Statistička kontrola procesa

Guskić, Ivona

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:623358

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-20**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Ivona Guskić

Statistička kontrola procesa

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Ivona Guskić

Statistička kontrola procesa

Diplomski rad

Mentor: prof.dr.sc. Mirta Benšić

Osijek, 2022.

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Slučajni i pripisivi uzroci varijabilnosti **2**

3 Kontrolne karte **4**

4 Shewhartove kontrolne karte **6**
4.1 $\overline{x}$ i R kontrolne karte 6

5 Vremenski ponderirane kontrolne karte **13**
5.1 CUSUM kontrolna karta 13
5.2 EWMA kontrolna karta 18

6 Multivarijatne kontrolne karte **23**
6.1 Multivarijatna normalna distribucija 24
6.2 Hotelling T^2 kontrolna karta 26

Literatura **32**

Sažetak **33**

Summary **34**

Životopis **35**

1 Uvod

U svakodnevnom životu često govorimo o kvaliteti proizvoda.Većina ljudi ima vlastito konceptualno razumijevanje kvalitete. Intuitivno, proizvod dobre kvalitete trebao bi zadovoljiti zahtjeve svojih korisnika. Pomoću statstičke kontrole procesa možemo kontrolirati i osigurati kvalitetu proizvoda. Statistička kontrola procesa (eng. Statistical process control-SPC) je moćna zbirka alata za rješavanje problema korisnih u postizanju stabilnosti procesa i poboljšanju sposobnosti kroz smanjenje varijabilnosti. SPC je jednostavan za korištenje, ima značajan utjecaj i može se primijeniti na bilo koji proces. Njegovih glavnih 7 alata su: histogram, check sheet, pareto dijagram, cause-and-effect dijagram, defect concentration dijagram, dijagram raspršenja i kontrolne karte. Pravilna implementacija SPC-a pomaže u stvaranju okruženja u kojem svi pojedinci u organizaciji traže stalno poboljšanje kvalitete. Jednom kada se ovo okruženje uspostavi, primjena ovih 7 alata dio je uobičajenog načina poslovanja, a organizacija je na dobrom putu da postigne svoje ciljeve poboljšanja procesa.

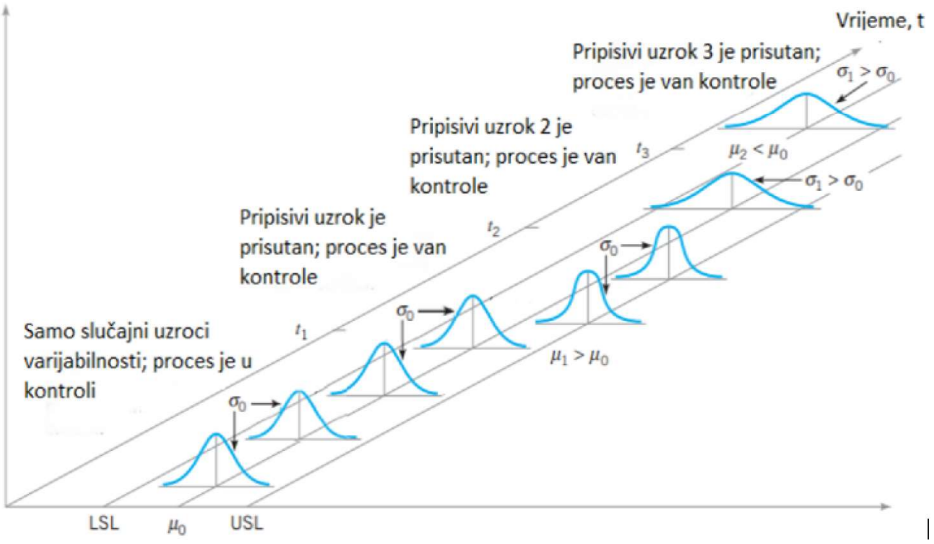
Glavni je cilj statističke kontrole procesa brzo otkrivanje pripisivog uzroka, koji će biti objašnjen u nastavku, zbog kojeg se dogodio pomak u očekivanju procesa tako da se istraživanje procesa i korektivne radnje mogu poduzeti prije nego što se proizvedu mnogi neispravni proizvodi. Krajnji je cilj SPC-a eliminacija varijabilnosti, odnosno smanjenje varijabilnosti što je više moguće. Ovaj će rad najviše biti posvećen opisivanju više kontrolnih karti: Shewhartove kontrolne karte, vremenski ponderirane kontrolne karte i multivarijatne kontrolne karte.

2 Slučajni i pripisivi uzroci varijabilnosti

U svakom procesu, bez obrzira na to koliko je dobro održavan, uvijek će postojati određena količina prirodne varijabilnosti. Navedena je prirodna varijabilnost ili „pozadinski šum" učinak mnogih malih, neizbježnih uzroka. U okviru statističke kontrole kvalitete, ova se prirodna varijabilnost često naziva "stabilnim sustavom slučajnih uzroka". Za proces koji funkcionira uz prisutne samo slučajne uzroke varijacije kaže se da je pod statističkom kontrolom. Drugim riječima, slučajni su uzroci sastavni dio procesa.

Druge vrste varijabilnosti povremeno mogu biti prisutne u izlazu procesa. Ova varijabilnost obično proizlazi iz tri izvora: nepropisno podešeni ili kontrolirani strojevi, pogreške operatera i neispravne sirovine. Takva je varijabilnost općenito velika i obično predstavlja neprihvatljivu razinu izvedbe procesa. Ove izvore varijabilnosti, koji nisu dio slučajnog uzroka, nazivamo uzrocima varijabilnosti koji se mogu pripisati. Za proces koji djeluje u prisutnosti uzroka koji se mogu pripisati kaže se da je proces izvan kontrole.

Slučajni i pripisivi uzroci varijacije ilustrirani su na slici.



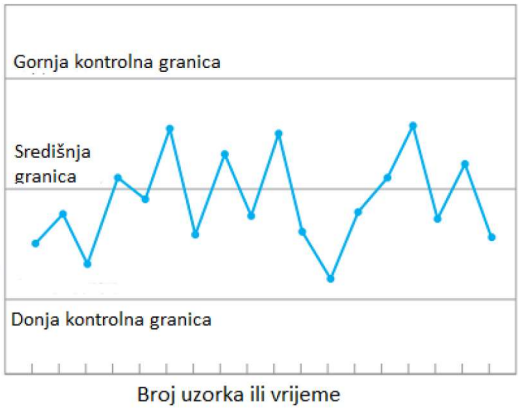
Slika 1: Slučajni i pripisivi uzroci varijabilnosti

Na slici 1 do vremena t_1 je proces pod kontrolom, odnosno prisutni su samo slučajni uzroci varijacije. Očekivanje i standardna devijacija procesa su μ_0 i σ_0. U trenutku t_1 javlja se pripisivi uzrok. Učinak je ovog pripisivog uzroka pomicanje očekivanja procesa na novu vrijednost $\mu_1 > \mu_0$ i proces je izvan kontrole. U trenutku t_2 pojavljuje se još jedan pripisivi uzrok, što rezultira time da je očekivanje μ_0, ali se sada povećala standardna devijacija $\sigma_1 > \sigma_0$. U trenutku t_3 pojavljuje se još jedan pripisivi uzrok, što rezultira time da niti očekivanje, niti standardna devijacija nisu na željenim vrijednostima.

Kada je proces pod kontrolom, većina će proizvodnje pasti između donje i gornje granice specifikacije (LSL i USL), a kada je proces izvan kontrole, veći udio procesa leži izvan ovih specifikacija.

3 Kontrolne karte

Kontrola karta (eng. Control chart) tehnika je online praćenja procesa koja se koristi kao jedan od glavnih alata u SPC-u. Kontrolna je karta grafički prikaz karakteristike kvalitete koja je izmjerena ili izračunata iz uzorka u odnosu na broj uzorka ili vrijeme. Koristi se u svrhu otkrivanja pomaka u procesu koji se mogu pripisati tako da se istraživanje procesa i korektivne radnje mogu poduzeti prije nego što se proizvedu mnogi neispravni proizvodi. Pomoću iste se mogu i procijeniti parametri procesa i odrediti sposobnost procesa. Kontrolna karta, prikazana na slici 6, sastoji se od 3 kontrolne granice: gornja kontrolna granica UCL (eng. Upper control limit) , središnja granica CL (eng. Center line) i donja kontrolna granica LCL (eng. Lower control limit).



Slika 2: Kontrolna karta

Sve dok su točke na kontrolnoj karti unutar kontrolnih granica smatramo da je proces u statističkoj kontroli. Ako se točka nađe izvan kontrolnih granica, moramo pretpostaviti da proces nije u statističkoj kontroli i istražiti moguće pripisive uzroke.
Pretpostavimo da je očekivanje nekog procesa jednako μ_0. Postoji bliska veza između kontrolnih karata i testiranja statističkih hipoteza o iznosu očekivanja:

$$\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0$$

$$\mathcal{H}_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Pretpostavimo da je središnja horizontalna os na slici očekivanje procesa μ_0. Ako je trenutna vrijednost očekivanja između donje i gornje kontrolne granice, zaključujemo da je očekivanje procesa pod kontrolom, odnosno da je jednako μ_0. Ako trenutna vrijednost očekivanja izađe izvan donje ili gornje kontrolne granice, možemo zaključiti kako je očekivanje procesa izvan kontrole, odnosno da je $\mu_1 \neq \mu_0$. Kontrolna je karta test statističke hipoteze da je proces u stanju statističke kontrole. Ucrtavanje točke unutar kontrolnih granica jednako je neuspjehu odbacivanja hipoteze $\mathcal{H}_0$, a ucrtavanje točke izvan kontrolnih granica jednako je odbacivanju hipoteze $\mathcal{H}_0$.

Pripisivi uzrok može rezultirati mnogim različitim vrstama pomaka u parametrima procesa.

Na primjer, očekivanje bi se moglo pomaknuti na novu vrijednost i tamo ostati. To nazivamo trajni pomak (eng. Sustained shift). Može se dogoditi i nagli pomak, ali bi pripisivi uzrok bio kratkotrajan i očekivanje bi se tada vratilo na svoju prvotnu vrijednost.

Upotreba standardne kontrolne karte uključuje fazu I i fazu II, s dva različita cilja. U fazi I, kontrolne se karte koriste na podacima iz prošlosti za izračunavanje preliminarnih kontrolnih granica i utvrđivanje je li proces bio pod kontrolom tijekom razdoblja u kojem su podaci prikupljeni. U slučaju da se na kontrolnoj karti s podacima iz prošlosti otkriju pripisivi uzroci, tada se provodi istraga kako bi se utvrdio uzrok. Ako se pronađe uzrok koji se može spriječiti u budućnosti, tada se podaci koji odgovaraju točkama izvan kontrolih granica eliminiraju i izračunavaju se nove kontrolne granice bez tih podataka. To je obično iterativni proces i ponavlja se sve dok se kontrolne granice na kontrolnoj karti ne preciziraju, odnosno sve dok nemamo kontrolnu kartu koja ne sadrži pripisive uzroke i dok se ne čini da proces radi na prihvatljivoj razini. U fazi I nam je cilj uspostaviti pouzdane kontrolne granice za praćenje buduće prozvodnje u fazi II. Shewhartove kontrolne karte, koje će biti opisane u nastavku, vrlo su učinkovite u fazi I, dok su CUSUM i EWMA, također kontrole karte koje će biti opisane u nastavku, vrlo učinkovite u fazi II.

