Povijesni pregled spektalne teorije

Sočivica, Sanja

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Sanja Sočivica

Povijesni pregled spektralne teorije

Završni rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Sanja Sočivica

Povijesni pregled spektralne teorije

Završni rad

Mentor: prof.dr.sc Ivan Matić

Osijek, 2023.

Sažetak

U ovom radu upoznat ćemo se s osnovnim rezultatima iz spektralne teorije. Prvo ćemo uvesti pojmove: spektar operatora, svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori operatora i druge pojmove potrebne za razumijevanje. Zatim ćemo istaknuti povijesni kontekst razvoja spektralne teorije. Definirati ćemo pojam spektralnog radijusa te iskazati jedan od najvažnijih rezultata spektralne teorije: spektralni teorem. Za kraj navodimo značaj fizike u razvoju spektralne teorije.

Ključne riječi

spektar, svojstvena vrijednost, svojstveni vektor, spektralni teorem

A historical overview of spectral theory

Summary

In this final paper, we will mention the basic results from spectral theory. First, we will introduce the concepts of spectrum, eigenvalues, eigenvectors and other necessary concepts. Next, we will highlight the historical context for the development of spectral theory. We will define the spectral radius and state one of the most important results of spectral theory: the spectral theorem. Finally, we mention the importance of physics in the development of spectral theory.

Keywords

spectrum, eigenvalue, eigenvector, spectral theorem

Sadržaj

Uvod **i**

1 Osnovni pojmovi **1**

2 Početak spektralne teorije **6**

2.1 Teorem o glavnim osima 6
2.2 Hilbertov doprinos 6
2.3 Linearni funkcionali 10
2.4 Spektralni radijus 11
2.5 Spektralni teorem 12

3 Spektar atoma **13**

Literatura **14**

Uvod

Spektralna teorija je grana matematike koja proučava svojstvene vrijednosti i spektar operatora. Ime spektar dolazi od Davida Hilberta koji je pojam definirao pri proučavanju integralnih jednadžbi. Da se neke matrice mogu dijagonalizirati znalo se je i ranije, no tek se u zadnja dva stoljeća za pojmovi iz spektralne teorije javlja rigorozan interes. Spektralna teorija razvija se zajedno sa teorijom operatora i teorijom mjere, a koristi se rezultatima iz funkcionalne analize. Koristi se u numeričkoj matematici, a pokazala se i kao neizostavni matematički alat u kvantnoj fizici. U ovom radu prvo će biti obrađeni neki osnovni pojmovi koji će biti korišteni u daljnjem tekstu. U glavnom dijelu uvesti ćemo pojmove vezane za spektar operatora počevši od kvadratnih formi i teorema o glavnim osima. Dio 2.2 govori o prvim pojmovima koje je uveo Hilbert, a zatim slijedi nešto o linearnim funkcionalima. Uvedeni su pojmovi spektralnog radijusa i neka njegova svojstva, a na kraju drugog poglavlja je iskazan spektralni teorem. Poglavlje 3 pojašnjava zašto je spektar operatora važan za fiziku.

1 Osnovni pojmovi

Vektorski prostor nad poljem F je neprazan skup V koji je komutativna grupa s obzirom na operaciju zbrajanja i na kojem je definirana operacija množenja sa skalarima iz polja koja je distributivna s obzirom na obje operacije zbrajanja. Ima svojstvo kvaziasocijativnosti, te za jedinicu vrijedi : $1v = v, \forall v \in V$.
Baza vektorskog prostora je linearno nezavisna n-torka koja razapinje vektorski prostor, tj svaki vektor se može zapisati kao linearna kombinacija vektora baze. Ako su X i Y vektorski prostori, svako preslikavanje $A : X \to Y$ nazivamo operator. Operator je linearan ako je aditivan i homogen. Skup svih linearnih operatora iz X u Y, gdje su X i Y konačnodimenzionalni vektorski prostori, je također vektorski prostor. Na njemu su definirane operacije zbrajanja i množenja skalarom. Skup svih linearnih operatora $A : X \to Y$ označavamo sa $L(X, Y)$.

