

# Uvjeti primjene Kirchhoffovih zakona

---

**Rastija, Jakov**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:200:693156>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-29**

*Repository / Repozitorij:*

[Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek](#)



**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU**

**FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I  
INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA**

**Sveučilišni studij**

**UVJETI PRIMJENE KIRCHHOFFOVIH ZAKONA**

**Završni rad**

**Jakov Rastija**

**Osijek, 2022.**

**FERIT**FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA  
I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA **OSIJEK****Obrazac Z1P - Obrazac za ocjenu završnog rada na preddiplomskom sveučilišnom studiju**

Osijek, 16.09.2022.

Odboru za završne i diplomske ispite

**Prijedlog ocjene završnog rada na preddiplomskom sveučilišnom studiju**

<b>Ime i prezime Pristupnika:</b>	Jakov Rastija
<b>Studij, smjer:</b>	Preddiplomski sveučilišni studij Elektrotehnika i informacijska tehnologija
<b>Mat. br. Pristupnika, godina</b>	4724, 23.07.2019.
<b>OIB Pristupnika:</b>	28670498753
<b>Mentor:</b>	Prof. dr. sc. Kruno Miličević
<b>Sumentor:</b>	,
<b>Sumentor iz tvrtke:</b>	
<b>Naslov završnog rada:</b>	Uvjeti primjene Kirchhoffovih zakona
<b>Znanstvena grana rada:</b>	<b>Elektrostrojarstvo (zn. polje elektrotehnika)</b>
<b>Zadatak završnog rad:</b>	Potrebno napraviti teorijsku analizu fizikalnih osnova za primjenu Kirchhoffovih zakona kao pojednostavnjenja Maxwellovog modela. Navesti primjere mogućih zabluda u praksi.
<b>Prijedlog ocjene završnog rada:</b>	Izvrstan (5)
<b>Kratko obrazloženje ocjene prema Kriterijima za ocjenjivanje završnih i diplomskih radova:</b>	Primjena znanja stečenih na fakultetu: 3 bod/boda Postignuti rezultati u odnosu na složenost zadatka: 3 bod/boda Jasnoća pismenog izražavanja: 2 bod/boda Razina samostalnosti: 3 razina
<b>Datum prijedloga ocjene od strane mentora:</b>	16.09.2022.
<b>Datum potvrde ocjene od strane Odbora:</b>	21.09.2022.
Potvrda mentora o predaji konačne verzije rada:	<i>Mentor elektronički potpisao predaju konačne verzije.</i>
	Datum:

**FERIT**FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA  
I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA OSIJEK**IZJAVA O ORIGINALNOSTI RADA**

Osijek, 23.09.2022.

<b>Ime i prezime studenta:</b>	Jakov Rastija
<b>Studij:</b>	Preddiplomski sveučilišni studij Elektrotehnika i informacijska tehnologija
<b>Mat. br. studenta, godina upisa:</b>	4724, 23.07.2019.
<b>Turnitin podudaranje [%]:</b>	4

Ovom izjavom izjavljujem da je rad pod nazivom: **Uvjeti primjene Kirchhoffovih zakona**

izrađen pod vodstvom mentora Prof. dr. sc. Kruno Miličević

i sumentora ,

moj vlastiti rad i prema mom najboljem znanju ne sadrži prethodno objavljene ili neobjavljene pisane materijale drugih osoba, osim onih koji su izričito priznati navođenjem literature i drugih izvora informacija. Izjavljujem da je intelektualni sadržaj navedenog rada proizvod mog vlastitog rada, osim u onom dijelu za koji mi je bila potrebna pomoć mentora, sumentora i drugih osoba, a što je izričito navedeno u radu.

Potpis studenta:

# SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
1.1. Zadatak završnog rada.....	1
2. MAXWELLOV MODEL.....	2
2.1. Gaussov zakon.....	2
2.1.1. Električni tok.....	2
2.1.2. Električno polje točkastog naboja, električni tok i Gaussov zakon .....	3
2.2. Gaussov zakon za magnetizam .....	5
2.3. Faradayev zakon.....	7
2.3.1. Vodič u gibanju u magnetskom polju .....	7
2.3.2. Promjena magnetskog toka .....	8
2.3.3. Iskaz Faradayevog zakona .....	9
2.4. Ampèreov zakon .....	10
2.4.1. Ampèreov originalni zakon.....	10
2.4.2. Maxwell-Ampèreov zakon.....	11
3. KIRCHHOFFOV MODEL.....	12
3.1. Postulati teorije mreža.....	12
3.1.1. Prvi postulat teorije mreža .....	13
3.1.2. Drugi postulat teorije mreža.....	13
3.1.3. Treći postulat teorije mreža .....	14
3.1.4. Četvrti postulat teorije mreža.....	14
3.2. Kirchhoffov zakon struje (KZS) .....	15
3.3. Kirchhoffov zakon napona (KZN) .....	16
4. KIRCHHOFFOV MODEL I MAXWELLOV MODEL — DVOJBE .....	18
4.1. Kondenzator i Ampèreov zakon.....	18
4.1.1. Poyntingov vektor.....	18
4.1.2. Serijski RC krug — analiza kondenzatora.....	19
4.1.3. Ampereov zakon za mreže opisane Kirchhoffovim modelom .....	24
4.2. Zavojnica kao naprava električne mreže .....	25
4.2.1. Napon induktiviteta.....	25
4.2.2. Faradayev zakon ili Kirchhoffov zakon napona .....	26
4.3. Lewinov paradoks .....	29
4.3.1. Uvod u problem .....	29
4.3.2. Pregled originalne mreže i pokušaj analize Kirchhoffovim zakonima.....	30

4.3.3.	Pojednostavljena mreža. Analiza Kirchhoffovim zakonima .....	32
4.3.4.	Analiza mreže Faradayevim zakonom.....	33
4.3.5.	O skalarnom potencijalu, naponu i pokazivanju voltmetra u dinamičkim situacijama .....	35
5.	MAXWELLOV MODEL U PRAKSI.....	39
5.1.	Maxwellove jednađbe u vakuumu, valna priroda elektromagnetskog polja .....	39
5.2.	Prijenosna mreža u elektrotehnici .....	40
5.2.1.	Prijenosna mreža — opća razmatranja .....	40
5.2.2.	Telegrafске jednađbe .....	41
5.2.3.	Prijenosni vod i Kirchhoffovi zakoni.....	44
5.3.	Antena — princip rada .....	46
5.3.1.	Dipolna antena kao odašiljač, elektromagnetsko zračenje .....	47
6.	ZAKLJUČAK.....	49
	LITERATURA .....	51
	SAŽETAK .....	53
	ABSTRACT.....	54

## **1. UVOD**

James Clerk Maxwell napravio je veliki pomak u fizici i elektrotehnici detaljno opisavši kako su i na koji način sve pojave u elektrodinamici posljedice električnog i magnetskog polja u prostoru te time uspostavio teoriju o elektromagnetskim poljima čija je primjena naveliko korištena. Maxwellove četiri jednačbe u klasičnoj elektrodinamici pružaju najpotpuniji model za opis svih fenomena s kojima se inženjeri elektrotehnike mogu susresti.

Međutim, ponekad je analiza nekih problema pomoću Maxwellovih jednačbi jednostavno suviše zahtjevna pa se uz određene uvjete iz Maxwellovih jednačbi mogu izvesti drugi modeli i pripadajući zakoni koje je znatno jednostavnije primijeniti.

Kirchhoffove zakone prvi je predstavio i opisao Gustav Kirchhoff 1845. godine, prije objave Maxwellovih radova. U to vrijeme sustav izmjenične struje još nije bio relevantan te su izvorno njegovi zakoni bili jednačbe koje su se tada koristile za analizu mreža istosmjernje struje. Danas se ovi zakoni koriste i za analizu mreža s vremenski promjenjivim odzivima i poticajima.

Kirchhoffovi zakoni jedna su od najučestalijih metoda koja se koristi za analizu električkih mreža. Oni su često predstavljeni kao zakon očuvanja energije te se u većini stručne literature ne posvećuje dovoljna pažnja njihovim ograničenjima. Kirchhoffovi zakoni mogu se, ukoliko su određeni uvjeti vezani za fizikalnu sliku mreže koja treba biti analizirana ispunjeni, izvesti iz Maxwellovih jednačbi.

Iako se u dosta praktičnih slučajeva Kirchhoffovi zakoni mogu primijeniti i dati rezultate koji su u zadovoljavajućim granicama točnosti, u nekim slučajevima jedini način analize sustava je Maxwellovim jednačbama.

### **1.1. Zadatak završnog rada**

U ovom radu potrebno je napraviti teorijsku analizu fizikalnih osnova za primjenu Kirchhoffovih zakona kao pojednostavljenja Maxwellovog modela. Cilj je i navesti te analizirati moguće zablude u praksi.

## 2. MAXWELLOV MODEL

Maxwellov model u elektrotehnici temeljni je matematički model kojim se pomoću električnog i magnetskog polja mogu opisati sve (kompleksne) pojave. Ovaj model temelji se na Maxwellovim jednažbama.

Električno i magnetsko polje opisuju se u nekoj točki prostora vektorskim veličinama, najčešće vektorom jakosti električnog polja  $\mathbf{E}$  te vektorom magnetske indukcije  $\mathbf{B}$ . Maxwellove četiri jednažbe predstavljaju sustav koji je iskaz ovog modela i smatrane su jednim od najvažnijih fizikalnih zakona. Ove jednažbe izražavaju povezanost između električnog i magnetskog polja te se pomoću njih može demonstrirati valna priroda elektromagnetskih pojava.

Elektromagnetsko polje je, dakle, funkcija prostornih koordinata (i vremena) pa su ovim modelom u obzir uzete i dimenzije analiziranih električkih sustava i prostorni razmještaj komponenti.

Kako je ovo najpotpuniji matematički model korišten u teorijskoj elektrotehnici, on je neophodan za ostatak rada te je temelj za ono što u ostalim poglavljima slijedi. Naime, i sami Kirchhoffovi zakoni specijalan su slučaj Maxwellovih jednažbi, a za sustave na koje Kirchhoffovi zakoni nisu primjenjivi koriste se Maxwellove jednažbe za analizu.

### 2.1. Gaussov zakon

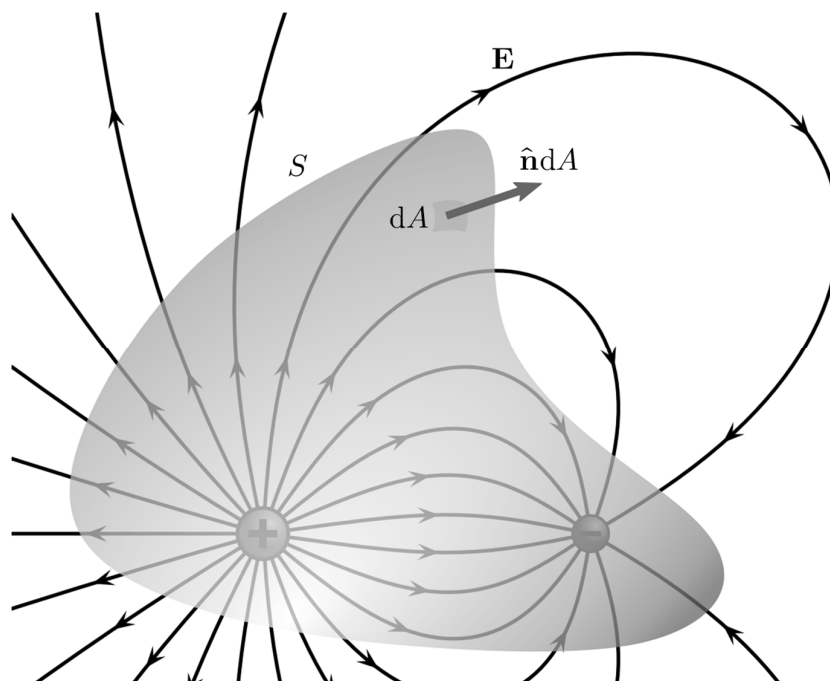
#### 2.1.1. Električni tok

Neka se zatvorena ploha  $S$ , koja se često naziva i Gaussova ploha, nalazi u prostoru u kojem vlada električno polje; električni tok (tok električnog polja) kroz tu plohu dan je izrazom [1]

$$\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA . \quad (2-1)$$



Gdje je  $dA$  infinitezimalni element površine plohe  $S$ , a  $\hat{\mathbf{n}}$  jedinični vektor okomit na plohu u promatranoj točki i smjera *iz plohe*, kao što je i prikazano na slici 2.1. Također, na slici 2.1 jakost električnog polja u nekoj točki predočena je gustoćom silnica polja kako je to i uobičajeno, a silnice su nacrtane tako da je u svakoj točki tangenta na silnicu istog smjera kao vektor  $\mathbf{E}$ . Smjer vektora  $\mathbf{E}$  u nekoj točki određen je kao onaj smjer u kojem bi probni točkasti pozitivan naboj  $Q_0$  imao tendenciju ubrzavati stavi li ga se u tu točku, a iznos vektora  $\mathbf{E}$  u nekoj točki dobije se kao omjer sile na probni naboj i tog naboja ( $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_0(\mathbf{r})/Q_0$ ). [2]



Slika 2.1: Tok kroz  $dA \in S$  definiran je kao  $d\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}dA$  [1]

### 2.1.2. Električno polje točkastog naboja, električni tok i Gaussov zakon

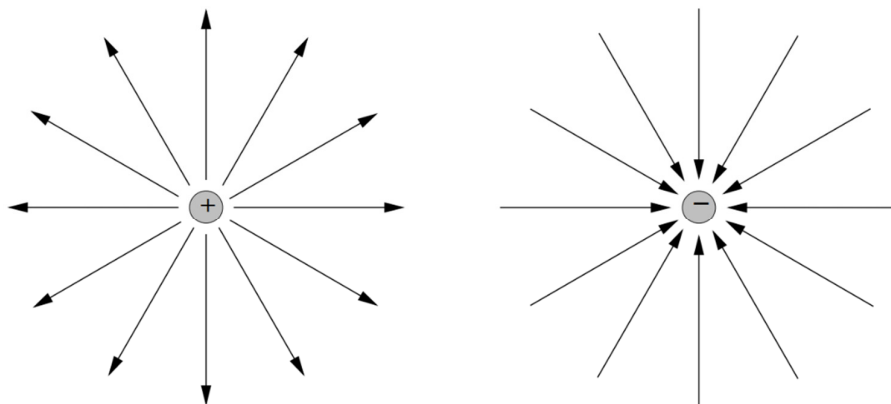
Da bi se dobio Gaussov zakon bit će analiziran prvo jednostavan slučaj kada je ploha od interesa sfera  $S_1$  u čijem je središtu, koje je proizvoljno određeno kao ishodište, točkasti naboj  $Q$  koji je jedini izvor električnog polja.

Za točkasti naboj iznosa  $|Q|$  u ovom slučaju vrijedi [3]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2-2)$$

gdje je  $r$  udaljenost između ishodišta i neke točke u kojoj nas zanima vektor  $\mathbf{E}$ ,  $\hat{\mathbf{r}}$  je jedinični vektor usmjeren od ishodišta prema promatranoj točki, a konstanta  $\epsilon_0$  je permitivnost vakuuma

( $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  F/m). Bitno je primijetiti da je  $\mathbf{E} \parallel \hat{\mathbf{n}}dA$  za svaki  $dA \in S_1$  te da je električno polje u svakoj točki sfere jednakog iznosa jer je svaka točka sfere jednako udaljena od njenog središta u koje je smješten točkasti naboj.



**Slika 2.2:** Električno polje točkastog naboja [4]

Tok električnog polja kroz sferu  $S_1$  polumjera  $R$  za ovaj slučaj je

$$\Phi_E = \oiint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}dA = E(R) \oiint_{S_1} dA = E(R) \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2-3)$$

Iz gornje jednadžbe se vidi da ukupan tok ne ovisi o polumjeru sfere; nadalje, može se matematički pokazati da ukupni tok ne ovisi ni o obliku Gaussove plohe ni o prostornom položaju naboja unutar nje, već samo o neto količini naboja obuhvaćenog razmatranom plohom [4], što je i fizikalno smisljeno s obzirom na to da jednaka količina silnica izlazi iz plohe (ili u nju ulazi) kakvog god da je ona oblika. Uzevši u obzir navedene činjenice, može se formulirati Gaussov zakon [5]:

$$\boxed{\oiint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}dA = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV'} \quad (2-4)$$

Budući da izvor električnog polja ne mora biti jedan točkasti naboj, u gornjoj jednadžbi ukupan naboj zatvoren u volumenu  $V$  kojem je granica zatvorena ploha  $S$  zapisan je kao trostruki integral gustoće naboja  $\rho$  na području  $V$ .

Iz jednadžbe (2-4) lako je ustvrditi da Gaussov zakon direktno povezuje ukupni tok električnog polja ( $\Phi_E$ ) kroz zatvorenu plohu ( $S$ ) i naboj zatvoren tom plohom te može biti koristan alat za određivanje jakosti električnog polja u nekoj točki prostora.