4 Shewhartove kontrolne karte

Shewhartova kontrolna karta, nazvana po Walteru Shewhartu, uobičajena je metoda kontrolne karte koja se primjenjuje u SPC-u. Pretpostavka je ove kontrolne karte da su točke koje leže unutar kontrolnih granica rezultat slučajnih uzroka, a točke koje leže izvan kontrolnih granica su rezultati uzroka koji se mogu pripisati. Shewhartove kontrolne karte korisne su u fazi I jer su učinkovite u otkrivanju velikih pomaka od očekivanja procesa. Velikim pomacima smatramo pomake veće od 3σ od očekivanja procesa. Praćenje očekivanja procesa provodi se korištenjem $\overline{x}$ kontrolne karte, a rasipanje procesa može biti praćeno korištenjem s kontrolne karte (procijenjena standardna odstupanja), R kontrolne karte (rasponi) i MR kontrolne karte(pomični raspon). R kontrolnu kartu koristimo kada imamo relativno malu veličinu uzorka, recimo $n \leq 10$, s kontrolnu kartu koristimo za veličinu uzorka koja je veća od 10, a MR kontrolnu kartu koristimo za uzorke veličine $n = 1$. U nastavku ćemo objasniti korištenje $\overline{x}$ i R kontrolnih karata za numeričke varijable, s obzirom da su one najčešće korištene u primjeni.

4.1 $\overline{x}$ i R kontrolne karte

Pretpostavimo da imamo normalno distribuiranu slučajnu varijablu X s očekivanjem μ i standardnom devijacijom σ, gdje su μ i σ poznati realni brojevi i $\sigma > 0$, pišemo $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Neka su dani podaci $(x_1, \ldots, x_n)$ i pripadni slučajni uzorak $(X_1, \ldots, X_n)$ iz $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Aritmetička sredina uzorka je statistika koja nastaje korištenjem funkcije

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Označavamo je s $\overline{X}$. Dakle, vrijedi

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

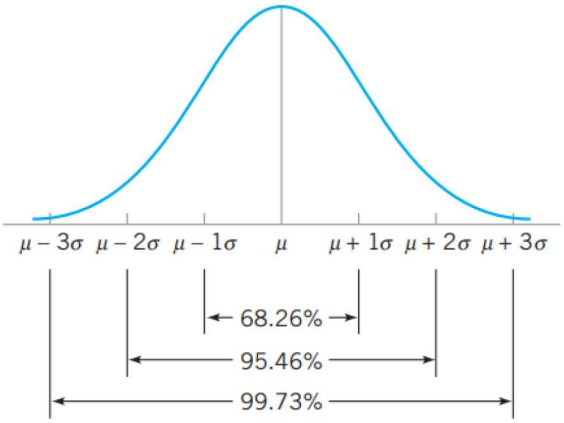
Znamo da je $\overline{X}$ normalno distribuiran s očekivanjem μ i standardnom devijacijom $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Vjerojatnost da će bilo koji uzorak biti između

$$\mu - z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{x}} = \mu - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1}$$

i

$$\mu + z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{x}} = \mu + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

iznosi $1 - \alpha$, pri čemu je $z_{\alpha/2}$ odgovarajući kvantil standardne normalne distribucije. Stoga, ako su μ i σ poznati (1) i (2) možemo koristiti kao donju i gornju kontrolnu granicu na $\overline{x}$ kontrolnoj karti. Slika 3 prikazuje graf funkcije gustoće normalne slučajne varijable s očekivanjem μ i standardnom devijacijom σ.



Slika 3: Površina ispod normalne krivulje

Vidimo na slici 3 da se 99.73% površine ispod krivulje nalazi unutar intervala $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ tako da se najčešće $z_{\alpha/2}$ zamijeni s brojem 3 pa se koriste 3-σ granice. U tom slučaju vjerojatnost da točka izađe izvan kontrolnih granica je vrlo mala i iznosi 0.0027, što znači da se jedna od 370 točaka može naći izvan kontrolnih granica iako je proces u kontroli. Takve točke nazivamo lažni alarm. Ako očekivanje uzorka padne izvan kontrolnih granica, moramo istražiti uzroke i provjeriti radi li se o lažnom alarmu. Ako se ne radi o lažnom alarmu, smatramo da očekivanje procesa nije više jednako μ. Pri tome smo pretpostavili da je varijabla normalno distribuirana. U slučaju da nemamo normalnu distribuiranost možemo se pozvati na Čebiševljevu nejednakost koja tvrdi da je vjerojatnost da slučajna varijabla X odstupa od svog očekivanja po apsolutnoj vrijednosti za više ili jednako k standardnih devijacija, manja ili jednaka $\frac{1}{k^2}$. Ukoliko promotrimo veliki broj nezavisnih realizacija slučajne varijable X, uz pomoć Čebiševljeve nejednakosti i statističke interpretacije vjerojatnosti, možemo doći do zaključka da barem 88.9% realizacija slučajne varijable X upada u interval $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

U praksi najčešće ne znamo μ i σ pa ih moramo procjeniti od prijašnjih uzoraka pod pretpostavkom da je proces u kontroli. Za procjenu se uzima m uzoraka veličine n. Pri tome je m barem 20, a n najčešće uzimamo 4,5 ili 6. Najbolja procjena za μ je

$$\overline{\overline{x}} = \frac{\overline{x}_1 + \cdots + \overline{x}_m}{m}$$

i to možemo korisiti kao središnju granicu na $\overline{x}$ kontrolnoj karti.
Raspon na temelju jednog uzorka veličine n računamo kao razliku između najvećeg i najmanjeg opažanja

$$R = x_{max} - x_{min}.$$

Raspon se koristi u procjeni varijabilnosti samo ako je n mali broj (do 10) kao što je već navedeno. Korištenje raspona za procjenu σ datira od najranijih dana statističke kontrole procesa, a bilo je popularno jer ga je vrlo jednostavno izračunati. Uz moderne kalkulatore i računala, to danas nije važno. Općenito, preferira se "kvadratni procjenitelj" temeljen na s, gdje je s^2 dan s

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

U tablici 1 vidimo da relativna efikasnost metode raspona pada u usporedbi sa s za različite veličine uzorka:

Veličina uzorka n	**Relativna efikasnost**
2	1.000
3	0.992
4	0.975
5	0.955
6	0.930
10	0.850

Tablica 1: Relativna efikasnost metode raspona u usporedbi sa s

S obzirom da raspon daje zadovoljavajuće rezultate za male uzorke koristit ćemo ga u nastavku. Neka su $R_1, \ldots, R_m$ rasponi od m uzoraka, pa je procjena standardne devijacije

$$\overline{R} = \frac{R_1 + \cdots + R_m}{m}.$$

Formule za konstrukciju $\overline{x}$ kontrolne karte su:

$$\begin{aligned} UCL &= \overline{\overline{x}} + A_2\overline{R} \\ Središnja\ granica &= \overline{\overline{x}} \\ LCL &= \overline{\overline{x}} - A_2\overline{R}, \end{aligned} \tag{3}$$

pri čemu je A_2 konstanta koja ovisi o veličini uzorka n i bit će objašnjena u nastavku. $\overline{\overline{x}}$ je asimptotski normalan i nepristran procjenitelj za nepoznato očekivanje μ.
Formule za konstrukciju R kontrolne karte su:

$$\begin{aligned} UCL &= D_4\overline{R} \\ Središnja\ granica &= \overline{R} \\ LCL &= D_3\overline{R}, \end{aligned} \tag{4}$$

pri čemu su D_3 i D_4 konstante koje također ovise o veličini uzorka n i bit će objašnjene u nastavku.
Pogledajmo sada izvod ovih formula. Slučajnu varijablu $W = \frac{R}{\sigma}$ zovemo relativni raspon. Parametri distribucije od slučajne varijable W su funkcije koje ovise o veličini uzorka n. Očekivanje od W je konstanta d_2, a standardna devijacija je konstanta d_3 koje ovise o veličini uzorka. Primjetimo da R možemo pisati kao $R = W\sigma$. Sada slijedi

$$\mu_R = E(W\sigma) = \sigma E(W) = \sigma d_2,$$

pa je procjena za σ dana s $\hat{\sigma} = \frac{R}{d_2}$. Ako je $\overline{R}$ prosjek raspona od m uzoraka onda je

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2}$$

nepristrani procjenitelj za σ (Montgomery, 2012). Ako koristimo $\overline{\overline{x}}$ kao procjenu za μ i $\hat{\sigma}$ kao procjenu za σ, onda su kontrolne granice za $\overline{x}$ kontrolnu kartu:

$$\begin{aligned} UCL &= \overline{\overline{x}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\overline{R} \\ Središnja\ granica &= \overline{\overline{x}} \\ LCL &= \overline{\overline{x}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\overline{R}. \end{aligned} \tag{5}$$

Ako definiramo $A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$, onda formule (5) postaju formule (3).
Pogledajmo sada izvod formula za R kontrolnu kartu. Središnja će granica biti $\overline{R}$. Trebamo sada procjenu za σ_R. Pod pretpostavkom da je varijabla normalno distribuirana, $\hat{\sigma}_R$ možemo pronaći pomoću distribucije relativnog raspona $W = \frac{R}{\sigma}$. Kako je $R = W\sigma$, varijanca od R je

$$\sigma_R^2 = Var(W\sigma) = \sigma^2 Var(W) = d_3^2\sigma^2,$$

pa je standardna devijacija od R dana s $d_3\sigma$. S obzirom da σ nije poznat, možemo ga zamijeniti s $\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2}$. Sada slijedi da možemo procijeniti $\hat{\sigma}_R$ s

$$\hat{\sigma}_R = d_3\frac{\overline{R}}{d_2},$$

pa su kontrolne granice za R kontrolnu kartu:

$$\begin{aligned} UCL &= \overline{R} + 3\hat{\sigma}_R = \overline{R} + 3d_3\frac{\overline{R}}{d_2} \\ Središnja\ granica &= \overline{R} \\ LCL &= \overline{R} - 3\hat{\sigma}_R = \overline{R} - 3d_3\frac{\overline{R}}{d_2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Ako stavimo da je $D_3 = 1 - 3\frac{d_3}{d_2}$ i $D_4 = 1 + 3\frac{d_3}{d_2}$, formule (6) postaju formule (4). U sljedećoj tablici možemo vidjeti vrijednosti konstanti koje će nam biti potrebne za formule.

