Svojstva Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva

Turšćak, Mirna

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni diplomski studij matematike
modul: financijska matematika i statistika

Svojstva Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva

Diplomski rad

Mentor:
izv. prof. dr. sc. Ivan Soldo

Student:
Mirna Turšćak

Osijek, 2024

Sadržaj

1 | Uvod

Jedan od matematičkih pojmova za koji je većina ljudi čula jesu Fibonaccijevi brojevi. Poznati primjer s pustim otokom i razmnožavanjem zečeva na istom, nastao u *mračno doba* ljudske povijesti, postali su motivacija za niz brojeva koji se proučava i danas, nekoliko stoljeća kasnije. F. E. A. Lucas je posebnu pozornost dao Fibonaccijevim brojevima te je do danas ostao matematičar koji je dao najveći doprinos u njihovom proučavanju. U čast njemu, jedna varijacija Fibonaccijeva niza nazvana je Lucasov niz. Uz Lucasa, među znanstvenicima koji se ističu svojim proučavanjem Fibonaccijeva niza su i brojna druga poznata imena kao M. Cantor, J. Kepler, J. P. Binet i G. D. Cassini. Američki matematičar V. Hogatt čak je osnovao i društvo pod imenom *American Fibonacci Association* kojemu je cilj pronalaziti nove rezultate vezane uz Fibonaccijeve brojeve i njihovu primjenu, a također je pokrenuo i novine imena *The Fibonacci Quarterly*. Iz svega navedenog vidimo da su Fibonaccijevi brojevi i dalje vrlo aktualna tema u svijetu znanosti. No, priča ne staje samo u područjima matematike i fizike, već se proteže i na svakidašnji život - na umjetnost, arhitekturu i brojne pojave u prirodi. Fibonaccijevi brojevi su, baš kao i većina matematike, svuda oko nas, iako toga možda nismo ni svjesni.

Cilj ovog rada je pobliže upoznati Fibonaccijeve i Lucasove brojeve. Najprije ćemo se dotaknuti osnovnih pojmova iz matematičke analize i teorije brojeva. Potom ćemo se upoznati s Fibonaccijevim brojevima, nekim njihovim svojstvima i rezultatima o djeljivosti. Nakon toga, u trećem poglavlju pozabavit ćemo se Lucasovim brojevima i svojstvima istih, no također ćemo navesti i nekoliko identiteta koji povezuju Lucasove brojeve s Fibonaccijevima. Upoznat ćemo se s Cassinijevom formulom te identitetom kojim možemo definirati i Lucasove i Fibonaccijeve brojeve. U petom poglavlju dolazimo do jedne vrlo bitne formule: Binetove formule, a potom i do pojma zlatnog reza. Na samom kraju, pogledat ćemo i nekoliko primjera Fibonaccijevih brojeva svuda oko nas.

2 | Osnovni pojmovi

Kako bismo analizirali Fibonaccijeve i Lucasove brojeve te iskazali neka njihova zanimljiva svojstva, najprije se moramo upoznati s nekim pojmovima kojima ćemo se koristiti kroz rad. Kako često spominjemo Fibonaccijev niz i Lucasov niz, prisjetimo se definicije niza.

Definicija 1. *Funkciju $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazivamo niz realnih brojeva. Vrijednost niza $a(n)$ označavamo s a_n i zovemo n-ti član niza ili opći član niza. Oznaka za niz je (a_n).*

Niz realnih brojeva može biti zadan na sljedeće načine:

a) općim članom (na primjer $a_n = 3n^2$, $b_n = \frac{1}{n^5}$, itd.),

b) rekurzivnom formulom (na primjer Fibonaccijev niz, Lucasov niz, itd.).

Kako su brojna svojstva vezana uz djeljivost Fibonaccijevih te Lucasovih brojeva, podsjetit ćemo se i definicije i nekih rezultata važnih za taj dio analize.

Definicija 2. *Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ te $a \neq 0$. Kažemo da a dijeli b ukoliko postoji $d \in \mathbb{Z}$ takav da vrijedi $b = a \cdot d$. To označavamo s $a|b$ te kažemo da je a djelitelj broja b, a b je višekratnik broja a.*

Pogledajmo nekoliko primjera na kojima ćemo objasniti prethodne pojmove.

Primjer 1. *Pogledajmo vezu između brojeva:*

a) $7, 11$ *i* 77,

b) $-2, 6$ *i* -12.

Rješenje.

a) Uočimo da $77 = 7 \cdot 11$. To znači da su 7 i 11 djelitelji broja 77, što možemo zapisati kao $7|77$ i $11|77$. Ujedno je i 77 višekratnik i broja 7 i broja 11.

b) Broj -12 možemo zapisati kao $-2 \cdot 6$. Vidimo kako su -2 i 6 djelitelji broja -12, dok je -12 njihov višekratnik.

Slijedeći teorem jedan je od najvažnijih teorema teorije brojeva, a zove se **Teorem o djeljenju s ostatkom**.

Teorem 1 (vidjeti [9, Teorem 1.1.3.]). *Neka su* $a, b \in \mathbb{Z}$ *te* $a > 0$. *Tada postoje jedinstveni* $q, r \in \mathbb{Z}$ *takvi da vrijedi:*

$$b = q \cdot a + r, \quad 0 \leq r < a.$$

Dokaz. Potrebno je dokazati i postojanje i jedinstvenost brojeva q i r.

1. **Postojanje brojeva** q **i** r

   Kako s a dijelimo b, promatrajmo broj $\frac{b}{a}$. Odaberimo takav $q \in \mathbb{Z}$ da vrijedi $\frac{b}{a} \in [q, q+1\rangle$, tj.

$$\begin{aligned} q \leq \frac{b}{a} &< q + 1 \qquad / - q \\ 0 \leq \frac{b}{a} - q &< 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

   Neka je $r = b - a \cdot q = a\left(\frac{b}{a} - q\right)$. Zbog (2.1) slijedi da je $0 \leq r < a$. Dakle, pokazali smo da postoje traženi q i r.

2. **Jedinstvenost brojeva** q **i** r

   Za dokazivanje jedinstvenosti koristit ćemo se kontradikcijom. Pretpostavimo da postoje $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ takvi da $0 \leq r_1, r_2 < a$ i

$$\begin{array}{c} \left.\begin{aligned} b &= q_1 \cdot a + r_1 \\ b &= q_2 \cdot a + r_2 \end{aligned}\right\} - \\ \hline 0 = a(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2) \\ a(q_1 - q_2) = r_2 - r_1. \end{array}$$

   Kada bi q_1 i q_2 bili različiti, vrijedi $|a(q_1 - q_2)| > a$, a zbog prethodno navedene jednakosti bi bilo $|r_2 - r_1| > a$. Kako znamo da je $0 \leq r_1, r_2 < a$, apsolutna vrijednost njihove razlike ne može biti veća od a čime smo došli do kontradikcije. Znači, $q_1 = q_2$. Tada je:

$$\begin{aligned} a(q_1 - q_2) &= r_2 - r_1 \\ a \cdot 0 &= r_2 - r_1 \\ 0 &= r_2 - r_1 \\ r_1 &= r_2. \end{aligned}$$

Dakle, vidimo da su q i r jedinstveni. □

Na slijedećem primjeru ćemo pokazati kako Teorem 1 izgleda u primjeni.

Primjer 2. *Uz pomoć Teorema 1 zapišite:*

a) *dijeljenje broja* 1711 *s brojem* 63,

b) *dijeljenje broja* 3024 *s brojem* 27*.*

Rješenje.

a) Dijeljenjem broja 1711 s brojem 63 dobivamo ostatak 10 te prema Teoremu 1 to možemo zapisati kao $17 = 63 \cdot 27 + 10$,

b) broj 3024 djeljiv je s brojem 27, odnosno ostatak je 0 što možemo zapisati kao $3024 = 112 \cdot 27 + 0$.

Bitno za naglasiti je da se s 0 ne dijeli, a svaki broj djeljiv je s 1 (također i s -1).

Definicija 3. *Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$. Zajednički djelitelj brojeva a i b je broj $c \in \mathbb{Z}$ koji dijeli i a i b. Ako je bar jedan od brojeva a i b različit od* 0*, onda oni imaju konačno mnogo zajedničkih djelitelja, a onog koji je najveći od njih svih zovemo najveći zajednički djelitelj. Oznaka za najvećeg zajedničkog djelitelja brojeva a i b je (a, b).*

Ako se osvrnemo na Primjer 1 pod b), i 6 i 12 dijele brojevi $\in \{-1, -2, -3, -6, 1, 2, 3, 6\}$. Te brojeve zovemo zajedničkim djeliteljima brojeva 6 i 12. Najveći zajednički djelitelj bit će 6, što označavamo kao $(6, 12) = 6$.

Definicija 4. *Za brojeve $(a, b) \in \mathbb{Z}$ kažemo da su relativno prosti ako im je najveći zajednički djelitelj* 1*, tj. ako je $(a, b) = 1$.*

Odrediti najvećeg zajedničkog djelitelja može biti lak posao, no može biti i vrlo izazovno te vremenski zahtjevno. Stoga se često koristimo postupkom poznatim pod imenom **Euklidov algoritam** kako bi došli do najvećeg zajedničkog djelitelja dvaju cijelih brojeva. U svrhu dokazivanja Euklidova algoritma navodimo iduću propoziciju.

Propozicija 1 (vidjeti[5, Propozicija 2.6.])**.** *Neka $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tada je:*

$$(a, b) = (a, b + ac).$$

Teorem 2 (vidjeti [5, Teorem 2.7.])**.** *Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ takvi da $b > a$. Pretpostavimo da su uzastopnom primjenom Teorema 1 dobivene jednakosti:*

$$\begin{aligned}
b &= a \cdot q_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < a \\
a &= r_1 \cdot q_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} \cdot q_n + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= r_n \cdot q_{n+1} + 0.
\end{aligned}$$

U tom slučaju, $(a, b) = r_n$, tj. najveći zajednički djelitelj brojeva a i b je zadnji nenul ostatak.