Prema teoremu o divergenciji [6] Gaussov zakon može se zapisati u diferencijalnom obliku kao [5]:

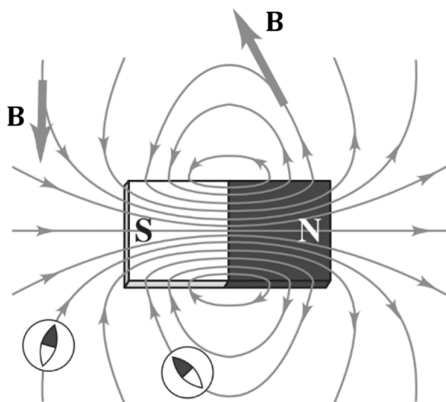
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2-5)$$

Nabla operator  $\nabla$  je vektorski operator definiran na sljedeći način [6]:

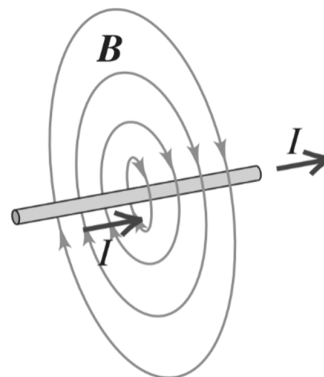
$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2-6)$$

## 2.2. Gaussov zakon za magnetizam

U prirodi još nije otkriven izvor magnetskog polja koji bi se ponašao kao magnetski monopol; magnetski polovi uvijek dolaze u paru — sjeverni (N) pol i južni (S) pol. Magnetsko polje nastaje kao posljedica električne struje ili promjene električnog toka (više o ovom u poglavlju 2.4), ili djelovanjem magnetskih materijala. Smjer vektora  $\mathbf{B}$  u nekoj točki određen je kao smjer u kojem bi se N-pol igle kompasa odklonio [7]. Na slici 2.3 i slici 2.4 magnetsko polje predočeno je silnicama koje su nacrtane tako da je tangenta na silnicu u točki uvijek istog smjera kao i vektor  $\mathbf{B}$ .



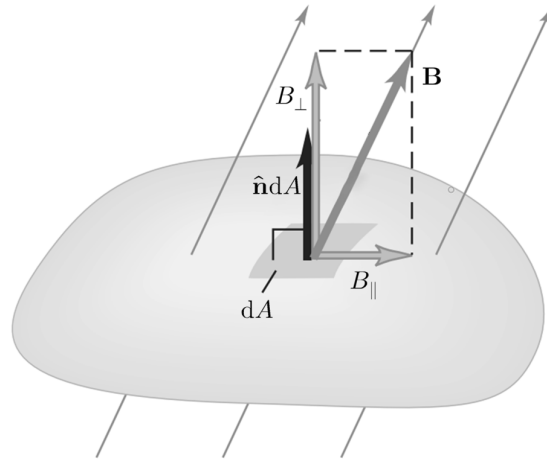
**Slika 2.4:** Magnetsko polje ravnog magneta – silnice su usmjerene od N-pola prema S-polu izvan magneta i od S-pola prema N-polu unutar magneta [7]



**Slika 2.3:** Magnetsko polje ravnog vodiča protjecanog strujom – smjer se određuje pravilom desne ruke [7]

Magnetski tok kroz zatvorenu (Gaussovu) plohu  $S$  dan je izrazom

$$\Phi_B = \oiint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA . \quad (2-7)$$



**Slika 2.5:** Tok kroz  $dA \in S$  definiran je kao  $d\Phi_B = \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$  [7]

Budući da su silnice magnetskog polja krivulje koje nemaju ni početak ni kraj, tj. ne niču radijalno ni iz kakvog izvora [7], može se zaključiti da je onda ukupan magnetski tok kroz neku Gaussovu plohu u kojoj vlada magnetsko polje jednak nuli. U poglavlju 2.1.2 kao bitan zaključak je navedeno da je tok kroz Gaussovu plohu proporcionalan naboju koji je tom plohom obuhvaćen. Zbog toga je valjano reći, s obzirom na to da magnetski monopol nije otkriven, da je magnetski tok kroz zatvorenu plohu jednak nuli.

Gaussov zakon za magnetizam formalni je iskaz da ne postoje magnetski monopoli i u integralnom obliku glasi [5]:

$$\boxed{\oiint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = 0} \quad (2-8)$$

Primjenom teorema o divergenciji vektorskog polja Gaussov zakon za magnetizam može se zapisati u diferencijalnom obliku na sljedeći način [5]:

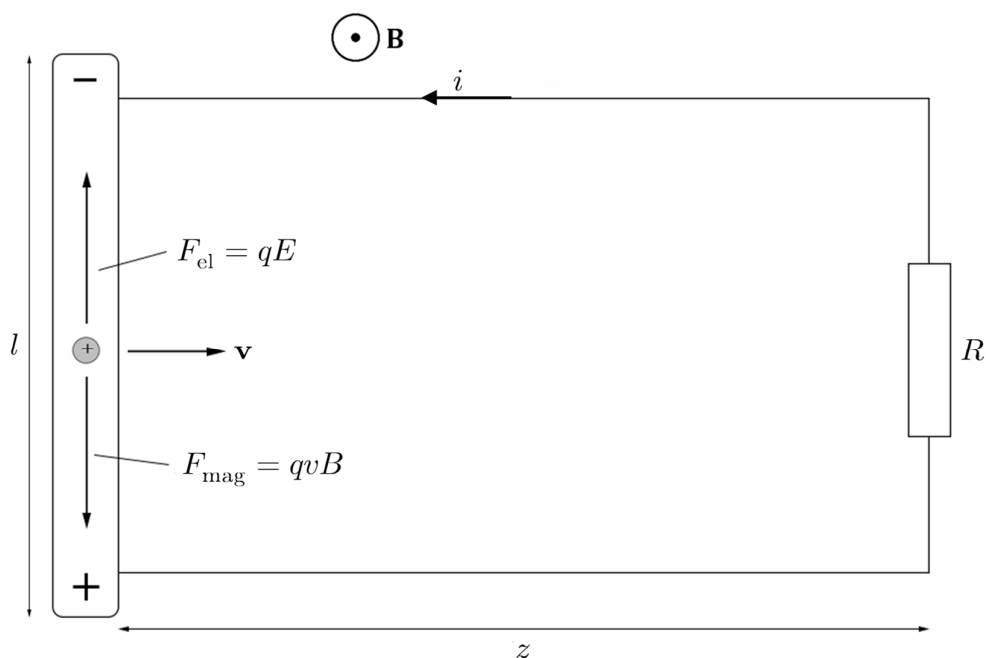
$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \quad (2-9)$$

## 2.3. Faradayev zakon

### 2.3.1. Vodič u gibanju u magnetskom polju

Poznato je da u vodiču postoje slobodni elektroni koji se mogu gibati ako na njih djeluje sila, ali konvencionalno se uzima da su pozitivni elementarni naboji ti koji se unutar vodiča mogu usmjerenom gibati — dogovoren smjer struje suprotan je od stvarnog.

Slika 2.6 prikazuje pomični ravni vodič duljine  $l$  koji s drugim idealnim vodičem (o pojmu idealnog vodiča će više biti rečeno u poglavlju 3.) i otpornikom otpora  $R$  čini pravokutnu petlju [8]. Petlja se nalazi u magnetskom polju nepromijenjenog iznosa smjera *iz papira*. Pomiče li se ravni vodič udesno konstantnom brzinom  $v$  (vektori  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{B}$  okomiti su), u njemu će na pozitivne naboje djelovati magnetska sila čija vertikalna komponenta iznosa  $qvB$  uzrokuje razdvajanje naboja, što znači da će se u petlji inducirati struja i uspostaviti elektrostatsko konzervativno električno polje  $\mathbf{E}_\varphi$ . Ukupna sila na naboj u vodiču  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E}_\varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  jednaka je nuli kada je  $\mathbf{E}_\varphi = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\mathbf{E}_{\text{ind}}$ , i tada razdvajanje naboja prestaje. Iz ovoga se da zaključiti da upravo inducirano električno polje  $\mathbf{E}_{\text{ind}}$  koje je posljedica gibanja vodiča mora biti uzrok struje.



Slika 2.6: Vodič u gibanju u magnetskom polju

U elektrodinamici elektromotorna sila (EMS) u petlji  $C$  definirana je kao [3]:

$$e = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} . \quad (2-10)$$

Gdje je  $\mathbf{f}$  sila po jedinici naboja, a  $d\mathbf{l}$  element pomaka po putanji zatvorene krivulje, odnosno petlje ( $d\mathbf{l} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$ ).

Posljedica gibanja vodiča sa slike 2.6 je inducirana elektromotorna sila:

$$e = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{E}_\varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} . \quad (2-11)$$

Vektori  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{B}$  nepromjenjivog su smjera i iznosa te gornji integral postaje trivijalan za riješiti:

$$e = vBl . \quad (2-12)$$

Polje  $\mathbf{E}_\varphi$  postoji i u pomičnom vodiču i otporniku (u otporniku je istog smjera kao i struja): ono je konzervativna vektorska funkcija i zbog toga je integral  $\oint \mathbf{E}_\varphi \cdot d\mathbf{l}$  jednak nuli [9]. Struja koja se inducira u petlji kao posljedica inducirane elektromotorne sile dana je izrazom:

$$i = \frac{e}{R} = \frac{vBl}{R} . \quad (2-13)$$

### 2.3.2. Promjena magnetskog toka

Rezultat dobiven u (2-12) može se dobiti i na općenitiji način, promatranjem magnetskog toka kroz otvorenu plohu ograničenu petljom [8].

Magnetski tok kroz otvorenu plohu  $S$  računa se pomoću izraza

$$\Phi_B = \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA . \quad (2-14)$$

Magnetski tok kroz otvorenu plohu čija je granica petlja koju čine pomični vodič i otpornik je:

$$\Phi_B = \iint B \cdot dA = B \iint dA = Blz . \quad (2-15)$$

Kako se pomični vodič giba udesno, tok se mijenja; prva vremenska derivacija toka je:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Bl \frac{dz}{dt} = -Blv . \quad (2-16)$$

(Negativan predznak je pokazatelj da je  $dz/dt < 0$ .) Vidljivo je da iznos promjene toka u vremenu odgovara iznosu inducirane elektromotorne sile u petlji. Sada se može zapisati da je

$$e = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\dot{\Phi}_B \quad (2-17)$$

Negativan predznak u jednadžbi (2-17) govori o smjeru inducirane struje i EMS-a — EMS je takvog smjera da se inducirana struja (koja je posljedica inducirane elektromotorne sile) *opire* promjeni magnetskog toka. U analiziranom slučaju tok se smanjuje pomicanjem vodiča kao na slici. Prema tome, inducirana struja teče u smjeru suprotno od kazaljke na satu tako da generira novo magnetsko polje koje bi doprinijelo inicijalnom magnetskom polju.

Može se dokazati kako jednadžba (2-17) vrijedi i u generaliziranom slučaju kada se petlja proizvoljnog oblika giba u (nehomogenom) magnetskom polju tako da kroz otvorenu plohu koju ona ograničava postoji promjenjivi magnetski tok [10].

### 2.3.3. Iskaz Faradayevog zakona

Neka je petlja  $C$  granica otvorene plohe  $S$  proizvoljnog oblika. Ukoliko dolazi do promjene magnetskog toka kroz plohu  $S$ , u petlji nastaje inducirano električno polje ( $\mathbf{E}_{\text{ind}}$ ), koje je nekonzervativno, te ono uzrokuje induciranu elektromotornu silu [11, 12]:

$$e = \oint_C \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA . \quad (2-18)$$

S obzirom na to da u krugu može postojati i konzervativno električno polje  $\mathbf{E}_\varphi$  (ukupno električno polje duž krivulje je  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\varphi + \mathbf{E}_{\text{ind}}$ ) čiji je krivuljni integral po zatvorenoj putanji jednak nuli, Faradayev zakon se iskazuje kao [5]:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (2-19)$$

Primjenom Stokesovog teorema [6] prebacimo se u diferencijalni zapis Faradayevog zakona [5]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2-20)$$

Prije formuliranja Faradayevog zakona bilo je poznato iz elektrostatike da je elektrostatsko električno polje posljedica naboja u prostoru. Maxwellovim formuliranjem Faradayevog zakona došlo je do spoznaje da električno polje može biti i direktna posljedica promjene magnetskog toka  $\dot{\Phi}_B$ . Zaključak je da je ovim napravljen značajan napredak zbog poveznice utjecaja (promjenjivog) magnetskog polja na električno.

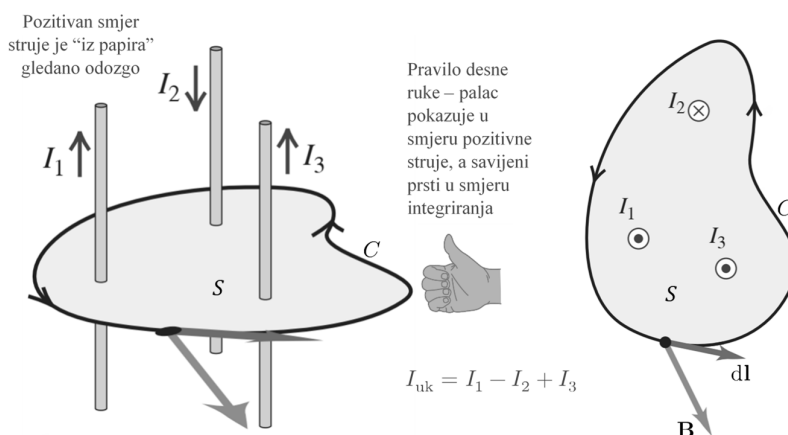
## 2.4. Ampèrov zakon

### 2.4.1. Ampèrov originalni zakon

Ampèrov zakon povezuje magnetsko polje i električnu struju (uz uvjet da se električno polje unutar plohe ograničene petljom  $C$  ne mijenja) na sljedeći način [3]:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{uk}} \quad (2-21)$$

Zatvorena krivulja, Ampèrova petlja  $C$ , granica je otvorene plohe  $S$ , a struja  $I_{\text{uk}}$  odnosi se na ukupnu struju koja je zatvorena petljom  $C$ , odnosno koja prolazi kroz plohu  $S$ . Konstanta  $\mu_0$  naziva se permeabilnost vakuumu i iznosi  $4\pi \times 10^{-7}$  H/m.



Slika 2.7: Ampèrov zakon [7]

Električna struja se općenito može zapisati kao plošni integral vektora gustoće struje  $\mathbf{J}$  [13] — struja  $I_{\text{uk}}$  zapiše se kao takav integral čije je područje integracije spomenuta otvorena ploha  $S$ :

$$I_{\text{uk}} = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA . \quad (2-22)$$

Uvrsti li se jednačba (2-22) u jednačbu (2-21) i na nju se primijeni Stokesov teorem, dobije se Ampèrov zakon u diferencijalnom obliku:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2-23)$$



## 2.4.2. Maxwell-Ampèreov zakon

Originalni ili „stari“ Ampèreov zakon ima određeno ograničenje — to da uvijek vrijedi samo u statičnim slučajevima [3]. Primjenom operacije divergencije na obje strane jednadžbe (2-23) dobije se:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{J}) \quad (2-24)$$

Lijeva strana jednadžbe (2-24) mora biti jednaka nuli jer je divergencija rotacije bilo koje vektorske funkcije uvijek jednaka nuli, no desna strana, tj. divergencija vektora  $\mathbf{J}$  u pravilu ne mora biti jednaka nuli [3]. Maxwell je izmijenio Ampèreov zakon (2-23) dodavši dodatni član koji bi riješio ovaj problem [14]. Ampèreov zakon, s dodatnim članom kojeg je Maxwell predložio je:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \mathbf{J}_D \quad (2-25)$$

Uzme li se divergencija jednadžbe (2-25), član  $\nabla \cdot \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D)$  bit će jednak nuli onda kada je  $\mathbf{J}_D = \epsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t)$ . Veličina  $\mathbf{J}_D$  naziva se vektor gustoće struje pomaka i kasnije će biti rečeno nešto o njejoj iznimnoj važnosti u tumačenju rada kondenzatora u poglavlju 4.1.

Maxwell-Ampèreov ili prošireni Ampèreov zakon može se sada zapisati [5]:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} \quad (2-26)$$

U integralnom obliku Maxwell-Ampèreov zakon glasi [5]:

$$\boxed{\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA} \quad (2-27)$$

Za razliku od jednadžbi (2-21) i (2-23) koje uvijek vrijede samo u statičnim slučajevima, jednadžbe (2-26) i (2-27) uvijek vrijede i u dinamičkim situacijama kada je električni tok funkcija vremena (u mrežama je to slučaj kada je struja vremenski promjenjiva funkcija).

Kao što je Faradayev zakon pokazatelj da električno polje može nastati kao posljedica naboja u prostoru ili promjenjivog magnetskog toka, tako je Maxwell-Ampèreov zakon pokazatelj da magnetsko polje može biti posljedica električne struje ili promjenjivog električnog toka. Značaj ovog zakona upravo je ta utvrđenost kako (promjenjivo) električno polje djeluje na magnetsko.

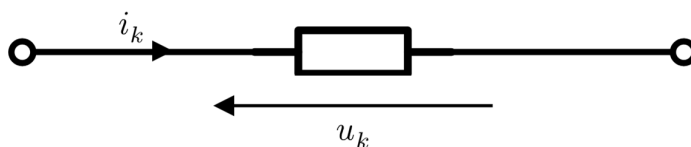
### 3. KIRCHHOFFOV MODEL

Teorija mreža elektrotehnička je disciplina široke primjene koja se bavi analizom električkim mreža pomoću Kirchhoffovih zakona.

Kirchhoffov model je matematički model koji je izvedenica iz Maxwellovog modela, odnosno može se reći da je to pojednostavljen (specijalan) slučaj Maxwellovog modela.

