na toj kuglici.
3. Na lijevu kuglicu se dovodi napon od 11,5 kV u svakom mjerenju. Desnu kuglicu se nabija sa padajućim iznosima naponima u razmacima po 0,5 kV za svako iduće mjerenje: 11,5 kV, 11,0 kV, 10,5 kV, 10,0 kV, .... te se proučava kakav je kut torzije sa smanjenjem napona (naboja) na toj kuglici.

4. Iznosi naboja  $Q_1$  i  $Q_2$  mogu se izračunati pomoću napona koji se na njih dovodi i kapaciteta šuplje nabijene sfere polumjera  $r$ :

$$C = 4\pi\epsilon_0 r,$$

$$Q = C \cdot U,$$

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r \cdot U.$$

**Zadaci:**

1. Ispitati vezu između elektrostatske sile, odnosno kuta torzije i naboja na kuglicama
2. Nacrtati graf ovisnosti kuta torzije i napona koji se dovodi na desnu kuglicu:

$$(\theta - U_2)$$

3. Izračunati naboje na obje kuglice te nacrtati graf ovisnosti kuta torzije i produkta naboja na kuglicama:

$$(\theta - Q_1 \cdot Q_2)$$

4. Shodno kao u prvom dijelu, izračunati eksperimentalno dobivene iznose elektrostatske sile između kuglica te usporediti sa teorijski dobivenim vrijednostima. Provjeriti u kakvoj je vezi eksperimentalno dobivena sila sa produktom naboja na kuglicama, nacrtati graf:

$$(F_{el} - Q_1 \cdot Q_2)$$

**Rezultati:**

Kuglice su šuplje vodljive sfere za koje se tada kapacitet računa kao:

$$C = 4\pi\epsilon_0 r,$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 r = 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,02 = 2,22 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 2,22 \text{ pF}.$$

Naboj na prvoj kuglici je tada:

$$Q_1 = C \cdot U_1 = 2,22 \cdot 10^{-12} \cdot 11500 = 2,55 \cdot 10^{-8} \text{ C} = 25,5 \text{ nC} = \text{const},$$

a naboj na drugoj kuglici će varirati ovisno o naponu koji se na nju dovodi:

$$Q_2 = C \cdot U_2 = 2,22 \cdot 10^{-12} \cdot U_2.$$

Eksperimentalno dobiveni iznos sile dobiva se shodno kao u prvom dijelu uz pomoć konstante torzije relacijom:

$$F_{el} = 4,1 \cdot 10^{-3} \cdot \theta,$$

s time da je kut torzije u radijanima.

Teorijski iznos sile dobiva se relacijom:

$$F_T = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2},$$

konstanta  $k$  ima vrijednost:  $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$ .

U ovom dijelu eksperimenta središta kuglica su na konstantnoj udaljenosti od  $R = 7,0$  cm, naboj na lijevoj kuglici  $Q_1 = 25,5$  nC je također stalan, pa se za teorijski iznos sile dobiva izraz:

$$F_T = 9 \cdot 10^9 \frac{25,5 \cdot 10^{-9} Q_2}{0,07^2},$$

$$F_T = 4,7 \cdot 10^4 \cdot Q_2.$$

Shodno opisanom postupku i prethodno izvedenim izrazima dobivena je sljedeća tablica:

**Tablica 4:** Rezultati ispitivanja ovisnosti kuta torzije i naboja na kuglicama, uz dodane eksperimentalno i teorijski dobivene iznose sile