Dokaz. Iskoristimo li Propoziciju 1, dobivamo

$$\begin{aligned}(a,b) &= (b - a\cdot q_1, a) = (r_1, a)\\ &= (r_1, a - r_1\cdot q_2) = (r_1, r_2)\\ &= (r_1 - r_2\cdot q_3, r_2) = (r_3, r_2)\\ &\ \ \vdots\\ &= (r_{n-2} - r_{n-1}\cdot q_n, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_n)\\ &= (r_{n-1} - r_n\cdot q_n, r_n) = (0, r_n)\\ &= r_n,\end{aligned}$$

a upravo to je i bila naša tvrdnja. □

Primjenu Euklidova algoritma pokazat ćemo idućim primjerom.

Primjer 3. *Korištenjem Euklidova algoritma pronađimo najvećeg zajedničkog djelitelja brojeva:*

a) 256 *i* 408,

b) 1320 *i* 945.

Rješenje.

a) Imamo:

$$\begin{aligned}408 &= 256\cdot 1 + 152\\ 256 &= 152\cdot 1 + 104\\ 152 &= 104\cdot 1 + 48\\ 104 &= 48\cdot 2 + 8\\ 48 &= 8\cdot 6 + 0.\end{aligned}$$

Kako je zadnji nenul ostatak bio 8, onda je prema Euklidovu algoritmu $(256, 408) = 8$.

b) Dobivamo:

$$\begin{aligned}1320 &= 945\cdot 1 + 375\\ 945 &= 375\cdot +2 + 190\\ 375 &= 190\cdot 1 + 185\\ 190 &= 185\cdot 1 + 5\\ 185 &= 5\cdot 37 + 0.\end{aligned}$$

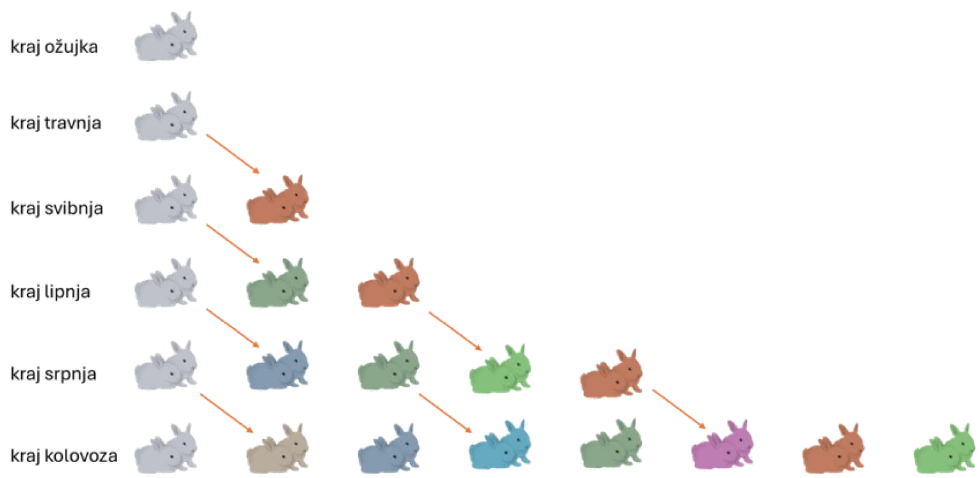
Dakle, prema Euklidovom algoritmu, $(1320, 945) = 5$.

3 | Fibonaccijevi brojevi

U ovom poglavlju bavit ćemo se Fibonaccijevim brojevima i njihovim svojstvima. Leonardo od Pise (oko 1170.-1250.), poznatiji kao Leonardo Fibonacci, talijanski je matematičar koji se istaknuo kao jedan od najznačajnijih matematičara srednjeg vijeka. Uveo je arapsko pisanje brojeva te napisao knjige *Liber abaci*, *Liber quadratorum* i *Practica geometriae*. U svojim knjigama bavio se zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem i dijeljenjem realnih brojeva, osnovama algebre i geometrije, kvadratnim i kubnim korijenima te osnovama trgovanja. Mnogi smatraju da je svojim znanjem bio ispred svog vremena, a danas je najpoznatiji po Fibonaccijevim brojevima. Ova priča započinje s jednim pustim otokom i problemom razmnožavanja zečeva pa ćemo se motivirati istom.

Primjer 4. *Zamislimo da imamo pusti otok na koji dovodimo jedan par zečeva. Taj par se razmnožava i pretpostavimo da dobije jedan novi par zečeva kao potomke. Svaki par zečeva na otoku dobivat će potomke, no zamislimo da zečevi nisu spolno zreli prvih mjesec dana - dakle svaki par zečeva daje nove potomke tek nakon što napune dva mjeseca života. Ukoliko zečeve ostavimo krajem ožujka na otoku, koliko zečeva će biti na otoku nakon godinu dana?*

Rješenje.



Slika 3.1: Broj zečeva u prvih 6 mjeseci

Na kraju ožujka na pustom otoku imamo jedan par zečeva. Kako oni nisu spolno zreli prvih mjesec dana, tek dva mjeseca poslije, odnosno krajem svibnja na otoku imamo dva para zečeva. Krajem idućeg mjeseca, odnosno krajem lipnja naš polazni par zečeva ponovno daje novi par, a par zečeva koji je nastao u svibnju još ne može dati potomke. Krajem srpnja, polazni par zečeva daje ponovno jedan par te par nastao u svibnju daje jedan par, a par nastao u lipnju još nije spreman za potomke (i analogno nastavljamo dalje). Broj parova zečeva po mjesecima vidimo u Tablici 3.1. Vidimo kako nakon godinu dana na otoku imamo 233 parova zečeva.

Mjesec	Broj parova zečeva
ožujak	1
travanj	1
svibanj	2
lipanj	3
srpanj	5
kolovoz	8
rujan	13
listopad	21
studeni	34
prosinac	55
siječanj	89
veljača	144
ožujak	233

Tablica 3.1: Broj zečeva na otoku po mjesecima

Označimo broj zečeva u ožujku s F_1, u travnju s F_2 i analogno ostale. Pogledamo li pozornije Tablicu 3.1, vidimo kako se svaki član, počevši od trećeg, dobije kao zbroj prethodna dva člana:

$$\begin{aligned} 2 &= 1+1, \text{ tj. } F_3 = F_1 + F_2, \\ 3 &= 1+2, \text{ tj. } F_4 = F_2 + F_3, \\ 5 &= 2+3, \text{ tj. } F_5 = F_3 + F_4, \\ &\vdots \\ 144 &= 55+89, \text{ tj. } F_{12} = F_{10} + F_{11}, \\ 233 &= 89+144, \text{ tj. } F_{13} = F_{11} + F_{12}. \end{aligned}$$

Upravo su brojevi iz Primjera 5 Fibonaccijevi brojevi.

Definicija 5. *Neka je niz (F_n) zadan rekurzivnom relacijom*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 3$$

te neka su prva dva člana tog niza $F_1 = 1$ i $F_2 = 1$. Takav niz naziva se Fibonaccijev niz, a članove niza (F_n) zovemo Fibonaccijevi brojevi.

3.1 Svojstva Fibonaccijevih brojeva

Fibonaccijevi brojevi su se s vremenom pokazali kao vrlo zanimljiv matematički niz brojeva s raznim svojstvima i širokom primjenom. Upoznajmo se s nekim od brojnih karatkeristika Fibonaccijevih brojeva.

Teorem 3 (vidjeti [8, Theorem 5.1])**.** *Neka je (F_n) Fibonaccijev niz. Tada vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1,$$

odnosno suma prvih n članova Fibonaccijevog niza jednaka je $(n+2)$-om članu niza (F_n) umanjenom za 1.

Dokaz. Dokaz ovog teorema slijedi direktno iz same definicije Fibonaccijeva niza. Naime, znamo da je

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

a prebacivanjem članova s lijeva na desno dobivamo

$$F_{n-2} = F_n - F_{n-1}. \tag{3.1}$$

Ukoliko sve članove, počevši od prvoga, do n-og člana zapišemo prema formuli (3.1) dobivamo slijedeće:

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_3 - F_2,\\
F_2 &= F_4 - F_3,\\
F_3 &= F_5 - F_4,\\
F_4 &= F_6 - F_5,\\
&\vdots\\
F_{n-2} &= F_n - F_{n-1},\\
F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n,\\
F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}.
\end{aligned}$$

Kada bismo zbrojili sve jednadžbe koje imamo, na lijevoj strani dobili bi

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ldots + F_{n-2} + F_{n-1} + F_n,$$

što nije ništa drugo nego $\sum_{i=1}^{n} F_i$. Dakle, imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_i = {} & F_3 - F_2 + F_4 - F_3 + F_5 - F_4 + F_6 - F_5\\
& + \ldots + F_n - F_{n-1} + F_{n+1} - F_n + F_{n+2} - F_{n+1}.
\end{aligned}$$

Vidimo kako se članovi niza, sve od trećeg člana pa do $(n+1)$-og člana niza, uključujući i njih same, pojavljuju s predznacima $+$ i $-$. U sumi daju 0 i na kraju nam ostaje

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - F_2,$$

a kako znamo da je $F_2 = 1$ imamo:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

□

Pogledajmo prethodnu primijenjenu u nekoliko primjera.

Primjer 5. *Izračunajmo sumu:*

a) *prvih pet članova Fibonaccijeva niza,*

b) *prvih deset članova Fibonaccijeva niza.*

Rješenje.

a) Suma prvih pet članova niza (F_n) jednaka je

$$\sum_{i=1}^{5} F_i = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12,$$

dok prema Teoremu 3 ona iznosi

$$\sum_{i=1}^{5} F_i = F_7 - 1 = 13 - 1 = 12.$$

Vidimo kako su obje sume u konačnici jednake.

b) Suma prvih deset članova niza (F_n) jednaka je

$$\sum_{i=1}^{10} F_i = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143,$$

a ako se pozovemo na Teorem 3 dobivamo

$$\sum_{i=1}^{10} F_i = F_{12} - 1 = 144 - 1 = 143,$$

iz čega vidimo kako ponovno imamo jednaki iznos.

Zanimljivo je da kod Fibonaccijevih brojeva možemo promatrati i sumu samo neparnih članova, a time ćemo ponovno dobiti ništa drugo nego Fibonaccijev broj.

