Neelementarni integrali

Vuković, Ivan

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij Matematika

Ivan Vuković

Neelementarni integrali

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij Matematika

Ivan Vuković

Neelementarni integrali

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Soldo
Komentor: doc. dr. sc. Marija Miloloža Pandur

Osijek, 2022.

Sažetak: U ovom radu proučavat ćemo elementarna polja i elementarne funkcije te vidjeti kako se njihova teorija može primijeniti na neelementarne integrale, tj. integrale funkcija čije primitivne funkcije nisu elementarne. Dat ćemo nekoliko primjera takvih integrala i njihovu primjenu. Posebno ćemo se baviti Gaussovim integralom: dokazat ćemo da je konvergentan, da integral $\int e^{-x^2}\,dx$ nije elementaran te ćemo ga riješiti na tri različita načina koristeći različita područja matematike. Na samom kraju koristit ćemo numeričku integraciju kako bismo ga aproksimirali.

Ključne riječi: elementarna funkcija, meromorfna funkcija, elementarno polje, Riemannov integral, Liouvilleov teorem, neelementaran integral, Gaussov integral

Nonelementary integrals

Abstract: In this paper we will study elementary fields and elementary functions and see how that theory can be applied to nonelementary integrals, that is integrals of functions whose primitive functions are not elementary. We will give a few examples of such integrals and see where they can be applied. We will focus on the Gaussian integral: prove its convergence, prove that integral $\int e^{-x^2}\,dx$ is nonelementary and solve it in three different ways using several branches of mathematics. Finally, we will apply the numerical method to approximately calculate its value.

Keywords: elementary function, meromorphic function, elementary field, Riemann integral, Liovuille's theorem, nonelementary integral, Gaussian integral

Sadržaj

Uvod **1**

1 Elementarna polja i elementarne funkcije **2**

2 Riemannov integral **5**

2.1 Određeni integral 5

2.2 Nepravi integral 6

3 Neelementarni integrali **8**

3.1 Uvod i motivacija 8

3.2 Gaussov integral 10

3.2.1 Dvostruki integral 12

3.2.2 Gama funkcija 14

3.2.3 Kompleksna analiza 15

3.2.4 Numerička integracija 18

Literatura **21**

Uvod

Funkcija i integral jedni su od najvažnijih pojmova u matematici. S pojmom funkcije susrećemo se još u osnovnoj školi, a s integralima na kolegiju *Integralni račun.* Na tom smo kolegiju upoznali definiciju integrala i neke standardne metode kojima se oni rješavaju. Međutim, postoje integrali koji se ne mogu riješiti standardnim metodama. U ovom radu bavit ćemo se takvim integralima koje nazivamo **neelementarni integrali**, a posebno Gaussovim integralom.

U prvom dijelu dat ćemo definiciju elementarnih realnih funkcija realne varijable te ju poopćiti na kompleksne funkcije realne varijable. Uz to ćemo dati definiciju elementarnog polja te kroz nekoliko primjera povezati ta dva pojma. Također ćemo dati podlogu za proučavanje neelementarnih integrala. U drugom dijelu ukratko ćemo se prisjetiti Riemannovog integrala na segmentu i nepravog integrala. U trećem dijelu ćemo okarakterizirati neelementarne integrale, dati nekoliko primjera te se posebno posvetiti Gaussovom integralu. Dokazat ćemo njegovu konvergenciju i neelementarnost te ga riješiti na tri različita načina. Na samom kraju prisjetit ćemo se numeričke integracije i na jednom zadatku aproksimirati Gaussov integral.

Kolegiji čije je gradivo potrebno za ovaj rad su: *Diferencijalni račun, Integralni račun, Funkcije više varijabli, Kompleksna analiza, Numerička matematika, Algebra* i *Uvod u vjerojatnost i statistiku.*

1 Elementarna polja i elementarne funkcije

U ovom poglavlju prisjetit ćemo se nekih pojmova iz diferencijalnog računa, kompleksne analize i algebre.