Veličina uzorka n	A_2	d_2	D_3	D_4
2	1.880	1.128	0	3.267
3	1.023	1.693	0	2.574
4	0.729	2.059	0	2.282
5	0.577	2.326	0	2.114
6	0.483	2.534	0	2.004
7	0.419	2.704	0.076	1.924
8	0.373	2.847	0.136	1.864
9	0.337	2.970	0.184	1.816
10	0.308	3.078	0.223	1.777

Tablica 2: Podaci za formule

U slučaju da nemamo normalnu distribuiranost podataka, možemo se pozvati na centralni granični teorem koji kaže da će distribucija prosjeka podskupina biti približno normalna bez obzira na temeljnu distribuciju kako se veličina podskupine povećava. Drugo je rješenje konstruirati kontrolnu kartu na temelju neke druge zadane distribucije ili empirijske distribucije podataka. To podrazumijeva otkrivanje vrste distribucije podataka i procjena parametara distribucije (Montgomery, 2012).

U prvoj fazi korištenja kontrolnih karata možemo na kontrolnu kartu ucrtati prethodne uzorke i pogledati je li proces bio u kontroli kada je uzeto m inicijalnih uzoraka. Kod korištenja kontrolnih karti bitno nam je da su uzorci nezavisni. Ako su sve točke na kontrolnim kartama unutar granica i nema nenasumičnog ponašanja točaka, možemo zaključiti kako je proces bio u statističkoj kontroli kada su uzorci uzeti i te kontrolne granice možemo koristiti u budućnosti. Ako imamo jednu ili više točaka izvan kontrolnih granica, trebamo pronaći uzrok zašto su točke van granica i ako pronađemo uzrok, izbacimo te točke i računamo kontrolne granice bez njih koristeći preostale točke. Nakon što smo dobili proces koji je u statističkoj kontroli, te kontrolne granice možemo korisititi za dalje. Pogledajmo sada primjer $\overline{x}$ i R kontrolne karte u proizvodnji poluvodiča.

Primjer 4.1. *Želimo uspostaviti statističku kontrolu širine protoka otpornika koristeći* $\overline{x}$ *i R kontrolne karte.Uzeto je 25 uzoraka veličine 5. Vrijeme između uzimanja uzoraka je 1 sat. Podaci mjerenja širine otpornika dani su u tablici* 2.

Broj uzorka	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\overline{x}_i$	R_i
1	1,3235	1,4128	1,6744	1,4573	1,6914	1,51188	0,3679
2	1,4314	1,3592	1,6075	1,4666	1,6109	1,49512	0,2517
3	1,4284	1,4871	1,4932	1,4324	1,5674	1,4817	0,139
4	1,5028	1,6352	1,3841	1,2831	1,5507	1,47118	0,3521
5	1,5604	1,2735	1,5265	1,4363	1,6441	1,48816	0,3706
6	1,5955	1,5451	1,3574	1,3281	1,4198	1,44918	0,2674
7	1,6274	1,5064	1,8366	1,4177	1,5144	1,5805	0,4189
8	1,419	1,4303	1,6637	1,6067	1,5519	1,53432	0,2447
9	1,3884	1,7277	1,5355	1,5176	1,3688	1,5076	0,3589
10	1,4039	1,6697	1,5089	1,4627	1,522	1,51344	0,2658
11	1,4158	1,7667	1,4278	1,5928	1,4181	1,52424	0,3509
12	1,5821	1,3355	1,5777	1,3908	1,7559	1,5284	0,4204
13	1,2856	1,4106	1,4447	1,6398	1,1928	1,3947	0,447
14	1,4951	1,4036	1,5893	1,6458	1,4969	1,52614	0,2422
15	1,3589	1,2863	1,5996	1,2497	1,5471	1,40832	0,3499
16	1,5747	1,5301	1,5171	1,1839	1,8662	1,5344	0,6823
17	1,368	1,7269	1,3957	1,5014	1,4449	1,48738	0,3589
18	1,4163	1,3864	1,3057	1,621	1,5573	1,45734	0,3153
19	1,5796	1,4185	1,6541	1,5516	1,7247	1,5857	0,3062
20	1,7106	1,4412	1,2361	1,382	1,7601	1,506	0,524
21	1,4371	1,5051	1,3485	1,567	1,488	1,46914	0,2185
22	1,4738	1,5936	1,6583	1,4973	1,472	1,539	0,1863
23	1,5917	1,4333	1,5551	1,5295	1,6866	1,55924	0,2533
24	1,6399	1,5243	1,5705	1,5563	1,553	1,5688	0,1156
25	1,5797	1,3663	1,624	1,3732	1,6887	1,52638	0,3224

Tablica 3: Podaci mjerenja širine otpornika

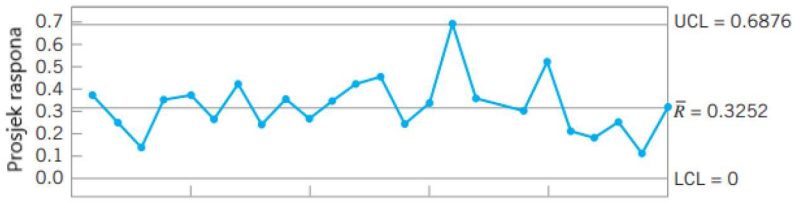
Možemo izračunati da je središnja granica za R kartu

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{25} R_i}{25} = \frac{8.1302}{25} = 0.3252.$$

Za uzorak veličine 5 možemo pronaći u tablici da je D_3=0, a D_4=2.114 pa će kontrolne granice za R kontrolnu kartu biti:

$$LCL = \overline{R}D_3 = 0.32521(0) = 0$$
$$UCL = \overline{R}D_4 = 0.32521(2.114) = 0.6876.$$

R kontrolna karta je prikazana na slici.



Slika 4: R kontrolna karta

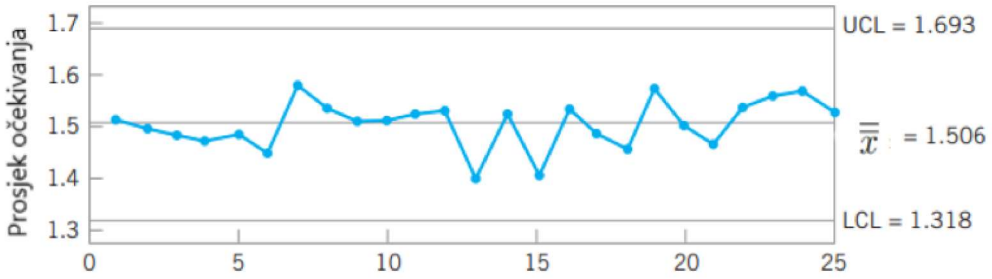
Vidimo da su sve točke unutar kontrolnih granica pa nemamo razloga sumnjati da je proces izvan statističke kontrole. S obzirom da R kontrolna karta ukazuje na statističku kontrolu procesa možemo sada pogledati $\overline{x}$ kontrolnu kartu. Središnja granica je

$$\overline{\overline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{25} \overline{x}_i}{25} = \frac{37.64}{25} = 1.506.$$

Za uzorak veličine 5 možemo pronaći u tablici da je A_2=0.577 pa će kontrolne granice za $\overline{x}$ kontrolnu kartu biti

$$LCL = \overline{\overline{x}} - A_2\overline{R} = 1.506 - 0.577(0.32521) = 1.318$$
$$UCL = \overline{\overline{x}} + A_2\overline{R} = 1.506 + 0.577(0.32521) = 1.693.$$

$\overline{x}$ kontrolna karta je prikazana na slici.



Slika 5: $\overline{x}$ kontrolna karta

$\overline{x}$ kontrolna karta također ukazuje na to da je proces u statističkoj kontroli. S obzirom da obje kontrolne karte ukazuju na to da je proces u kontroli možemo nastaviti koristiti ove kontrolne granice u fazi II, gdje je od interesa praćenja buduće proizvodnje.

5 Vremenski ponderirane kontrolne karte

Glavni je nedostatak Shewhartove kontrolne karte što koristi informacije samo od posljednjeg uzorka i ignorira sve prethodne informacije. To ga čini neosjetljivim na male pomake, od 1.5σ ili manje od očekivanja procesa pa su Shewhartove kontrolne karte manje korisne u fazi II, kada je proces u kontroli pa imamo dobre procjene parametara i nemamo velike pomake od očekivanja. Tri se alternative Shewhartovim kontrolnim kartama mogu koristiti kada su u pitanju manji pomaci: Kontrolna karta kumulativnih suma CUSUM (eng. Cumulative Sum), kontrolne karte eksponencijalno ponderiranih pomičnih prosjeka EWMA (eng. Exponentially weighted moving average) i kontrolna karta pomičnog prosjeka MA (eng. Moving average). Vremenski ponderirane kontrolne karte najčešće se koriste u situacijama u kojima je veličina uzorka koja se koristi za praćenje procesa n = 1, odnosno ne grupiramo podatke nego svaki podatak ucrtavamo na kontrolnu kartu. Najčešći primjeri ovih situacija su:

1. Koristi se automatizirana tehnologija pregleda i mjerenja, a svaka proizvedena jedinica se analizira tako da nema osnove za grupiranje.

2. Podaci postaju dostupni relativno sporo. Dug interval između promatranja uzrokovat će probleme s grupiranjem.

3. Višestruka se mjerenja izvode na istoj jedinici proizvoda.

4. Pojedinačna mjerenja vrlo su česta u mnogim transakcijskim, poslovnim i uslužnim procesima jer ne postoji osnova za grupiranje.