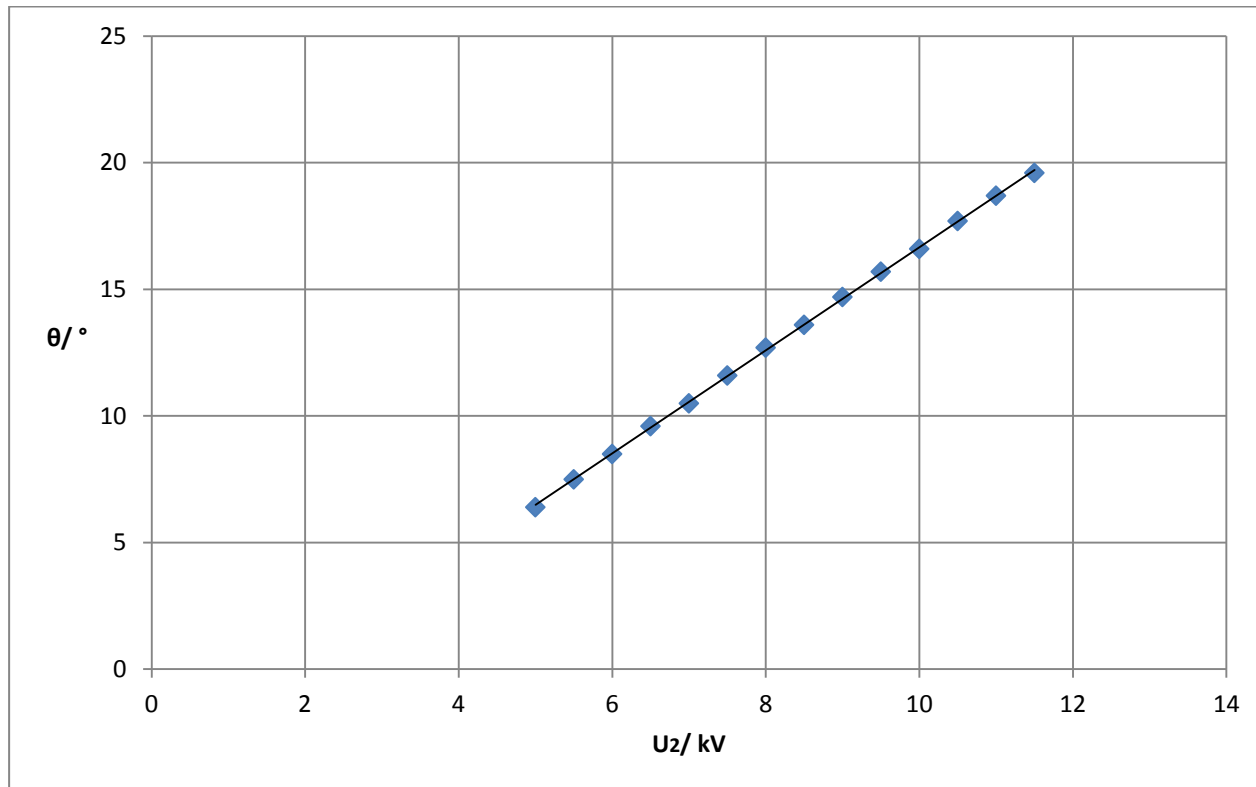
mjerjenje jedinica	$U_2$	$Q_2$	$Q_1 \cdot Q_2$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$\bar{l}$	$\theta$	Eksperimentalno $F_{el}$	Teorijski $F_T$
	kV	nC	nC <sup>2</sup>	cm	cm	cm	cm	°	mN	mN
1.	11,5	25,5	650	6,2	6,1	6,1	6,1	19,6	1,40	1,20
2.	11,0	24,4	622	5,8	5,7	5,6	5,7	18,7	1,34	1,15
3.	10,5	23,3	594	5,3	5,4	5,4	5,4	17,7	1,27	1,10
4.	10,0	22,2	566	5,1	5,2	5,1	5,1	16,6	1,19	1,04
5.	9,5	21,1	538	4,8	4,8	4,8	4,8	15,7	1,12	0,99
6.	9,0	19,9	507	4,5	4,5	4,6	4,5	14,7	1,05	0,94
7.	8,5	18,9	482	4,1	4,2	4,0	4,1	13,6	0,97	0,89
8.	8,0	17,8	453	3,9	3,8	3,9	3,9	12,7	0,91	0,84
9.	7,5	16,7	425	3,6	3,6	3,7	3,6	11,6	0,83	0,78
10.	7,0	15,5	395	3,3	3,3	3,0	3,2	10,5	0,75	0,73
11.	6,5	14,4	367	3,0	3,0	3,0	3,0	9,6	0,69	0,68
12.	6,0	13,3	339	2,8	2,6	2,5	2,6	8,5	0,61	0,63

13.	5,5	12,2	311	2,3	2,2	2,3	2,3	7,5	0,54	0,57
14.	5,0	11,1	283	2,0	1,9	2,0	2,0	6,4	0,46	0,52

Iz tablice se odmah može uočiti linearno opadanje kuta torzije sa smanjenjem napona na drugoj kuglici, odnosno opadanje elektrostatske sile sa smanjenjem naboja na drugoj kuglici.