Teorem 4 (vidjeti [8, Theorem 5.2])**.** *Neka je (F_n) Fibonaccijev niz. Tada vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}.$$

Dokaz. Za potrebe dokaza, stavimo da je $F_0 = 0$. Ponovno krećemo od rekurzivne relacije kojom je dan niz:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

no malo drugačijom manipulacijom formule dobivamo:

$$F_{n-1} = F_n - F_{n-2}. \tag{3.2}$$

Pomoću formule (3.2) raspisujemo članove ove sume:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 - F_0, \\ F_3 &= F_4 - F_2, \\ F_5 &= F_6 - F_4, \\ &\vdots \\ F_{2n-3} &= F_{2n-2} - F_{2n-4}, \\ F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2}. \end{aligned}$$

Nakon zbrajanja svih jednadžbi na lijevoj strani imamo:

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-3} + F_{2n-1},$$

što možemo zapisati u obliku $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}$. Na desnoj strani prethodnog niza jednakosti, analogno kao u dokazu Teorema 3, dobivamo:

$$F_{2n} - F_0.$$

Uzmemo li u obzir da je $F_0 = 0$, slijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}.$$

□

Slično svojstvo možemo uočiti i kod parnih Fibonaccijevih brojeva, odnosno parnih Fibonaccijevih članova niza.

Korolar 1 (vidjeti [8, Corollary 5.1])**.** *Neka je (F_n) Fibonaccijev niz. Tada vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1.$$

Dokaz. Sumu $\sum_{i=1}^{n} F_{2i}$ raspisat ćemo kao razliku sume prvih $2n$ članova Fibonaccijevog niza i sume neparnih članova Fibonaccijeva niza :

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = \sum_{i=1}^{2n} F_i - \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}. \tag{3.3}$$

Prema Teoremu 3 znamo kako je

$$\sum_{i=1}^{2n} F_i = F_{2n+2} - 1,$$

dok prema Teoremu 4 znamo da je

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}.$$

Uvrstimo li to u jednakost (3.3) dobivamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} F_{2i} &= F_{2n+2} - 1 - F_{2n} \\ &= F_{2n+2} - F_{2n} - 1 \quad \text{i sada primjenom } (3.2) \text{ slijedi jednakost} \\ &= F_{2n+1} - 1.\end{aligned}$$

□

Primjenu prethodnog teorema i korolara pokazat ćemo na slijedećem primjeru.

Primjer 6. *Izračunajmo sumu:*

a) prvih sedam parnih članova Fibonaccijeva niza,

b) prvih sedam neparnih članova Fibonaccijeva niza.

Rješenje.

a) Suma prvih sedam neparnih članova niza (F_n) jednaka je

$$\sum_{i=1}^{7} F_{2i-1} = 1 + 2 + 5 + 13 + 34 + 89 + 233 = 377,$$

dok prema Teoremu 3 vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{7} F_{2i-1} = F_{2\cdot 7} = F_{14} = 377.$$

Vidimo da su dobivene vrijednosti jednake.

b) Suma prvih sedam parnih članova niza (F_n) jednaka je

$$\sum_{i=1}^{7} F_{2i} = 1 + 3 + 8 + 21 + 55 + 144 + 377 = 609,$$

a prema Korolaru 1 znamo

$$\sum_{i=1}^{7} F_{2i} = F_{2\cdot 7+1} - 1 = F_{15} - 1 = 610 - 1 = 609.$$

Vidimo da su rezultati jednaki.

Zanimljiv rezultat daje nam i suma kvadrata prvih n Fibonaccijevih brojeva, odnosno članova niza (F_n).

Teorem 5 (vidjeti [2, Theorem 3.1.3.])**.** *Neka je (F_n) Fibonaccijev niz. Tada vrijedi:*

$$F_1{}^2 + F_2{}^2 + \ldots + F_{n-1}{}^2 + F_n{}^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Dokaz. Neka je $F_0 = 0$. Prema Fibonaccijevoj formuli znamo da je

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1}, \quad \text{to jest} \\ F_n &= F_{n+1} - F_{n-1}. \end{aligned}$$

Dobivenu jednakost pomnožimo s F_n te kao rezultat imamo:

$$F_n{}^2 = F_n \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n-1}. \tag{3.4}$$

Koristeći se (3.4) raspišimo članove promatrane sume:

$$\begin{aligned} F_1{}^2 &= F_1 \cdot F_2 - F_1 \cdot F_0, \\ F_2{}^2 &= F_2 \cdot F_3 - F_2 \cdot F_1, \\ F_3{}^2 &= F_3 \cdot F_4 - F_3 \cdot F_2, \\ &\vdots \\ F_{n-1}{}^2 &= F_{n-1} \cdot F_n - F_{n-1} \cdot F_{n-2}, \\ F_n{}^2 &= F_n \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n-1}. \end{aligned}$$

Sumiranjem svih jednadžbi s lijeve strane dobivamo:

$$F_1{}^2 + F_2{}^2 + F_3{}^2 + \ldots + F_{n-1}{}^2 + F_n{}^2,$$

dok na desnoj strani, zbog jednakih izraza različitih predznaka, sumiranjem dobivamo

$$F_n \cdot F_{n+1} - F_1 \cdot F_0.$$

Kako je $F_0 = 0$ ostaje samo $F_n \cdot +F_{n+1}$. Naposlijetku imamo:

$$F_1{}^2 + F_2{}^2 + F_3{}^2 + \ldots + F_{n-1}{}^2 + F_n{}^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

□

Pokažimo primjenu prethodne formule na sljedećem primjeru:

Primjer 7. *Izračunajmo sumu:*

a) kvadrata prvih pet članova Fibonaccijeva niza,

b) kvadrata prvih sedam članova Fibonaccijeva niza.

Rješenje.

a) Suma kvadrata prvih pet članova niza (F_n) iznosi

$$\sum_{i=1}^{5} F_i^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40,$$

dok prema Teoremu 5 vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{5} F_i^2 = F_5 \cdot F_6 = 34 \cdot = 5 \cdot 8 = 40.$$

Vrijednosti su jednake.

b) Suma kvadrata prvih sedam članova niza (F_n) iznosi

$$\sum_{i=1}^{7} F_i^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 = 273,$$

a prema Teoremu 5 imamo

$$\sum_{i=1}^{7} F_i^2 = F_7 \cdot F_8 = 13 \cdot 21 = 273.$$

Vidimo da su dobivene vrijednosti jednake.

Jedna od poznatih povijesnih osoba koje su pokazale velik interes za Fibonaccijeve brojeve bio je astronom i matematičar Giovanni Cassini. Prvi je uočio uzorak u uzastopna tri Fibonaccijeva brojeva preko kojeg ih je povezao. Danas je taj rezultat poznat kao **Casinnijev teorem**, a sama formula kao **Casinnijeva formula**.

Teorem 6 (vidjeti [8, Theorem 5.3.])**.** *Neka je F_n n-ti Fibonaccijev broj. Tada vrijedi:*

$$F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad \forall n \geq 1.$$

Dokaz. Prethodnu tvrdnju dokazat ćemo metodom matematičke indukcije. Ponovno, neka je $F_0 = 0$.

1. **Baza indukcije**
Provjerimo vrijedi li tvrdnja za $n = 1$.

$$\begin{aligned} F_{1-1} \cdot F_{1+1} - F_1^2 &= (-1)^1 \\ F_0 \cdot F_2 - F_1^2 &= -1 \\ 0 \cdot 1 - 1^2 &= -1 \\ -1 &= -1. \end{aligned}$$

Kako jednakost vrijedi, zaključujemo da je tvrdnja istinita za $n = 1$.

2. **Pretpostavka indukcije**
U ovom koraku pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za $n \leq k$. Dakle, smatramo kako je jednakost

$$F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

istinita za $n \in \{2, 3, \ldots, k-1, k\}$.

3. **Korak indukcije**
   Ovdje nastojimo dokazati kako je tvrdnja valjana i za $n = k+1$, a kako bi to postigli koristit ćemo se s pretpostavkom indukcije i samom definicijom Fibonaccijeva niza. Sada imamo:

$$\begin{aligned} F_k \cdot F_{k+2} - {F_{k+1}}^2 =& F_k \cdot (F_{k+1} + F_k) - {F_{k+1}}^2 \\ =& F_k \cdot F_{k+1} + {F_k}^2 - {F_{k+1}}^2 \\ =& {F_k}^2 - F_{k+1} \cdot (F_{k+1} - F_k) \\ =& {F_k}^2 - F_{k+1} \cdot F_{k-1} \\ =& -(F_{k+1} \cdot F_{k-1} - {F_k}^2). \text{ Iz pretpostavke indukcije slijedi} \\ =& -(-1)^k \\ =& (-1)^{k+1}, \end{aligned}$$

   a to smo i trebali pokazati.

□

Pogledajmo primjenu Cassinijeve formule na nekoliko primjera.

Primjer 8. *Izračunajmo:*

a) $F_5 \cdot F_7 - {F_6}^2$,

b) $F_8 \cdot F_{10} - {F_9}^2$.

Rješenje.

a) Uvrstimo li Fibonaccijeve brojeve dobivamo:

$$F_5 \cdot F_7 - {F_6}^2 = 5 \cdot 13 - 8^2 = 65 - 64 = 1,$$

dok prema Casinnijevoj formuli, kako je $k = 6$, slijedi da rezultat ove razlike treba biti $(-1)^6 = 1$, a to smo i dobili.

b) Najprije pogledajmo kakav rezultat dobijemo preko tri uzastopna Fibonaccijeva člana:

$$F_8 \cdot F_{10} - {F_9}^2 = 21 \cdot 55 - 34^2 = 1155 - 1156 = -1.$$

Casinnijeva formula nam kaže, uzimajući u obzir da je $k = 9$, da ćemo dobiti $(-1)^9 = -1$. Dobivene vrijednosti su jednake.

Pogledat ćemo još jedan zanimljiv identitet uočen u Fibonaccijevim brojevima, a bit će nam potreban za neke sljedeće zaključke.

Korolar 2 (vidjeti [2, Theorem 3.1.4.]). *Za Fibonaccijeve brojeve vrijedi:*

$$F_{n+m} = F_{n-1} \cdot F_m + F_n \cdot F_{m+1}, \ \forall m, n \geq 1.$$

Dokaz. Pri dokazu ovog korolara koristit ćemo matematičku indukciju po n. Ponovno, neka je $F_0 = 0$.