Definicija 1 ([4], Poglavlje 3). *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor i* $A \in L(V) = L(V, V)$ *spektar operatora* A*, u oznaci* $\sigma(A)$*, je skup svih skalara* $\lambda \in F$ *takvih da operator* $A - \lambda I$ *nije invertibilan.*

Definicija 2 ([4], Poglavlje 3). *Neka je* V *konačnodimenzionalni vektorski prostor i* $A \in L(V)$*. Kažemo da je skalar* $\lambda \in F$ *svojstvena vrijednost operatora ako postoji vektor* $v \in V$*,* $v \neq 0$*, takav da je* $\lambda v = Av$*.*

Vektor v nazivamo svojstveni vektor operatora A s obzirom na svojstvenu vrijednost λ. Skup takvih vektora nazivamo svojstveni potprostor operatora A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Dimenzija tog potprostora, s obzirom na svojstvenu vrijednost λ, nazivamo geometrijska kratnost.

Propozicija 1 ([4], Poglavlje 3). *Neka je* V *konačnodimenzionalan vektorski prostor i* $A \in L(V)$*. Spektar* $\sigma(A)$ *operatora* A *je skup svih svojstvenih vrijednosti tog operatora.*

Definicija 3 ([4], Poglavlje 3). *Polinom* $k_A = det(A - \lambda I)$ *nazivamo karakteristični polinom operatora* A*.*

Svaka matrica A poništava svoj karakterističnom polinom, vrijedi da je $k_A(A) = 0$. Polinom najmanjeg stupnja u kojemu se matrica poništava nazivamo minimalni polinom. On uvijek dijeli karakteristični polinom. Nultočke karakterističnog polinoma su i nultočke minimalnog polinoma. Razlikuju se po kratnostima nultočaka.

Kratnost određene točke karakterističnog polinoma nazivamo algebarska kratnost, a kratnost nultočke minimalnog polinoma geometrijska kratnost. Geometrijska kratnost uvijek je manja ili jednaka algebarskoj.

Teorem 1 ([4], Propozicija 3.1)**.** *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor i $A \in L(V)$. Tada je spektar operatora A skup nultočaka njegovog minimalnog polinoma.*

Zapis matričnog operatora ovisi o bazama prostora koje se koriste. Ako je operator zapisan u paru baza $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ i $f = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$, koristit ćemo zapis $A(e, f)$. Operator je potpuno određen djelovanjem na vektore baze. Matrice operatora u različitim bazama su slične. Budući da slične matrice imaju jednake determinante, dobro je koristiti definiciju spektra preko determinante.

Ako geometrijska i algebarska kratnost nisu jednake, ne može se pronaći baza u kojoj je matrica operatora dijagonalna. U tom slučaju potrebno su metode kojima se pronalazi matrica koja je najbliža dijagonalnoj, npr. Jordanova forma. Postoje i druge metode koje su numerički prikladnije.

Vektorski prostor nad poljem F nadalje ćemo označavati sa X.

Definicija 4 ([2], Definicija 1.1.1)**.** *Norma je preslikavanje $||x|| : X \to \mathbb{R}$, koje vektoru x pridružuje $||x||$, a ima sljedeća svojstva:*

1. $||x|| \geq 0, \forall x \in X$,
2. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
3. $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||, \forall x \in X, \forall \lambda \in F$,
4. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in X$.

Normirani prostor je uređen par $(X, ||\cdot||)$ vektorskog prostora X i norme na njemu.

Norma se može definirati i za matrice kojoj smo pridružili operator u paru baza. Uvođenjem normi postat će moguće govoriti o neprekidnosti i konvergenciji, ne samo funkcija, već i operatora.

Definicija 5 ([5], Poglavlje 1.2). *Označimo sa $F_{m,n}$ skup svih matrica s m redaka i n čiji su koeficijenti iz polja F. Matrična norma je preslikavanje $||A|| : F_{m,n} \to \mathbb{R}$, koje matrici A pridružuje $||A||$, a ima sljedeća svojstva:*

1. $||A|| \geq 0, \ \forall A \in F_{m,n}$,

2. $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,

3. $||\lambda A|| = |\lambda| ||A||, \ \forall A \in F_{m,n}, \forall \lambda \in F$,

4. $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||, \ \forall A, B \in F_{m,n}$.