5.1 CUSUM kontrolna karta

CUSUM kontrolna karta vrsta je kontrolne karte koja se koristi za praćenje malih pomaka u očekivanju procesa koristeći kumulativni zbroj odstupanja od očekivanja. CUSUM kontrolna karta izravno uključuje sve informacije u nizu vrijednosti uzorka ucrtavajući kumulativne zbrojeve odstupanja vrijednosti uzorka od očekivanja. Pretpostavimo da smo prikupili uzorak veličine $n \geq 1$, neka je $\overline{x}_j$ prosjek od j-tog uzorka. Ako je μ_0 očekivanje procesa i σ^2 varijanca procesa, onda CUSUM kontrolnu kartu formiramo tako da ucrtavamo

$$C_i = \sum_{j=1}^{i} (\overline{x}_j - \mu_0)$$

nasuprot uzorka broja i. C_i nazivamo kumulativna suma do i uključujući i-ti uzorak. Kada je proces u kontroli do trenutka i vrijedi $C_i \sim \mathcal{N}(0, i\sigma^2)$ (Dominici, 2014). S obzirom da koristi informacije više uzoraka, CUSUM kontrolna karta efektivnija je od Shewhartove kontrolne karte u otkrivanju malih pomaka u odnosu na očekivanja. Vidimo da, ako proces ostaje u kontroli s vrijednošću μ_0, kumulativna je suma slučajna šetnja s očekivanjem 0. Ako se očekivanje pomakne na neku vrijednost $\mu_1 \geq \mu_0$, onda će se dogoditi pozitivan pomak u kumulativnoj sumi C_i. Vrijedi i obrat: ako se dogodi značajan trend rasta ili pada ucrtanih točaka na karti, trebamo pretpostaviti da se procesno očekivanje promijenilo i pokušati pronaći mogući uzrok

tome.
Imamo 2 vrste CUSUM-a: tablični (algoritamski) CUSUM i oblik V-maske CUSUM-a. S obzirom da drugi nije preporučljivo koristiti zbog više nedostataka (Montgomery, 2012), opisat ćemo sada tablični (algoritamski) CUSUM za praćenje očekivanja procesa.
Tablični (algoritamski) CUSUM možemo konstruirati za uzorke veličine $n = 1$ i za uzorke veličine $n > 1$, s time da se u praksi puno više pojavljuje prvi slučaj, koji će i biti objašnjen u nastavku. Neka je X normalno distribuirana slučajna varijabla s očekivanjem μ_0 i standardnom devijacijom σ, gdje su μ i σ realni brojevi i $\sigma > 0$. Neka je x_i i-to opažanje. S obzirom da se vremenski ponderirane kontrolne karte koriste u fazi II, smatramo da je σ poznat ili da imamo pouzdanu procjenu. Tablični CUSUM funkcionira tako da računamo i ucrtavamo C_i^+ i C_i^- na kontrolnu kartu. C_i^+ i C_i^- možemo računati na sljedeći način:

$$C_i^+ = \max[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \max[0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-],$$

pri čemu su $C_0^+ = C_0^- = 0$, a K je referentna vrijednost i najčešće se uzima polovina između očekivanja procesa μ_0 i vrijednosti μ_1 koju želimo brzo detektirati u slučaju da se očekivanje procesa pomakne s vrijednosti μ_0 na vrijednost μ_1. Vrijedi $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$ ili $\delta = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma}$ pa je

$$K = \frac{\delta}{2}\sigma = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}.$$

Ako C_i^+ ili C_i^- budu veće od H, smatramo da je proces izvan kontrole, pri čemu uzimamo da je $H = h\sigma$ i za h najčešće uzimamo da je 4 ili 5, iako je ovaj izbor donekle proizvoljan. Provedena su istraživanja o izvedbi kontrolne karte na temelju odabira h (Gan, 1996). U slučaju da izaberemo $h = 4$, dogodit će nam se jedan lažni alarm u 168 uzoraka s time da će nam trebati 8.38 uzoraka kako bi otkrili pomak od 1σ. To znači da, ako se dogodio pomak u očekivanju procesa od 1σ u trenutku t, taj ćemo pomak otkriti na kontrolnoj karti tek u trenutku $t + 9$. Ponovimo, lažnim alarmom smatramo točku koja je izašla izvan kontrolnih granica, iako je proces u kontroli. U slučaju da izaberemo $h = 5$, dogodit će nam se jedan lažni alarm u 465 uzoraka, s time da će nam trebati 10.4 uzoraka kako bismo otkrili pomak od 1σ. Želimo imati što manje lažnih alarma i istodobno što prije otkriti ako se dogodio pomak u očekivanju procesa. Preporuka je koristiti $k = 0.5$ i $h = 4$ ili $h = 5$. U sljedećoj tablici možemo vidjeti koliko bi nam uzoraka trebalo da otkrijemo određeni pomak od očekivanja procesa.

Pomak od očekivanja procesa	h=4	h=5
0.25σ	74.2	139
0.5σ	26.6	38.0
0.75σ	13.3	17.0
1.00σ	8.38	10.4
1.50σ	4.75	5.75
2.00σ	3.34	4.01
2.50σ	2.62	3.11

Tablica 4: Izvedba CUSUM kontrolne karte

U tablici 4 vidimo da je lakše otkriti velike nego male pomake od očekivanja procesa. Prisjetimo se da smo kod Shewhartovih kontrolnih karti s 3σ kontrolnim granicama rekli da će se dogoditi jedan lažni alarm u 370 uzoraka. U slučaju da i ovdje želimo imati istu izvedbu, u sljedećoj tablici možemo vidjeti s kojim kombinacijama k i h ćemo to postići (Hawkins, 1993).

k	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5
h	8.01	4.77	3.34	2.52	1.99	1.61

Tablica 5: Odgovarajuće vrijednosti k i h za jedan lažni alarm u 370 uzoraka

U slučaju da nemamo normalnu distribuiranost podataka trebali bismo koristiti neparametarsku CUSUM kontrolnu kartu (Yang i Cheng, 2011).

Primjer 5.1. *Imamo normalno distribuiranu varijablu s očekivanjem μ_0=10 i standardnom devijacijom $\sigma = 1$. Koristiti ćemo uzorke veličine $n = 1$, odnosno nećemo grupirati podatke. Pretpostavimo da želimo otkriti pomak od 1σ od očekivanja procesa. Slijedi da je $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma = 10 + 1 = 11$. Referentna vrijednost je $K = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} = \frac{|11-10|}{2} = \frac{1}{2}$, a kontrolna granica je dana s $H = h\sigma = 5(1) = 5$. Pogledajmo sada u tablici 6 CUSUM shemu.*

Period i	x_i	$x_i - 10.5$	C_i^+	N^+	$9.5 - x_i$	C_i^-	N^-
1	9,45	-1,05	0	0	0,05	0,05	1
2	7,99	-2,51	0	0	1,51	1,56	2
3	9,29	-1,21	0	0	0,21	1,77	3
4	11,66	1,16	1,16	1	-2,16	0	0
5	12,16	1,66	2,82	2	-2,66	0	0
6	10,18	-0,32	2,5	3	-0,68	0	0
7	8,04	-2,46	0,04	4	1,46	1,46	1
8	11,46	0,96	1	5	-1,96	0	0
9	9,2	-1,3	0	0	0,3	0,3	1
10	10,34	-0,16	0	0	-0,84	0	0
11	9,03	-1,47	0	0	0,47	0,47	1
12	11,47	0,97	0,97	1	-1,97	0	0
13	10,51	0,01	0,98	2	-1,01	0	0
14	9,4	-1,1	0	0	0,1	0,1	1
15	10,08	-0,42	0	0	-0,58	0	0
16	9,37	-1,13	0	0	0,13	0,13	1
17	10,62	0,12	0,12	1	-1,12	0	0
18	10,31	-0,19	0	0	-0,81	0	0
19	8,52	-1,98	0	0	0,98	0,98	1
20	10,84	0,34	0,34	1	-1,34	0	0
21	10,9	0,4	0,74	2	-1,4	0	0
22	9,33	-1,17	0	0	0,17	0,17	1
23	12,29	1,79	1,79	1	-2,79	0	0
24	11,5	1	2,79	2	-2	0	0
25	10,6	0,1	2,89	3	-1,1	0	0
26	11,08	0,58	3,47	4	-1,58	0	0
27	10,38	-0,12	3,35	5	-0,88	0	0
28	11,62	1,12	4,47	6	-2,12	0	0
29	11,31	0,81	5,28	7	-1,81	0	0
30	10,52	0,02	5,3	8	-1,02	0	0

Tablica 6: Podaci mjerenja

Kako bismo ilustrirali kalkulacije, pogledajmo period 1. Znamo da je $K = 0.5$ *i* $\mu_0 = 10$ *pa su jednadžbe za* C_1^+ *i* C_1^- *dane s:*

$$C_1^+ = \max[0, x_1 - 10.5 + C_0^+]$$

i

$$C_1^- = \max[0, 9.5 - x_1 + C_0^-].$$

S obzirom da je $x_1 = 9.45$ *i* $C_0^+ = C_0^- = 0$ *slijedi*

$$C_1^+ = \max[0, 9.45 - 10.5 + 0] = 0$$

i

$$C_1^- = \max[0, 9.45 - 9.45 + 0] = 0.05.$$

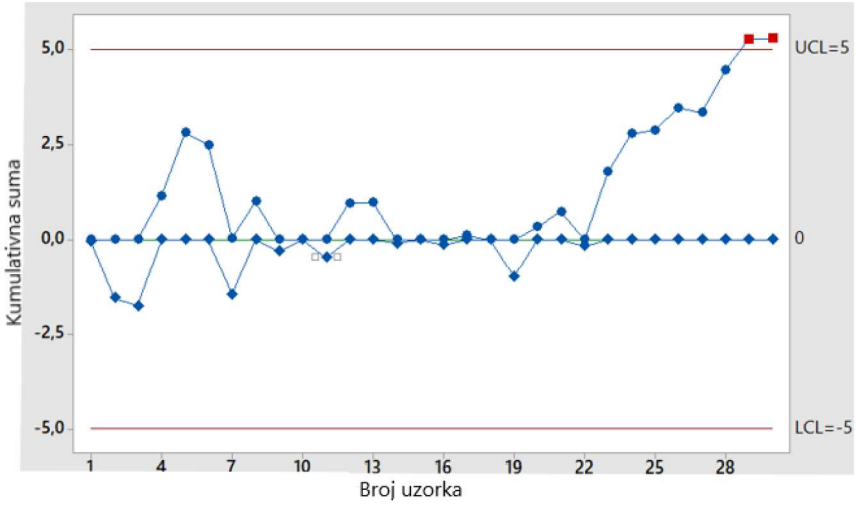
Za period 2 imamo

$$C_2^+ = \max[0, x_2 - 10.5 + C_1^+] = \max[0, x_2 - 10.5 + 0] = \max[0, 7.99 - 10.5 + 0] = 0$$

i

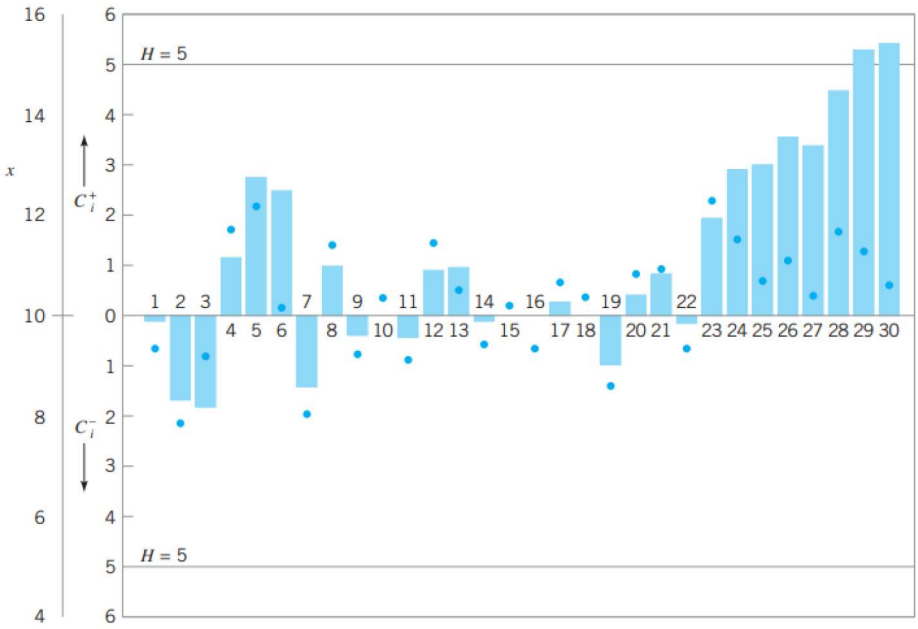
$$C_2^- = \max[0, 9.5 - x_2 + C_1^-] = \max[0, 9.5 - x_2 + 0.05] = \max[0, 9.5 - 7.99 + 0.05] = 1.56.$$

Vrijednosti C_i^- upisujemo ispod središnje granice, a vrijednosti C_i^+ upisujemo iznad središnje granice, s tim da nam je središnja granica jednaka 0. CUSUM kontrolna karta je prikazana na slici 6. Vrijednosti N^+ i N^- predstavljaju broj uzastopnih perioda kada su C_i^+ i C_i^- bili različiti od 0.