Definicija 1.1. **Osnovne elementarne funkcije** (realne funkcije realne varijable) su:

a) konstanta $x \mapsto c, \quad c \in \mathbb{R}$

b) opća potencija $x \mapsto x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

c) eksponencijalne funkcije $x \mapsto a^x, \quad a > 0,\, a \neq 1$

d) logaritamske funkcije $x \mapsto \log_a x, \quad a > 0,\, a \neq 1$

e) trigonometrijske funkcije $x \mapsto \sin x,\, \cos x,\, \operatorname{tg} x,\, \operatorname{ctg} x$

f) ciklometrijske funkcije $x \mapsto \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x.$

Elementarne funkcije dobivaju se iz osnovnih elementarnih funkcija primjenom konačno mnogo osnovnih računskih operacija $(+, -, \cdot, :)$ te konačnog broja kompozicija osnovnih elementarnih funkcija. Navedimo nekoliko primjera:

1. monomi $x \mapsto a \cdot x^\alpha, \quad a, \alpha \in \mathbb{R}$
2. polinomi $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}_0$
3. racionalne funkcije (kvocjenti dvaju polinoma)
4. hiperbolne funkcije $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$
5. area funkcije $x \mapsto \operatorname{arsh} x,\, \operatorname{arch} x,\, \operatorname{arth} x,\, \operatorname{arcth} x$
6. $f(x) = \ln(\sin x) + x^3 + 2^{3x} - \frac{e^x + 1}{\cos x^2} - \sqrt{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}.$

Sada ćemo prijeći na kompleksne funkcije **realne** varijable. Na taj način ćemo moći dati općenitiju definiciju elementarnih funkcija. Osim toga, sve trigonometrijske funkcije i njima inverzne funkcije možemo prikazati preko eksponencijalnih i logaritamskih funkcija; prisjetimo se da vrijedi:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{1.1}$$

$$\arcsin x = -i \ln(ix \pm \sqrt{1 - x^2}) \qquad \arccos x = -i \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}). \tag{1.2}$$

Prisjetimo se definicije polja.

Definicija 1.2. Neka je K neprazan skup uz zadane binarne operacije zbrajanja i množenja. Kažemo da je $(K, +, \cdot)$ **polje** ako vrijedi:

1. $(K, +)$ je Abelova grupa
2. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa
3. $a(b + c) = ab + ac, \quad \forall a, b, c \in K.$

Koristit ćemo oznaku $K[X_1, \dots, X_n]$ za prsten polinoma od n varijabli s koeficijentima iz polja K, a $K(X_1, \dots, X_n)$ za polje racionalnih funkcija od n varijabli s koeficijentima iz polja K.

Primjer 1. Funkcija $f(X) = X^3 + (2+i)X^2 + 4$ nalazi se u $\mathbb{C}[X]$, a funkcija $g(X) = \dfrac{X-i}{X^2 - X + i}$ nalazi se u polju racionalnih funkcija $\mathbb{C}(X)$.

Definicija 1.3. Neka je Ω otvoren skup. Kažemo da je funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ **analitička** u točki z_0 ako je derivabilna na nekoj okolini te točke. Funkcija je analitička na skupu Ω ako je analitička u svakoj točki $z \in \Omega$.

Definicija 1.4.

1. Točku z_0 nazivamo **singularitetom** kompleksne funkcije kompleksne varijable ukoliko u z_0 funkcija f ili nije definirana ili nije analitička.

2. Singularitet z_0 funkcije f zovemo **izolirani singularitet** ako je f analitička na kružnom vijencu $K(z_0, 0, \varepsilon)$, za neki $\varepsilon > 0$.

3. Za izolirani singularitet z_0 kažemo da je:

   (a) **uklonjiv**, ukoliko je $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

   (b) **pol**, ukoliko je $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$

   (c) **bitan**, ukoliko $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ ne postoji.