Definicija 6 ([4], Poglavlje 8). *Skalarni produkt na X je preslikavanje $(\cdot|\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}, (x, y) \to (x|y)$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $(x|x) \geq 0, \ \forall x \in X$,

2. $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

3. $(x|y) = \overline{(y|x)}, \ x, y \in X$,

4. $(\lambda x + \mu y|z) = \lambda(x|z) + \overline{\mu}(y|z), \ \lambda, \mu \in K, x, y, z \in X$.

Unitaran prostor je uređeni par $(X, (\cdot|\cdot))$ vektorskog prostora i skalarnog produkta.
Za vektore iz unitarnog prostora X kažemo da su ortogonalni ako im je skalarni produkt jednak 0. Kažemo da je skup je ortogonalan ako su mu svaka dva vektora

međusobno ortogonalna. Kažemo da je skup ortonormiran ako je ortogonalan i ako mu je svaki vektor jedinični. Važna otkrića za daljnji razvoj spektralne teorije su ta da je ortonormiran skup linearno nezavisan i nadalje, da unitaran prostor uvijek ima ortonormiranu bazu. Primjer ortonormiranog skupa su Fourierovi polinomi, koji se koriste u aproksimaciji funkcija.

Definicija 7 ([2], Definicija 1.3.1). *Niz* $(x_n)_n$ *u* X *je konvergentan ako za neki* $x \in X$ *niz brojeva* $(||x_n - x||)_n$ *konvergira i vrijedi:* $lim_n(||x_n - x||) = 0$.

Definicija 8 ([2], Definicija 1.3.2). *Niz* $(x_n)_n$ *je Cauchyjev ako*
$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m \in N, n, m \geq n_\epsilon \implies ||x_n - x|| < \epsilon$.

Svaki konvergentan niz je Cauchyjev. Normiran prostor je potpun ako je svaki Cauchyjev niz u njemu konvergentan. Konačnodimenzionalan normiran prostor je potpun. Normiran prostor X je potpun ako je u njemu svaki Cauchyjev niz konvergentan. Potpun normiran prostor nazivamo Banachov prostor. Potpun unitaran prostor nazivamo Hilbertov prostor.

Definicija 9 ([1], Definicija 2.4).
1. *Kažemo da je operator* $A \in (X)$ *poluprost ako u* x *postoji baza* e *takva da je* $A(e)$ *dijagonalna matrica*
2. *Kažemo da je matrica* $A(e)$ *poluprosta ako je slična regularnoj matrici.*
3. *Kažemo da je operator (matrica) nilpotentan (nilpotentna) ako postoji prirodni broj* k *takav da je* $A^k = 0$. *Najmanji* k *s tim svojstvom naziva se indeks nilpotentnosti.*

Skup S je konveksan ako za svake njegove dvije točke x i y, njihova spojnica tj skup točaka: $tx + (1 - t)y, 0 \leq t \leq 1$ također leži u skupu S.

Propozicija 2 ([2], Teorem 1.11.9). *Neka je* X *Hilbertov prostor i* K *neprazan zatvoren konveksan skup u* X. *Za svaki* X *postoji jedinstven vektor* $y_0 \in K$ *takav da je:*

$$||x - y_0|| = inf\{||x - y||; y \in K\}.$$

Operator $P : X \to K$ koji vektoru pridružuje njegovu najbolju aproksimaciju u K se naziva projektor. Za projektor vrijedi da je $P^2 = P$.

Paralelno sa spektralnom teorijom, detaljnije se razvija teorija mjere koja daje formalni matematički temelj za proširenje pojmova veličine i udaljenosti. Mjera je nenegativna i σ-aditivna funkcija, što znači da ima svojstvo aditivnosi i za beskonačne skupove. Definira se na izmjerivom prostoru, koji čine skup ω i sigma-algebra na njemu. Da bi razumjeli Lebesgueov integral, prvo bi se trebali upoznati s konceptima kao što je izmjerljiva funkcija, no zasad je dovoljno je da znamo da tako definiran integral ima očekivana svojstva kao što su homogenost, aditivnost i monotonost. Prednost Lebesgueovog integrala, u odnosu na Riemannov, leži u njegovoj sposobnosti integriranja općenitijih klasa funkcija.