1. **Baza indukcije**
   Pogledajmo je li tvrdnja valjana za $n = 1$.

$$F_{1+m} = F_{1-1} \cdot F_m + F_1 \cdot F_{m+1}$$
$$F_{m+1} = F_0 \cdot F_m + F_1 \cdot F_{m+1} \text{, a kako je } F_0 = 0 \text{ i } F_1 = 1 \text{ dobivamo}$$
$$F_{m+1} = 1 \cdot F_{m+1} = F_{m+1}.$$

   Tvrdnja vrijedi za bazu indukcije.

2. **Pretpostavka indukcije**
   Radimo pretpostavku da tvrdnja vrijedi za $n = 2, 3 \ldots, k-1, k$ te time smatramo da je jednakost

$$F_{n+m} = F_{n-1} \cdot F_m + F_n \cdot F_{m+1}$$

   valjana za $n \in \{2, 3, \ldots, k-1, k\}$.

3. **Korak indukcije**
   Pokažimo sada da je tvrdnja valjana i za $n = k + 1$. Želimo pokazati da je

$$F_{m+k+1} = F_k \cdot F_m + F_{k+1} \cdot F_{m+1}.$$

   Naime, prema pretpostavci indukcije vrijedi:

$$\begin{aligned} F_{m+k} &= F_{k-1} \cdot F_m + F_k \cdot F_{m+1}, \\ F_{m+k-1} &= F_{k-2} \cdot F_m + F_{k-1} \cdot F_{m+1} \end{aligned}$$

   Zbrajanjem prethodnih jednadžbi i primjenom definicije Fibonaccijeva niza slijedi:

$$\begin{aligned} F_{m+k} + F_{m+k-1} &= F_{k-1} \cdot F_m + F_k \cdot F_{m+1} + F_{k-2} \cdot F_m + F_{k-1} \cdot F_{m+1} \\ F_{m+k+1} &= F_m \cdot (F_{k-1} + F_{k-2}) + F_{m+1} \cdot (F_k + F_{k-1}) \\ F_{m+k+1} &= F_k \cdot F_m + F_{k+1} \cdot F_{m+1}. \end{aligned}$$

   Jednakost je valjana pa zaključujemo da iskaz korolara vrijedi.

□

Uzmemo li na primjer F_{28}, puno nam je lakše izračunati ga pomoću Korolara 2, nego preko same formule Fibonaccijeva niza. F_{28} možemo zapisati i kao F_{16+12} iz čega prema Korolaru 2 slijedi da je

$$\begin{aligned} F_{28} = F_{16+12} &= F_{15} \cdot F_{12} + F_{16} \cdot F_{13} \\ &= 610 \cdot 144 + 987 \cdot 233 = 317881, \end{aligned}$$

a upravo to i je vrijednost 28-og Fibonaccijevog broja.

3.2 Djeljivost Fibonaccijevih brojeva

Članove Fibonaccijeva niza, odnosno Fibonaccijeve brojeve možemo detaljnije analizirati i preko matematičke grane zvane teorije brojeva. Tim svojstvima ćemo se baviti u nastavku ovoga rada.

Korolar 3 (vidjeti [8, Corollary 5.2.]). *Svaka dva uzastopna Fibonaccijeva broja su relativno prosti, tj.*

$$(F_n, F_{n+1}) = 1, \quad \forall n \geq 1.$$

Dokaz. Označit ćemo $(F_n, F_{n+1}) = d$. Prema definiciji najvećeg zajedničkog djelitelja, znamo da $d|F_n$ i $d|F_{n+1}$, ali onda dijeli i ${F_n}^2$. Iskoristimo li Casinnijevu formulu, imamo:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{F_{n-1} \cdot F_{n+1}}_{\text{djeljivo s } d} - \underbrace{{F_n}^2}_{\text{djeljivo s } d} = (-1)^n, \quad \forall n \geq 1 \implies \exists\, a \in \mathbb{Z} \text{ takav da vrijedi } F_{n-1} \cdot F_{n+1} = a \cdot d, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \exists\, b \in \mathbb{Z} \text{ takav da vrijedi } {F_n}^2 = b \cdot d
\end{aligned}$$

pa sada imamo

$$\begin{aligned}
a \cdot d - b \cdot d &= (-1)^n, \quad \forall n \geq 1 \\
(a - b) \cdot d &= (-1)^n, \quad \forall n \geq 1.
\end{aligned}$$

Vidimo da d dijeli -1 ili 1, a tada d može biti samo 1 jer smo rekli da je najveći zajednički djelitelj prirodan broj. Dakle, $(F_n, F_{n+1}) = 1$. □

Pogledamo li samo uzastopne Fibonaccijeve brojeve iz Tablice 3.1, vidimo kako su oni prosti. Zanimljivo je do koliko zaključaka o djeljivosti Fibonaccijevih brojeva možemo doći promatrajući indekse istih.

Teorem 7 (vidjeti [8, Theorem 16.1.]). *Neka su F_m, m-ti i F_{mn}, $mn - ti$ Fibonaccijevi brojevi. Tada vrijedi: $F_m|F_{mn}$, $\forall m, n \geq 1$.*

Dokaz. Dokaz provodimo metodom matematičke indukcije po n.

1. **Baza indukcije**
   Provjerimo je li tvrdnja istinita za $n = 1$.

   $$F_m|F_{m \cdot 1} \implies F_m|F_m.$$

   Znamo da je jedan od djelitelja proizvoljnog cijelog broja i on sam. Stoga zaključujemo da je tvrdnja istinita za $n = 1$.

2. **Pretpostavka indukcije**
   U ovom koraku pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za $n = 2, 3, \ldots, k-1, k$, odnosno

   $$F_m|F_{n \cdot m}$$

   je istinito za $n \in \{2, 3, \ldots, k-1, k\}$.

3. Korak indukcije
Nastojimo pokazati kako tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$.

$$F_{m\cdot(k+1)} = F_{mk+m} \text{ pa koristeći Korolar 2 dobivamo}$$
$$F_{m\cdot(k+1)} = \underbrace{F_{mk-1}\cdot F_m}_{\text{djeljivo s } F_m} + \underbrace{F_{mk}F_{m+1}}_{\text{djeljivo s } F_m \text{ prema predpostavci indukcije.}}$$

Dakle, slijedi nam $F_m | F_{m\cdot(k+1)}$ i zaključujemo da je polazna tvrdnja valjana.

□

Ovo svojstvo dobar je alat za određivanje djelitelja nekog Fibonaccijevog broja. Znamo da, ukoliko rastavimo indeks nekog Fibonaccijevog broja na produkt, svi Fibonaccijevi brojevi koji su ineksirani članovima produkta, bit će njegovi djelitelji.

Primjer 9. *Pogledajmo djelitelje broja F_{12}.*

Rješenje. Djelitelji broja 12, u skupu prirodnih brojeva su $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Prema Teoremu 7, 12. Fibonaccijev član trebali bi dijeliti F_1, F_2, F_3, F_4, F_6 i F_{12}. Kako su to zapravo brojevi $1, 1, 2, 3, 8$ i 144, a $F_{12} = 144$, vidimo kako to jesu djelitelji broja 144.

Jedan od rezultata o pronalasku najvećeg zajednčkog djelitelja Fibonaccijevih brojeva povezuje indekse Fibonaccijevih brojeva s njima samima. Više ćemo vidjeti u idućem teoremu, a najprije navodimo lemu koja će nam biti potrebna kako bi dokazali navedeni teorem.

Lema 1 (vidjeti [8, Lemma 16.1. i Lemma 16.2.])**.** *Za Fibonaccijeve brojeve vrijedi:*

1) $(F_{qn-1}, F_n) = 1$,

2) *Ako je* $m = nq + r$, *onda* $(F_m, F_n) = (F_n, F_r)$.

Dokaz.

1) Radi jednostavnosti, označit ćemo $(F_{qn-1}, F_n) = m$. Tada znamo da $m|F_{qn-1}$ i da $m|F_n$. Teorem 7 tvrdi nam da $F_n|F_{qn}$, a kako $m|F_n \implies m|F_{qn}$. Sada imamo da $m|F_{qn}$ i $m|F_{qn-1}$ te dolazi do kontradikcije ukoliko je m bilo što osim 1 jer znamo da su dva uzastopna Fibonaccijeva broja prosti. Dakle, $(F_{qn-1}, F_n) = 1$.

2) Krećemo od pretpostavke da je $m = nq + r$,. Tada imamo:

$$\begin{aligned}(F_m, F_n) &= (F_{nq+r}, F_n). \text{ Sada iskoristimo Korolar 2 i slijedi}\\ &= (F_{nq-1}\cdot F_r + F_{qn}\cdot F_{r+1}, F_n).\end{aligned}$$

Prema Teoremu 7 znamo da $F_n|F_{qn}$ i imamo: $(F_m, F_n) = (F_{nq-1}\cdot F_r, F_n)$. Zbog Korolara 3 je $(F_{nq-1}, F_n) = 1$ pa imamo:

$$(F_m, F_n) = (F_r, F_n).$$

□

Prijeđimo sada na sljedeći teorem.

Teorem 8 (vidjeti [8, Corollary 16.3.]). *Neka su F_n i F_m n-ti i m-ti Fibonaccijevi brojevi. Tada je $(F_n, F_m) = F_{(n,m)}$.*

Dokaz. Pretpostavit ćemo da je $n \leq m$. Korištenje Euklidovog algoritma, odnosno Teorema 2, i n-a kao djelitelja, rezultira ovim jednakostima:

$$\begin{aligned} m &= n \cdot q_1 + r_1, & 0 < r_1 < n, \\ n &= r_1 \cdot q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3, & 0 < r_3 < r_2, \\ &\vdots & \vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} \cdot q_n + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= r_n \cdot q_{n+1} + 0. \end{aligned}$$

Korištenjem Leme 1 pod 1) slijedi kako je $(F_m, F_n) = (F_n, F_{r_1}) = (F_{r_1}, F_{r_2}) = \ldots = (F_{r_{n-1}}, F_{r_n})$. Iz zadnje u nizu jednakosti dobivenih Euklidovim algoritmom vidimo da je $r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1}$ iz čega vidimo da $r_n | r_{n-1}$, a to znači da postoji $a \in \mathbb{Z}$ takav da $r_{n-1} = r_n \cdot a$. Tada je $F_{r_{n-1}} = F_{r_n \cdot a}$ pa iz Teorema 7 znamo da $F_{r_n} | F_{r_{n-1}}$, iz čega slijedi $(F_{r_n}, F_{r_{n-1}}) = F_{r_n}$. Istovremeno, zbog Teorema 2 znamo da je $(n, m) = r_n$. Iz svega navedenog zaključujemo da je $(F_n, F_m) = (F_{r_{n-1}}, F_{r_n}) = F_{r_n} = F_{(n,m)}$. □

Prvih par Fibonaccijevih brojeva nije teško promatrati niti analizirati, no kako je svaka nova vrijednost zbroj prethodne dvije, Fibonaccijevi brojevi postaju sve veći i teže ih je analizirati.