Definicija 1.5. Kažemo da je funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ **meromorfna** na Ω ako ili nema singulariteta ili su joj svi singulariteti izolirani i to uklonjivi singulariteti ili polovi.

Uočimo da, ako su f i g analitičke funkcije na Ω, $g \neq 0$, tada je i funkcija $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ meromorfna na Ω.

Definicija 1.6. Ako su $f_1, \dots, f_n$ meromorfne funkcije onda s $\mathbb{C}(f_1, \dots, f_n)$ označavamo **skup meromorfnih funkcija** h oblika

$$h = \frac{P(f_1, \dots, f_n)}{Q(f_1, \dots, f_n)} = \frac{\sum a_{i_1, \dots, i_n} f_1^{i_1} \cdots f_n^{i_n}}{\sum b_{j_1, \dots, j_n} f_1^{j_1} \cdots f_n^{j_n}},$$

gdje su P i Q polinomi od n varijabli nad poljem $\mathbb{C}$ te $Q(f_1, \dots, f_n) \neq 0$.

Skup $\mathbb{C}(f_1, \dots, f_n)$ očito je polje s uobičajenim operacijama zbrajanja i množenja funkcija kao algebarskim operacijama nad poljem.

Primjer 2. Polje $K = \mathbb{C}(x, \sin x, \cos x)$ je polje racionalnih funkcija

$$\frac{P(x, \sin x, \cos x)}{Q(x, \sin x, \cos x)}$$

za polinome $P, Q \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$, takvi da je $Q[X, Y, Z] \neq 0$. Npr. ne možemo uzeti $Q(X, Y, Z) = Y^2 + Z^2 - 1$ jer je $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$. Primjer jedne funkcije iz K:

$$x \mapsto \frac{2x^3 \sin^2 x - 6ix^2 \cos x + (4+3i)x}{x^4 + 2x^3 \cos^5 x + 2i \sin^3 x + 3}. \tag{1.3}$$

Dakle $P(X,Y,Z) = 2X^3Y^2 - 6iX^2Z + (4+3i)X$, $Q(X,Y,Z) = X^4 + 2X^3Z^5 + 2iY^3 + 3$. Prema (1.1) možemo pisati $K = \mathbb{C}(x, e^{ix})$ pa se svaki element polja K može zapisati u obliku $R(x, e^{ix})/S(x, e^{ix})$, $R, S \in \mathbb{C}[X,Y]$, $S \neq 0$. Nakon sređivanja formule za $\sin(x)$ dobivamo

$$\sin x = \frac{e^{2ix} - 1}{2ie^{ix}} \tag{1.4}$$

pa će polinomi R i S za $\sin(x)$ biti: $R(X,Y) = Y^2 - 1$, $S(X,Y) = 2iY$. Potpuno analogno se pokaže za $\cos(x)$.

Definicija 1.7. Polje $K = \mathbb{C}(x, f_1, \dots, f_n)$ meromorfnih funkcija je **elementarno polje** ako za svaku funkciju f_i vrijedi da je (za $i = 1$ uzimamo $K_0 = \mathbb{C}(X)$)

1. f_i eksponent nekog elementa polja $K_{i-1} = \mathbb{C}(x, f_1, \dots, f_{i-1})$ ili
2. f_i logaritam nekog elementa polja $K_{i-1} = \mathbb{C}(x, f_1, \dots, f_{i-1})$ ili
3. f_i algebarska nad K_{i-1}, odnosno postoji polinom $P(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \dots + a_0 \in K_{i-1}[X]$, $a_k \in K_{i-1}$ takav da je $P(f_i) = 0$.