Definicija 10 ([2], Definicija 2.2.1). *Algebra $\mathcal{A}$ je vektorski prostor nad poljem F u kojemu je definirana operacija $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sa svojstvima:*

1. $a(bc)=(ab)$, $\forall a, b, c \in \mathcal{A}$,
2. $\lambda(ab) = a(\lambda b) = \lambda(ab), \forall a, b \in \mathcal{A}, \forall \lambda \in F$,
3. $a(b + c) = ab + ac, (a + b)c = ac + bc, \forall a, b, c \in \mathcal{A}$.

Definiraju se i algebra s jedinicom, ideali te izomorfizam algebri.

Definicija 11 ([2], Definicija 2.2.5). *$\mathcal{A}$ je normirana algebra ako vrijedi:*

1. *$\mathcal{A}$ je algebra s jedinicom nad F,*
2. *$\mathcal{A}$ je normiran prostor*
3. $||ab|| \leq ||a||||b||$,
4. $||e|| = 1$.

2 Početak spektralne teorije

2.1 Teorem o glavnim osima

Polinom u varijablama $x_1, ..., x_n$ s koeficijentima iz polja F, gdje su svi članovi stupnja p, naziva se forma stupnja p. To je funkcija $G : F^n \to F$ definirana s:

$$G(x_1, x_2, .., x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j,\ a_{ij} \in F, x \in F^n.$$

Jednostavnije,kvadratna forma se može zapisati kao $x^T Ax$,
gdje je $A = [a_{ij}]$ matrica s elementima iz polja F, a $x = [x_1 x_2 ... x_n]^T$.
Primjerice, za matricu $A \in M_2(F)$:

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2.$$

Ukoliko je matrica A dijagonalna, reći ćemo da je kvadratna forma G dana s $G(x) = x^T Ax$ kanonska. Jedan teorem koji se može povezati sa početkom spektralne teorije je tzv. Teorem o glavnim osima.

On vrijedi za kvadratnu forma $x^T Ax$ u varijablama $x_1, ..., x_n$, gdje je A simetrična matrica. Teorem tvrdi da tada postoji ortonormirana matrica S takva da je

$$S^T AS = D,$$

,gdje je D dijagonalna matrica na čijoj se dijagonali nalaze svojstvene vrijednosti, a S matrica kojoj su stupci ortonormirani svojstveni vektori matrice A. Teorem se dopunjuje doprinosom matematičara Sylvestra i Cayleya koji su otkrili da su svojstvene vrijednosti matrice korijeni njezina karakterističnog polinoma.

2.2 Hilbertov doprinos

Korak dalje u razvoju spektralne teorije je prelazak iz konačnodimenzionalnih u beskonačnodimenzionalne prostore. Cramer je 1750. godine uveo novu metodu za rješavanje 3×3 sustava linearnih jednadžbi koja nosi njegovo ime. 1885. godine Poincare uvodi preciznu definiciju determinanti koja uključuje i prostore koji nisu konačni. Ta teorija se nadalje koristi za rješavanje integralnih jednadžbi, za čiji razvoj je velikim djelom zaslužan Abel. Početkom 20. stoljeća matematičar Hilbert fokusiran je na rješavanje integralnih jednadžbi. To su jednadžbe općeg oblika:

$$g(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)y(t)dt.$$

Funkciju K nazivamo jezgrom, a f je funkcija smetnje. Ako su granice integracije konstantne, radi se o Fredholmovoj jednadžbi. Integralnim jednadžbama bavio se Abel, a velik dio života posvetio im je Hilbert. Za potrebe rješavanja takvih jednadžbi definirao je brojne pojmove iz spektralne teorije, iako mu predmet istraživanja u tom trenutku uopće nisu bile matrice operatora. Naime, za rješavanju integralnih jednadžbi, potrebne su svojstvene funkcije, za koje je Hilbert znao da su ortogonalne. Hilbert također formulira i dokazuje spektralni teorem, no služi se terminima formi. Hibertov sljedbenici usavršavaju i nadopunjuju njegov rad te uvode pojam Hilbertov prostor. Hilbertov učenik i suradnik Schmidt je uveo pojam l^2 prostora i proširio Grammov postupak ortogonalizacije na njega. Iako im u tom trenutku spektralna teorija nije bila područje od velikog interesa, niti su se služili današnjim terminima, njihov doprinos je neizostavan.