Primjer 10. *Pronađimo najvećeg zajedničkog djelitelja F_{16} i F_{20}.*

Rješenje. Cilj nam je pronaći (F_{16}, F_{20}), odnosno $(987, 6765)$. Prema Teoremu 8 znamo da će on biti jednak $F_{(16,20)} = F_4 = 3$. Podijelimo li F_{16} i F_{20} s 3, dobivamo redom 329 i 2255. Kako su, osim 3, djelitelji broja 987 još 7 i 47, a djelitelji broja 6765 još su i 11 i 41, vidimo kako je 3 zaista najveći zajednički djelitelj od F_{16} i F_{20}.

Promotrimo li F_{16} i F_{20} iz prethodnog primjera, za računanje najvećeg zajedničkog djelitelja tih dvaju brojeva trebalo je pronaći ostale djelitelje istih, ali to može biti vremenski zahtjevno za napraviti. Upravo u takvoj situaciji bio bi nam koristan sljedeći teorem.

Teorem 9 (vidjeti [8, Corollary 16.2.]). *Neka su F_n i F_m n-ti i m-ti Fibonaccijevi brojevi. Tada $n|m$ ako i samo ako $F_n | F_m$.*

Dokaz.

Nužnost
Neka $n|m$. Tada postoji neki $a \in \mathbb{Z}$ takav da je $m = n \cdot a$. Tada je $F_m = F_{n \cdot a}$, a prema Teoremu 7 znamo da tada i F_n i F_a dijele F_m. Dakle, $F_n | F_m$.

Dovoljnost
Neka $F_n | F_m$. Tada $(F_n, F_m) = F_n$, a prema Teoremu 8 znamo da je $(F_n, F_m) = F_{(n,m)}$. Dakle $(n, m) = n$, a iz toga zaključujemo da $n|m$.

□

Vratimo li se na prethodno spomenuti $F_{16} = 987$, znamo iz prethodnog teorema da kako su $1, 2, 4, 8$ i 16 djelitelji broja 16, onda su F_1, F_2, F_4, F_8 i F_{16} djelitelji broja F_{16}.

4 | Lucasovi brojevi

Jedan od matematčara koji se istaknuo proučavanjem Fibonaccijevih brojeva bio je François Édouard Anatole Lucas, poznatiji kao Lucas (1842-1891.). Rođen je i odrastao u Francuskoj, a nakon francusko-pruskog rata, postao je profesor matematike. Njegova istraživanja značajna su za matematiku i danas, a posebice se istaknuo rezultatima iz teorije brojeva. Velik doprinos matematici dao je proučavanjem Fibonaccijevih brojeva i njhovih svojstava, a uspio je još davne 1876., koristeći vlastite metode, dokazati da je $2^{127} - 1$ prost broj. Taj broj je, sve do danas, ostao najveći ručno izračunat prosti broj ikad. Njegove metode traženja prostih brojeva koriste se i danas, a za napredak teorije brojeva vrlo je značajno njegovo djelo *Récréations mathématiques*. Također, zalagao se za implementiranje binarnog sustava u radu računala. Proučavanjem Fibonaccijeva niza, došao je do niza koji se koristi istom rekurzivnom formulom kao i sam Fibonaccijev niz, no ima drugačije pretpostavke. U čast njemu taj niz zovemo Lucasov niz, a njegove članove Lucasovi brojevi.

Definicija 6. *Neka je niz (L_n) zadan rekurzivnom relacijom*

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad \forall n \geq 3,$$

te neka su prva dva člana tog niza $L_1 = 1$ i $L_2 = 3$. Takav niz naziva se Lucasov niz, a članove niza (L_n) zovemo Lucasovi brojevi.

U Tablici 3.1 vidjeli smo kako izgleda prvih 13 Fibonaccijevih brojeva, a u Tablici 4.1 vidimo kako izgleda prvih 13 Lucasovih brojeva. Usporedimo li vrijednosti Fibonaccijeva i Lucasova niza, odnosno brojeva, vidimo kako su Lucasovi brojevi veći, no kako je po definiciji $L_2 > F_2$, ne čudi nas takav zaključak.

Indeks	Vrijednost
L_1	1
L_2	3
L_3	4
L_4	7
L_5	11
L_6	18
L_7	29
L_8	47
L_9	76
L_{10}	123
L_{11}	199
L_{12}	322
L_{13}	521

Tablica 4.1: Prvih 13 Lucasovih brojeva

4.1 Svojstva Lucasovih brojeva

Brojna svojstva koja smo uočili kod Fibonaccijevih brojeva možemo pronaći i kod Lucasovih brojeva. Uzimajući u obzir da su početne pretpostavke za ova dva niza drugačije, no da oni jesu definirani istom rekurzivnom formulom, očekivano je da ćemo imati slične zaključke.

Teorem 10 (vidjeti [8, Identities 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 ,5.10]). *Neka je (L_n) Lucasov niz. Tada vrijedi:*

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3,$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_{2i} = L_{2n+1} - 1,$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_{2i-1} = L_{2n} - 2,$

d) $L_{n-1} \cdot L_{n+1} - {L_n}^2 = 5(-1)^{n-1},$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {L_i}^2 = L_n \cdot L_{n+1} - 2.$

Dokaz. Dokazi se mogu izvesti analogno dokazima Teorema 3 i 4, Korolara 1, Teorema 5 i 6. □

Slično kao kod Fibonaccijevih brojeva, pogledajmo na primjeru prethodno navedene jednakosti.

Primjer 11. *Izračunajmo:*

a) *sumu prvih deset članova Lucasova niza,*

b) *sumu prvih sedam parnih članova Lucasova niza,*

c) *sumu prvih sedam neparnih članova Lucasova niza,*

d) $L_8 \cdot L_{10} - {L_9}^2$,

e) *sumu kvadrata prvih pet članova Lucasova niza.*

Rješenje.

a) Pogledamo li prvih deset članova Lucasova niza, njihova suma iznosi

$$\sum_{i=1}^{10} L_i = 1+3+4+7+11+18+29+47+76+123 = 319,$$

dok nam tvrdnja a) Teorema 10 tvrdi da je

$$\sum_{i=1}^{10} L_i = L_{10+2} - 3 = L_{12} - 3 = 322 - 3 = 319.$$

Iz dobivenih vrijednosti vidimo da jednakost vrijedi.

b) Suma prvih sedam parnih članova Lucasova niza iznosi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{7} L_{2i} &= L_2 + L_4 + L_6 + L_8 + L_{10} + L_{12} + L_{14}\\ &= 3+7+18+47+123+322+843 = 1363,\end{aligned}$$

a prema tvrdnji b) iz Teorema 10 ta suma jednaka je

$$\sum_{i=1}^{7} L_{2i} = L_{2\cdot 7+1} - 1 = L_{15} - 1 = 1364 - 1 = 1363,$$

pa vidimo da su vrijednosti jednake.

c) Suma prvih sedam neparnih članova Lucasova niza iznosi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{7} L_{2i-1} &= L_1 + L_3 + L_5 + L_7 + L_9 + L_{11} + L_{13}\\ &= 1+4+11+29+76+199+521 = 841.\end{aligned}$$

Tvrdnja c) u Teoremu 10 kaže da je ta vrijednost jednaka vrijednosti

$$\sum_{i=1}^{7} L_{2i-1} = L_{2\cdot 7} - 2 = L_{14} - 2 = 843 - 2 = 841,$$

i vidimo da je to točno.

d) Tvrdnja d) Teorema 10 govori nam da je $L_8 \cdot L_{10} - {L_9}^2 = 5 \cdot (-1)^{9-1} = 5$, s obzirom da je $n = 9$. Ukoliko uvrstimo vrijednosti Lucasovih brojeva u prethodni izraz, dobivamo sljedeće:

$$L_8 \cdot L_{10} - {L_9}^2 = 47 \cdot 123 - 76^2 = 5781 - 5776 = 5,$$

što je jednako rezultatu dobivenom primjenom navedenog teorema. Uočimo da je ovo varijanta Cassinijeve formule za Lucasove brojeve.

e) Suma kvadrata prvih pet članova Lucasova niza jednaka je

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} {L_i}^2 &= L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2 + L_5^2 = 1^2 + 3^2 + 4^2 + 7^2 + 11^2 \\ &= 1 + 9 + 16 + 49 + 121 = 196,\end{aligned}$$

a prema tvrdnji e) Teorema 10 imamo:

$$\sum_{i=1}^{5} {L_i}^2 = L_5 \cdot L_6 - 2 = 11 \cdot 18 - 2 = 196.$$

Vidimo da su vrijednosti jednake.

Dok su prethodno navedena svojstva slična onima kao i kod Fibonaccijevih brojeva, zanimljivo je da ova dva niza nisu toliko slična u svojstvima povezana s djeljivosti.

Primjer 12. *U svojstvima djeljivosti Fibonaccijevih brojeva vidjeli smo kako vrijedi:*

a) $(F_n, F_m) = F_{(n,m)}$,

b) $n|m \Longrightarrow F_n|F_m$.

Pokažimo da analogna svojstva ne vrijede za Lucasove brojeve.

Rješenje. Kako bi pokazali da tvrdnja nije istinita dovoljno je pronaći jedan kontraprimjer.

a) Uvjerimo se da $(L_n, L_m) = L_{(n,m)}$ ne vrijedi. Uzmimo $L_5 = 11$ i $L_{10} = 123$. Uzmemo li $(5, 10) = 5$, najveći zajednički djelitelj L_5 i L_{10} trebao bi biti L_5, odnosno 11. No, pogledamo li Lucasove brojeve L_5 i L_{10} znamo da je $(L_5, L_{10}) = (11, 123) = 1$. Vidimo da $(L_n, L_m) \neq L_{(n,m)}$.

b) Iako su prethodna dva Lucasova broja dobar kontraprimjer, ovdje ćemo koristiti $L_3 = 4$ i $L_{12} = 322$. Očito $3|12$, no 4 ne dijeli 322. Vidimo da ne možemo tvrditi da ako $n|m$, onda $L_n|L_m$.