Slika 6: CUSUM kontrolna karta

Vidimo da je $C_{29}^+ = 5.28 > H = 5$ pa možemo smatrati da je proces izvan kontrole u tom trenutku. S obzirom da je $N^+ = 7$ možemo zaključiti kako je proces zadnji puta bio u kontroli u trenutku 29-7=22 pa se pomak dogodio između 22. i 23. trenutka. Na slici 7 možemo vidjeti i ucrtane vrijednosti x_i dodatno s kumulativnim sumama. Vrijednosti x_i su predstavljene točkama.



Slika 7: ručna CUSUM kontrolna karta

5.2 EWMA kontrolna karta

Kontrolna karta eksponencijalno vaganih pokretnih prosjeka (engl. Exponentially Weighted Moving Average – EWMA) nam, kao i CUSUM kontrolna karta, služi za detektiranje malih pomaka u očekivanju procesa. Izvedba EWMA kontrolne karte slična je izvedbi CUSUM kontrolne karte, ali je na neki način jednostavnija za korištenje. Kao i kod CUSUM kontrolne karte, EWMA kontrolna karta najčešće se koristi za uzorke veličine $n = 1$, iako se može konstruirati i za uzorke veličine $n > 1$. Normalna nam distribuiranost podataka za korištenje EWMA kontrolne karte nije bitna, već ju možemo smatrati skoro savršenom neparametarskom procedurom (Montgomery, 2012). Za $i \geq 1$, gdje i označava broj uzorka, EWMA je definirana s

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda) z_{i-1} \tag{7}$$

gdje je $0 < \lambda \leq 1$ konstanta, x_i je opažanje u trenutku i i μ_0 je očekivanje procesa. Vrijedi $z_0 = \mu_0$ ako je poznato očekivanje procesa, u suprotnom koristimo $z_0 = \overline{x}$, gdje je $\overline{x}$ prosjek dostupnih podataka prije kreiranja kontrolne karte. Vrijednost $\lambda = 1$ implicira da samo najnovija opažanja utječu na EWMA i EWMA je tada definirana kao $z_i = x_i$ pa je jednaka Shewhartovoj kontrolnoj karti za uzorke veličine $n = 1$. Velika vrijednost λ (bliža 1) daje veću težinu novijim podacima, a manju težinu starijim podacima, dok mala vrijednost λ (bliža 0) daje veću težinu starijim podacima. Vrijednost λ obično se postavlja između 0.2 i 0.3 (Hunter, 1986.), iako je ovaj izbor donekle proizvoljan.
Kako bismo pokazali da je EWMA z_i ponderirani prosjek svih prethodnih srednjih vrijednosti uzoraka, možemo zamijeniti z_{i-1} na desnoj strani jednadžbe (7) da bismo dobili

$$\begin{aligned} z_i &= \lambda x_i + (1-\lambda)[\lambda x_{i-1} + (1-\lambda)z_{i-2}] \\ &= \lambda x_i + \lambda(1-\lambda)x_{i-1} + (1-\lambda)^2 z_{i-2}. \end{aligned}$$

Nastavljajući rekurzivnu zamjenu za $z_{i-j}, j = 2, 3, ..., t$ dobivamo

$$\begin{aligned} z_i &= \lambda x_i + \lambda(1-\lambda)x_{i-1} + ... + \lambda(1-\lambda)^{n-1}x_1 + (1-\lambda)^n \mu_0 \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j x_{i-j} + (1-\lambda)^i z_0. \end{aligned} \tag{8}$$

Težina $\lambda(1-\lambda)^j$ geometrijski se smanjuje sa starošću uzorka. Nadalje, zbroj težina jednak je jedinici

$$\lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j + (1-\lambda)^i = 1$$

jer vrijedi

$$\lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j = \lambda \left[\frac{1-(1-\lambda)^i}{1-(1-\lambda)} \right] = 1 - (1-\lambda)^i.$$

Ako je $\lambda = 0.2$ tada iz jednadžbe (8) vidimo da je težina dodijeljena trenutnoj vrijednosti uzorka $\lambda = 0.2$, a dane težine prethodnih uzoraka su $\lambda(1-\lambda) = 0.2(1-0.2) = 0.16$, $\lambda(1-\lambda)^2 = 0.2(1-0.2)^2 = 0.128$, i tako dalje. EWMA se intenzivno koristi u modeliranju vremenskih serija i u predviđanju. Budući da se EWMA može promatrati kao ponderirani prosjek svih prošlih i trenutnog opažanja, vrlo je neosjetljiv na pretpostavku normalnosti. Ako su X_i nezavisne i normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem μ_0 i varijancom σ^2, gdje je proces u kontroli do trenutka i, tada vrijedi

$$\mu_{Z_i} = \mu_0$$

i

$$\begin{aligned} \sigma^2_{Z_i} &= Var(\lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j X_{i-j} + (1-\lambda)^i Z_0) \\ &= \lambda^2 \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^{2j} \sigma^2 + 0 \\ &= \lambda^2 \frac{1-(1-\lambda)^{2i}}{1-(1-\lambda)^2} \sigma^2 \\ &= \lambda^2 \frac{1-(1-\lambda)^{2i}}{2\lambda - \lambda^2} \sigma^2 \\ &= \frac{\lambda}{2-\lambda}(1-(1-\lambda)^{2i})\sigma^2, \end{aligned}$$

pa slijedi da je

$$Z_i \sim \mathcal{N}(\mu_0, \frac{\lambda}{2-\lambda}(1-(1-\lambda)^{2i})\sigma^2).$$

Kontrolne granice za EWMA kontrolnu kartu su

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]} \\ Središnja\ granica &= \mu_0 \\ LCL &= \mu_0 - L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]}. \end{aligned} \tag{9}$$

Faktor L predstavlja širinu kontrolnih granica. Preporuka je koristiti $L = 3$ ako koristimo $0.05 \leq \lambda \leq 0.25$, a ako koristimo $\lambda \leq 0.1$ preporuka je koristiti L između 2.6 i 2.8, iako je izbor proizvoljan. U sljedećoj tablici možemo vidjeti koliko bi nam uzoraka trebalo da otkrijemo određeni pomak od očekivanja procesa.

Pomak od očekivanja procesa	$L = 3, \lambda = 0.4$	$L = 2.9, \lambda = 0.2$	$L = 2.8, \lambda = 0.1$
0.25σ	224	150	106
0.5σ	71.2	41.8	31.3
0.75σ	28.4	18.2	15.9
1.00σ	14.3	10.5	10.3
1.50σ	5.9	5.5	6.1
2.00σ	3.5	3.7	4.4
2.50σ	2.5	2.9	3.4

Tablica 7: Izvedba EWMA kontrolne karte

Za sve tri kombinacije izbora L i λ pojavio bi nam se jedan lažni alarm u 500 uzoraka. Primijetimo da izraz $[1-(1-\lambda)^{2i}]$ u jednadžbama (9) teži jedinici s povećanjem i, što znači da će kontrolne granice, nakon što se EWMA kontrolna karta izvodi određeno vrijeme, postati stabilne vrijednosti dane s

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \\ LCL &= \mu_0 - L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Preporuka je koristiti kontrolne granice (9) za male vrijednosti i, odnosno na početku korištenja EWMA kontrolne karte. To će poboljšati izvedbu kontrolne karte na početku izvođenja s ciljem što ranijeg otkrivanja pomaka od očekivanja procesa.

Primjer 5.2. *Želimo postaviti EWMA kontrolnu kartu za podatke iz Tablice 2, pri čemu koristimo* $\lambda = 0.1$, $L = 2.7$, $\mu_0 = 10$ *i* $\sigma = 1$.

Postavimo $z_0 = \mu_0$. *Kako bi ilustrirali kalkulacije pogledajmo prvo opažanje* $x_1 = 9.45$. *Prva vrijednost EWMA kontrolne karte je*

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda x_1 + (1-\lambda) z_0 \\ &= 0.1(9.45) + 0.9(10) \\ &= 9.945, \end{aligned}$$

pa je $z_1 = 9.945$ *prva vrijednost koju ćemo ucrtati na kontrolnu kartu. Druga vrijednost koju ćemo ucrtati na kontrolnu kartu je*

$$\begin{aligned} z_2 &= \lambda x_2 + (1-\lambda) z_1 \\ &= 0.1(7.99) + 0.9(9.945) \\ &= 9.7495. \end{aligned}$$

Ostale vrijednosti računamo na isti način. Kontrolne granice računamo koristeći jednadžbe (8). Za period i=1 imamo

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]} \\ &= 10 + 2.7(1)\sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}\left[1-(1-0.1)^{2(1)}\right]} \\ &= 10.27 \end{aligned}$$

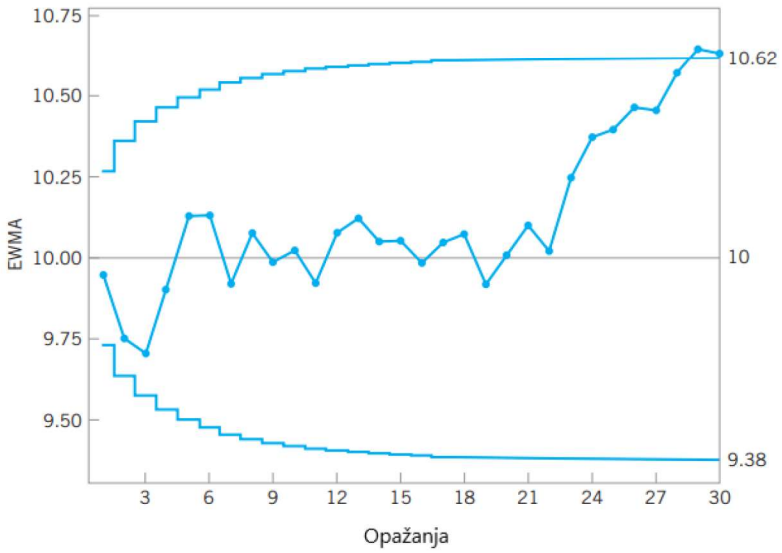
i

$$\begin{aligned} LCL &= \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]} \\ &= 10 - 2.7(1)\sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}\left[1-(1-0.1)^{2(1)}\right]} \\ &= 9.73. \end{aligned}$$

Za period i=2 bismo dobili UCL=10.36 i LCL=9.64. Računajući dalje vidimo da se kontrolne granice povećavaju s povećanjem perioda i, sve dok se ne stabiliziraju s vrijednostima UCL=10.62 i LCL=9.38.Pogledajmo sada tablicu i sliku EWMA kontrolne karte.