Također valja uočiti vrlo dobro poklapanje eksperimentalno i teorijski dobivenih iznosa elektrostatske sile. Primjerice za prvo mjerenje pri naponu od  $U = 11,5 \text{ kV}$ , razlika između tih dviju vrijednosti je 14%. Za napon  $U = 9,0 \text{ kV}$ , ta razlika iznosi 10%, a za neke od zadnjih mjerenja kao primjerice za  $U = 6,0 \text{ kV}$  ta razlika iznosi 4%. Na svim područjima napona, razlika između eksperimentalno i teorijskih dobivenih sila je konstantno vrlo mala, što je bolji uspjeh nego u prvom dijelu eksperimenta, što potvrđuje veliku točnost izvedbe eksperimenta.

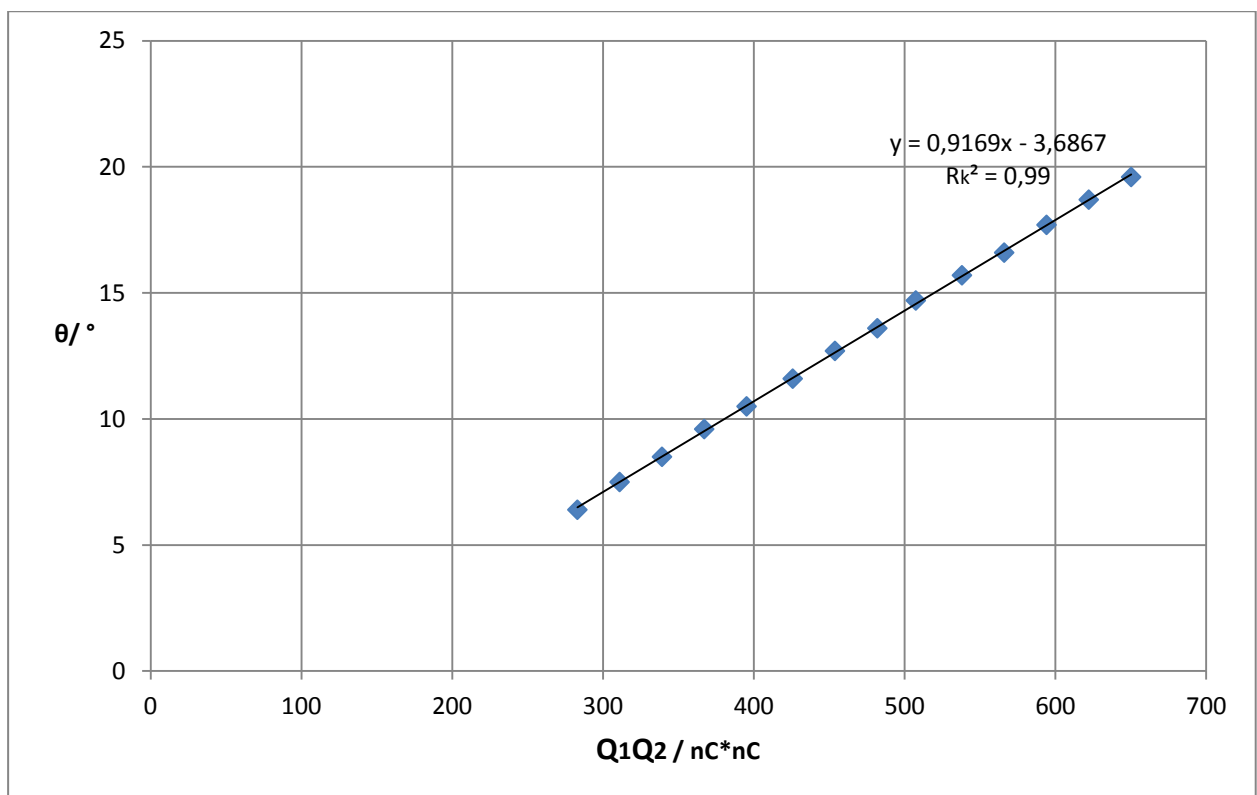
Nakon analize podataka iz tablice, u nastavku je prikazan graf ovisnosti kuta torzije i napona koji se dovodi na drugu kuglicu ( $\theta - U_2$ ).



**Graf 5:** Ovisnost kuta torzije o naponu na drugoj kuglici ( $\theta - U_2$ )

Iz grafa je vidljivo da je veza između napona i kuta torzije linearna, što je veći napon koji se dovodi na drugu kuglicu, to je i kut torzije žice veći. Naboj na prvoj kuglici je stalan, a naboj na drugoj kuglici je proporcionalan naponu  $U_2$  koji se dovodi na tu kuglicu, te se iz ovog grafa može zaključiti kako je također kut torzije proporcionalan naboju na drugoj kuglici  $Q_2$  ukoliko je  $Q_1 = \text{const}$ .