Temelj Kirchhoffovog modela su Kirchhoffov zakon struja te Kirchhoffov zakon napona. Ovi zakoni vrijede i točno predviđaju električke prilike analizirane mreže kada su zadovoljena četiri postulata teorije mreža. Stvarne mreže za koje su zadovoljeni ti postulati u Kirchhoffovom modelu svode se na mreže s koncentriranim (zbijenim) elementima ili tzv. Kirchhoffove mreže. Element mreže podrazumijeva model kojim je zamijenjena stvarna naprava i kojim je predočen fizikalni proces vezan za tu napravu [15]. Temeljne varijable Kirchhoffovog modela su napon  $u$  i struja  $i$  elementa mreže, a izvedene tok  $\phi$  i naboj  $q$  [15]:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau, \quad q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau. \quad (3-1)$$



Slika 3.1: Referentni smjerovi struje i napona  $k$ -tog elementa mreže

U ovom poglavlju osnovni cilj je pokazati poveznicu između Maxwellovog i Kirchhoffovog modela te uz pomoć postulata teorije mreža izvesti Kirchhoffove zakone iz Maxwellovih jednadžbi te objasniti kako se Kirchhoffovi zakoni kao algebarske jednadžbe primjenjuju pri analizi električkih mreža.

#### 3.1. Postulati teorije mreža

Postulati teorije mreža su četiri uvjeta iskazana u literaturi [15] koji su za većinu stvarnih mreža korištenih u praksi zadovoljeni do te mjere da Kirchhoffov model daje dovoljno precizan opis svih električkih pojava u tim mrežama, tako da se analiza ne vrši u kontekstu električnog i magnetskog

polja. Te su mreže prvenstveno malih dimenzija u odnosu na valne duljine elektromagnetskih valova prisutnih u radu mreže te niti jedna veličina ne ovisi o prostornim koordinatama. Također se smatra da se svi fizikalni procesi odvijaju samo unutar naprava te da su sve naprave elektromagnetski odvojene pa se posljedično tome električna svojstva naprava opisuju samo veličinama definiranim između njenih priključnica (ne razmatraju se fizikalni procesi unutar samih naprava) [15]. Kada su ovi uvjeti zadovoljeni, sve struje i naponi u mreži, u svakom trenutku, dobro su definirani (struja grane u svakoj točki je jednaka, a napon između dvije točke jednoznačno je određen).

### 3.1.1. Prvi postulat teorije mreža

Dimenzija mreže mora biti zanemarivo mala u odnosu na valnu duljinu koja odgovara najvišoj frekvenciji u radu mreže ( $d \ll \lambda_{\min}$ ).

Prvi i temeljni postulat govori da će se u mreži zanemarive veličine elektromagnetski valovi koji se u vakuumu šire brzinom svjetlosti ( $c \approx 3 \times 10^8$  m/s) praktički proširiti trenutno. To bi značilo da je s gledišta teorije o elektromagnetskim poljima i valovima mreža zbijena u jednu točku prostora te stoga međusobni razmještaj naprava te njihove dimenzije nemaju utjecaj na širenje elektromagnetskih pojava mrežom.

### 3.1.2. Drugi postulat teorije mreža

Spojni vodiči u mreži beskonačne su specifične vodljivosti ( $\kappa = \infty$ ) te oko njih ne postoji električno i magnetsko polje.

Kada struja teče u idealnom vodiču, iz Ohmovog zakona [13] vidi se da je električno polje unutar idealnog vodiča jednako nuli:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \kappa \mathbf{E} \\ \mathbf{J} \neq \mathbf{0}, \kappa &= \infty \implies \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3-2)$$

a to znači da se spojni vodič, koji se smatra idealnim, u mrežama može smatrati ekvipotencijalnom linijom.

Spojni vodiči uobičajeno su izrađeni od materijala velike vodljivosti kao što su bakar ili aluminij ( $\kappa_{\text{Cu}} \approx 6 \times 10^7$  S/m ;  $\kappa_{\text{Al}} \approx 3,5 \times 10^7$  S/m), ali se u mrežama koje zadovoljavaju prvi postulat

zbog dimenzija smatra da su spojni vodiči idealni i to ukazuje da je njihov ukupni otpor jednak nuli.

Prema Maxwellovom modelu oko (idealnog) vodiča kroz koji teče struja postoji električno i magnetsko polje, no kako je mreža malih dimenzija, utjecaj magnetskog i električnog polja oko vodiča je zanemariv te zato kažemo da u mrežama koje su opisane Kirchhoffovim modelom oko spojnih vodiča nema niti električnog niti magnetskog polja.

### 3.1.3. Treći postulat teorije mreža

Rezultantni naboj svake naprave mreže jednak je nuli.

Treći postulat govori da u mreži niti u jednom trenutku ne dolazi do gomilanja istovrsnog naboja, odnosno da je  $dq/dt = 0$  za zatvorenu plohu koja obuhvaća bilo kojih  $N$  naprava mreže. Iz toga slijedi da je ukupna struja koja ulazi u promatranu zatvorenu plohu jednaka ukupnoj struji koja iz nje izlazi, a to govori i da struja u ovakvim mrežama nije funkcija prostornih koordinata. Ako zatvorena ploha obuhvaća samo jednu napravu mreže, rezultantni naboj naprave mora biti jednak nuli jer je  $dq/dt = 0$  za tu plohu.

Da se rezultantni istovrsni naboj zatvorene plohe koja obuhvaća  $N$  naprava mreže mijenja, to bi značilo da ukupna struja koja ulazi u tu plohu nije jednaka struji koja iz nje izlazi, i to implicira da je struja i funkcija prostornih koordinata što može biti slučaj kada su mreže velikih dimenzija (odnosno kada ne vrijedi prvi temeljni postulat). Bit će pokazano u poglavlju 3.2 kako se uz pomoć trećeg postulata iz Maxwellovih jednadžbi može izvesti Kirchhoffov zakon struje.

### 3.1.4. Četvrti postulat teorije mreža

Ne postoji magnetska veza između naprava u mreži.

Pretpostavka da magnetsko i električno polje postoje samo unutar samih naprava te da su neprimjetna vanjskom svijetu implicira da je promjena magnetskog toka  $\dot{\Phi}_B$  izvan naprava jednaka nuli; dakle, naprave su elektromagnetski odvojene.

U stvarnosti magnetsko polje postoji i izvan naprava te može doći do neželjenih magnetskih veza između naprava, međutim, ako je zadovoljen uvjet da je mreža dovoljno malih dimenzija te ako se pretpostavi da su silnice magnetskog polja znatno gušće unutar naprave nego izvan nje i da

je magnetski tok kroz ostatak mreže neznan, onda je efekt magnetskog polja izvan naprave na mrežu zanemariv.

Četvrti postulat igra važnu ulogu pri objašnjavanju i izvođenju Kirchhoffovog zakona napona iz Maxwellovih jednažbi što će biti objašnjeno u poglavlju 3.3.

### 3.2. Kirchhoffov zakon struje (KZS)

Jedan od temeljnih zakona fizike je zakon očuvanja naboja koji se može izvesti iz Maxwellovih jednažbi.

Primjenom divergencije na Maxwell-Ampèreov zakon dobije se sljedeće:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0(\nabla \cdot \mathbf{J}) + \mu_0\epsilon_0 \left( \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (3-3)$$

Kao što je već bilo rečeno u poglavlju 2.4.2, divergencija rotacije vektorske funkcije je uvijek nula te uz to vrijedi svojstvo da je

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}). \quad (3-4)$$

Prema Gaussovom zakonu je  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  pa jednažba (3-3) zapisana u konačnom obliku glasi:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3-5)$$

Ovo je jednažba kontinuiteta i matematički je iskaz lokalnog očuvanja naboja — ako se ukupni naboj u dijelu prostora mijenja, dolazi do gomilanja naboja.

Prema trećem postulatu teorije mreža, član  $\partial\rho/\partial t$  jednak je nuli za mrežu koja se opisuje Kirchhoffovim modelom pa (3-5) postaje

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3-6)$$

Ukoliko je divergencija vektorske funkcije jednaka nuli, prema teoremu o divergenciji [6] tada je plošni integral te funkcije po zatvorenoj plohi  $S$  (koja obuhvaća  $N$  naprava mreže) jednak nuli:

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = 0. \quad (3-7)$$

Referentni smjer struje je takav da struja *izlazi* iz ove plohe jer je vektor  $\hat{n}$  po definiciji usmjeren *iz plohe*, tako da je gornji integral suma svih struja koje iz plohe *izlaze*. To znači da je struji čiji se smjer poklapa s referentnim smjerom struje plohe pridružen pozitivan predznak, a struji čiji je smjer suprotan od referentnog je pridružen negativan predznak.

KZS u općem obliku: U svakom trenutku  $t$ , za svaku Gaussovu plohu  $S$ , algebarska suma svih struja koje *izlaze* iz Gaussove plohe jednaka je nuli. [16]

Promatra li se poseban slučaj kada je Gaussova ploha  $S$  takva da zatvara samo jedan čvor mreže, onda je riječ o KZS-u za čvorove u Kirchhoffovim mrežama koji se ustalio u govoru samo kao KZS; može ga se iskazati algebarskom jednačbom:

$$\sum_{k=1}^b a_{jk} i_k(t) = 0 \quad (\text{za } j\text{-ti čvor mreže}) \quad (3-8)$$

Gdje je:

- $i_k$  — struja  $k$ -te grane mreže,
- $b$  — ukupni broj grana mreže,
- $a_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{ako se ref. smjer struje } i_k \text{ poklapa s ref. smjerom struje čvora} \\ -1, & \text{ako se ref. smjer struje } i_k \text{ ne poklapa s ref. smjerom struje čvora} \\ 0, & \text{ako } k\text{-ta grana nije spojena na } j\text{-ti čvor mreže} \end{cases}$

Bitno je ovdje napomenuti da iako je KZS za čvorove samo specijalan slučaj KZS-a, puno je korisniji i češći pri pisanju jednačba mreže.

### 3.3. Kirchhoffov zakon napona (KZN)

U poglavlju 2.3.1 bilo je spomenuto kako je  $\oint \mathbf{E}_\varphi \cdot d\mathbf{l} = 0$ , što je ekvivalentno tvrdnji da je  $\nabla \times \mathbf{E}_\varphi = \mathbf{0}$ . Prema tome, definira se skalarna funkcija  $\varphi$  povezana s električnim poljem  $\mathbf{E}_\varphi$  prema sljedećoj relaciji [17]:

$$\mathbf{E}_\varphi = -\nabla\varphi = -\left(\hat{x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \quad (3-9)$$

Ta funkcija naziva se skalarni električni potencijal. Negativan predznak u jednačbi je indikator da je električno polje smjera od višeg k nižem potencijalu.

Naponi su u mreži koja zadovoljava postulate teorije mreža uvijek dobro definirani — napon između dvije točke takve mreže, 1 i 2, jednoznačno je određen i u najopćenitijem obliku prema Maxwellovom modelu u skladu s relacijom (3-9) je definiran kao razlika skalarnih potencijala:

$$u_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = - \int_2^1 \mathbf{E}_\varphi \cdot d\mathbf{l} . \quad (3-10)$$

Sukladno s četvrtim postulatom teorije mreža, ukoliko nema promjene magnetskog toka izvan naprava od kojih je mreža sastavljena, Faradayev zakon (2-19) se može modificirati i za njega zapisati specijalan slučaj koji vrijedi za mreže opisane Kirchhoffovim modelom:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 . \quad (3-11)$$

Ova jednadžba je Kirchhoffov zakon napona u integralnom obliku. Od izričitog je značaja naglasiti da se petlja obilaska  $C$  u ovoj jednadžbi uzima tako da se ne prolazi kroz same naprave (naprave se tretiraju crnokutijskim pristupom) [9]. To znači da kroz otvorenu plohu ograničenu petljom  $C$  nema promjene magnetskog toka pa shodno tome onda duž petlje  $C$  ne postoji nekonzervativno električno polje:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\varphi$ . Ako se ova činjenica uzme u obzir, onda je prema (3-10) integral u jednadžbi (3-11) suma svih napona u petlji s tim da se referentni smjer napona odredi smjerom obilaska petlje  $C$ . Sada se jednadžba (3-11) može pojednostaviti na način da ju se zapiše kao algebarsku jednadžbu koja je poznata kao Kirchhoffov zakon napona ili KZN koji se primjenjuje pri pisanju jednadžbi Kirchhoffove mreže:

$$\boxed{\sum_{k=1}^b b_{ik} u_k(t) = 0} \quad (\text{za } i\text{-tu petlju mreže}) \quad (3-12)$$

Gdje je [15]:

- $u_k$  — napon  $k$ -te grane mreže,
- $b$  — ukupni broj grana mreže,
- $b_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ako se referentni smjer napona } u_k \text{ poklapa s ref. smjerom napona petlje} \\ -1, & \text{ako se referentni smjer napona } u_k \text{ ne poklapa s ref. smjerom napona petlje} \\ 0, & \text{ako } k\text{-ta grana nije u sastavu } i\text{-te petlje} \end{cases}$ .

KZN: Za svaku petlju Kirchhoffove mreže, u svakom trenutku  $t$ , algebarska suma napona svih grana petlje jednaka je nuli. [15]

## 4. KIRCHHOFFOV MODEL I MAXWELLOV MODEL — DVOJBE

Stvarne mreže i naprave od kojih su one sastavljene opisuju se Maxwellovim modelom. U Kirchhoffovom modelu stvarna mreža svodi se na Kirchhoffovu mrežu te se svi fizikalni procesi unutar naprava mreže ne razmatraju, već se svakom elementu mreže pridruže odgovarajuće konstitutivne relacije koje opisuju odnos između varijabli mreže tog elementa.

U ovoj cjelini rada napravljena je analiza fizikalnih procesa vezanih za dvije naprave mreže, kondenzator i zavojnicu, te je uz to objašnjena opravdanost modeliranja tih naprava sebi pripadajućim elementima Kirchhoffove mreže.

Istražen je i jedan problem koji je potaknuo brojne rasprave između fizičara i inženjera elektrotehnike, Lewinov paradoks, kako ga naziva autor u [18]. Napravljena je detaljna analiza tog problema s ciljem razrješavanja svih dvojbi vezanih za nj.

### 4.1. Kondenzator i Ampèreov zakon

Kao što je već bilo rečeno u poglavlju 2.4, Ampèreov originalan zakon ima ograničenje, a to je da vrijedi samo u određenim uvjetima — daje uvijek točne rezultate samo u mrežama u kojima je električno polje konstantno (mreže istosmjerne struje). Upravo je Maxwell taj problem riješio uvođenjem nove fizikalne veličine, struje pomaka. Struja pomaka nema fizikalnu interpretaciju kao usmjereno gibanje naboja pod utjecajem električnog polja u mreži što je vidljivo iz jednadžbe (2-26).

U literaturi koja se bavi teorijom mreža struja pomaka ne spominje se iz razloga što je za Kirchhoffove mreže moguće zanemariti njenu pojavu i efekt te dobiti točne konačne rezultate, a u ovom poglavlju će biti i pokazano zašto na primjeru analize rada kondenzatora u nestatičnim uvjetima.

#### 4.1.1. Poyntingov vektor

Iz Maxwellovog modela poznato je da se energija u električkim procesima prenosi putem elektromagnetskog polja, a prijenos te energije može se opisati Poyntingovim vektorom koji se definira na sljedeći način [10]:

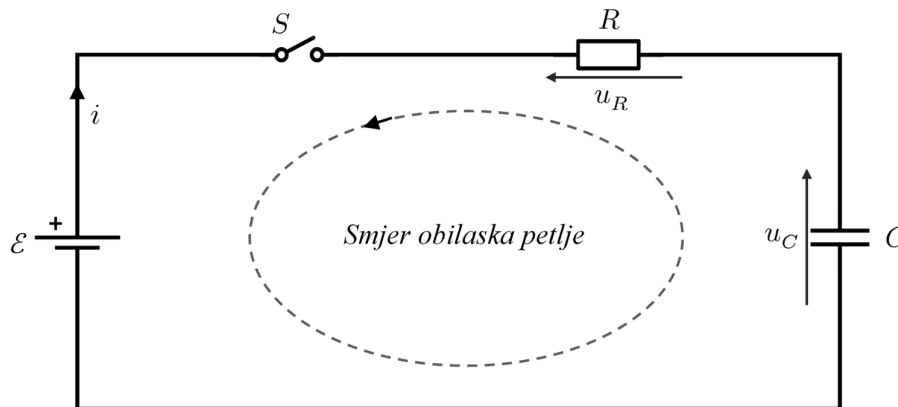


$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (4-1)$$

Ovaj vektor ima smjer propagacije elektromagnetskog vala koji prenosi energiju. Fizikalna interpretacija iznosa Poyntingovog vektora je snaga elektromagnetskog polja po jedinici površine uz uvjet da je ploha kroz koju elektromagnetski val prolazi okomita na smjer njegove propagacije.

#### 4.1.2. Serijski RC krug — analiza kondenzatora

Razmatrani pločasti kondenzator čine dvije paralelne okrugle metalne ploče duljine polumjera  $a$  odvojene izolatorom (za koji radi jednostavnosti ovdje pretpostavimo da je zrak). Ovaj kondenzator je u Kirchhoffovoj mreži (zbog svoje linearne vremenski nepromjenjive  $q$ - $u$  karakteristike) modeliran linearnim vremenski nepromjenjivim kapacitetom kapacitivnosti  $C$  za koji vrijedi da je  $u_C = q/C$ .



Slika 4.1: Serijski RC krug s istosmjernim poticajem

Izolator između ploča kondenzatora smatra se kao da ima vodljivost jednaku nuli te je stoga između ploča struja jednaka nuli, no struja koja *ulazi* u kondenzator jednaka je struji koja iz njega *izlazi* što je i vidljivo na slici 4.2 — očito je da dolazi do prekida struje u kondenzatoru.