No, svojstvo koje imaju i Lucasovi brojevi, jednako kao i Fibonaccijevi, jest da su dva uzastopna Lucasova broja relativno prosta. Uvjerimo se u to kroz idući teorem.

Teorem 11 (vidjeti [8, Exercises 16, 14.]). *Svaka dva uzastopna Lucasova broja su relativno prosti, tj.*

$$(L_n, L_{n+1}) = 1, \quad \forall n \geq 1.$$

Dokaz. Neka je $(L_n, L_{n+1}) = d$. Tada prema definiciji $d|L_{n+1}$ i $d|L_n$, a onda vrijedi i $d|{L_n}^2$. Iskoristimo sada tvrdnju d) iz Teorema 10:

$$\underbrace{L_{n-1} \cdot L_{n+1}}_{\text{djeljivo s } d} - \underbrace{{L_n}^2}_{\text{djeljivo s } d} = 5(-1)^{n-1}$$
$$\implies d|5(-1)^{n-1}.$$

Obzirom na n, dobijemo da d dijeli 5 ili -5. Djelitelji tog broja, u $\mathbb{N}$, su 1 i 5. Iz tog zaključujemo da $d = 1$ ili $d = 5$. Pretpostavimo da je $d = 5$. Obzirom da tvrdnju dokazujemo za svaki $n \geq 1$, ako je $n = 1$, d mora dijeliti i L_1 i L_2, koji su redom jednaki 1 i 3. Dakle, niti jedan nije djeljiv s 5 pa im tako 5 ni ne može biti najveći zajednički djelitelj. Zaključujemo da je pretpostavka s kojom smo započeli kriva, odnosno $d = 1$. □

4.2 Identiteti Lucasovih i Fibonaccijevih brojeva

Detaljnim proučavanjem Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva pronađene su jednakosti koje povezuju Lucasove i Fibonaccijeve brojeve, a velik udio otkrio je baš sam Lucas.

Teorem 12 (vidjeti [2, Theorem 3.4.1.]). *Neka su F_{n-1} i F_{n+1} Fibonaccijevi, a L_n Lucasov broj. Tada vrijedi:*

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \quad \forall n \geq 2.$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti metodom matematičke indukcije, a koristit ćemo se definicijama Fibonaccijeva i Lucasova niza, tj. njihovom rekurzivnom formulom.

1. **Baza indukcije**
   Provjeravamo vrijedi li tvrdnja istinita za $n = 2$.

   $$\begin{aligned} L_2 &= F_1 + F_3 \\ 3 &= 1 + 2 \\ 3 &= 3. \end{aligned}$$

   Jednakost je valjana pa zaključujemo da tvrdnja vrijedi za $n = 2$.

2. **Pretpostavka indukcije**
   U ovom koraku pretpostavit ćemo da tvrdnja

   $$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

   vrijedi za $n \in \{3, \ldots, k-1, k\}$.

3. **Korak indukcije**
   Cilj je pokazati kako je tvrdnja istinita $n = k + 1$. Iskoristimo pretpostavku indukcije i imamo:

$$L_{k+1} = F_{k-1} + F_{k+1} + F_{k-2} + F_k$$
$$L_{k+1} = (F_{k-1} + F_{k-2}) + (F_{k+1} + F_k)$$
$$L_{k+1} = F_k + F_{k+2}.$$

   Kako je tvrdnja valjana i za $n = k + 1$, zaključujemo da Teorem 12 vrijedi.

□

Prethodni teorem pogledat ćemo na nekoliko Lucasovih i Fibonaccijevih brojeva:

- uzmemo li L_5, prema prethodnom teoremu, on bi trebao biti jednak $F_4 + F_6$. Znamo da je $L_5 = 11$, dok je $F_4 + F_6 = 3 + 8 = 11$ pa je jednakost zadovoljena;
- uzmemo li L_{10}, prema prethodnom teoremu, taj broj treba biti jednak $F_9 + F_{11}$. Kako je $L_{10} = 123$, a $F_9 + F_{11} = 34 + 89 = 123$, jednakost je istinita;
- uzmemo li L_{15}, prema prethodnom teoremu, on bi trebao biti jednak $F_{14} + F_{16}$. Kako je $L_{15} = 1364$, a $F_{14} + F_{16} = 377 + 987 = 1364$, vidimo da jednakost vrijedi.

Postoji analogon Korolara 2 i za Lucasove brojeve.

Korolar 4 (vidjeti [4, Formula 3.5])**.** *Za Lucasove brojeve vrijedi:*

$$L_{n+m} = F_{n-1} \cdot L_m + F_n \cdot L_{m+1}, \ \forall m, n \geq 1.$$

Dokaz. Uočimo da se ovdje koriste i Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi, dok se u Korolaru 2 za iskaz F_{n+m} koriste samo Fibonaccijevi brojevi. Prisjetimo se da $F_0 = 0$ i pokažimo indukcijom po n da prethodna tvrdnja vrijedi.

1. **Baza indukcije**
   Pogledajmo vrijedi li tvrdnja za $n = 1$:

$$L_{m+1} = F_0 \cdot L_m + F_1 \cdot L_{m+1}$$
$$L_{m+1} = L_{m+1}.$$

   Tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

2. **Pretpostavka indukcije**
   Pretpostavimo da tvrdnja

$$L_{n+m} = F_{n-1} \cdot L_m + F_n \cdot L_{m+1}$$

   vrijedi za $n \in \{2, 3, \ldots, k-1, k\}$.

3. **Korak indukcije**
   Pokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = k + 1$ koristeći pretpostavku indukcije:

$$\begin{aligned} L_{k+1+m} &= L_{k+m} + L_{k+m-1} = L_{k+m} + L_{(k-1)+m} \\ &= F_{k-1} \cdot L_m + F_k \cdot L_{m+1} + F_{k-2} \cdot L_m + F_{k-1} \cdot L_{m+1} \\ &= L_m \cdot (F_{k-1} + F_{k-2}) + L_{m+1} \cdot (F_k + F_{k-1}) \\ &= F_k \cdot L_m + F_{k+1} \cdot L_{m+1}. \end{aligned}$$

□

Ilustrirajmo prethodnu formulu kroz sljedeći primjer.

Primjer 13. *Prikažimo Lucasov broj L_{14} koristeći Korolar 4.*

Najprije L_{14} zapišimo u obliku L_{n+m}. Kako smo dokazali da navedena formula vrijedi za svaki n, uzmimo da je $n = 5$, a zatim da je $n = 8$:

- $n = 5$:

$$\begin{aligned} L_{5+9} &= F_4 \cdot L_9 + F_5 \cdot L_{10} \\ 843 &= 3 \cdot 76 + 5 \cdot 123 \\ 843 &= 843, \end{aligned}$$

- $n = 8$:

$$\begin{aligned} L_{8+6} &= F_7 \cdot L_6 + F_8 \cdot L_7 \\ 843 &= 13 \cdot 18 + 21 \cdot 29 \\ 843 &= 843. \end{aligned}$$

Naposljetku navodimo još jedan identitet koji povezuje Fibonaccijeve i Lucasove brojeve, ali zanimljivo je i da se može koristiti za definiranje ova dva niza brojeva.

Teorem 13 (vidjeti [4, Formula 3.4])**.** *Neka je F_n Fibonaccijev, a L_n Lucasov n-ti broj. Tada vrijedi*

$$L_n{}^2 - 5F_n{}^2 = 4 \cdot (-1)^n, \ \forall n \geq 1.$$

Dokaz. Iskoristimo Cassinijevu formulu i definiciju Fibonaccijevih brojeva:

$$\begin{aligned} F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n{}^2 &= (-1)^n \\ (F_{n+1} - F_n)F_{n+1} - F_n{}^2 &= (-1)^n \\ F_{n+1}{}^2 - F_n \cdot F_{n+1} - F_n{}^2 &= (-1)^n \quad / \cdot 4 \\ 4F_{n+1}{}^2 - 4F_n \cdot F_{n+1} - 4F_n{}^2 &= 4(-1)^n \\ (2F_{n+1} - F_n)^2 - 5F_n{}^2 &= 4(-1)^n \\ (2F_{n+1} - (F_{n+1} - F_{n-1}))^2 - 5F_n{}^2 &= 4(-1)^n \\ (F_{n+1} + F_{n-1})^2 - 5F_n{}^2 &= 4(-1)^n. \text{ Iskoristimo Teorem 12} \\ L_n{}^2 - 5F_n{}^2 &= 4(-1)^n. \end{aligned}$$

□

Uzmemo li na primjer 11. Fibonaccijev i Lucasov broj, vidimo da je ${L_{11}}^2 - 5 \cdot {F_{11}}^2 = 199^2 - 5 \cdot 89^2 = 39601 - 39605 = -4$, a prema prethodno navedenom teoremu ta razlika jednaka je $4 \cdot (-1)^{11} = -4$, što smo i trebali dobiti.

5 | Binetova formula i zlatni rez

Uz proučavanje brojnih svojstava Fibonaccijevih brojeva, tj. Fibonaccijeva niza, matematičari su istraživali i konvergira li Fibonaccijev niz ili ne. Jedan od prvih koji je uočio da, kako povećamo n, omjer F_{n+1}/F_n se sve više približava broju približno jednakom 1.618033, je Johannes Kepler (1571.-1630.). Poznati matematičar i astronom danas je poznat po brojnim postignućima u astronomiji, no velik doprinos dao je matematici, optici i poznavanju svjetlosti. Zanimljivo je da i Lucasov niz također povećanjem n-a kovergira prema istom broju. Broj koji približno iznosi 1.618 poznat je kao **zlatni rez**, a česta je pojava u prirodi, arhitekturi i umjetnosti. Za vrijednost zlatnog reza uzima se $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$. Pogledajmo najprije konvergenciju Fibonaccijeva niza. Označimo li s $x = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_n+1}{F_n}$, imamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} \right) \\
\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} \right) \\
\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} \\
x &= 1 + \frac{1}{x} \\
x^2 &= x + 1 \\
x^2 - x - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Slijedi nam $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. No, kako je limes Fibonaccijevih brojeva pozitivan broj, zaključujemo da je:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Zaključak za Lucasove brojeve možemo donijeti analogno. Ako je $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$ i $\beta = 1 + \frac{1}{\beta}$ vrijedi:

$$\alpha - 1 = \alpha^{-1}, \tag{5.1}$$

$$\beta - 1 = \beta^{-1}. \tag{5.2}$$

Sljedeći teorem poznat je kao **Binetova formula**, a daje nam formulu za računanje Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva. Obzirom da ovisi samo o n, za velike Fibonaccijeve i Lucasove brojeve lakše je koristiti navedenu formulu.