Tu ovisnost prikazuje sljedeći graf, a to je graf koji prikazuje upravo ovisnost kuta torzije o umnošku naboja na kuglicama ( $\theta - Q_1 \cdot Q_2$ ).



**Graf 6:** Ovisnost kuta torzije o produktu naboja na kuglicama ( $\theta - Q_1 \cdot Q_2$ )

Shodno polaznoj hipotezi, iz ovog grafa se može vidjeti kako je veza između kuta torzije žice i produkta naboja na kuglicama zaista linearna. Shodno kao u prvom dijelu eksperimenta, metodom najmanjih kvadrata uz pomoć programa MS Excel dobiveni su sljedeći statistički rezultati za dobiveni graf.

Dobivena je jednadžba pravca:

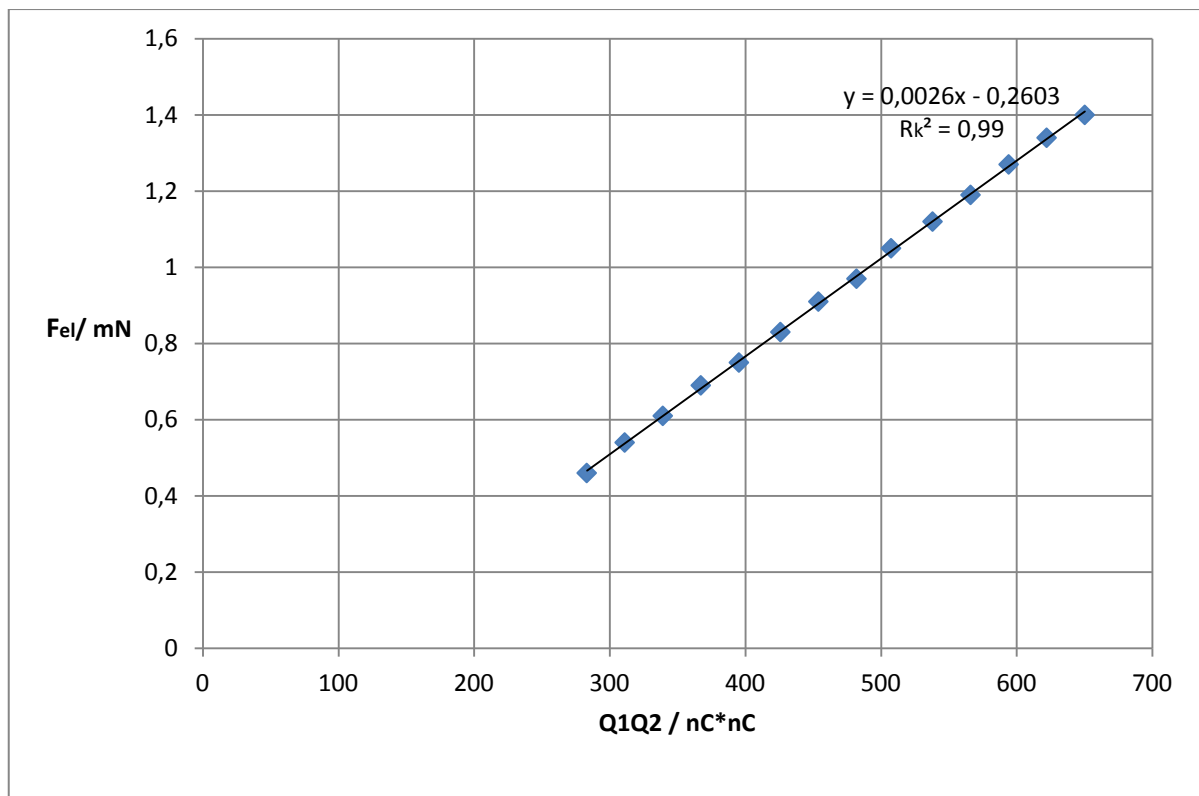
$$y = 0,9169x - 3,6867$$

Produkt naboja  $Q_1 \cdot Q_2$  predstavlja  $x$ , dok  $\theta$  predstavlja  $y$ .