Primjer 3. Pogledajmo sljedeću funkciju.

$$f(x) = 3\ln(x) - \sqrt[3]{e^x + 5\cos(x^2)}$$

Elementarno polje u kojemu se nalazi ta funkcija je

$$K = \mathbb{C}(x, e^x, \ln x, e^{ix^2}, \sqrt[3]{e^x + 5\cos(x^2)}).$$

Pri tome je $K_0 := \mathbb{C}(x)$, $K_1 = \mathbb{C}(x,\, e^x)$, $K_2 = \mathbb{C}(x,\, e^x,\, \ln x)$, $K_3 = \mathbb{C}(x,\, e^x,\, \ln x,\, e^{ix^2})$, $K_4 = \mathbb{C}(x,\, e^x,\, \ln x,\, e^{ix^2},\, \sqrt[3]{e^x + 5\cos(x^2)}) = K$.
Uočimo da je $f_4 = \sqrt[3]{e^x + 5\cos(x^2)}$ algebarska nad K_3. Naime, polinom $P(X) = X^3 - \sqrt[3]{e^x + 5\cos(x^2)}$ ima koeficijente iz K_3 i vrijedi $P(f_4(x)) = 0$.

Sada možemo dati općenitiju definiciju elementarnih funkcija.

Definicija 1.8. Meromorfna funkcija f je **elementarna funkcija** ako se nalazi u elementarnom polju meromorfnih funkcija.

Primjer 4. Funkcija $f(x) = \sin(x)$ je elementarna jer se nalazi u elementarnom polju $\mathbb{C}(x, e^{ix})$. Njena inverzna funkcija $\arcsin(x) = -i\ln(ix \pm \sqrt{1-x^2})$ također je elementarna jer se nalazi u elementarnom polju $\mathbb{C}(x, \sqrt{1-x^2}, \ln(ix \pm \sqrt{1-x^2}))$.

Teorem 1.1 (vidi [6, str. 3]). *Svaka meromorfna kompozicija elementarnih funkcija je elementarna.*

Dokaz. Dokaz se može naći u [6, str. 3]. □

Primjer 5. Kompozicija $g(x) = \cos(\sin(x^2))$ je elementarna jer se nalazi u elementarnom polju $\mathbb{C}(x, e^{ix^2}, e^{i\sin(x^2)})$.

Uzimajući u obzir prethodni teorem te činjenicu da se elementarna funkcija nalazi u elementarnom polju, definiciju elementarnih funkcija 1.1 proširili smo na **kompleksne funkcije realne varijable**.

Teorem 1.2 (vidi [2, str. 5]). *Ako je K elementarno polje, onda je zatvoreno na operaciju deriviranja.*

Dokaz. Dokaz se može naći u [2, str. 5]. □

2 Riemannov integral

2.1 Određeni integral

Motivacija za uvođenje integrala je računanje površine lika ispod grafa nenegativne omeđene funkcije. Takav lik naziva se pseudotrapez. Za definiciju određenog integrala potrebno je konstruirati Darbouxove sume te gornji i donji Riemannov integral. Ovdje se nećemo time baviti, nego ćemo samo navesti definiciju određenog integrala. Prethodne konstrukcije mogu se naći u [4, str. 126-127].

Definicija 2.1. Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Označimo s $\overline{\int} f|_{[a,b]}$ i $\underline{\int} f|_{[a,b]}$ gornji, odnosno donji Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a,b]$. Ako je $\overline{\int} f|_{[a,b]} = \underline{\int} f|_{[a,b]}$, onda kažemo da je funkcija f **integrabilna u Riemannovom smislu** ili **R-integrabilna na segmentu** $[a,b]$, a ta zajednička vrijednost naziva se **određeni integral** funkcije f na $[a,b]$ i označujemo ju s

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.1}$$

U nastavku ćemo pokazati vezu između diferencijalnog i integralnog računa, odnosno kako se računaju integrali.

Definicija 2.2. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je I neki od skupova $\langle a,b\rangle, [a,b\rangle, \langle a,b], [a,b]$. **Primitivna funkcija** ili **antiderivacija funkcije** f svaka je funkcija $G : I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom

$$G'(x) = f(x), \quad \forall x \in I. \tag{2.2}$$

Primijetimo da su sve primitivne funkcije dane funkcije f jednake do na konstantu, prema tome dovoljno je poznavati jednu takvu funkciju.