Period i	x_i	z_i	**Period** i	x_i	z_i
1	9.45	9.945	**16**	9.37	9.98426
2	7.99	9.7495	**17**	10.62	10.0478
3	9.29	9.70355	**18**	10.31	10.074
4	11.66	9.8992	**19**	8.52	9.91864
5	12.16	10.1253	**20**	10.84	10.0108
6	10.18	10.1307	**21**	10.9	10.0997
7	8,04	9.92167	**22**	9.33	10.0227
8	11.46	10.0755	**23**	12.29	10.2495
9	9.2	9.98796	**24**	11.5	10.3745
10	10.34	10.0232	**25**	10.6	10.3971
11	9.03	9.92384	**26**	11.08	10.4654
12	11.47	10.0785	**27**	10.38	10.4568
13	10.51	10.1216	**28**	11.62	10.5731
14	9.4	10.0495	**29**	11.31	10.6468
15	10.08	10.0525	**30**	10.52	10.6341

Tablica 8: Podaci mjerenja

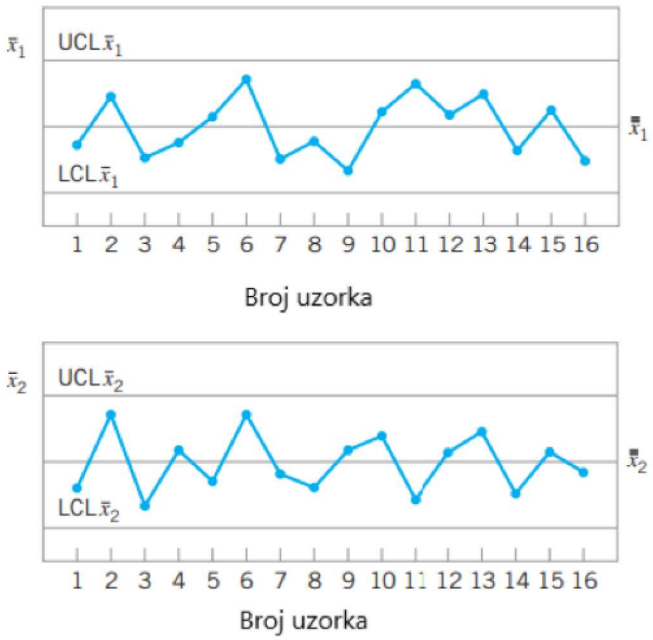


Slika 8: EWMA kontrolna karta

Vidimo na slici 8 da je 29. opažanje izvan kontrolnih granica pa možemo zaključiti kako je proces izvan kontrole. Identičan rezultat smo dobili koristeći CUSUM kontrolnu kartu.

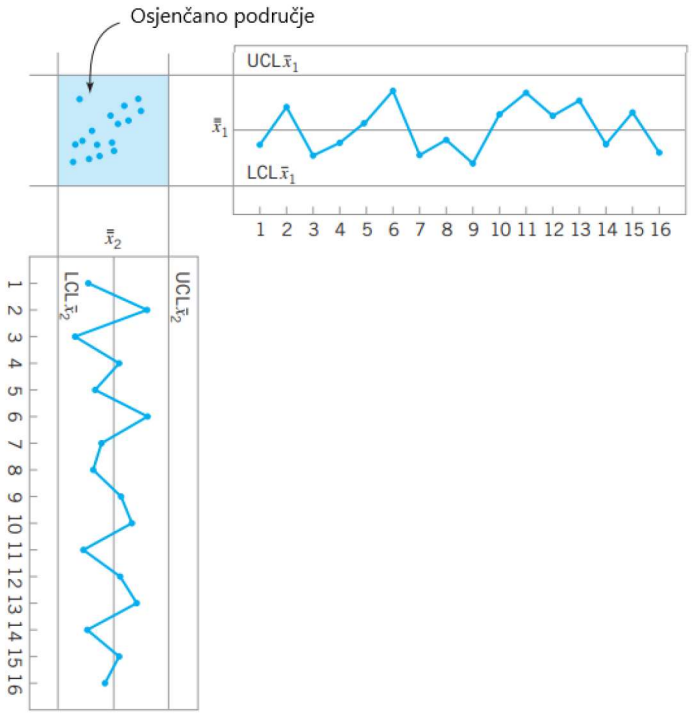
6 Multivarijatne kontrolne karte

U prethodnim smo se poglavljima bavili praćenjem i kontrolom procesa prvenstveno iz univarijatne perspektive, odnosno pretpostavili smo da postoji samo jedna izlazna varijabla procesa. U praksi većinom imamo nekoliko povezanih varijabli. Iako je primjena univarijatnih kontrolnih karata na svaku pojedinačnu varijablu moguće rješenje, to može dovesti do pogrešnih zaključaka. Potrebne su nam multivarijatne kontrolne karte, koje se mogu smatrati multivarijatnim proširenjima nekih univarijantnih kontrolnih karata iz prethodnih poglavlja. Hotelling T^2 kontrolna karta analogna je Shewhartovoj $\overline{x}$ kontrolnoj karti. Postoje mnoge situacije u kojima je potrebno istvremeno praćenje ili kontrola dviju ili više povezanih varijabli. Na primjer, pretpostavimo da ležaj ima unutarnji promjer X_1 i vanjski promjer X_2, koji zajedno određuju kvalitetu ležaja. Pretpostavimo da su X_1 i X_2 nezavisne i normalno distribuirane slučajne varijable. Budući da su obje varijable numeričke, mogu se pratiti primjenom uobičajenih kontrolnih karti.



Slika 9: Kontrolne karte za unutarnji i vanjski promjer

Smatra se da je proces u kontroli samo ako su $\overline{x}_1$ i $\overline{x}_2$ unutar kontrolnih granica. Ovo je ekvivalentno paru $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ koji se ucrtavaju unutar osjenčanog područja na slici 10.



Slika 10: Kontrolno područje korištenjem nezavisnih kontrolnih granica za $\overline{x}_1$ i $\overline{x}_2$

Praćenje ove dvije varijable nezavisno može biti vrlo pogrešno. Na primjer, primjetimo na slici 10 da se jedno opažanje čini pomalo neobičnim u odnosu na druga. Ta je točka unutar kontrolnih granica na obje univarijantne kontrolne karte za X_1 i X_2, ali kada istovremeno ispitujemo dvije varijable, neobično ponašanje točke prilično je očito. U slučaju normalno distribuiranih varijabli, vjerojatnost da $\overline{x}_1$ ili $\overline{x}_2$ izađu izvan 3σ granica je 0.0027, a zajednička vjerojatnost da obje varijable izađu izvan svojih kontrolnih granica istovremeno kada su obje u kontroli je $(0.0027)(0.0027) = 0.00000729$, što je znatno manje od 0.0027.
Općenito, ako postoji p varijabli i ako je $\overline{x}$ kontrolna karta prikazana za svaku varijablu, pri čemu je $P\{Pogreška\ I.\ tipa\} = \alpha$, onda je prava vjerojatnost za pogrešku I. tipa kada se koristi zajednički kontrolni postupak

$$\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^p$$

i vjerojatnost da će svih p očekivanja izaći izvan kontrolnih granica kada je proces u kontroli je $(1 - \alpha)^p$. Ovo iskrivljenje u postupku praćenja procesa povećava se kako se povećava broj varijabli.

6.1 Multivarijatna normalna distribucija

Neprekidna slučajna varijabla X ima normalnu distribuciju s očekivanjem μ i varijancom σ^2, gdje su μ i σ realni brojevi i $\sigma > 0$, ako je njezina funkcija gustoće dana izrazom

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$$

Primjetimo da izraz u eksponentu možemo zapisati kao

$$(x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu). \tag{11}$$

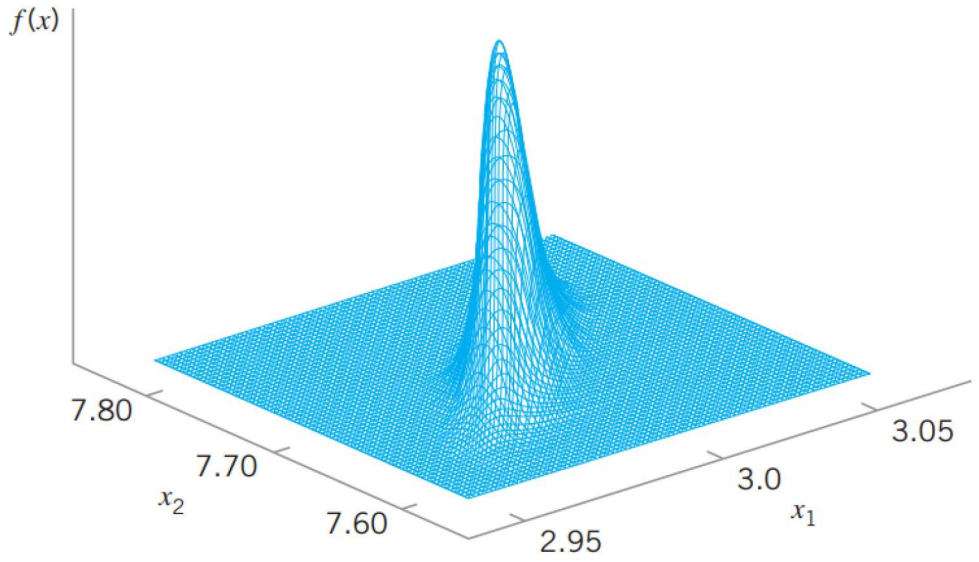
Ova veličina mjeri kvadrat standardizirane udaljenosti od x do očekivanja μ, gdje pod izrazom "standardizirano" mislimo da je udaljenost izražena u jedinicama standardne devijacije. Isti se pristup može koristiti u slučaju multivarijatne normalne distribucije. Pretpostavimo da imamo p varijabli, danih s $X_1, X_2, ..., X_p$. Rasporedimo ove varijable u vektor $\mathbf{X} = [X_1, X_2, ..., X_p]$. Neka je $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p]$ vektor očekivanja od $\mathbf{X}$ i neka su varijance i kovarijance od slučajnih varijabli iz $\mathbf{X}$ sadržane u $p \times p$ matrici kovarijanci $\boldsymbol{\Sigma}$. Elementi na glavnoj dijagonali od matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ su varijance od slučajnih varijabli iz $\mathbf{X}$, a ostali elementi su kovarijance. Sada je kvadrat standardizirane udaljenosti od $\mathbf{X}$ do $\boldsymbol{\mu}$

$$(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}). \tag{12}$$

Multivarijatna normalna funkcija gustoće dobiva se jednostavnom zamjenom standardizirane udaljenosti u jednadžbi (11) multivarijatnom generaliziranom udaljenosti u jednadžbi (12) i promjenom konstantnog člana $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ na općenitiji oblik koji površinu ispod funkcije gustoće vjerojatnosti čini jedinicom bez obzira na vrijednost p. Stoga je multivarijatna normalna funkcija gustoće vjerojatnosti

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

pri čemu je $-\infty < x_j < \infty, j = 1, 2, ..., p$. Multivarijatna normalna distribucija za $p = 2$ varijabli naziva se bivarijatna normalna i prikazana je na slici.