Teorem 14 (vidjeti [2, Lemma 3.3.1., Lemma 3.3.2.]). *Neka su rješenja jednadžbe* $x^2 - x - 1 = 0$ *brojevi* $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *i* $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. *Tada vrijedi:*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \quad \forall n \geq 1,$$
$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \quad \forall n \geq 1.$$

Dokaz. Tvrdnje teorema dokazat ćemo metodom matematičke indukcije.

1. **Baza indukcije**
   Provjeravamo vrijedi li tvrdnja za $n = 1$. Za Fibonaccijeve brojeve imamo:

$$F_1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\sqrt{5}}$$
$$F_1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}$$
$$F_1 = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1,$$

   a kako je $F_1 = 1$, tvrdnja vrijedi. Za Lucasove brojeve imamo:

$$L_1 = \alpha^1 + \beta^1$$
$$L_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
$$L_1 = 1,$$

   a obzirom da je $L_1 = 1$, tvrdnja je valjana.

2. **Pretpostavka indukcije**
   Pretpostavimo kako su tvrdnje:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}},$$
$$L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

   istinite za $n \in \{2, 3, \ldots, k-1, k\}$.

3. **Korak indukcije**
   Koristeći pretpostavku indukcije, pokažimo da tvrdnje vrijede za $n = k + 1$. Za Fibonaccijeve brojeve imamo:

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_{k-1} + F_k \\ &= \frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\alpha^k}{\sqrt{5}}\left(1 + \alpha^{-1}\right) + \frac{\beta^k}{\sqrt{5}}\left(1 + \beta^{-1}\right) \end{aligned}$$

Ako iskoristimo (5.1) i (5.2) dobivamo:

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= \frac{\alpha^k}{\sqrt{5}}\Big(1+\alpha-1\Big) + \frac{\beta^k}{\sqrt{5}}\Big(1+\beta-1\Big) \\ &= \frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Za Lucasove brojeve imamo:

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= L_k + L_{k-1} \\ &= \alpha^k + \beta^k + \alpha^{k-1} + \beta^{k-1} \\ &= \alpha^k(1+\alpha^{-1}) + \beta^k(1+\beta^{-1}). \end{aligned}$$

Analogno, iskoristimo li (5.1) i (5.2) dobivamo:

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= \alpha^k(1+\alpha-1) + \beta^k(1+\beta-1) \\ &= \alpha^{k+1} + \beta^{k+1}. \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnje teorema su istinite.

□

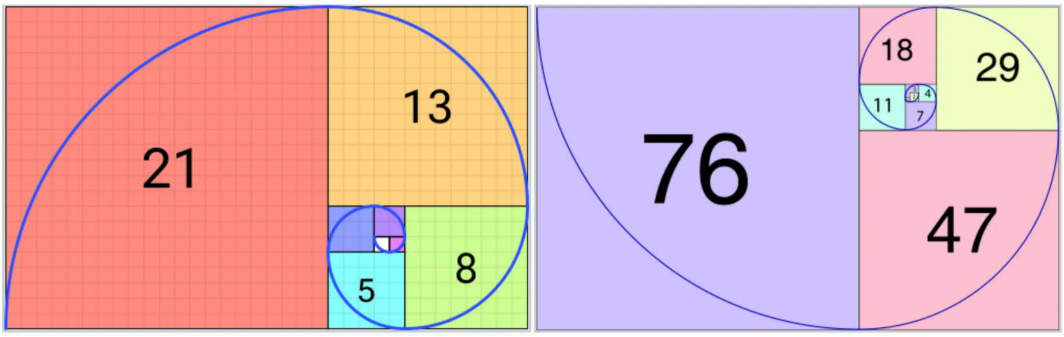
Uzmemo li za primjer $n = 20$, to je još uvijek relativno mali n, ali i dalje znači da moramo primjenjvati rekurzivnu formulu nekoliko puta. Lakše nam je samo uvrstiti n u prethodnu formulu i dobijemo

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{20} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{20}}{\sqrt{5}} = 6765\,, \\ L_n &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{20} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{20} = 15127. \end{aligned}$$

5.1 Zlatni rez i Fibonaccijevi brojevi oko nas

Zlatni rez pojavljuje se još u antici kao pojam koji su proučavali Euklid i Pitagora, a uz njih, razna poznata imena fizike, matematike i astronomije bavila su se ovom pojavom. Jedan od onih koji se istaknuo u proučavanju bio je L. Pacioli, koji je ujedno preteča računovodstva, a imenovao je ovaj broj *božanskim omjerom*. Brojna istraživanja su pokazala da ljudsko oko smatra oblike u skladu sa zlatnim rezom estetski ugodnijima i lijepšima zbog čega ne čudi da je smatran idealnom proporcijom. Pogledamo li nematematičku stranu priče, ovaj broj upravo je iz tog razloga promatran i od strane glazbenika, slikara, arhitekta i biologa.

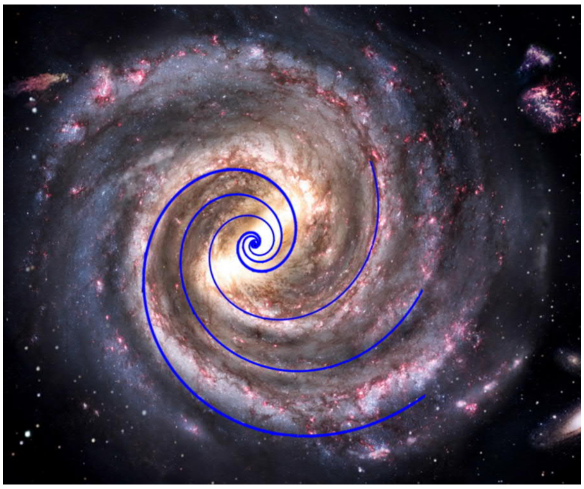
Uzmemo li Lucasove i Fibonaccijeve brojeve, možemo napraviti Fibonaccijevu i Lucasovu spiralu. Dobijemo ih tako što crtamo kvadrate duljina stranica jednakih članovima nizova (F_n) i (L_n), a zatim kroz njih nacrtamo spiralu. Fibonaccijeva



Slika 5.1: Fibonaccijeva(lijevo) i Lucasova(desno) spirala; slika preuzeta s [13]

spirala je vrlo dobra procjena takozvane *zlatne spirale* pa se najčešće poistovjećuju, a Lucasova spirala procjenjuje dobro zlatnu spiralu za veći n.

Brojne latice i listovi cvijeća prate Fibonaccijev ili Lucasov niz dok brojni geološki oblici kao što su školjke i minerali prate Fibonaccijevu ili Lucasovu spiralu. O Lucasovim brojevima i njihovoj pojavi u prirodi ne možemo reći puno jer su trenutno i dalje dosta neistraženi pa ćemo se osvrnuti detaljnije na Fibonaccijeve brojeve i spiralu. Na primjer, po putanji Fibonaccijeve spirale jastreb se obrušava na svoj plijen, a Mliječni put[1] istog je oblika.

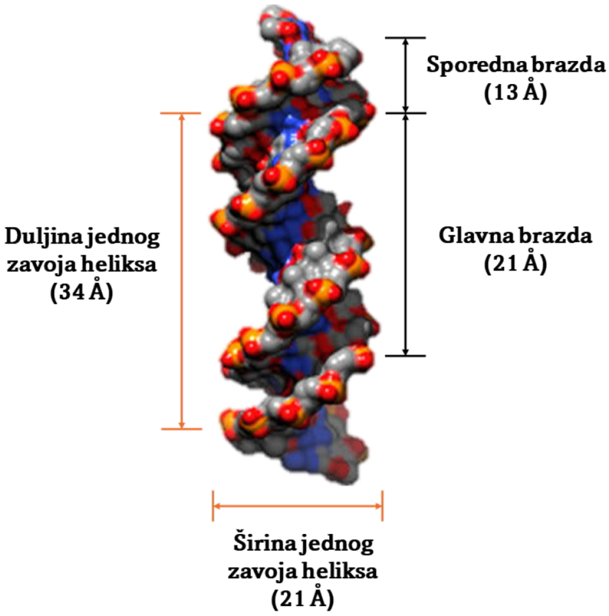


Slika 5.2: Mliječni put i Fibonaccijeva spirala

Još u 15. stoljeću, Leonardo da Vinci povezao je ljudsko tijelo sa zlatnim rezom u svom djelu *Vitruvijev čovjek*, no danas ga možemo povezati i s čovjekovim organizmom. Naime, pogledamo li građu molekule deoksiribonukleinske kiseline (poznatije kao *DNK*) na Slici 5.3 vidimo da je duljina sporedne baze 13 angstrema[2], dok je duljina glavne brazde je 21 angestrem, a toliko iznosi i širina jednog zavoja heliksa. Još imamo i duljinu jednog zavoja heliksa koja je jednaka 34 angstrema.

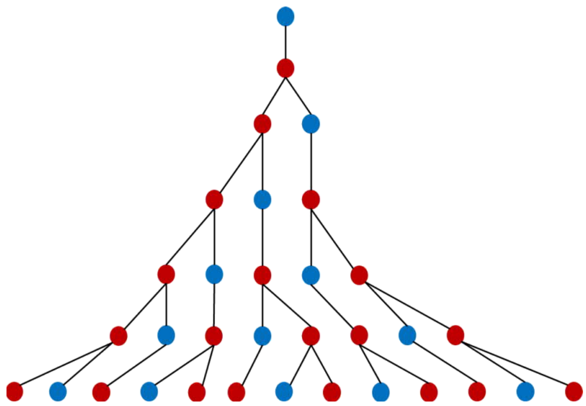
[1] Galaksija u kojoj se nalazi Sunčev sustav.