Definicija 2.3. Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je I neki od skupova $\langle a,b\rangle, [a,b\rangle, \langle a,b], [a,b]$, zove se **neodređeni integral** fukcije f i označava se s $\int f(x)\,dx$.

Navedimo teorem koji karakterizira integrabilnost.

Teorem 2.1 (Riemannov teorem, vidi [3, str. 242])**.** *Svaka funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna na segmentu $[a,b]$ je integrabilna na tom segmentu.*

Dokaz. Dokaz se može naći u [3, str. 242]. □

Teorem 2.2 (O primitivnoj funkciji, vidi [3, str. 250])**.** *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a,b]$ te neka je $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ definirana kao:*

$$G(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi. \tag{2.3}$$

Tada je funkcija G derivabilna na $[a,b]$ i vrijedi

$$G'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b]. \tag{2.4}$$

Dokaz. Dokaz se može naći u [3, str. 250.] □

Dakle, svaka neprekidna funkcija ima svoju primitivnu funkciju. Koristeći prethodni teorem dolazimo do jednog od najvažnijih teorema matematičke analize.

Teorem 2.3 (Newton-Leibnitzova formula, vidi [3, str. 251])**.** *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$. Ako je G bilo koja primitivna funkcija od f na $[a,b]$ onda je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a). \tag{2.5}$$

Realan broj $G(b) - G(a)$ kraće se označava s $G(x)|_a^b$.

Dokaz. Ako su F i G primitivne funkcije od f na $[a,b]$, onda postoji konstanta C takva da je $G(x) = F(x) + C$ za svaki $x \in [a,b]$. Budući da je

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a),$$

možemo pretpostaviti da je $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$, gdje je $x_0 \in [a,b]$. Dobivamo:

$$F(b) - F(a) = \int_{x_0}^b f(t)\,dt - \int_{x_0}^a f(t)\,dt = \int_{x_0}^b f(t)\,dt + \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

□

Time je dobivena formula za računanje određenog integrala.

U nastavku ćemo spomenuti osnovne metode i neke tehnike integracije. Tehnika integracije ovisi o podintegralnoj funkciji, dok je metoda integracije općenitiji pojam. Za računanje integrala vrlo je bitna i **tablica osnovnih integrala** koja se može naći u [3, str. 256].

Metode integracije ćemo samo navesti. To su: metoda direktne integracije, metoda supstitucije i metoda parcijalne integracije. Detaljnije o njima može se naći u [3, str. 257 - 268].

Općenito, tehnika integracije ovisi o podintegralnoj funkciji, odnosno klasi kojoj onda pripada. Navest ćemo četiri tehnike integracije. To su: integracija racionalnih funkcija, binomni integral, integracija iracionalnih funkcija integracija trigonometrijskih funkcija. Detaljnije o njima može se naći u [3, str. 270 - 281].

2.2 Nepravi integral

Primijetimo da smo definirali određeni integral omeđene funkcije čija je domena segment. Ako je funkcija neprekidna na segmentu, onda je ona i omeđena na tom segmentu (*Bolzano-Weierstrassov teorem*, vidi [3, str. 148]), a samim time je i površina lika ispod grafa te funkcije konačna. Međutim ukoliko je interval na kojem promatramo neprekidnu funkciju otvoren ili poluotvoren, takva funkcija ne mora biti omeđena. Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 6. Neka je $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Izračunajmo površinu lika ispod krivulje na intervalu $\langle 0, 1]$. Budući da f nije definirana u 0, ne možemo ni gledati 0 kao granicu, ali taj problem ćemo lako zaobići prelaskom na limes. Zato je

$$I = \lim_{a \to 0} \int_a^1 \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Dalje dobivamo:

$$I = \lim_{a \to 0} \left(-1 + \frac{1}{a}\right) = \infty.$$

Dakle, zaključujemo da površina nije konačna.