Na mreži sa slike 4.1 sklopka  $S$  uklopi u trenutku  $t = 0$  te je početni uvjet da je  $u_C(0) = 0$ , tj  $q(0) = 0$ ; KZN, koji je primjenjiv za ovu mrežu, glasi:

$$u_C + u_R - \mathcal{E} = 0 . \quad (4-2)$$

Kao odziv mreže uzme se naboj kapaciteta  $q$  pa se jednadžba (4-2) zapiše kao:

$$R\dot{q} + Cq - \mathcal{E} = 0 . \quad (4-3)$$

Rješenje ove linearne diferencijalne jednačbe prvog reda, uz uvjet da je  $q(0) = 0$ , je

$$q(t) = Q_{\max} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] , \quad t \geq 0 . \quad (4-4)$$

Gdje je  $Q_{\max} = q(\infty) = C\mathcal{E}$  naboj kapaciteta u ustaljenom stanju, a  $\tau = RC$  vremeska konstanta kruga.

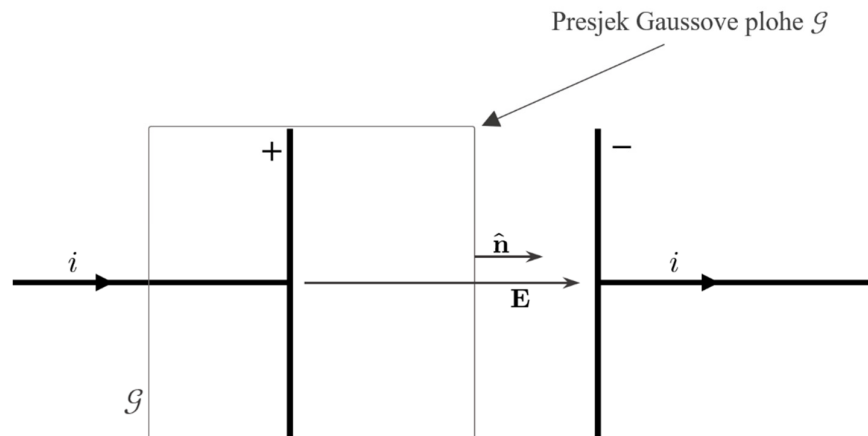
Struja u krugu lako se dobije kao prva vremeska derivacija naboja:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) . \quad (4-5)$$

Jakost električnog polja između ploča kondenzatora raste s vremenom jer se sve više naboja gomila na ploče (struja raste), ali je u svakom trenutku električno polje homogeno te je također izvan kondenzatora električno polje zanemarivo. Uz navedene pretpostavke na zatvorenu (Gaussovu) plohu  $\mathcal{G}$  sa slike 4.2 lako se da primijeniti Gaussov zakon:

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} q \quad (4-6)$$

$$\Phi_E = \iint_{\mathcal{G}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = E \cdot A_{\text{ploče}} = E \cdot \pi a^2 .$$



**Slika 4.2:** Pojašnjenje uz sustav (4-6)

Uvrštavanjem jednačbe (4-4) u sustav (4-6) dobije se da je jakost električnog polja kao funkcija vremena:

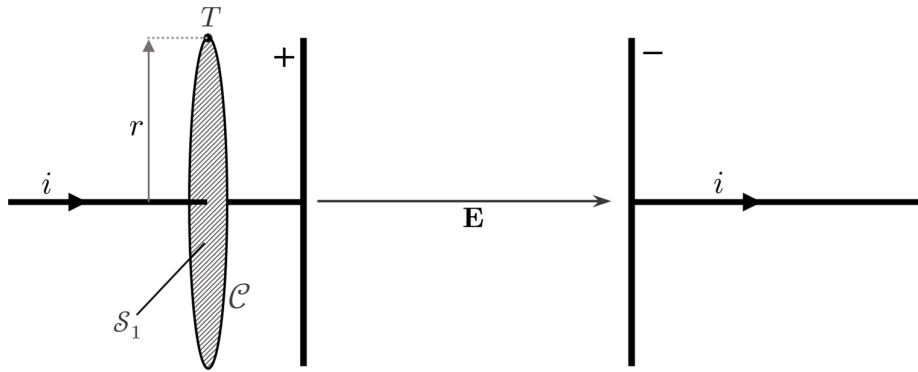
$$E(t) = \frac{C\mathcal{E}}{\epsilon_0 \cdot \pi a^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]. \quad (4-7)$$

Na slici 2.3 prikazan je smjer magnetskog polja oko vodiča kroz koji teče struja. Na slici 4.3 vidi se Ampèreova petlja  $\mathcal{C}$  koja je uzeta da bude kružnica sa središtem u spojnom vodiču. Primjenom Ampereovog zakona (2-21) na petlju  $\mathcal{C}$  koja ograničava ravnu otvorenu plohu  $\mathcal{S}_1$ , kako je prikazano na slici 4.3, dobije se magnetska indukcija u točki  $T$  na udaljenosti  $r$  od vodiča:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \mu_0 i$$

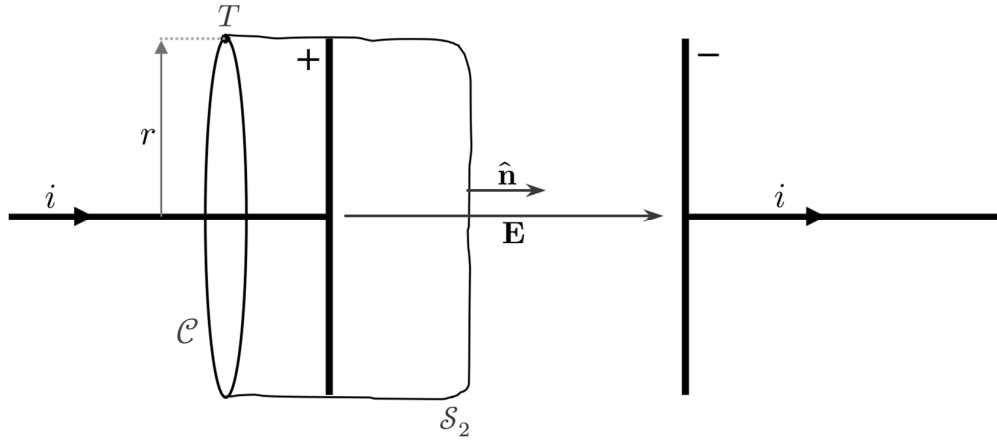
$$\mathbf{B} \parallel d\mathbf{l} \implies \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot dl \implies \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_{\mathcal{C}} dl = B \cdot 2\pi r \quad (4-8)$$

$$B(r, t) = \frac{\mu_0 \mathcal{E}}{2\pi r R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (4-9)$$



**Slika 4.3:** Ampèreova petlja  $\mathcal{C}$  kao granica otvorene (ravne) plohe  $\mathcal{S}_1$

Odabir otvorene plohe koju ograničava Ampèreova petlja  $\mathcal{C}$  je proizvoljan pa se prema tome može umjesto plohe  $\mathcal{S}_1$  odabrati na primjer i otvorena ploha  $\mathcal{S}_2$  kao na što je ilustrirano na slici 4.4. Međutim, pokušaj li se primijeniti Ampèreov zakon kada je petlja  $\mathcal{C}$  ograničena plohom  $\mathcal{S}_2$  da se izračuna magnetska indukcija  $B$  u točki  $T$ , dobije se da je  $B = 0$  (jer je ukupna struja kroz plohu  $\mathcal{S}_2$  jednaka nuli), što je u ovoj mreži točan rezultat samo u stacionarnom stanju kada je  $i = 0$ .



**Slika 4.4:** Ampèreova petlja  $\mathcal{C}$  kao granica otvorene plohe  $\mathcal{S}_2$

Ova nekonzistentnost korigirana je u proširenom Ampèreovom zakonu, Maxwell-Ampèreovom zakonu (2-27). Njega se može primijeniti i kada je ploha  $\mathcal{S}_2$  granica petlje  $\mathcal{C}$ :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \underbrace{\mu_0 \iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA}_0 + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA, \quad (4-10)$$

gdje je  $\epsilon_0(d\mathbf{E}/dt)$  vektor gustoće struje pomaka  $\mathbf{J}_D$  koji postoji unutar kondenzatora. U (4-10) integral gustoće struje čije je područje integracije ploha  $\mathcal{S}_2$  jednak je nuli jer struja je između ploča kondenzatora jednaka nuli. Duž petlje  $\mathcal{C}$  je  $\mathbf{B} \parallel d\mathbf{l}$  pa je  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot dl$  te je električni tok kroz otvorenu plohu  $\mathcal{S}_2$  ( $\iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ ) jednak električnom toku kroz zatvorenu plohu  $\mathcal{G}$  izračunatom u (4-6) pa se izraz (4-10) svede na:

$$B \oint_{\mathcal{C}} dl = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} (E \cdot \pi a^2) \quad (4-11)$$

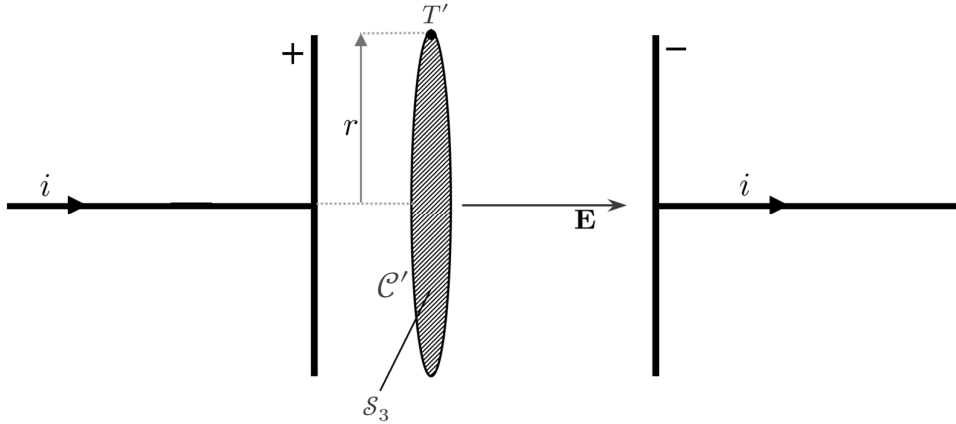
$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \pi a^2 \frac{dE}{dt}. \quad (4-12)$$

Kada se uzme prva vremenska derivacija izraza (4-7) i to se uvrsti u (4-12), dobije se isto rješenje za magnetsku indukciju  $B$  kao i u izrazu (4-9). Maxwell-Ampèreov zakon se naravno mogao primijeniti i za slučaj kada je ploha  $\mathcal{S}_1$  ili bilo koja druga otvorena ploha u pitanju te bi se dobio isti rezultat, i upravo to potvrđuje da ovaj zakon uvijek vrijedi.

Iako je struja unutar kondenzatora jednaka nuli, unutar kondenzatora odvija se prijenos energije što se može dokazati analizirajući fizikalni proces u kondenzatoru Poyntingovim vektorom.

Magnetska indukcija unutar kondenzatora u točki  $T'$  dobije se primjenom Maxwell-Ampèreovog zakona kada se odabere petlja  $\mathcal{C}'$  ograničena ravnom otvorenom plohom  $\mathcal{S}_3$ :

$$B \oint_{\mathcal{C}'} dl = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left( E \iint_{\mathcal{S}_3} dA \right) . \quad (4-13)$$



**Slika 4.5:** Ampèreova petlja  $\mathcal{C}'$  kao granica otvorene plohe  $\mathcal{S}_3$

Izraz (4-13) ima isto rješenje kao i izraz (4-8), što znači da je magnetska indukcija između ploča kondenzatora u točki  $T'$  smjerom i iznosom jednaka onoj oko vodiča u točki  $T$  (pri istoj vrijednosti parametra  $r$ ). Kako unutar kondenzatora postoje i magnetsko i električno polje te je  $\mathbf{E}(t) \perp \mathbf{B}(r, t)$ , Poyntingov vektor je u svakoj točki unutar kondenzatora različit od nule i usmjeren u kondenzator za  $0 < t < \infty$ :

$$\mathbf{S}(r, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(t) \times \mathbf{B}(r, t) \neq \mathbf{0} , \quad (4-14)$$

$$S(r, t) = \frac{C \mathcal{E}^2}{2\pi^2 \epsilon_0 a^2 R} \cdot \frac{1}{r} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \neq 0 . \quad (4-15)$$

Jednadžbama (4-14) i (4-15) dokazano je kako se, iako kroz sam kondenzator ne teče struja, odvija prijenos energije u kondenzatoru. Unutar kondenzatora u ovoj mreži postoji samo struja pomaka koja objašnjava prijenos energije, no ukoliko se kondenzator tretira crnokutijskim pristupom, pojava struje pomaka neprimjetna je gledano s njegovih priključnica te se zato pri svođenju na Kirchhoffov model ne razmatraju procesi unutar naprave. Može se iz prethodnog opažanja zaključiti da je opravdano kondenzator modelirati linearnim vremenski nepromjenjivim kapacitetom koji je element Kirchhoffove mreže za koji se smatra da nema prekida struje u njemu (iako je unutar kondenzatora struja jednaka nuli).

### 4.1.3. Ampereov zakon za mreže opisane Kirchhoffovim modelom

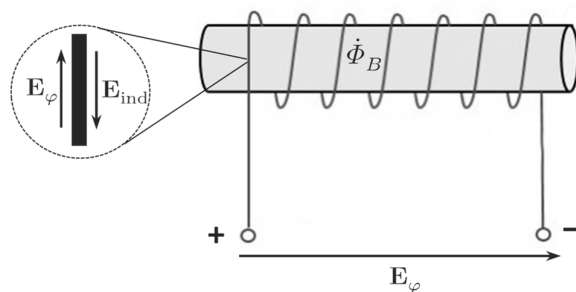
Za potrebe izračunavanja struja i napona kao odziva mreže koja zadovoljava postulate teorije mreža se ne obraća pažnja na fizikalne procese unutar kondenzatora i koriste se Kirchhoffovi zakoni. To znači da se Ampèreov zakon (2-23) na takve mreže može primjenjivati, ali pod strogim uvjetom da je Ampèreova petlja izvan same naprave te da otvorena ploha koja je granica te petlje ne prolazi kroz napravu. Pri ovako definiranim okolnostima kada se ne zaviruje u same naprave je Ampèreov zakon ekvivalentan Maxwell-Ampèreovom zakonu što znači da opća jednačba kontinuiteta (3-5) poprima specijalan oblik (3-6) iz kojeg se i izveo Kirchhoffov zakon struje u poglavlju 3.2. U tom poglavlju do jednačbe (3-6) se došlo iz uvjeta da je  $dq/dt = 0$  za zatvorenu plohu koja obuhvaća  $N$  naprava mreže, što ne bi vrijedilo da ta zatvorena ploha prolazi između ploča kondenzatora (jer u tom dijelu mreže je  $dE/dt \neq 0$ ). Sada je i na primjeru ovakve analize rada kondenzatora u nestatičnim uvjetima pokazano zašto se naglašava da se ne zaviruje unutar samih naprava pri izvodu i primjeni Kirchhoffovih zakona.

## 4.2. Zavojnica kao naprava električne mreže

### 4.2.1. Napon induktiviteta

Četvrti postulat teorije mreža govori kako magnetski tok u mreži mora biti koncentriran isključivo unutar samih naprava mreže tako da će u ovom poglavlju biti pretpostavljeno da je magnetsko polje prisutno isključivo unutar zavojnice, što je razumna pretpostavka jer je magnetska indukcija u svakoj točki prostora izvan zavojnice iznosom zanemariva u odnosu na unutar zavojnice.

Razmatrana zavojnica, koja je (zbog svoje linearne vremenski nepromjenjive  $\Phi_B$ - $i$  karakteristike) u Kirchhoffovoj mreži modelirana linearnim vremenski nepromjenjivim induktivitetom induktivnosti  $L$  za koji vrijedi da je  $L = \phi/i$ , prikazana je slikom 4.6.



Slika 4.6: Zavojnica unutar koje se odvija promjena magnetskog toka

Unutar zavojnice se mijenja magnetski tok, što je i predočeno na slici 4.6. Kao posljedica promjenjivog magnetskog toka unutar zavojnice, u namotima zavojnice se, kako nalaže Faradayev zakon, inducira nekonzervativno električno polje  $\mathbf{E}_{\text{ind}}$ . Namoti zavojnice smatraju se idealnim vodičima, što znači da je u svakoj točki namota ukupno električno polje jednako nuli ( $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ), odnosno integral  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  duž namota jednak je nuli. U namotima se također uspostavi i elektrostatsko konzervativno električno polje  $\mathbf{E}_\varphi$  [19], te iz činjenice da je  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\varphi + \mathbf{E}_{\text{ind}} = \mathbf{0}$  proizlazi da je  $\mathbf{E}_\varphi = -\mathbf{E}_{\text{ind}}$  u svakoj točki namota. Rješenje linijskog integrala polja  $\mathbf{E}_\varphi$  između priključnica zavojnice jednako je bez obzira prolazi li krivulja integracije kroz namote ili ih zaobilazi (jer se radi o konzervativnoj vektorskoj funkciji), što znači da se prema (3-10) između priključnica zavojnice pojavljuje napon  $u_L$  (vidljivo na slici 4.6):

$$u_L = \varphi_+ - \varphi_- = - \int_-^+ \mathbf{E}_\varphi \cdot d\mathbf{l} . \quad (4-16)$$

Izraz (4-16) se da pojednostaviti te se tako dobije direktna veza između napona  $u_L$  i promjene magnetskog toka:

$$u_L = - \int_{-}^{+} \mathbf{E}_{\varphi} \cdot d\mathbf{l} = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{l}_{\text{ duž namota}} = \left| \oint_C \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{l} \right| = \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (4-17)$$

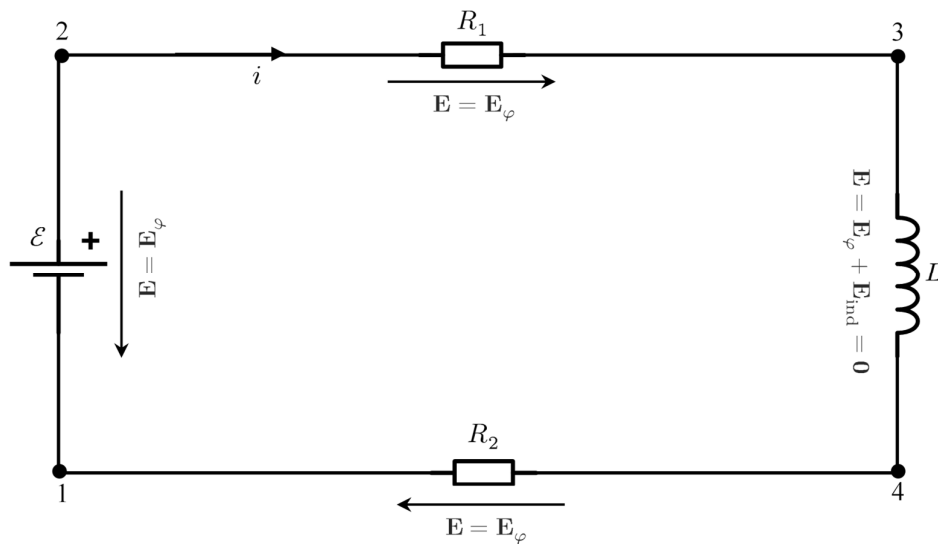
Petlja  $C$  u (4-17) je bilo koja petlja koja prolazi kroz namote zavojnice.