Prije sljedeće definicije, prisjetiti ćemo se potrebnih pojmova. Podskup S normiranog prostora X je gust u prostoru X ako je $Cl(S) = X$. Zatvarač skupa S, koji se označava sa $Cl(S)$, definira se kao presjek svih zatvorenih skupova u X koji sadrže skup S.

Definicija 12 ([3], Definicija 2)**.** *Neka je X kompleksan Banachov prostor, i neka je $\sigma(A)$ spektar ograničenog linearnog operatora A, $\lambda \in \sigma(A)$.*

1. *λ pripada točkovnom spektru ako $(\lambda I - A)$ nije injekcija.*
   Skup svih takvih λ označavamo sa σ_p i nazivamo točkovnim spektrom operatora A.

2. *λ pripada neprekidnom spektru ako je $(\lambda I - A)$ injekcija i $(\lambda I - A)(X)$ gust potprostor od X.*
   Skup svih takvih λ označavamo sa $\sigma_n(A)$ i nazivamo neprekidnim spektrom operatora A.

3. *λ pripada residualnom spektra ako je $(\lambda I - A)$ injekcija, ali $(\lambda I - A)(X)$ nije gust potprostor od X.*
   Skup svi takvih λ označavamo sa $\sigma_r(A)$ i nazivamo rezidualni spektar operatora A.

Navedeni skupovi su međusobno disjunktni. Ako je $dimX < \infty$ onda je spektar operatora točkovni spektar.
Komplement spektra u prostoru kompleksnih brojeva nazivamo rezolventi skup.

Za prostor X kažemo da je separabilan ako postoji prebrojiv podskup D koji je gust u X. Normiran prostor je separabilan ako i samo ako ima prebrojivu bazu.

Još jedan rezultat Hilbertovog rada je definiranje kompaktnih operatora. Skup S je kompaktan ako svaki niz u S ima konvergentan podniz. Ekvivalentno, skup je kompaktan ako svaki njegov otvoren pokrivač ima konačan potpokrivač. Skup je relativno kompaktan ako i samo ako mu je zatvarač $Cl(S)$ kompaktan.

Definicija 13 ([5], Poglavlje 1.2)**.** *Neka su X i Y normirani prostori i $A : X \to Y$ linearan operator. Operator A je kompaktan ako je skup*

$$\{Ax : x \in x, ||x|| \leq 1\}$$

relativno kompaktan podskup od Y.

Definicija 14 ([5], Poglavlje 1.2)**.** *Neka su X i Y normirani prostori. Za linearan operator $A : X \to Y$ kažemo da je ograničen ako postoji $M > 0$ takav da je*

$$||Ax|| \leq M||x||, \forall x \in X.$$

Najmanji takav M nazivamo norma operatora.

Propozicija 3 ([5], Korolar 2.1)**.** *Normiran prostor je konačnodimenzionalan ako i samo ako je svaki njegov ograničen i zatvoren podskup kompaktan.*

Propozicija 4 ([5], Propozicija 2.1)**.** *Svaki kompaktni operator je ograničen.*

Ako je operator kompaktan, može se donijeti velik broj zaključaka o njegovim svojstvenim vrijednostima. Važan rezultat do kojeg je došao Hilbert tvrdi da je spektar operatora A ograničen skup kada je A ograničen operator. Slabo konvergentan niz u Hilbertovom prostoru je ograničen.

Teorem 2 ([2], Propozicija 1.6.1)**.** *Neka su X i Y normirani prostori i $A \in L(X, Y)$. Sljedeća svojstva su ekvivalentna:*

1. *Operator A je ograničen.*

2. Operator A je neprekidan u nekoj točki $x_0 \in X$.

3. Operator A je neprekidan u svakoj točki $x_0 \in X$.

4. Operator A je uniformno neprekidan na X.

Skup svih ograničenih opereratora $B(X,Y)$ je potprostor od $L(X,Y)$.