Slika 11: Multivarijatna normalna distribucija s $p = 2$ varijabli (bivarijantna normalna)

Pretpostavimo da imamo slučajni uzorak iz multivarijatne normalne distribucije

$$\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, ..., \mathbf{X_n}$$

gdje i-ti vektor uzorka sadrži opažanja svake od p varijabli $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ip}$. Tada je vektor očekivanja uzorka dan s

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i.$$

Matrica kovarijanci uzorka je

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \overline{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \overline{\mathbf{X}})^T.$$

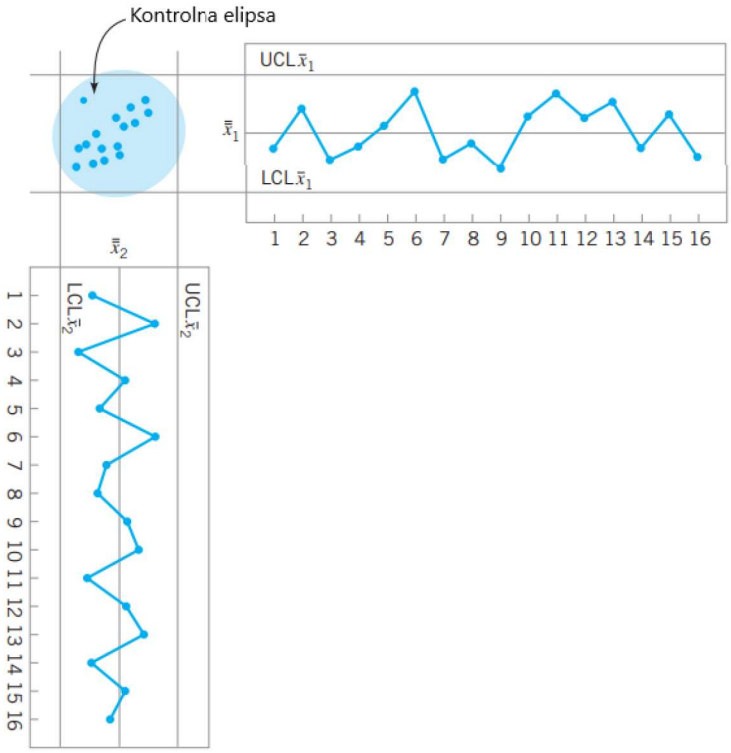
Može se pokazati da su vektor očekivanja uzorka i matrica kovarijanci uzorka nepristrani procjenitelji odgovarajućih veličina populacije, odnosno
$E(\overline{\mathbf{X}}) = \boldsymbol{\mu}$ i $E(\mathbf{S}) = \boldsymbol{\Sigma}$.

6.2 Hotelling T^2 kontrolna karta

Najpoznatija multivarijatna kontrolna karta je Hotelling T^2 kontrolna karta za praćenje vektora očekivanja procesa. Imamo dvije verzije Hotelling T^2 kontrolne karte: jednu za uzorke veličine $n = 1$, a drugu za uzorke veličine $n > 1$. Prvo ćemo opisati Hotelling T^2 kontrolnu kartu za uzorke veličine $n > 1$. Pretpostavimo da imamo dvije slučajne varijable X_1 i X_2 koje su zajedno raspoređene prema bivarijantnoj normalnoj distribuciji. Neka su μ_1 i μ_2 očekivanja, a σ_1 i σ_2 standardne devijacije od X_1 i X_2 redom. Pretpostavimo da su σ_1, σ_2 i σ_{12} poznati, pri čemu je σ_{12} kovarijanca od slučajnih varijabli X_1 i X_2. Ako su $\overline{x}_1$ i $\overline{x}_2$ prosjeci uzoraka dviju slučajnih varijabli izračunatih iz uzoraka veličine n, tada statistika

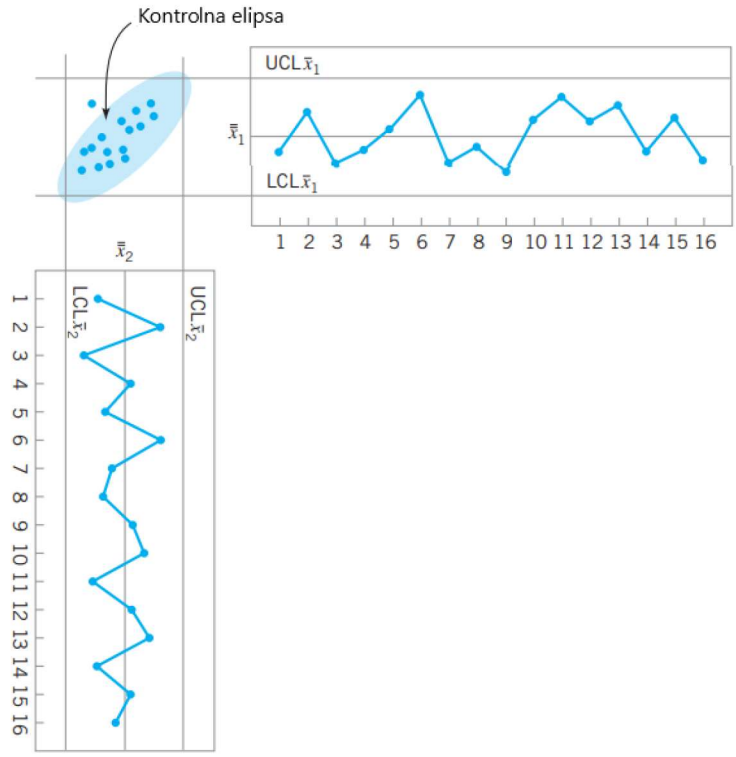
$$\chi_0^2 = \frac{n}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}\left[\sigma_2^2(\overline{x}_1 - \mu_1)^2 + \sigma_1^2(\overline{x}_2 - \mu_2)^2 - 2\sigma_{12}(\overline{x}_1 - \mu_1)(\overline{x}_2 - \mu_2)\right] \tag{13}$$

ima χ^2-distribuciju s 2 stupnja slobode. Ako proces ostaje u kontroli s očekivanjima μ_1 i μ_2, tada će χ_0^2 biti manja od vrijednosti $\chi_{\alpha,2}^2$. Promotrimo slučaj u kojem su slučajne varijable X_1 i X_2 nezavisne, odnosno $\sigma_{12} = 0$. Tada jednadžba (13) definira elipsu sa središtem u (μ_1, μ_2) s glavnim osima paralelnim s $\overline{x}_1$ i $\overline{x}_2$ osima. Ovu elipsu zovemo kontrolna elipsa. Uzimanjem χ_0^2 iz jednadžbe (13) da je jednako $\chi_{\alpha,2}^2$ implicira da par prosjeka uzoraka $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, koji daju vrijednost χ_0^2 ucrtanu unutar elipse, označava da je proces pod kontrolom. Ako se vrijednost χ_0^2 ucrta izvan elipse proces je izvan kontrole. To se može prikazati grafički.



Slika 12: Kontrolna elipsa za dvije nezavisne slučajne varijable

U slučaju da su dvije slučajne varijable zavisne, tada je $\sigma_{12} \neq 0$ i glavne osi elipse nisu više paralelne s $\overline{x}_1$ i $\overline{x}_2$ osima. Možemo na slici 13 vidjeti da je 11. uzorak ucrtan izvan elipse, što ukazuje na to da je proces izvan kontrole, a na individualnim kontrolnim kartama 11. uzorak je unutar kontrolnih granica. Vidimo kako s korištenjem individualnih kontrolnih karti za povezane varijable ne možemo otkriti da je proces izvan kontrole.



Slika 13: Kontrolna elipsa za dvije zavisne slučajne varijable

Ne preporučuje se korištenje kontrolne elipse, jer se vremenski slijed ucrtanih točaka gubi i jer je teško nacrtati kontrolnu elipsu za više od dvije varijable. Preporučuje se ucrtavati χ_0^2 iz jednadžbe na kontrolnu kartu s gornjom kontrlnom granicom $\chi_{\alpha,2}^2$.
Pretpostavimo da imamo p povezanih slučajnih varijabli koje se zajednički kontroliraju. Pretpostavlja se da je zajednička distribucija vjerojatnosti od p slučajnih varijabli p-varijanta normalna distribucija. Prvo računamo očekivanje za svaku od p slučajnih varijabli iz uzorka veličine n. Ovaj skup očekivanja predstavljen je vektorom $p \times 1$

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_p \end{bmatrix}$$

Statistika koju ucrtavamo na kontrolnu kartu je

$$\chi_0^2 = n(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) \tag{14}$$

gdje je $\boldsymbol{\mu}^T = [\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p]$ vektor očekivanja od slučajnih varijabli, a $\boldsymbol{\Sigma}$ je matrica kovarijanci. Gornja kontrolna granica na kontrolnoj karti je

$$UCL = \chi_{\alpha,p}^2,$$

a donja kontrolna granica je $LCL = 0$.