Prema relaciji (4-17) te činjenici da se zavojnica modelira linearnim vremenski nepromjenjivim induktivitetom, može se za induktivitet kao element Kirchhoffove mreže napisati relacija:

$$u_L = \frac{d\phi}{dt} = L \frac{di_L}{dt}. \quad (4-18)$$

#### 4.2.2. Faradayev zakon ili Kirchhoffov zakon napona

Na jednostavnom primjeru RL serijskog kruga sa slike 4.7 biti će pokazano kako se primjenom Faradayevog zakona (2-19) te Kirchhoffovog zakona napona u integralnom obliku (3-11) dobiju ekvivalentni rezultati. U analizi koja slijedi se pretpostavlja da magnetsko polje u mreži postoji samo unutar zavojnice.



Slika 4.7: Serijski RL krug s istosmjernim poticajem

Faradayev zakon može se primijeniti na bilo koju petlju u bilo kojim uvjetima. Ovdje je uzeta petlja koja prolazi kroz namote zavojnice, otpornik i naponski izvor (nazovimo ju  $C$ ):

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (4-19)$$

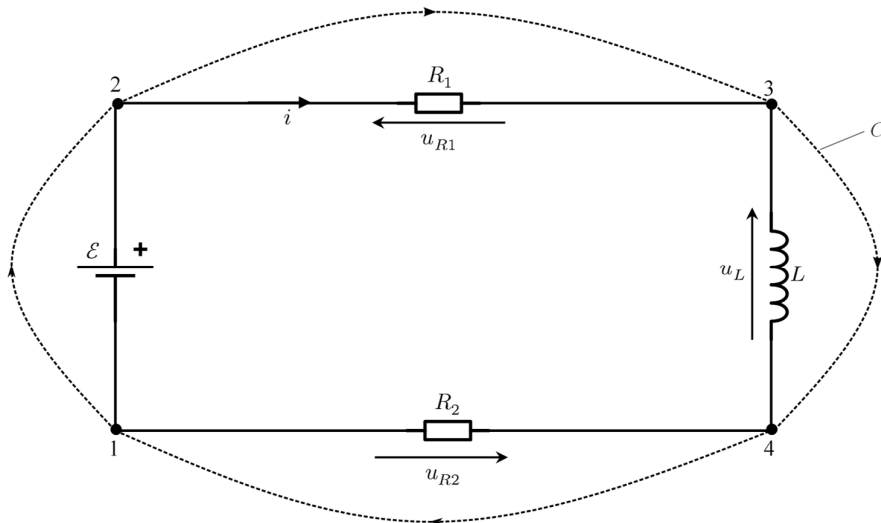


$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_{\text{duž namota}} + \int_4^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (4-20)$$

U (4-19) i (4-20) je  $\Phi_B$  ukupni magnetski tok kroz otvorenu plohu koju određuje petlja  $C$ , no kako je magnetsko polje koncentrirano samo u zavojnici, tako je ukupni tok jednak toku u zavojnici, pa je prema tome član s desne strane jednakosti tih jednačbi jednak  $L(di_L/dt) = u_L$ . U (4-20) je član  $\int_3^4 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_{\text{duž namota}}$  jednak nuli jer se namoti smatraju idealnim vodičima, a članovi  $\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ ,  $\int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  te  $\int_4^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  po definiciji su naponi između točaka 1 i 2, 2 i 3 te 4 i 1. Prema tome, (4-20) se svede na algebarski izraz:

$$-\mathcal{E} + u_{R1} + u_{R2} = -u_L. \quad (4-21)$$

Kako bi se primijenio Kirchhoffov zakon napona u integralnom obliku kao izvedenica Faradayevog zakona, petlja obilaska (nazovimo ju  $C'$ ) mora biti uzeta na način da se zaobilaze same naprave tako da kroz otvorenu plohu određenu tom petljom ne postoji promjenjivi magnetski tok (objašnjeno u poglavlju 3.3). Petlja  $C'$  označena je isprekidanim linijama na slici 4.8



**Slika 4.8:** Ilustrirana petlja  $C'$  za analizirani RL krug

Primijenimo sada jednačbu (4-19) na ovaj RL krug, ali tako da je petlja  $C'$  u pitanju (što je ubiti KZN u integralnom obliku):

$$\oint_{C'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4-22)$$

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_4^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4-23)$$

$$-\mathcal{E} + u_{R1} + u_L + u_{R2} = 0 . \quad (4-24)$$

Izraz (4-24) je, naravno, ekvivalentan izrazu (4-21). Isti rezultat dobio bi se i kada bi se naprave zamijenile elementima mreže i na Kirchhoffovu mrežu primijenio KZN iskazan algebarskom jednačbom (3-12).

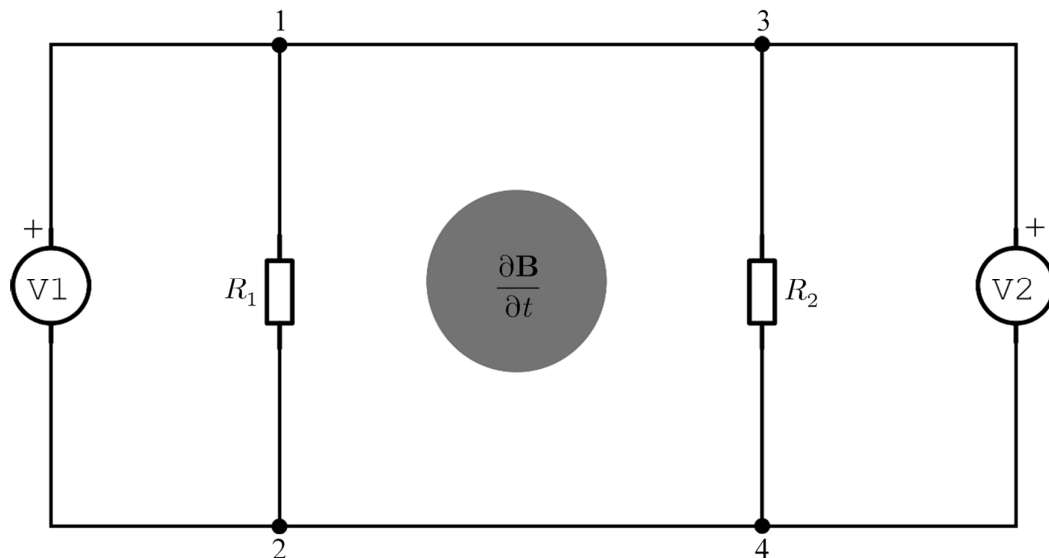
Izrazima (4-17) i (4-18) pokazano je da se između priključnica zavojnice inducira napon, iako je duž namota zavojnice integral  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  jednak nuli. Iz ovog se da zaključiti zašto je u poglavlju 3.3 za poseban slučaj Faradayevog zakona (3-11) naglašeno da se, kada mreža zadovoljava postulate teorije mreža, petlja integracije uzima tako da zaobilazi naprave te se iz toga izvede KZN (3-12), a na ovom jednostavnom primjeru RL kruga je i pokazana poveznica između ova dva zakona. Prema ovom opažanju te činjenici da je utvrđena veza između struje i napona zavojnice, opravdano je zavojnicu tretirati crnokutijskim pristupom pri svođenju stvarne mreže na Kirchhoffovu te tako zanemariti fizikalne procese unutar nje.

### 4.3. Lewinov paradoks

#### 4.3.1. Uvod u problem

Tijekom jednom od svojih predavanja na MIT-u Walter Lewin napravio je zanimljiv eksperiment u kojem je u naizgled jednostavnoj električnoj mreži došlo do, na prvi pogled, neočekivanih rezultata mjerenja [11]. Naime, problematiku vezanu za mrežu kakvu Lewin koristi u svojoj demonstraciji prvi je predstavio Robert H. Romer u svom radu [20].

Model spomenute električne mreže prikazan je na slici 4.9.



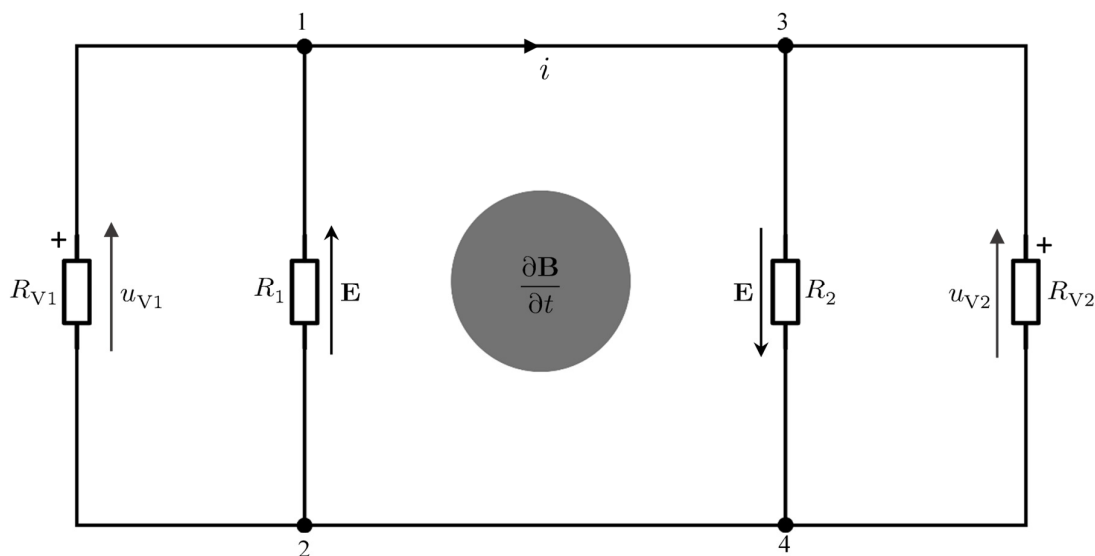
Slika 4.9: Model Lewinove električne mreže

Strujni krug sastoji se od dva otpornika otpora  $R_1$  i  $R_2$  te dva voltmetra V1 i V2. Smatra se da su spojni vodiči idealni, tj. beskonačne vodljivosti pa su čvorovi 1 i 3 te 2 i 4 isti. Okomito na ravninu strujnog kruga u središte petlje koja sadrži otpornike postavljena je zavojnica u kojoj se vremenski mijenja magnetsko polje — područje unutar petlje u kojem se mijenja magnetsko polje osjenčano je na slici 4.9.

U trenutku mjerenja, voltmetar V1 pokazuje drukčiju vrijednost nego voltmetar V2, što je možda iznenađujuće, pa čak i paradoksalno, jer voltmetri V1 i V2 su identični i spojeni su na iste dvije točke, 1 i 2, odnosno 3 i 4.

### 4.3.2. Pregled originalne mreže i pokušaj analize Kirchhoffovim zakonima

U ovom problemu utjecaj unutarnjeg otpora voltmetra na mjerenja nije od primarnog interesa pa će se radi jednostavnosti u analizi ove mreže voltmetre smatrati idealnima, odnosno modelirat će ih se kao da imaju unutarnje otpornike beskonačnog otpora ( $R_{V1} = R_{V2} = \infty$ ) tako da je struja kroz njih jednaka nuli.



Slika 4.10: Promatrana mreža s ucrtanom strujom te referentnim smjerovima napona voltmetara

Prema Faradayevom zakonu (2-19) u petlji s otpornicima doći će do induciranog električnog polja što će dovesti do inducirane elektromotorne sile u petlji, a kao posljedica toga će proteći struja. Neka je inducirana struja ( $i$ ) u petlji s otpornicima otpora  $R_1$  i  $R_2$  u trenutku mjerenja smjera kao na slici 4.10. Bitno je i napomenuti na početku da je smjer induciranog električnog polja, koje je direktni uzrok pojave struje, u točki vodiča istog smjera kao i struja [19].

Sukladno s Ohmovim zakonom je onda napon na otporniku otpora  $R_1$  jednak  $R_1 i$ , a na na otporniku otpora  $R_2$   $R_2 i$ . Izrazi za „pad napona“ („pad napona“ u ovom kontekstu podrazumijeva napon na napravi mreže, otporniku u ovom slučaju, duž promatranog segmenta) između točaka 1 i 2 (3 i 4), ovisno o tom integrira li se duž krivulje koja spaja 2 i 1 u smjeru kazaljke sata (tada krivulja sadržava  $R_1$ ) ili suprotno od smjera kazaljke sata (tada krivulja sadržava  $R_2$ ), su:

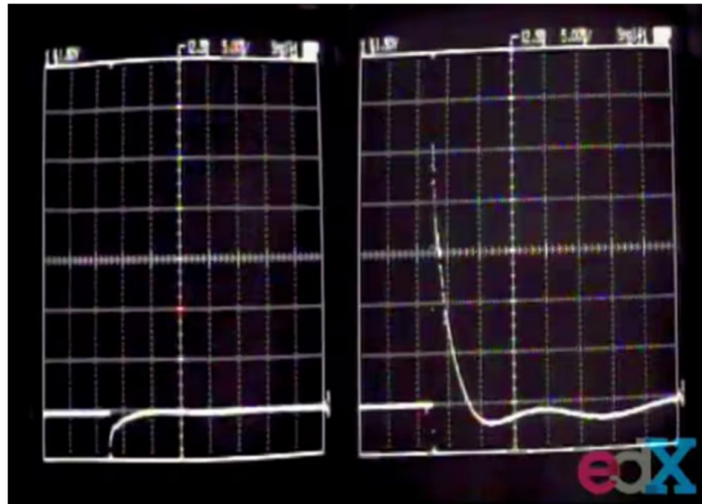
$$\text{kroz } R_1: \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -R_1 i \quad (4-25)$$

$$\text{kroz } R_2: \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = R_2 i . \quad (4-26)$$

Iz (4-25) i (4-26) jasno je da integral  $\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  nije jednoznačno određen, već ovisi o krivulji kretanja između točaka 1 i 2, što znači da su očitavanja voltmetara V1 i V2 različita:

$$u_{V1} = -R_1 i \quad , \quad u_{V2} = R_2 i . \quad (4-27)$$

Upravo ovakve rezultate je dobio Lewin u svojoj demonstraciji (slika 4.11), a točnost rezultata mjerenja u svojoj raspravi potvrdio je i M. Sadaghdar [21].

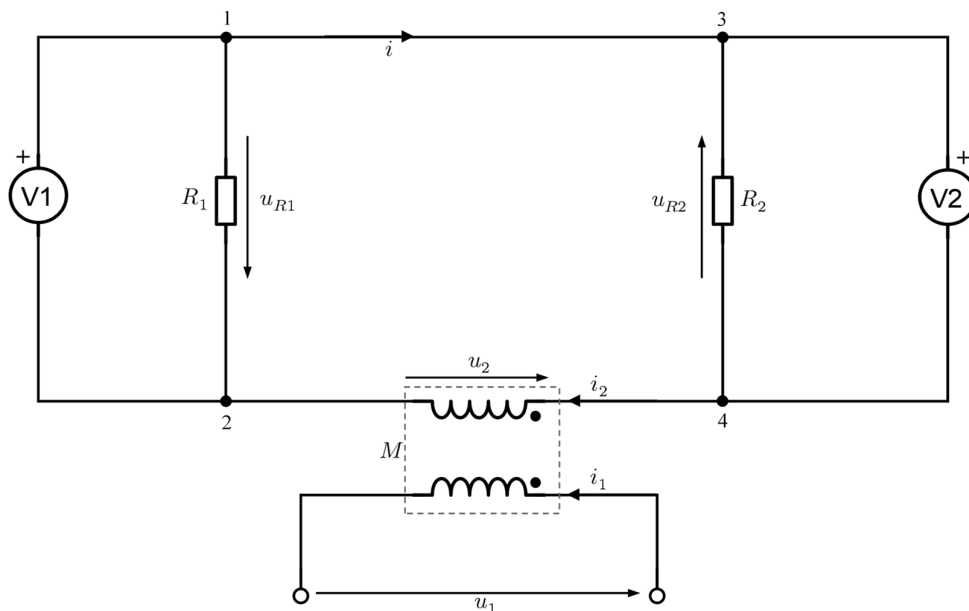


**Slika 4.11:** Lewinovi rezultati mjerenja (uz to da je u njegovoj konfiguraciji  $R_2 > R_1$ ) [11]

U mreži koja se opisuje Kirchhoffovim modelom integral  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  između dvije točke ima jedinstveno rješenje te je zato za očekivati, kada se razmišlja u okviru Kirchhoffovog modela, da očitavanja voltmetara moraju biti identična s obzirom na to da su oba spojena na iste dvije točke, no iz prethodne dvije relacije vidljivo je da će KZN za petlju 1-3-4-2-1 biti ispunjen (odnosno da će  $u_{V1}$  biti jednako  $u_{V2}$ ) samo u trivijalnom statičnom slučaju kada je  $i = 0$ . Ovakva analiza mreže sa slike 4.9 KZN-om daje naoko paradoksalne rezultate koje je teško interpretirati na razini Kirchhoffovog modela. Mora se u obzir uzeti to da u ovoj mreži nije zadovoljen četvrti postulat teorije mreža — u analiziranoj mreži postoji magnetska veza između zavojnice te cijele petlje s otpornicima otpora  $R_1$  i  $R_2$ .