Hilbert proširuje Teorem o glavnim osima na simetrične ograničene operatore. U dvadesetom stoljeću projekcija vektora u normiranom prostoru relativno je nov koncept, budući da se do tada precizni termini za normu nisu koristili. Za spektralnu teoriju ključan je koncept projekcije vektora na prostor razapet svojstvenim vektorima. Točnost projekcije će ovisiti o veličini neprekidnog spektra operatora. Točniju projekciju imaju oni operatori kojima je neprekidni spektar prazan. Hilbert koristi Stiltesov integral kako bi uvažio doprinos neprekidnog spektra u projekciji na prostor svojstvenih vektora. U njemu se za točkasti spektar koristi sumacija tj. linearna kombinacija svojstvenih vektora za točkasti spektar, a za neprekidni spektar se koriste integrali. Očito je da je za daljni razvoj spektralne teorije bilo potrebno prilagoditi i pojam integrala. Ovdje se i je dobila jasna veza između koncepata ortogonalnosti i operatora.
Iako se Hilbert bavio realnim matricama, njegova se teorija dala proširiti i na polje kompleksnih brojeva. Uveden je pojam hermitske matrice, i dokazano je da su njezine svojstvene vrijednosti isključivo realni brojevi.

Teorem 3 ([4], Teorem 8.9)**.** *Neka su X i Y konačnodimenzionalni unitarni vektorski prostori. Za svaki $A \in L(X,Y)$ postoji jedinstven A^* takav da je*

$$(Ax|y) = (x|A^*y),\ \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Vrijedi: $A^{**} = A$. Operator A^* nazivamo operatorom adjungiranom operatora A. Ako u konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru vrijedi da je $A^* = A$, operator A se naziva hermitski, a antihermitski je ako je $A^* = -A$.

Definicija 15 ([4], Poglavlje 8)**.** *Neka je U konačnodimenzional unitaran prostor i $A \in L(U)$. Za A kažemo da je unitaran ako vrijedi:*

$$(Ax|Ay) = (x|y), \forall x, y \in U.$$

Ekvivalenta definicija bi bila reći da je $AA^* = A^*A = I$.
Definira se i normalan operator za kojega vrijedi da je $A^*A = AA^*$. Hermitski, antihermitski i unitarni operatoru su normalni. Poželjno je da operator bude normalan, jer onda postoji ortonormirana baza u kojoj je matrica operatora dijagonalna.

Teorem 4 ([4], Teorem 8.1)**.** *Neka je X konačnodimenzionalan realan ili kompleksan vektorski prostor i $A \in L(X)$ hermitski operator. Tada vrijedi:*

1. *Svi koeficijenti i nultočke polinoma $\mu_A(\lambda)$ su realni.*

2. *Postoji ortonormirana baza e prostora X sastavljena od svojstvenih vektora operatatora A, takva da je matrica $A(e)$ dijagonalna.*

Za hermitsku matricu A kažemo da je pozitivno semidefinitna ako vrijedi da je $(Ax|x) \geq 0$. U slučaju stroge nejednakosti, kaže se da je pozitivo definitna. Matrica je pozitivno semidefinitna ako su joj sve svojstvene vrijednosti nenegativne (pozitivne za pozitivno definitnu matricu).

Propozicija 5 ([2], Teorem 1.11.9)**.** *Neka je $K \neq \emptyset$ zatvoren konveksan skup u Hilbertovom prostoru X i neka je $P : X \to K$ projekcija sa X na K. Tada je P neprekidan operator na X i vrijedi*

$$||P(x) - P(y) \leq ||x - y||, \forall x, y \in K.$$

2.3 Linearni funkcionali

Definicija 16 ([4], Poglavlje 2)**.** *Vektorski prostor $V' = L(V, F)$ nazivamo dualni prostor vektorskog prostora V.*

Elementi dualnog prostora nazivaju se linearni funkcionali. Jedan primjer linearnog funkcionala je integral. Postoje i drugi i viši dualni prostori. Izuzetno je važan Rieszov teorem o reprezentaciji linearnog funkcionala:

Teorem 5 ([4], Poglavlje 8)**.** *Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor i f linearan funkcional na U. Za svaki $f \in U'$ postoji jedinstveni $w \in U$ takav da je*

$$f(v)=(v|w), \forall v \in U.$$

Dokaz slijedi iz teorema o ortogonalnoj projekciji. Ovako definirano preslikavanje je antilinearna bijekcija iz V' u V.