Fizikalna reprezentacija jednadžbe dobivenog pravca je :

$$\theta = 0,9169 \cdot Q_1 \cdot Q_2 - 3,6867^\circ ,$$

uz visoku korelaciju točkaka s pravcem koja iznosi  $R_k^2 = 0,99$ , što znači da se eksperimentalno dobivene točke na grafu i dobiveni pravac podudaraju sa 99% točnosti. Kao dodatak i potvrdu polazne hipoteze, izrađen je i graf ovisnosti eksperimentalno dobivene elektrostatske sile sa produktom naboja na kuglicama:



**Graf 7:** Ovisnost elektrostatske sile o produktu naboja na kuglicama ( $F_{el} - Q_1 \cdot Q_2$ )

Uz pomoć programa MS Excel, metodom najmanjih kvadrata, ponovno je dobivena jednadžba pravca koji se sa 99% točnosti podudara sa eksperimentalno dobivenim točkama, što je i očekivano jer su kut torzije i dobivena elektrostatska sila proporcionalni. Fizikalna reprezentacija jednadžbe sa grafa je:

$$F_{el} = 0,0026 \cdot Q_1 \cdot Q_2 - 0,2603 \text{ mN.}$$

Zaključak koji se može izvući iz dobivenih rezultata upućuje na potvrdu polazne hipoteze i to sa visokim stupnjem točnosti. Zaključuje se kako je **kut torzije žice proporcionalan produktu**



naboja na kuglicama, odnosno Coulombova elektrostatska sila između kuglica je proporcionalna sa produktom naboja na kuglicama:

$$\theta \sim Q_1 \cdot Q_2,$$

$$\theta \sim F_{el} \sim Q_1 \cdot Q_2.$$

## 4. ZAKLJUČAK

U prvom dijelu eksperimenta potvrđeno je kako je kut torzije žice torzijskog njihala, odnosno odgovarajući iznos Coulombove elektrostatske sile između nabijenih kuglica obrnuto proporcionalan kvadratu udaljenosti između naboja:

$$\theta \sim F_{el} \sim \frac{1}{R^2},$$

dok je u drugom dijelu eksperimenta potvrđeno kako je kut torzije, odnosno odgovarajući iznos Coulombove sile između nabijenih kuglica proporcionalan umnošku naboja na kuglicama:

$$\theta \sim F_{el} \sim Q_1 \cdot Q_2.$$

Konačan zaključak je potvrda Coulombovog zakona: **Elektrostatska Coulombova sila između dvije nabijene kuglice proporcionalna je umnošku naboja na tim kuglicama, a obrnuto je proporcionalna međusobnoj udaljenosti između tih naboja:**

$$F_{el} \sim \frac{Q_1 \cdot Q_2}{R^2}.$$

Iz činjenice da je zakon potvrđen sa visokom točnošću, zaključuje se da je uređaj nakon obnove precizan i dobar za rad, a ovaj diplomski rad će ujedno koristiti kao uputa za rad uređaja. Shodno tome, pomoću ovog uređaja studenti odjela će ubuduće moći obavljati vježbu provjere Coulombovog zakona iz fizikalnog praktikuma, što je i bila najveća motivacija za izradu ovog diplomskog rada.

## 5. LITERATURA

1. Mladen Paić: Osnove fizike III – Elektricitet i magnetizam; Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1989.
2. Online priručnik za postav torzijske vage proizvođača PASCO (Dostupno: 14. 07. 2017.): [https://www.pasco.com/file\\_downloads/Downloads\\_Manuals/Coulombs-Law-Apparatus-Manual-ES-9070.pdf](https://www.pasco.com/file_downloads/Downloads_Manuals/Coulombs-Law-Apparatus-Manual-ES-9070.pdf)
3. Online adresa (Dostupno: 29. 09. 2017.): Povijesni pregled činjenica u vrijeme Coulomba: <https://nationalmaglab.org/education/magnet-academy/history-of-electricity-magnetism/museum/torsion-balance-1785>
4. Online adresa (Dostupno: 17. 10. 2017.): Povijesni pregled činjenice u vrijeme Coulomba: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00407-006-0113-9>
5. Online adresa (Dostupno: 17. 10. 2017.) : Wikipedija, općenito o Coulombu (slika glave te originalni nacrt torzijske vage): [https://hr.wikipedia.org/wiki/Charles-Augustin\\_de\\_Coulomb](https://hr.wikipedia.org/wiki/Charles-Augustin_de_Coulomb)
6. Online adresa (Dostupno: 22. 10. 2017.): Povijesni pregled o torzijskim vagama: <https://encyclopedia2.thefreedictionary.com/Torsion+Balance>