### 4.3.3. Pojednostavljena mreža. Analiza Kirchhoffovim zakonima

Da bi se rezultati mjerenja objasnili što je bolje moguće koristeći KZN, mreža se može pojednostaviti tako da se zavojnica modelira primarom, a cijela petlja s otpornicima sekundarom transformatora kako Mehdi Sadaghdar [21, 22] i Kirk T. McDonald [18] predlažu u svojoj analizi ovog problema. Time je magnetski tok ograničen samo na taj transformator čime je zapravo korigirana prekršenost četvrtog postulata teorije mreža te se u ovakvom pojednostavljenju stvarne fizikalne situacije može primijeniti KZN.



**Slika 4.12:** Pojednostavljen model Lewinove mreže — magnetska veza petlje i zavojnice modelirana je transformatorom

Rezultat modeliranja petlje s otpornicima sekundarom transformatora je to da će iznos napona na sekundaru odgovarati iznosu inducirane elektromotorne sile u petlji. Ovdje se, naravno, radi o linearnom dvonamotnom transformatoru za koji vrijede sljedeće konstitutivne relacije [15]:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= L_1 i_1 + M i_2, \\ \phi_2 &= L_2 i_2 + M i_1.\end{aligned}\tag{4-28}$$

Gdje je  $\phi_1$  tok primara, a  $\phi_2$  tok sekundara.

Kako je zbog geometrije mreže induktivnost sekundara (petlje)  $L_2$  zanemariva u odnosu na međuinduktivnost  $M$  između primara i sekundara, tako je napon sekundara:

$$u_2 = \frac{d\phi_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt}.\tag{4-29}$$

U ovoj analizi je  $u_2 = -e$  jer se referentni smjer napona sekundara uzima takav da je suprotnog smjera od smjera struje, a u potpoglavlju 4.3.2 naglašeno je da je smjer induciranog električnog polja u spojnim vodičima istog smjera kao i struja.

Sada primijenimo KZN (3-12) na petlju 1-3-4-2-1 sa slike 4.12:

$$u_{R1} + u_2 + u_{R2} = 0 \implies R_1 i + R_2 i = -u_2 = e . \quad (4-30)$$

Struja  $i$  se iz zadnjeg izraza može lako izračunati:

$$i = \frac{e}{R_1 + R_2} . \quad (4-31)$$

Očitani naponi na voltmetrima su

$$u_{V1} = -u_{R1} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} e , \quad u_{V2} = u_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e \quad (4-32)$$

te je iz toga uočljivo da je  $|u_{V1}| + |u_{V2}| = |e|$ , što se moglo i deducirati iz izraza (4-30) ili raspisom KZN-a za petlju s voltmetrima koji glasi:

$$u_{V1} - u_{V2} - u_2 = 0 . \quad (4-33)$$

Uz ovako pojednostavljivanje fizikalne situacije modeliranjem cijele petlje sekundarom transformatora, različite vrijednosti napona na voltmetrima mogu se razumjeti jer ti rezultati zadovoljavaju KZN, što se vidi iz (4-33) i (4-30).

U ovakvoj analizi problema vezanog za Lewinovu mrežu promijenjena je stvarna fizikalna slika, na što nije ukazano od strane autora koji su se bavili ovom mrežom u [18] i [21, 22], te je takvo pojednostavljenje mreže korisno samo pri tumačenju napona kojeg voltmetri  $V1$  i  $V2$  pokazuju. Modeliranjem cijele petlje sekundarom transformatora nekonzervativno električno polje  $\mathbf{E}_{\text{ind}}$  koje je posljedica promjene magnetskog toka kroz petlju s otpornicima prostorno je ograničeno samo na sekundar transformatora tako da se ukupna elektromotorna sila svodi na napon sekundara — razmještaj komponenti u mreži koji je za cijeli problem vrlo važan, u ovoj analizi bio je zanemaren.

#### 4.3.4. Analiza mreže Faradayevim zakonom

Maxwellove jednadžbe pružaju najpotpuniji opis svih pojava u elektrodinamici te je stoga za potpuno razumijevanje svih fizikalnih procesa u ovoj mreži jedini ispravan i korektan način analize

ovog problema primjena Maxwellovih jednadžbi. Kako je već u prošlom potpoglavlju bilo spomenuto, za analiziranu mrežu (slika 4.9) nije zadovoljen četvrti postulat teorije mreža što znači da se primjenom KZN-a ne mogu dobiti točni rezultate za sve električne procese u mreži. Stoga će se, s ciljem potpunog razumijevanja svih fizikalnih procesa, preći na složeniji Maxwellov model te se pomoću Faradayevog zakona (2-19) analizirati ovaj već poznati problem.

Faradayev zakon za petlju s voltmetrom  $V_1$  i otpornikom otpora  $R_1$  te za petlju s voltmetrom  $V_2$  i otpornikom otpora  $R_2$  na slici 4.10 je:

$$\oint_{1-2-1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \left( \frac{d\Phi_B}{dt} \right)_{1-2-1} \quad (4-34)$$

$$\oint_{4-3-4} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \left( \frac{d\Phi_B}{dt} \right)_{4-3-4} \quad (4-35)$$

Kroz bilo koju otvorenu plohu  $S$  čija je granica petlja 1-2-1 ili petlja 4-3-4 nema promjene magnetskog toka jer je dio prostora u kojem se mijenja magnetsko polje u središtu petlje s  $R_1$  i  $R_2$  (prikazano slikama 4.9 i 4.10). Zbog toga je desna strana jednakosti u jednadžbama (4-34) i (4-35) jednaka nuli.

Dimenzije otpornika, prvenstveno njegova duljina, zanemarive su u odnosu na ostatak mreže; može se reći da je  $\mathbf{E} \approx \mathbf{E}_\varphi$  unutar otpornika, tj. može se u samom otporniku zanemariti efekt induciranja elektromotorne sile jer je kroz njega  $\int \mathbf{E}_\varphi \cdot d\mathbf{l} \gg \int \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{l}$  pa je nadalje:

$$\oint_{1-2-1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_{\text{kroz } R_1} + \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_{\text{kroz } V_1} = R_1 i + u_{V_1} \quad (4-36)$$

$$\oint_{4-3-4} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 = \int_4^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_{\text{kroz } R_2} + \int_3^4 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_{\text{kroz } V_2} = -R_2 i + u_{V_2} \quad (4-37)$$

Iz (4-36) i (4-37) je uočljivo kako se može dobiti već poznati rezultat pokazivanja voltmetara.

Dio promjenjivog magnetskog toka zavojnice okomite na petlju 1-3-4-2-1 s  $R_1$  i  $R_2$  prolazi kroz plohu čija je granica ta petlja pa je Faradayev zakon onda:

$$\oint_{1-3-4-2-1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \left( \frac{d\Phi_B}{dt} \right)_{1-3-4-2-1} \quad (4-38)$$

Član s desne strane jednakosti u jednadžbi (4-38) je po definiciji inducirana elektromotorna sila u petlji ( $\epsilon$ ), a rješenje integrala s lijeve strane je:  $R_1 i + R_2 i$ . Imajući ovo na umu, jednadžba (4-38) prevede se u sljedeći algebarski izraz:



$$R_1 i + R_2 i = e . \quad (4-39)$$

Usporede li se izrazi (4-39) i (4-30), naizgled su oni identični, no način na koji se došlo do njih nije isti — u ovom potpoglavlju na električnu mrežu je bez pojednostavljenja i izmjena primijenjen Faradayev zakon. U stvarnosti polje  $\mathbf{E}_{\text{ind}}$  postoji u svakoj točki spojnih vodiča petlje koja je granica plohe kroz koju se mijenja magnetski tok te posljedično tome na svakom segmentu spojnih vodiča te petlje postoji *dio* inducirane elektromotorne sile. Stoga se za fizikalno najtočnije tumačenje mreže kakva jest, po Maxwellovom modelu, ukupna inducirana elektromotorna sila  $e$  ne može svesti na napon nekog elementa ili napon između dvije točke kao što je bilo napravljeno u potpoglavlju 4.3.3.

#### 4.3.5. O skalarnom potencijalu, naponu i pokazivanju voltmetra u dinamičkim situacijama

Sam napon u dinamičkim situacijama kao što je analizirana mreža nije dobro definiran, što još preostaje objasniti, zbog nekonzervativnog električnog polja koje može postojati svugdje u prostoru mreže.

Na slici 4.13 izdvojena je samo petlja kroz koju *prolazi* promjenjivi magnetski tok. Spojni vodiči smatraju se idealnima ( $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  unutar vodiča), a kako znamo da unutar vodiča postoji inducirano električno polje  $\mathbf{E}_{\text{ind}}$  koje je uzrok pojave struje u petlji, tako će se u svakoj točki vodiča uspostaviti i elektrostatsko konzervativno polje  $\mathbf{E}_{\varphi}$  koje *neutralizira* ono inducirano.

Neka je  $\ell$  ukupna duljina spojnih vodiča u petlji, a  $\ell_{13}$  duljina spojnog vodiča između točaka 1 i 3; na segmentu 1-3 će se inducirati elektromotorna sila za koju se može na temelju geometrijskih razmatranja kvadratne mreže formulirati izraz

$$\int_1^3 \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{l} = e \frac{\ell_{13}}{\ell} . \quad (4-40)$$

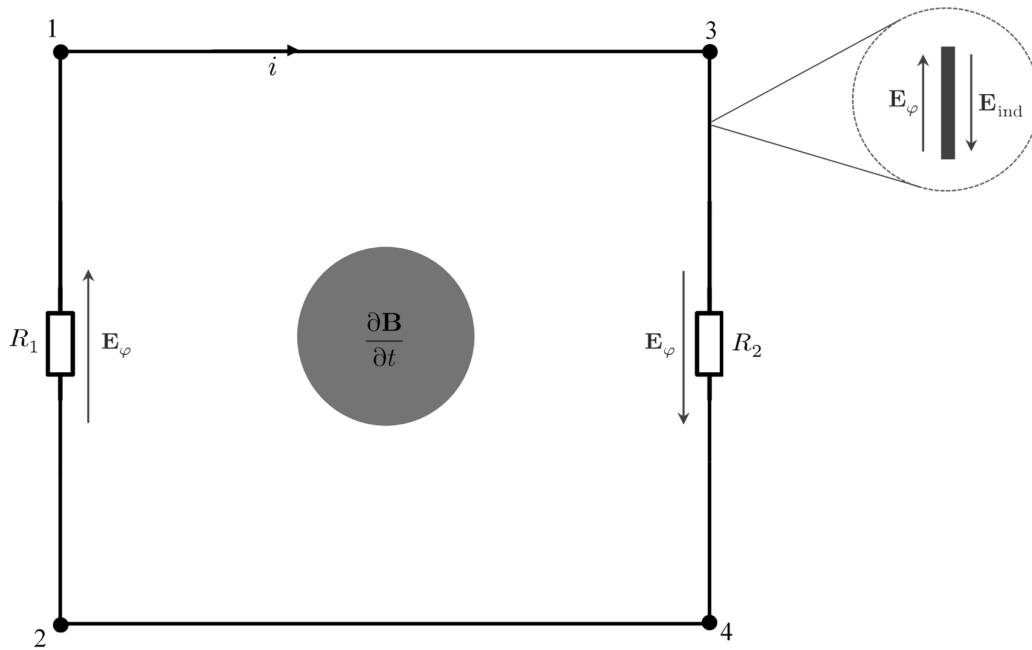
Kako je u spojnem vodiču  $\mathbf{E}_{\varphi} = -\mathbf{E}_{\text{ind}}$ , tako shodno s izrazom (4-40) postoji razlika skalarnog potencijala između točaka 1 i 3:

$$\varphi_3 - \varphi_1 = - \int_1^3 \mathbf{E}_{\varphi} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^3 \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{l} = e \frac{\ell_{13}}{\ell} . \quad (4-41)$$

Općenito se sada za petlju na slici 4.13 može napisati izraz za iznos razlike skalarnog potencijala između dvije, od naznačene četiri, točke mreže:

$$\Delta\varphi_{ab} = \left| e \frac{\ell_{ab}}{\ell} + \text{konst.} \right| , \quad (4-42)$$

gdje je  $\ell_{ab}$  duljina spojnih vodiča promatranog segmenta mreže  $ab$ . Prvi član s desne strane jednakosti (4-42) je doprinos EMS-a na dijelu mreže na kojem se promatra razlika potencijala, a drugi član, konstanta, dodan je kako bi se uzeo u obzir i napon na otporniku ukoliko se on nalazi duž segmenta  $ab$ .

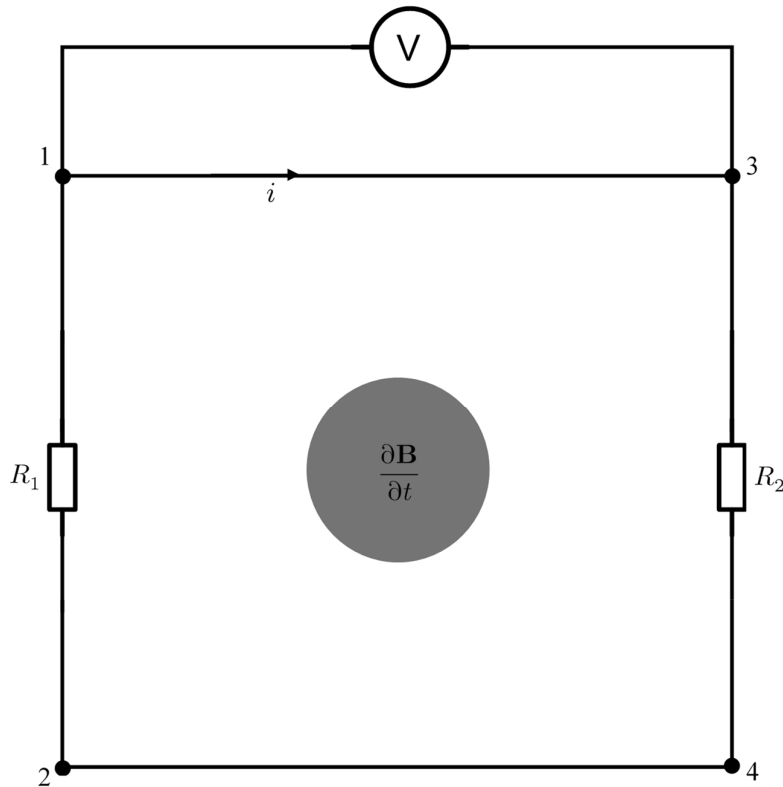


**Slika 4.13:** Petlja analizirane mreže kroz čiju se plohu mijenja magnetski tok uz istaknuta električna polja u spojnim vodičima

Prema (4-42) se sada može definirati razlika skalarnog potencijala između točaka 3 i 4 te 1 i 2 (točke između kojih se mjerio napon u Lewinovom pokusu) imajući na umu smjer električnog polja duž krivulje kretanja:

$$\varphi_3 - \varphi_4 = -e \frac{\ell_{34}}{\ell} + R_2 i \quad , \quad \varphi_1 - \varphi_2 = e \frac{\ell_{12}}{\ell} - R_1 i \quad (4-43)$$

Sada će još biti analiziran zanimljiv slučaj kada je voltmetar spojen na točke 1 i 3 tako da s vodičem na dijelu mreže 1-3 ne čini petlju kroz koju se mijenja magnetski tok (prikazano slikom 4.14).



**Slika 4.14:** Voltmetar spojen na točke 1 i 3 petlje kroz čiju se plohu mijenja magnetski tok

Da se dobije napon voltmetra  $u_V$ , primijeni se Faradayev zakon na petlju 1-3-1 s voltmetrom:

$$\oint_{1-3-1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \left( \frac{d\Phi_B}{dt} \right)_{1-3-1} . \quad (4-44)$$

Kroz plohu petlje 1-3-1 nema promjene magnetskog toka — desna strana gornje jednakosti je nula pa je nadalje:

$$\underbrace{\int_1^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}_0 + \int_3^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_{\text{kroz V}} = 0 \implies \int_3^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_{\text{kroz V}} = 0 \implies u_V = 0 . \quad (4-45)$$

Činjenica da je u ovom slučaju napon voltmetra jednak nuli (4-45) iako između priključnih točaka voltmetra postoji razlika skalarnog potencijala dovodi do zaključka da općenito u izmjeničnim mrežama očitavanje voltmetra nije proporcionalno s razlikom skalarnog potencijala. Iz istog razloga su dobiveni naponi voltmetara  $u_{V1}$  i  $u_{V2}$  u prošlom potpoglavlju različiti. Zbog tvrdnje da se razlika skalarnog potencijala u mrežama za koje nisu ispunjeni postulati teorije mreža ne može poistovjetiti s naponom između dvije točke ili očitanjem voltmetara dolazi se do zaključka da se u takvim mrežama analizu ne može vršiti tako da se pojave opisuju naponima i strujama

elemenata, već je potrebno razmišljati u kontekstu električnog i magnetskog polja te njihovog efekta na pojave u mreži.