[2] Angstrem je jedinica duljine, a koristi se za vrlo male veličine (u mikroskopskom svijetu). Jedanaka je 10^{-10} metara, a ime je dobila po švedskom fizičaru Andersu Jonasu Ångströmu.



Slika 5.3: Građa DNK molekule

Širine i duljine u DNK molekuli su ništa drugo nego Fibonaccijevi brojevi i to F_7, F_8 i F_9, a njihovi omjeri približno su jednaki zlatnom rezu. Motivaciju o Fibonaccijevom nizu započeli smo s reprodukcijom zečeva, no sada ćemo se osvrnuti na razmnožavanje i raspodjelu pčela.



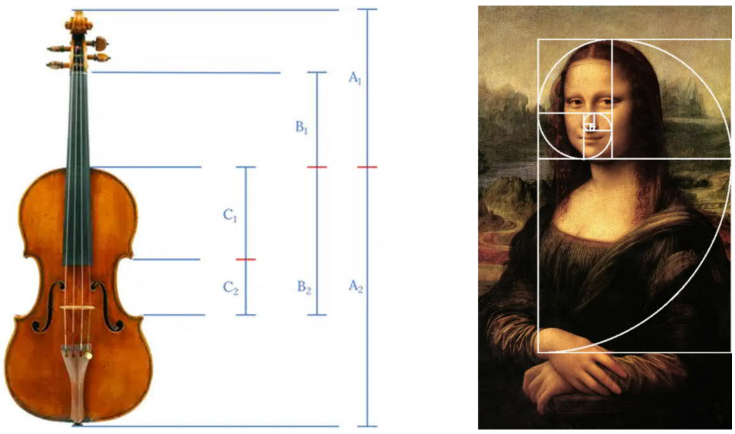
Slika 5.4: Shema razmnožavanja pčela (plavo-trutovi, crveno-pčele)

U košnici je uvijek više ženki nego mužjaka, a podijele li se ti brojevi, omjer je uvijek blizu zlatnog reza. Još jedna zanimljivost je ta da muške pčele (trutovi) imaju samo jednog roditelja, ženku[3], dok ženske pčele imaju dva roditelja, ženku i truta. Pogledajmo Sliku 5.4 koja predstavlja shemu razmnožavanja pčela. Započnemo li s trutom (1), njegov prvi predak je pčela (1). Njeni predci su jedna pčela i trut (2). Trut ponovno nastaje od jedne pčele, dok ženka nastaje od truta i pčele (3). U prethodnoj generaciji, kako bi nastale dvije pčele morali smo imati dva truta i dvije pčele, a za truta smo morali imati jednu pčelu (5). Analognim

[3]Muške pčele nastaju procesom partenogeneze - razvijaju se iz neoplođenih jajnih stanica.

zaključivanjem generacija prije imala bi 8 članova, pa ona prije nje 13, itd. Uočavamo da "obiteljsko stablo" pčela prati Fibonaccijev niz (isto bi vrijedilo za ženke samo bi počeli od $F_2 = 1$).

Leonardo da Vinci, jedan od najpoznatijih umjetnika, ali i povijesnih osoba ikad, također je jedan od poznatijih slikara koji su se koristili zlatnim rezom. Na mnoštvu njegovih slika, pa i na poznatoj Mona Lisi[4], uočava se Fibonaccijeva spirala i zlatni rez. Uz da Vincija, pojavljuju se još brojna poznata slikarska imena kao Rembrandt, Michelangelo, Boticelli, Dali i Mondrian. Slikarstvo nije jedina grana umjetnosti gdje možemo pronaći Fibonaccija i zlatni rez. Pogledamo li sastav tipki na klaviru, jedna oktava sadrži 13 tipki. Gledamo li gornji pa donji red, imamo najprije dvije crne pa tri crne tipka (u zbroju daju 5 što je ukupan broj crnih tipki). Zatim ide 8 bijelih tipki i u sumi nam daju ukupno 13 tipki jedne oktave. Jedne od naskupljih violina na svijetu su Stradivarius violine, a pravljene su na temelju zlatnog reza (pogledamo li Sliku 5.5, omjeri $A_2/A_1 = B_2/B_1 = C_1/C_2 \approx 1.618$). Proučavanjem raznih skladbi, ustanovljeno je da se zlatni rez često koristi pri formiranju ritamskih ciklusa, odnosa među tonovima i/ili akordima te u strukturiranju duljine kompozicije. Tako se pokazalo da su zlatni rez primjenjivali i Mozart, Bach, Beethoven, Chopin, Debussy, Handel, a u novije vrijeme Lady Gaga.



Slika 5.5: Stradivarius violina i Mona Lisa; preuzeto s [12]

Korištenje Fibonaccijeva niza u stvaranju loga brojnih tvrtki, u reklamama i igricama, pokazuje nam da Fibonaccijevi brojevi nisu samo povjesno važna pojava, već da i danas imaju široku primjenu. *Elite* je video igra smještena u svemir koju su 1984. osmislili D. Braben i I. Bell. Zamisao je bila da računalo samo kreira igru na temelju nekoliko unaprijed stvorenih svemira i scenarija, no to je zahtjevalo previše memorije. Problem su riješili prisjetivši se Fibonaccijeva niza i napravili analogon u računalnom svemiru. Kako Fibonaccijev niz ima početne uvjete, odlučili su da će to morati imati i njihova igra i to su nazvali *seed*. Nakon što svaki igrač unese svoj *seed*, kodovi napravljeni po uzoru na Fibonaccijev niz su generirali nove svijetove i zadatke.

Svoju primjenu Fibonaccijev niz pronašao je i u poeziji. *Fibs* je termin skovan za Fibonaccijeve pjesme, a od 2006. postoji i online stranica *The Fib Review* na kojoj

[4] Originalno ime ove slike je *La Gioconda*. Izvedena je tehnikom ulje na drvetu.

se one objavljuju. To su pjesme od 6 stihova u kojima je raspored po stihovima $1, 1, 2, 3, 5, 8$, a autor bira hoće li te brojke prezentirati broj slogova ili broj riječi u stihu. Bitno je naglasiti da se interpunkcijski znakovi također broje. Tema pjesme može biti bilo što, a cilj pjesme je u organiziranom uzorku poslati poruku i dotaknuti čitatelja.

Literatura

[1] S. ALLEN, T. I. SAAB, , *Master Fibonacci: The Man Who Changed Math*, Fibonacci Inc., Dallas, 2019.

[2] B. BARIK, *Lucas sequence, its properties and generalization*, National Institute Of Technology Rourkela, Rourkela, 2013.

[3] M. J. DEVČIĆ, *Fibonacci, zečevi i pčele*, Matka **19**(2010), 218–221.

[4] A. DUJELLA, *Fibonaccijevi brojevi*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.

[5] A. DUJELLA, *Teorija brojeva*, Školska knjiga d. d., Zagreb, 2019.

[6] V. E. HOGGATT, JR., *Fibonacci and Lucas Numbers*, The Fibonacci Association, Santa Clara, 1979.

[7] D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[8] T. KOSHY, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley & Sons, Inc., Massachusetts, 2001.

[9] I. MATIĆ, *Uvod u teoriju brojeva*, Odjel za matematiku, Osijek, 2015.

[10] A. STAKHOV, *Mathematics of Harmony as a New Interdisciplinary Direction and "Golden" Paradigm of Modern Science*, World Scientific Publishing Co, Singapore, 2019.

[11] *MacTutor: François Édouard Anatole Lucas*, dostupno na `\https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lucas/`

[12] *What is the Fibonacci Sequence – and why is it the secret to musical greatness?*, dostupno na `\https://www.classicfm.com/discover-music/fibonacci-sequence-in-music/`

[13] *What, Exactly, are Lucas Numbers?*, dostupno na `\https://www.cantorsparadise.com/`

Sažetak

U ovom radu definirali smo Fibonaccijeve brojeve i njihova svojstva, a također smo se upoznali i s rezultatima vezanim uz djeljivost Fibonaccijevih brojeva. Proučili smo i niz brojeva usko vezan za Fibonaccijeve brojeve, a to je Lucasov niz. Osvrnuli smo se i na neka njegova svojstva, a potom i na identitete koji povezuju Lucasove i Fibonaccijeve brojeve. Uveli smo i bitne formule za Fibonaccijeve i Lucasove brojeve, a to su Cassinijeva i Binetova formula. Pomoću Binetove formule povezali smo ova dva niza brojeva sa zlatnim rezom, a potom i brojnim pojavama u arhitekturi, umjetnosti i prirodi.

Ključne riječi

Fibonaccijev niz i brojevi, Lucasov niz i brojevi, djeljivost, Cassinijeva formula, Binetova formula, zlatni rez

Properties of Fibonacci and Lucas numbers

Summary

In this paper, we defined the Fibonacci numbers and their properties. Also we familiarized ourselves with results related to the divisibility of Fibonacci numbers. We studied a sequence closely related to Fibonacci numbers, known as the Lucas sequence. We also discussed some of its properties, followed by identities connecting Lucas and Fibonacci numbers. We introduced formulas for Fibonacci and Lucas numbers were introduced, known as Cassini's and Binet's formulas. Through the Binet formula, we connected these two sequences of numbers with the golden ratio, and subsequently with numerous phenomena in architecture, art, and nature.

Keywords

Fibonacci sequence and numbers, Lucas sequence and numbers, divisibility, Cassini's formula, Binet's formula, golden ratio

Životopis

Rođena sam 11. studenog 1999. godine u Vinkovcima. Tamo sam pohađala Osnovnu školu Vladimira Nazora te opću gimnaziju u Gimnaziji Matija Antun Reljković. Srednju školu završavam u lipnju 2018. godine te u listopadu iste godine upisujem Preddiplomski studij Matematika na Odjelu za matematiku, sadašnjem Fakultetu primijenjene matematike i informatike u sastavu Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku. Studij završavam 2021. godine s temom "Analitičke funkcije kompleksne varijable" pod mentorstvom izv. prof. dr. sc. Ivana Solde. Na istom fakultetu sam iste godine upisala diplomski studij, modul: financijska matematika i statistika. Za vrijeme studiranja držala sam demonstrature iz Pretkolegija, a tokom završne godine studija zaposlila sam se kao pripravnik u Privrednoj banci Zagreb u Zagrebu.