Propozicija 6 ([2], Propozicija 1.11.14)**.** *Neka je U unitarni prostor. U je potpun ako i samo ako u njemu vrijedi Rieszov teorem o reprezentaciji linearnog funkcionala.*

Poznati Hahn-Banachov teorem tvrdi da se svaki se ograničeni linearan funkcional na potprostoru normiranog prostora može proširiti do ograničenog linearnog funkcionala na cijelom prostoru i to bez povećanja norme.

2.4 Spektralni radijus

Teorem 6 ([5], Teorem 3.1). *Neka je X realni ili kompleksni unitaran prostor i neka je A kompaktan simetričan operator na X. Tada je* $||A||$ *ili* $-||A||$ *svojstvena vrijednost operatora. Ako je* $||e||$ *jedinični svojstveni vektor za tu svojstvenu vrijednost, onda je:*

$$||A|| = |(Ae|e)| = sup \; \{ \; |(Ae|e), x \in S\}$$

Definicija 17 ([5], Poglavlje 2.2). *Spektralni radijus r(A) matrice je broj:*

$$r(A) := max\{|\lambda|; \; \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Može se definirati i kao broj:

$$inf\{||A^n||^{\frac{1}{n}}; n \in N\}.$$

Spektralni radijus ima razna korisna svojstva. Navedimo neka:

1. $r(\alpha A) = |\alpha| r(A)$,
2. $r(AB) = r(A) r(B)$,
3. $r(TAT^{-1}) = r(A)$,
4. $r(I) = 1$,
5. $r(A) = r(A(e))$, za svaku bazu e,
6. Ako je $det(A) \neq 0$, onda je $r(A) > 0$.

Spektar matrice jako je važan za numeričku matematiku. Ako je A kvadratna matrica s koeficijentima iz polja kompleksih brojeva i ako je $r(A) < 1$ onda znamo da A^k konvergira prema 0, kada k ide u ∞. Također je matrica $A - \lambda I$ regularna i vrijedi

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + ...$$

i taj red konvergira.

Tako definiran matrični red se zove Neumannov red i koristi se u rješavanju već spomenutih integralnih jednadžbi.

Posljedica ovog rezultata je to da se izvan radijusa konvergencije matrica $(A - \mu I)$ može razviti u red potencija za koji znamo da konvergira van kruga radijusa $r(A)$, a da unutar kruga divergira. Skup svih μ za koje je to moguće nazivamo rezolventi skup i označavamo s $\rho(A)$. To je skup kompleksnih brojeva bez spektra operatora. Pripadna operatorsku funkciju nazivamo rezolventa.

2.5 Spektralni teorem

Spektralni teorem je prvo bio iskazan za simetrične matrice, zatim za hermitske operatora, a konačno i za normalne. Konačan oblik spektralnog teorema, kojeg je dokazao John von Neumann, zahtijevao je još neka otkrića u funkcionalnoj analizi, kao što su Banachova algebra i Gelfandove transformacije. Ovaj teorem je baza moderne teorije operatora.

Teorem 7 ([5], Teorem 5.9). *Sa P_λ ćemo označiti ortogonalni projektor prostora X na potprostor $N(\lambda I - A)$. Neka je A hermitski operator na Hilbertovom prostoru X i neka je $\lambda \to E_\lambda$ njegova spektralna funkcija.*

1. *Za $C \in B(X)$ vrijedi $AC = CA$ ako i samo ako vrijedi $P_\lambda C = CP_\lambda$.*

2. *za $\lambda \leq \mu$ vrijedi $P_\lambda \leq P_\mu$.*

3. *Za svaki vektor $x \in X$ funkcija $\lambda \to P_\lambda$ je zdesna neprekidna.*

   Označimo sa m $inf\{(Ax|x), x \in X, ||x|| = 1\}$ i sa M $sup\{(Ax|x), x \in X, ||x|| = 1\}$.

4. *vrijedi :*
   $\lambda < m \implies P_\lambda = 0$ *i* $\lambda > M \implies P_\lambda = I$.