Za analizu onih mreža za koje jesu zadovoljeni postulati teorije mreža mogu se koristiti Kirchhoffovi zakoni za analizu i pritom dobiti točni rezultati. U takvim mrežama je očitavanje voltmetra između dvije točke jednako razlici skalarnog potencijala između te dvije točke što je relacijom (3-10) i definirano kao napon grane koja je ograničena tim dvjema točkama.

## 5. MAXWELLOV MODEL U PRAKSI

Kada su zadovoljena četiri postulata teorije mreža, Kirchhoffove zakone je trivijalno primijeniti, stoga primjena Kirchhoffovog modela na mreže u ovom radu nije obrađivana. U ovom poglavlju će na dva primjera iz prakse biti pokazano kako se za analizu fizikalnih procesa, zbog valne prirode elektromagnetskih pojava, mora razmišljati u kontekstu Maxwellovog modela.

### 5.1. Maxwellove jednačbe u vakuumu, valna priroda elektromagnetskog polja

U vakuumu vrijedi da je  $\rho = 0$  te da je  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ , četiri Maxwellove jednačbe su u tim uvjetima:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} .\end{aligned}\tag{5-1}$$

Primjenom rotacije na treću i četvrtu jednačbu sustava (5-1) dobiju se valne jednačbe za vektore  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  [23]:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} ,\tag{5-2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} .\tag{5-3}$$

Iz valnih jednačbi (5-2) i (5-3) slijedi da električno i magnetsko polje zajedno karakteriziraju elektromagnetski val koji kroz prostor propagira brzinom iznosa  $1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  što odgovara iznosu brzine svjetlosti  $c$ . Jedan primjer rješenja koje zadovoljava jednačbe (5-2) i (5-3) su jednačbe sinusnih valova koji propagiraju u  $z$ -smjeru:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 \sin(kz - \omega t) ,\tag{5-4}$$

$$\mathbf{B}(z, t) = \mathbf{B}_0 \sin(kz - \omega t) ;\tag{5-5}$$

gdje je  $\omega$  kružna frekvencija vala, a  $k$  je parametar, takozvani valni broj, definiran kao omjer kružne frekvencije i brzine vala.

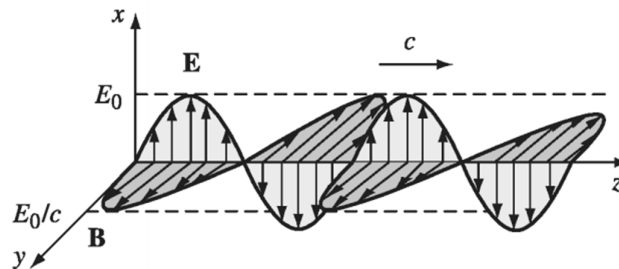
Kako bi sve četiri Maxwellove jednačbe u sustavu (5-1) bile zadovoljene, mora vrijediti [23]:

- da su vektori  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  međusobno okomiti;
- da je  $B_0 = E_0/c$ ;
- da su vektori  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  okomiti na smjer propagacije elektromagnetskog vala;
- da je vektor  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  smjera propagacije elektromagnetskog vala.

Uz ove uvjete se jednadžbe (5-4) i (5-5) mogu zapisati kao:

$$\mathbf{E}(z, t) = \hat{\mathbf{x}}E_0 \sin(kz - \omega t) , \quad (5-6)$$

$$\mathbf{B}(z, t) = \hat{\mathbf{y}}\frac{E_0}{c} \sin(kz - \omega t) . \quad (5-7)$$



Slika 5.1: Elektromagnetski val u vakuumu [3]

## 5.2. Prijenosna mreža u elektrotehnici

### 5.2.1. Prijenosna mreža — opća razmatranja

Općenito se prijenosna mreža ili sustav sastoji od prijenosnog voda koji povezuje izvor i trošilo. Prijenosni vod je dvoprilazna mreža koja je dizajnirana s ulogom da *vodi* elektromagnetske valove između izvora i trošila, odnosno da putem elektromagnetskih valova prenosi energiju ili informacije [24]. Prijenosna mreža ilustrirana je slikom 5.2 — takvu mrežu karakteriziraju velika udaljenost između izvora i trošila u odnosu na valnu duljinu prisutnih elektromagnetskih valova. Zbog toga se u tim mrežama ne može pretpostaviti da se elektromagnetske pojave šire trenutno (duljina mreže je reda barem jedne valne duljine elektromagnetskog vala [25]), što utječe na strujne i naponske prilike u mreži.



**Slika 5.2:** Prijenosni vod kao dvoprilazna mreža koja povezuje izvor i trošilo

U elektroenergetskoj mreži, koja je primjer prijenosnog sustava iz energetike, ne može se zbog duljine prijenosnog voda zanemariti utjecaj električnog i magnetskog polja oko vodiča na električne prilike u mreži. U realnom vodu postoje i gubici energije: Jouleovi gubici u vodičima te gubici u izolacijskom materijalu. Struje i naponi u ovakvoj situaciji nisu dobro definirani kao u Kirchhoffovim mrežama — ovdje struja i napon ovise i o prostornim koordinatama. Za opis ovih mreža u elektroenergetskom sustavu, a i svih ostalih prijenosnih mreža, uvode se takozvani distribuirani parametri prijenosnog voda [24]:

- $R'$  — otpornost po jedinici duljine prijenosnog voda,
- $L'$  — induktivnost po jedinici duljine prijenosnog voda,
- $G'$  — vodljivost po jedinici duljine prijenosnog voda,
- $C'$  — kapacitivnost po jedinici duljine prijenosnog voda.

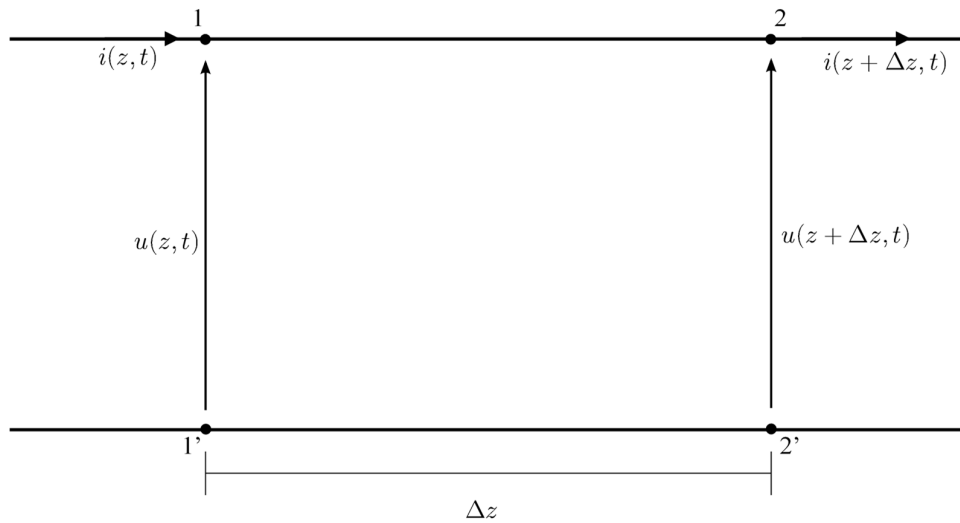
### 5.2.2. Telegrafske jednadžbe

Prijenosni vod uobičajeno je prikazivati kao dva paralelna vodiča odvojena izolacijskim materijalom kao što je prikazano na slici 5.3.

Propagacija elektromagnetskog vala za prijenosni vod prikazan slikom je u  $z$ -smjeru tako da će biti razmatran segment prijenosnog voda *male* duljine  $\Delta z$  (slika 5.4) kako bi se izvele valne jednadžbe koje opisuju struju i napon u prijenosnom vodu kao funkcije vremena  $t$  i prostorne koordinate  $z$ .



**Slika 5.3:** Prijenosni vod u uobičajenom prikazu kao dva paralelna vodiča (podebljane linije na slici) duljine  $d$



**Slika 5.4:** Dio prienosnog voda duljine  $\Delta z$

Na petlju 1'-1-2-2'-1', označenu isprekidanom linijom na slici 5.5, se primjeni Faradayev zakon i dobije se:

$$\oint_{1'-1-2-2'-1'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \left( \frac{d\Phi_B}{dt} \right)_{1'-1-2-2'-1'} \quad (5-8)$$

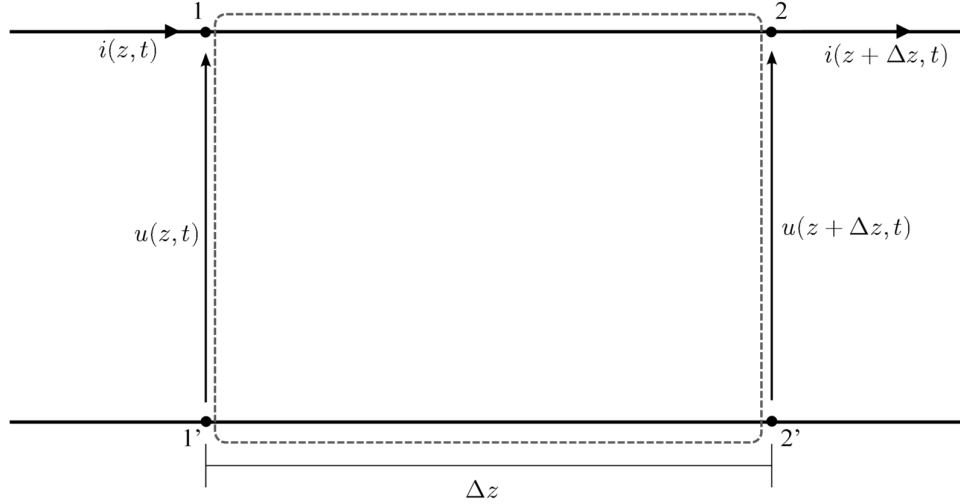
$$-u(z, t) + (R' \Delta z) \cdot i(z, t) + u(z + \Delta z, t) = -(L' \Delta z) \cdot \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} . \quad (5-9)$$

$L' \Delta z$  predstavlja induktivnost dijela voda duljine  $\Delta z$ , pa se prema tome promjena magnetskog toka  $d\Phi_B/dt$  u tom dijelu voda može zapisati kao  $(L' \Delta z) \cdot (\partial i(z, t)/\partial t)$ . Zbog otpornosti vodiča voda  $R' \Delta z$  na ovom dijelu voda u jednadžbi (5-9) je i član  $(R' \Delta z) \cdot i(z, t)$  koji ukazuje da u mreži



duž vodiča postoje (Jouleovi) gubici. Jednadžba (5-9) podijeli se s  $\Delta z$  te se razmatra granični slučaj kada  $\Delta z$  teži u nulu pa se dobije:

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = -L' \frac{\partial i(z, t)}{\partial z} - R' i(z, t) \quad (5-10)$$



**Slika 5.5:** Objašnjenje primjene jednadžbe (5-8) — prikazana je petlja na koju se primjenjuje Faradajev zakon

Jednadžba kontinuiteta (3-5) koja je izvedenica Maxwell-Ampèreovog zakona prevedena u integralni oblik glasi:

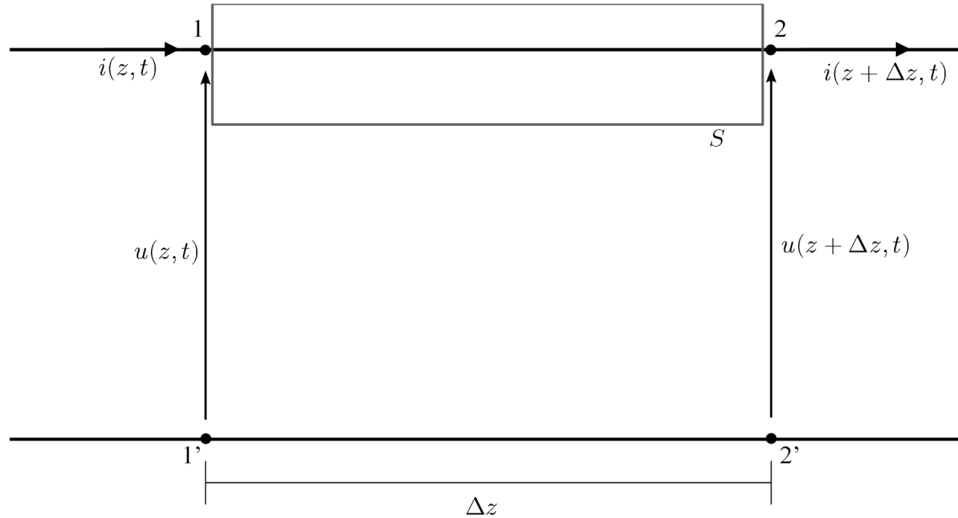
$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = -\frac{dq}{dt} . \quad (5-11)$$

Primjenom jednadžbe (5-11) na zatvorenu plohu  $S$  čiji je presjek prikazan na slici 5.6 dobije se:

$$-i(z, t) + i(z + \Delta z, t) + (G' \Delta z) \cdot u(z, t) = -(C' \Delta z) \cdot \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} . \quad (5-12)$$

$C' \Delta z$  predstavlja kapacitivnost dijela voda duljine  $\Delta z$ , pa se prema tome promjena naboja  $dq/dt$  na tom dijelu voda mogla zapisati kao  $(C' \Delta z) \cdot (\partial u(z, t)/\partial t)$ . Kako je otpornost materijala između dva vodiča koji čine prijenosni vod ipak ograničenog iznosa, član  $(G' \Delta z) \cdot u(z, t)$  je dodan u jednadžbi (5-12) — on ukazuje na to da, osim gubitaka zbog otpornosti vodiča, postoje i gubici u izolacijskom materijalu. Jednadžba (5-12) podijeli se s  $\Delta z$  te se razmatra granični slučaj kada  $\Delta z$  teži u nulu:

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = -C' \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} - G' u(z, t) . \quad (5-13)$$



**Slika 5.6:** Objašnjenje primjene jednačbe (5-11) — prikazan je presjek zatvorene plohe  $S$

(5-10) i (5-13) nazivaju se telegrafске jednačbe, manipulacijom tih jednačbi dobiju se takozvane opće valne jednačbe struje i napona prijenosnog voda [25]:

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = L' C' \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} + (L' G' + R' C') \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} + R' G' u(z, t) \quad (5-14)$$

$$\frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z^2} = L' C' \frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial t^2} + (L' G' + R' C') \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} + R' G' i(z, t) . \quad (5-15)$$

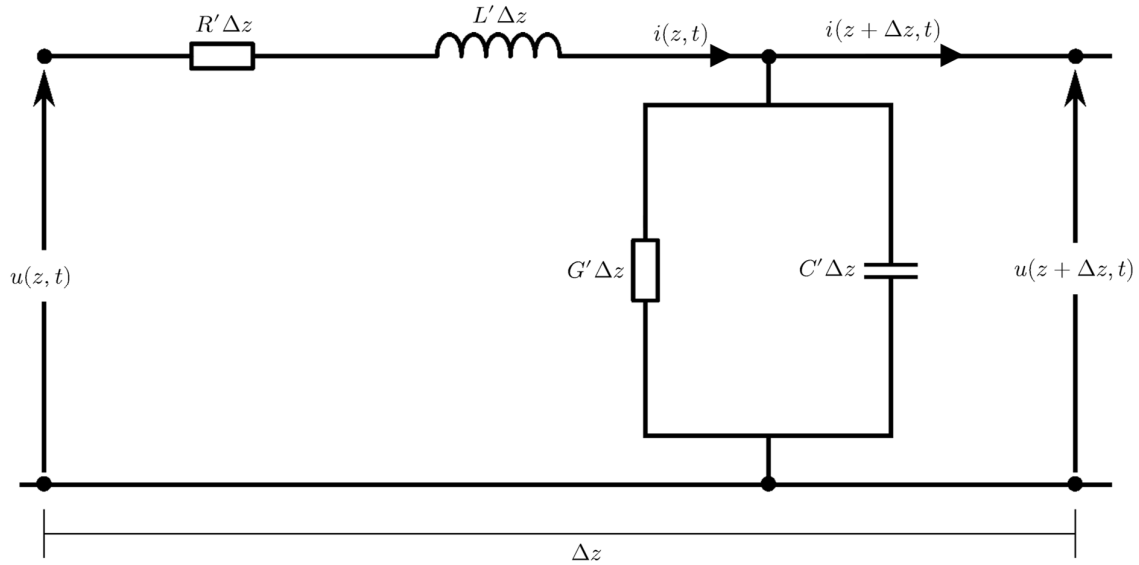
### 5.2.3. Prijenosni vod i Kirchhoffovi zakoni

Prijenosna mreža ne zadovoljava postulate teorije mreža te se stoga na mrežu sa slike 5.3 ne može primijeniti samo jedna jednačba KZN-a za analizu, iako se možda tako na prvu čini najjednostavnije; već je analiza bila vršena u kontekstu Maxwellovog modela. Međutim, ako se promatra *mali* segment prijenosnog voda  $\Delta z$  kao u prošlom potpoglavlju, na temelju telegrafskih jednačbi (5-10) i (5-13) se može modelirati Kirchhoffova mreža, tj. mreža s koncentriranim elementima, tako da raspisom KZ-ova za tu mrežu budu zadovoljene spomenute jednačbe. Elementi te mreže bi bili:

- Otpor otpornosti  $R' \Delta z$ ,
- Induktivitet induktivnosti  $L' \Delta z$ ,

- „Odvod“ vodljivost  $G' \Delta z$ ,
- Kapacitet kapacitivnosti  $C' \Delta z$ .