U praksi najčešće procjenjujemo $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\Sigma}$ na temelju prošlih uzoraka veličine n, uzetih kada se pretpostavlja da je proces bio pod kontrolom. Pretpostavimo da je dostupno m takvih uzoraka. Očekivanje i varijanca računaju se iz svakog uzorka za $j = 1, 2, ..., p$ i $k = 1, 2, ..., m$

$$\overline{x}_{jk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ijk}$$
$$s_{jk}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ijk} - \overline{x}_{jk})^2,$$

pri čemu je x_{ijk} i-to opažanje j-te varijable u k-tom uzorku. Kovarijanca između j-te i h-te varijable u k-tom uzorku je

$$s_{jhk} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ijk} - \overline{x}_{jk})(x_{ihk} - \overline{x}_{hk}),$$

gdje je $k = 1, 2, ..., m$ i $j \neq h$.
$\overline{x}_{jk}$, s_{jk}^2 i s_{jhk} se zatim izračunavaju u prosjeku za svih m uzoraka kako bismo dobili

$$\overline{\overline{x}}_j = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\overline{x}_{jk} \quad j = 1, 2, ..., p$$
$$s_j^2 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} s_{jk}^2 \quad j = 1, 2, ..., p$$
$$\overline{s}_{jh} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} s_{jhk} \quad j \neq h.$$

Elementi vektora $\overline{\overline{\mathbf{x}}}$ su $\overline{\overline{x}}_j$ za $j = 1, 2, ..., p$. Matrica S je dana s

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \overline{s}_1^2 & \overline{s}_{12} & \overline{s}_{13} & ... & \overline{s}_{1p} \\ & \overline{s}_2^2 & \overline{s}_{23} & ... & \overline{s}_{2p} \\ & & \overline{s}_3^2 & & \vdots \\ & & & \ddots & \overline{s}_p^2 \end{bmatrix}$$

Matricu $\mathbf{S}$ koristimo kao procjenu za $\boldsymbol{\Sigma}$ kada je proces u kontroli.
Pretpostavimo sada da je $\boldsymbol{S}$ procjena za $\boldsymbol{\Sigma}$ i vektor $\overline{\overline{x}}$ je vektor očekivanja procesa. Ako zamijenimo $\boldsymbol{\mu}$ s $\overline{\overline{\boldsymbol{x}}}$ i $\boldsymbol{\Sigma}$ sa $\boldsymbol{S}$ u jednadžbi (14) onda je statistika koju ucrtavamo na kontrolnu kartu

$$T^2 = n(\overline{\mathbf{x}} - \overline{\overline{\mathbf{x}}})^T \boldsymbol{S}^{-1}(\overline{\mathbf{x}} - \overline{\overline{\mathbf{x}}}).$$

Kontrolne granice za Hotelling T^2 kontrolnu kartu u fazi I su

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{p(m-1)(n-1)}{mn - m - p + 1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \\ LCL &= 0, \end{aligned} \tag{15}$$

pri čemu je $F_{\alpha,p,mn-m-p+1}$ odgovarajući kvantil $F(p, mn-m-p+1)$ distribucije (Montgomery, 2012).
U fazi II, kada se kontrolna karta koristi za praćenje buduće proizvodnje, kontrolne granice su:

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \\ LCL &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Primjetimo da je UCL iz jednadžbe (16) jednak UCL iz jednadžbe (15) pomnožen s $(m+1)/(m-1)$. Kada su $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\Sigma}$ procijenjeni na temelju velikog broja uzoraka, barem 200 uzoraka, možemo koristit $UCL = \chi^2_{\alpha,p}$ kao gornju kontrolnu granicu i u fazi I i u fazi II.

Primjer 6.1. *Vlačna čvrstoća i promjer tekstilnog vlakna dvije su varijable koje treba zajednički kontrolirati. Odlučili smo koristiti uzorak veličine 10 vlakana. Uzeli smo 20 uzoraka i na temelju toga izračunali* $\overline{\overline{x}_1} = 115.59$,$\overline{\overline{x}_2} = 1.06$, $\overline{s}_1^2 = 1.23$, $\overline{s}_2^2 = 0.83$ *i* $\overline{s}_{12} = 0.79$. *Podatke i izračune možemo vidjeti u sljedećoj tablici.*

Broj uzorka k	**Vlačna čvrstoća** $\overline{x}_{1k}$	**Promjer** $\overline{x}_{2k}$	s_{1k}^2	s_{2k}^2	s_{12k}	T_k^2	$\lvert S_k \rvert$
1	115.25	1.04	1.25	0.87	0.8	2.16	0.45
2	115.91	1.06	1.26	0.85	0.81	2.14	0.41
3	115.05	1.09	1.3	0.9	0.82	6.77	0.5
4	116.21	1.05	1.02	0.85	0.81	8.29	0.21
5	115.9	1.07	1.16	0.73	0.8	1.89	0.21
6	115.55	1.06	1.01	0.8	0.76	0.03	0.23
7	114.98	1.05	1.25	0.78	0.75	7.54	0.41
8	115.25	1.1	1.4	0.83	0.8	3.01	0.52
9	116.15	1.09	1.19	0.87	0.83	5.92	0.35
10	115.92	1.05	1.17	0.86	0.95	2.41	0.1
11	115.75	0.99	1.45	0.79	0.78	1.13	0.54
12	114.9	1.06	1.24	0.82	0.81	9.96	0.36
13	116.01	1.05	1.26	0.55	0.72	3.86	0.17
14	115.83	1.07	1.17	0.76	0.75	1.11	0.33
15	115.29	1.11	1.23	0.89	0.82	2.56	0.42
16	115.63	1.04	1.24	0.91	0.83	0.08	0.44
17	115.47	1.03	1.2	0.95	0.7	0.19	0.65
18	115.58	1.05	1.18	0.83	0.79	0	0.36
19	115.72	1.06	1.31	0.89	0.76	0.35	0.59
20	115.4	1.04	1.29	0.85	0.68	0.62	0.63

Tablica 9: Podaci mjerenja

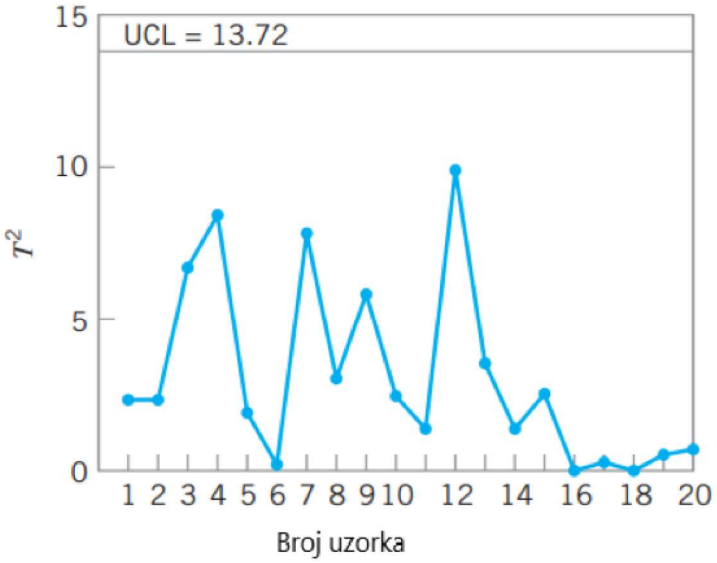
Statistika koju ćemo ucrtavati na kontrolnu kartu je

$$T^2 = \frac{10}{(1.23)(0.83)-(0.79)^2}\left[0.83(\overline{x}_1-115.59)^2+1.23(\overline{x}_2-1.06)^2-2(0.79)(\overline{x}_1-115.59)(\overline{x}_2-1.06)\right].$$

Ako stavimo da je $\alpha = 0.001$ *onda je gornja kontrolna granica*

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \\ &= \frac{2(19)(9)}{20(10)-20-2+1} F_{0.001,2,20(10)-20-2+1} \\ &= \frac{342}{179} F_{0.001,2,179} \\ &= (1.91)7.18 \\ &= 13.72, \end{aligned}$$

pa možemo na slici vidjeti Hotelling T^2 *kontrolnu kartu*



Slika 14: Hotelling T^2 kontrolna karta

S obzirom da niti jedna točka nije izvan gornje kontrolne granice, možemo zaključiti kako je proces u kontroli.

Jedna od poteškoća s multivarijatnom kontrolnom kartom je interpretacija koja od p varijabli je odgovorna za izlazak točke izvan kontrolnih granica, odnosno izlazak procesa iz kontrole. Ako je T^2 vrijednost točke koja je izvan kontrolnih granica,$T^2_{(i)}$ vrijednost koju dobijemo ako izbacimo i-tu varijablu iz izračuna, onda je

$$d_i = T^2 - T^2_{(i)}$$

pokazatelj relativnog doprinosa i-te varijable ukupnoj statistici. Kada točka izađe izvan kontrolnih granica preporučamo računanje vrijednosti d_i za $i = 1, 2, ..., p$ i fokusiranje na velike vrijednosti d_i. Sve vrijednosti d_i koje su veće od $\chi^2_{\alpha,1}$, uzimamo najčešće $\alpha = 0.01$ iako je izbor donekle prozvoljan, možemo smatrati velikima.

Literatura

[1] M. Benšić, N. Šuvak, *Primijenjena statistika,* Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2013.

[2] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku,* Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[3] F. Dominici, J. J. Faraway, M. Tanner, J. Zidek, *Introduction to Statistical process control*, University of Florida, USA, 2014.

[4] J. Lawson, *An Introduction to Acceptance Sampling and SPC with R,* 2021.

[5] D. Montgomery, *Introduction to Statistical quality control, Seventh Edition*, Arizona State University, 2012.

Sažetak

U ovom radu objašnjene su kontrolne karte koje su jedan od glavnih alata u statističkoj kontroli procesa. Kontrolna je karta grafički prikaz karakteristike kvalitete koja je izmjerena ili izračunata iz uzorka u odnosu na broj uzorka ili vrijeme. Najčešće korištene kontrolne karte su: Shewhartova kontrolna karta, CUSUM kontrolna karta i EWMA kontrolna karta. Najpoznatije Shewhartove kontrolne karte su $\overline{x}$ kontrolna karta za praćenje očekivanja procesa i R kontrolna karta za praćenje varijabilnosti procesa. Koristimo ih kada nas zanimaju veliki pomaci od očekivanja procesa. Kada nas zanimaju mali pomaci od očekivanja procesa, koristimo CUSUM i EWMA kontrolnu kartu. U slučaju da želimo pratiti više povezanih karakteristika kvalitete odjednom, koristit ćemo multivarijatnu Hotelling T^2 kontrolnu kartu.

Ključne riječi: Shewhartova kontrolna karta, CUSUM kontrolna karta, EWMA kontrolna karta, Hotelling T^2 kontrolna karta

Statistical process control

Summary

This paper contains an explanation of control charts, which are one of the main tools in statistical process control. Control chart is a graphical representation of a quality characteristic, measured or calculated from a sample versus sample number or time. The most commonly used control charts are: Shewhart control chart, CUSUM control chart and EWMA control chart. The most famous Shewhart control charts are the $\overline{x}$ control chart for monitoring the process mean and the R control chart for monitoring the process variability. We use them when we are interested in detecting large shifts from process mean. When we are interested in detecting small shifts from process mean, we use CUSUM and EWMA control charts. In case we want to monitor several related quality characteristics at once, we will use the multivariate Hotelling T^2 control chart.

Keywords: Shewhart control chart, CUSUM control chart, EWMA control chart, Hotelling T^2 control chart

Životopis

Rođena sam 8. listopada 1996. godine u Osijeku. Osnovnu sam školu završila u Dardi, nakon koje sam pohađala III. (matematičku) gimnaziju u Osijeku, gdje sam maturirala 2015. godine. Preddiplomski studij Matematike upisala sam 2015. godine na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, kojeg sam završila 2019. godine s temom završnog rada "Osnovni algoritmi teorije brojeva", pod mentorstvom prof. dr. sc. Ivana Matića. Iste godine upisujem diplomski studij na Odjelu za matematiku u Osijeku, smjer Financijska matematika i statistika.