5. *Neka je P particija segmenta $[a, b]$: $a < \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n < b$.*
   Tada vrijedi:

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1}(P_{\lambda_k} - P_{\lambda_{k-1}}) \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(P_{\lambda_k} - P_{\lambda_{k-1}}).$$

Iz spektralnog teorema dobiva se funkcija operatora:

$$f(A) = \textstyle\int_a^b f(\lambda) dP_\lambda.$$

Preslikavanje $f \to f(A)$ ima razna korisna svojstva, poput linearnosti i monotonosti, preslikavanje je multikativno i izometrija te vrijedi da je $f(I) = I$ ako je $f(\lambda) = \lambda, \forall\lambda$. Također vrijedi teorem o spektralnom preslikavanju: $f(\sigma(A) = \sigma(f(A))$.

3 Spektar atoma

Paralelno radu matematičara, u dvadesetome stoljeću razvijala se i kvantna fizika. Otkrića u fizici motiviraju još intenzivniji interes za teoriju operatora, a time i daljni procvat spektralne teorije. Veličinama iz fizike pridružile su se matrice koje predstavljaju linearne operatore u kompleksnom separabilnom Hilbertovom prostoru. Jedan od tih operatora je Schrödingerov operator koji se pridružuje jednadžbi:

$$i\tfrac{d}{dt}\psi(t) = H\psi(t).$$

Funkcija ψ predstavlja stanje kvantnog sustava (čestice), a H je operator koji se naziva Hamiltonijan i govori o ukupnoj energiji sustava. Pokazalo se da je spektar tog operatora povezan sa spektrom atoma tj. svojstvene vrijednosti operatora su mogući rezultati mjerenja. Naime, prema Bohrovom modelu, atomi pri prijelazu iz elektronskih staza emitiraju ili absorbiraju energiju i time stvaraju vidljive karakteristične spektralne linije u svojim emisijskim i apsorpcijskim spektrima. Točkasti spektri karakterizirani su diskretnim linijama ili trakama kojima odgovaraju specifične energije koje emitiraju ili apsorbiraju atomi tijekom prijelaza između energetskih razina. Kontinuirani spektri pojavljuju se kao glatka raspodjela boja bez jasnih linija ili granica. Planckova kvantna teorija uspješno objasnila je zašto vrući objekti emitiraju zračenje u diskretnim količinama, a ne kontinuirano. Balmerova formula uspostavila je matematički odnos između valnih duljina opaženih u spektru emisije vodika. U kemiji su atomski spektri danas neprocjenjivi za identifikaciju nepoznatih tvari jer svaki element posjeduje jedinstveni spektralni "otisak prsta" što omogućuju određivanje elementarnog sastava spojeva. Poznato je i da fizičke procese najbolje predstavljaju hermitske matrice: rješenje Schrödingerove jednadžbe će imati konstantu normu ako je matrica hermitska. No nije dovoljno da je matrica samo hermitska. Ako svojstvene vrijednosti matrice čine ortonormiranu bazu, onda će matrica predstavljati stvaran proces. Dirac je za potrebe kvantne fizike uveo svoju delta funkciju što je dodatno obogatilo teoriju mjera, no razvoj spektralne teorije se u tom trenutku pauzirao jer je pitanje ograničenosti operatora i njihovih derivacija i dalje nije bilo potpuno riješeno.

Literatura

[1] Lj. Dedić, *Vektorski Prostori*, skripta, Split, 2008, dostupno na: https://www.pmfst.unist.hr/odjel-za-matematiku/wp-content/uploads/sites/24/2018/05/lj_dedic_vektorski-prostori.pdf

[2] B. Guljaš, *Normirani prostori i operatori*, Zagreb, 2010, dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/normirani_prostori.pdf

[3] S. Halilović, S. Pirić, *O spektru nelinearnog operatora*, math.e, 20(2011)

[4] H. Kraljević, *Vektorski prostori*, skripta, Osijek, 2008, dostupno na: https://www.mathos.unios.hr/vektorski/skripta.pdf

[5] H. Kraljević, *Kompaktni operatori*, skripta, Zagreb, 2007, dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/hrk/nastava/2006-07/kompaktni_2006.pdf