Takva ekvivalentna električna mreža prikazana je na slici 5.7.



**Slika 5.7:** Mreža s koncentriranim elementima kojom je predstavljen dio voda duljine  $\Delta z$

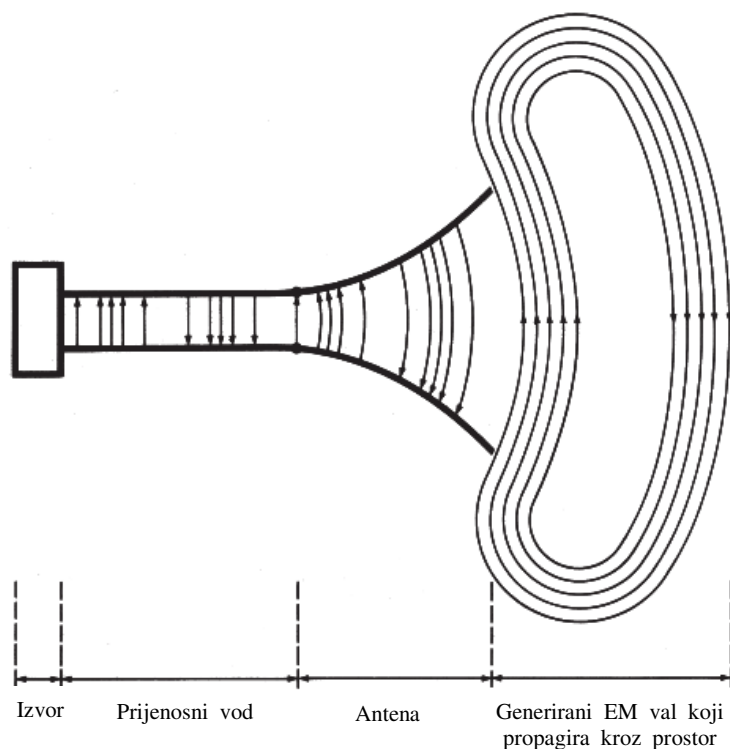
Može se zaključiti da se u graničnom slučaju kada  $\Delta z$  teži u nulu cijeli prijenosni vod može predstaviti kao paralelni spoj beskonačno mnogo mreža sa slike.

Konačni zaključak ovdje je da iako se na mrežu sa slike 5.7 mogu primijeniti Kirchhoffovi zakoni, treba uzeti u obzir da se ona samo radi jednostavnosti modelira na temelju telegrafskih jednažbi.

### 5.3. Antena — princip rada

Antena je danas neizostavni uređaj komunikacijskih sustava koji može raditi kao odašiljač ili kao primatelj. Kako je teorija antena opsežno područje i nije primarna tematika rada, ovdje će biti opisana fizikalna osnova rada žičane dipolne antene u kontekstu ovog rada, a to je koncept elektromagnetskog zračenja.

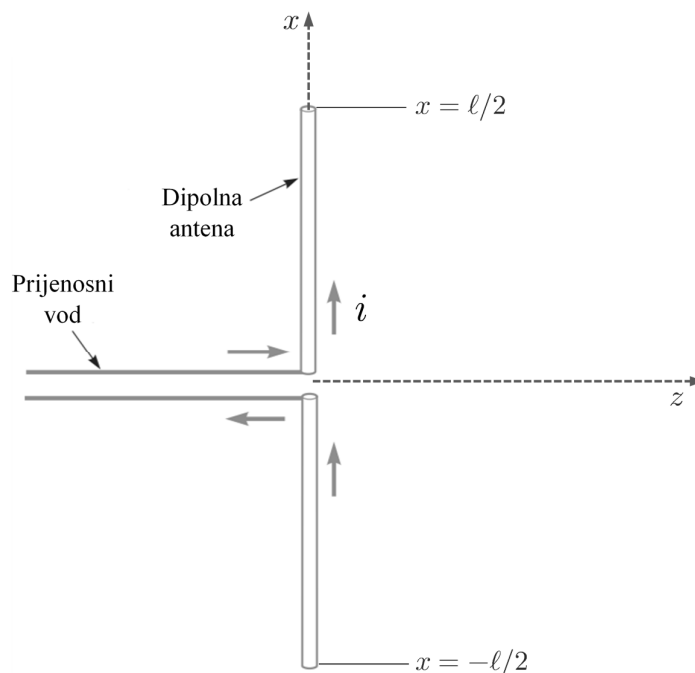
Antena kao odašiljač generira elektromagnetski val koji prenosi energiju kroz prostor, a kao primatelj prima energiju koju joj njoj usmjeren elektromagnetski val nosi. Na taj način omogućena je bežična komunikacija između udaljenih objekata. Osnovna struktura antene prikazana je na slici 5.8.



**Slika 5.8:** Struktura antene [26]

### 5.3.1. Dipolna antena kao odašiljač, elektromagnetsko zračenje

Dipolna antena je ravna žica koja je putem prijenosnog voda spojena na izvor energije koji pruža vremenski promjenjivi naponski signal. Na slici 5.9 prikazana je izvedba dipolne antene te način na koji je ona povezana s prijenosnim vodom. [25]



**Slika 5.9:** Dipolna antena [25]

Kao rezultat primijenjenog naponskog signala izvora, energija se prijenosnim vodom prenosi od izvora do antene. U anteni se, kao posljedica dovedene energije, inducira struja, to jest dolazi do kontinuirane akceleracije naboja u anteni. Poznato je da akcelerirani naboji uzrokuju elektromagnetsko zračenje (što podrazumijeva prijenos energije elektromagnetskim valovima) [10]. Iz toga slijedi da inducirana struja antene uzrokuje elektromagnetsko zračenje, što omogućuje prijenos energije do antene prijemnika.

Izvor se može modelirati naponskim izvorom monoharmonijskog naponskog signala:  $u_{iz}(t) = U_0 \cos(\omega t)$ . Posljedično tome je struja antene sinusni val. S obzirom na to da je elektromagnetsko zračenje *proizvedeno* utjecajem struje antene, ono je u obliku sinusnog vala koji se može opisati jednačinama (5-6) i (5-7).

Frekvencija vala jednaka je frekvenciji naponskog signala izvora, pa se prema tome može izračunati valna duljina vala kao:  $\lambda = (wc)/(2\pi)$ . Duljina dipolne antene jednaka je pola valne duljine vala kojeg je cilj *proizvesti* [24], to jest  $\ell = (wc)/(4\pi)$ .

Treba spomenuti da dipolna antena može također raditi kao prijemnik. U tom slučaju se u anteni inducira struja koja je posljedica primljenog elektromagnetskog zračenja. Energija se prijenosnim vodom prenosi do trošila na kojem se inducira naponski signal iste frekvencije kao i dovedeno elektromagnetsko zračenje.

## 6. ZAKLJUČAK

Motivacija za izradu ovog rada bila je diskutirati o teorijskim osnovama koje moraju biti zadovoljene kako bi Kirchhoffovi zakoni bili primjenjivi te razriješiti s time povezane dvojbe koje se mogu javiti.

U ovom radu najprije je obrađen Maxwellov model kao najpotpuniji model u teorijskoj elektrotehnici. Iskazane su, djelomično izvedene i objašnjene Maxwellove četiri jednačbe te je ukazano na važnost njihove primjene.

Kako je uobičajeno u analizi električkih mreža zanemaren Maxwellov model kao temelj Kirchhoffovog modela, cilj u ovom radu bio je jasno predstaviti Kirchhoffov model kao poseban slučaj Maxwellovog modela te tako napraviti poveznicu elektrodinamike i teorijske elektrotehnike s teorijom mreža. Postulati teorije mreža su uvjeti uz koje se Maxwellove jednačbe mogu reducirati na Kirchhoffove zakone: Kirchhoffov zakon napona (KZN) i Kirchhoffov zakon struje (KZS). Zbog iznimne važnosti ovih postulata kao uvjeta primjene Kirchhoffovog modela, oni su detaljno objašnjeni.

Poseban naglasak je stavljen na analizu dvije naprave stvarnih mreža, zavojnicu i kondenzator, za koje se često ne razmatraju fizikalni procesi unutar njih. Analiza fizikalnih procesa unutar tih naprava provedena u kontekstu Maxwellovog modela dovodi do zaključka da je opravdano te naprave u Kirchhoffovom modelu zamijeniti pripadajućim koncentriranim elementima Kirchhoffove mreže, induktivitetom i kapacitetom.

Iako datumski stare, dvojbe oko primjene Maxwellovog i Kirchhoffovog modela u novije vrijeme ilustrira i takozvani Lewinov paradoks. Analiza ovog problema počiva na demonstraciji Waltera Lewina u kojoj dolazi do naoko paradoksalnih rezultata mjerenja u određenoj mreži. Značajnu raspravu cijelog pokusa, na koju se u poglavlju ovog rada nadovezuje, proveli su Mehdi Sadaghdar, Kirk T. McDonald i Joseph W. Belcher. U ovom radu je cijela analiza provedena shodno s temom i zadatkom završnog rada. Pokazano je zašto na naizgled jednostavnu mrežu nisu izravno primjenjivi Kirchhoffovi zakoni. Zatim je mreža analizirana pomoću Maxwellovog modela te su razjašnjene eventualne nejasnoće i dvojbe.

Kirchhoffovi zakoni trivijalni su za primijeniti na mreže koje zadovoljavaju četiri postulata te stoga njihova primjena u takvim uvjetima nije obrađivana u ovom radu. U zadnjem poglavlju rada spomenuta su dva primjera pri čijoj analizi je potrebno razmišljati u okviru Maxwellovog modela. Na tim primjerima se očituje valna priroda elektromagnetskih pojava. Prvi takav primjer iz prakse

je prijenosna mreža, odnosno mreža koja se sastoji od izvora i trošila povezanih prijenosnim vodom. Primjenom Maxwellovih jednadžbi izvedene su telegrafске jednadžbe koje su dokaz valne prirode struje i napona prijenosnog voda. Kako je tematika rada usko vezana uz poveznicu Kirchhoffovog i Maxwellovog modela, pokazano je i kako je moguće infinitezimalni dio prijenosnog voda modelirati kao Kirchhoffovu mrežu tako da budu zadovoljene dobivene telegrafске jednadžbe. Na samom kraju rada je ukratko opisan princip rada antene koji se zasniva na elektromagnetskom zračenju. Dio vezan uz rad antene odabran je kao primjer jer je od općepoznatih naprava jednostavna dipolna antena dobar primjer kako se prijenos energije vrši prostornim elektromagnetskim valovima, te se analiza temelji na Maxwellovom modelu.

Uzimajući u obzir svu tematiku obrađenu ovim radom, može se zaključiti da iako Kirchhoffovi zakoni jesu trivijalni za primijeniti, treba biti upoznat s njihovim ograničenjima i uvjetima primjene te s Maxwellovim modelom (primjenom kojeg se sve električne pojave mogu protumačiti).



## LITERATURA

- [1] "Gauss's Law", Wikipedia, [Online]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss%27s\\_law](https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss%27s_law). [10. 9. 2022.].
- [2] D. Halliday, R. Resnick and J. Walker, Fundamentals of Physics, Wiley, 2014.
- [3] D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, Pearson, 2013.
- [4] S. A. Hughes, "Electric Fields & Flux; Gauss's Law", 3. 2. 2005. [Online]. Dostupno na: <http://web.mit.edu/sahughes/www/8.022/lec02.pdf>. [10. 9. 2022.].
- [5] "Maxwell's equations", Wikipedia, [Online]. Dostupno na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations). [10. 9. 2022.].
- [6] J. Stewart, Multivariable Calculus, Cengage Learning, 2011.
- [7] R. A. Freedman i H. D. Young, University Physics with Modern Physics, Pearson, 2020.
- [8] S. A. Hughes, "Induction: Faraday's & Lenz's Laws", 31. 3. 2005. [Online]. Dostupno na: <http://web.mit.edu/sahughes/www/8.022/lec14.pdf>. [10. 9. 2022.].
- [9] R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, "The Feynman Lectures on Physics, Volume II", California Institute of Technology, [Online]. Dostupno na: [https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II\\_toc.html](https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_toc.html). [10. 9. 2022.].
- [10] E. M. Purcell and D. J. Morin, Electricity and Magnetism, Cambridge University Press, 2013.
- [11] W. Lewin, "8.02x - Lect 16 - Electromagnetic Induction, Faraday's Law, Lenz Law, SUPER DEMO", YouTube, 2015. [Online]. Dostupno na: <https://www.youtube.com/watch?v=nGQbA2jwkWI&list=PLyQSN7X0ro2314mKyUiOILaOC2hk6Pc3j&index=17>. [10. 9. 2022.].
- [12] W. Lewin, "Non-conservative Fields - Do Not Trust Your Intuition", MIT, 2002. [Online]. Dostupno na: <http://freepdfhosting.com/d5fc27ec92.pdf>. [10. 9. 2022.].
- [13] S. A. Hughes, "Current, continuity equation, resistance, Ohm's law", 24. 2. 2005. [Online]. Dostupno na: <http://web.mit.edu/sahughes/www/8.022/lec07.pdf>. [10. 9. 2022.].
- [14] "On Physical Lines of Force", Wikipedia, [Online]. Dostupno na: [https://en.wikipedia.org/wiki/On\\_Physical\\_Lines\\_of\\_Force](https://en.wikipedia.org/wiki/On_Physical_Lines_of_Force). [10. 9. 2022.].
- [15] I. Flegar, "Teorija mreža - Bilješke s predavanja", Elektrotehnički fakultet Osijek, 2001.
- [16] L. O. Chua, C. A. Desoer and E. S. Kuh, Linear and Nonlinear Circuits, McGraw Hill, 1987.
- [17] K. T. McDonald, "Voltage Drop, Potential Difference and EMF", 2012.

- [18] K. T. McDonald, "Lewin's Circuit Paradox", 2010.
- [19] J. W. Belcher, "Kirchhoff's Voltage Law (KVL) and Faraday's Law: ElectroBOOM's Experiments", 2018. [Online]. Dostupno na: [http://www.electroboom.com/share/FaradaysLaw\\_Mehdi.pdf](http://www.electroboom.com/share/FaradaysLaw_Mehdi.pdf). [10. 9. 2022.].
- [20] R. H. Romer, "What do voltmeters measure?: Faraday's law in a multiply connected region", *American Journal of Physics*, 50, 1982.
- [21] M. Sadaghdar, "Does Kirchhoff's Law Hold? Disagreeing with a Master", YouTube, 2018. [Online]. Dostupno na: <https://www.youtube.com/watch?v=0TTEFF0D8SA>. [10. 9. 2022.].
- [22] M. Sadaghdar, "Kirchhoff's Voltage Law versus Faraday's Law: the Conclusion", YouTube, 2018. [Online]. Dostupno na: <https://www.youtube.com/watch?v=Q9LuVBfwvzA>. [10. 9. 2022.].
- [23] S. A. Hughes, "Wave equation & electromagnetic radiation", 28. 4. 2005. [Online]. Dostupno na: <http://web.mit.edu/sahughes/www/8.022/lec20.pdf>. [10. 9. 2022.].
- [24] F. Ulaby and U. Ravaioli, *Fundamentals of Applied Electromagnetics*, Pearson, 2015.
- [25] W. Hayt and J. Buck, *Engineering Electromagnetics*, McGraw Hill, 2012.
- [26] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*, Wiley, 1997.

## SAŽETAK

Maxwellov model najpotpuniji je matematički model korišten u elektrotehnici, a temelji se na teoriji o elektromagnetskim poljima. Osnove ovog modela su četiri Maxwellove jednačine. U teoriji mreža koristi se Kirchhoffov model s ciljem predviđanja električkih prilika u stvarnim mrežama. Stvarna mreža je u tom modelu modelirana mrežom s koncentriranim elementima ili tzv. Kirchhoffovom mrežom koja se analizira korištenjem Kirchhoffovih zakona. Zadatak ovog rada je pokazati kako se Maxwellov model može svesti na, jednostavniji za primjenu, Kirchhoffov model kada su ispunjeni uvjeti znani kao postulati teorije mreža. Nakon izvoda Kirchhoffovih zakona provedena je analiza fizikalnih procesa vezanih uz određene naprave u mrežama te je naglasak stavljen na dvojbe vezane za primjenu Kirchhoffovih zakona. Na kraju rada spomenuta su dva primjera iz prakse u kojima je cilj ukazati na valnu prirodu elektromagnetskih pojava koja u analizi mreža uobičajeno nije razmatrana.

**Ključne riječi:** Kirchhoffov model, Maxwellov model, mreža s koncentriranim elementima, postulati teorije mreža

## **ABSTRACT**

### **Conditions for Kirchhoff's Laws Application**

Maxwell's model is the most complete mathematical model used in electrical engineering that is established on the theory of electromagnetic fields. Foundations of this model are four Maxwell's equations. Kirchhoff's model is used in circuit theory in order to predict electrical behavior of physical circuits. In this model, physical circuit is modeled as lumped-element circuit or so-called Kirchhoff's circuit that is analyzed by the use of Kirchhoff's Laws. The goal of this paper is to present how can Maxwell's model be reduced to much simpler Kirchhoff's model when conditions known as the circuit theory postulates are satisfied. After the Kirchhoff's laws derivation, analysis of physical phenomena associated with the certain circuit devices was conducted with the emphasis on doubts concerning Kirchhoff's laws application. Ultimately, two practical examples are mentioned where the aim is to demonstrate the wave nature of electromagnetic field that is commonly overlooked in circuit analysis.

**Keywords:** Circuit theory postulates, lumped-element circuit, Maxwell's model, Kirchhoff's model