Definicija 2.4. Neka je funkcija $f : [a, b\rangle \to \mathbb{R}$ integrabilna na svakom segmentu $[a, \beta]$ gdje je $\beta < b \leq \infty$. Ako postoji konačan limes

$$\lim_{\beta \to b-} \int_a^\beta f(x)\, dx, \tag{2.6}$$

onda se taj limes zove **nepravi integral** funkcije f na $[a, b\rangle$ i označava s

$$\int_a^{\to b} f(x)\, dx. \tag{2.7}$$

U tom slučaju kažemo da integral (2.7) **konvergira**. Ako limes u (2.6) ne postoji kažemo da integral (2.7) **divergira**. Dakle integral iz prethodnog primjera divergira.
Analogno definiramo integral na $\langle a, b]$:

$$\int_{a\leftarrow}^b f(x)\, dx := \lim_{\alpha \to a+} \int_\alpha^b f(x)\, dx.$$

Definicija 2.5. Ako je f integrabilna na svakom segmentu $[\alpha, \beta] \subset \langle a, b\rangle$, onda, uz uvjet da svi limesi postoje definiramo integral funkcije f na $\langle a, b\rangle$:

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\, dx := \lim_{\alpha \to a+} \int_\alpha^c f(x)\, dx + \lim_{\beta \to b-} \int_c^\beta f(x)\, dx, \tag{2.8}$$

gdje je $c \in \langle a, b\rangle$ te $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Još ćemo navesti kriterij koji je vrlo koristan pri određivanju konvergencije nepravog integrala.

Teorem 2.4 (vidi [4, str. 156]). *Neka je $\alpha > 0$ te neka su funkcije $f, g : [\alpha, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ takve da je*

1. $0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \geq x_0 > \alpha$
2. *Za svaki $\beta > \alpha$ postoje integrali* $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$ *i* $\int_\alpha^\beta g(x)\, dx.$

Ako integral

$$\int_\alpha^{+\infty} g(x)\, dx \tag{2.9}$$

konvergira, onda konvergira i integral

$$\int_\alpha^{+\infty} f(x)\, dx \tag{2.10}$$

i vrijedi

$$\int_\alpha^{+\infty} f(x)\, dx \leq \int_\alpha^{+\infty} g(x)\, dx. \tag{2.11}$$

Također vrijedi: ako integral (2.10) *divergira, divergira i integral* (2.9).

Dokaz. Dokaz se može naći u [4, str. 156.]. □

3 Neelementarni integrali

3.1 Uvod i motivacija

U prvom dijelu naveli smo definiciju elementarnih funkcija, a u drugom definiciju primitivnih funkcija. Također smo izrekli formulu za rješavanje određenog integrala pomoću primitivne funkcije. Do problema dolazi kada podintegralna funkcija ima primitivnu funkciju koja nije elementarna.

Definicija 3.1. Meromorfna funkcija f može se **integrirati u terminu elementarnih funkcija**, odnosno $\int f(x)dx$ je **elementaran integral** ako vrijedi $f = g'$, za neku elementarnu funkciju g.

Prema teoremu 1.2, zbog zatvorenosti elementarnog polja na deriviranje, i funkcija f mora biti elementarna.

Dakle, integral neke elementarne meromorfne funkcije je elementaran integral ako je njena primitivna funkcija elementarna funkcija. U suprotnom, tj. ako njena primitivna funkcija nije elementarna, onda takav integral zovemo **neelementaran integral**.

U prvoj polovici 19. stoljeća Liouville je pokazao sljedeći teorem, koji karakterizira elementarne integrale.

Teorem 3.1 (vidi [2, str. 7])**.** *Neka je f elementarna funkcija te neka je K elementarno polje koje sadrži f. Funkcija f može se integrirati u terminu elementarnih funkcija, odnosno ima primitivnu funkciju koja je elementarna, ako i samo ako postoje nenul konstante $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ i nenul funkcije $g_1, \ldots, g_n \in K$ i funkcija $h \in K$ takvi da vrijedi:*

$$f = \sum_{i=i}^{n} c_i \frac{g_i'}{g_i} + h'. \tag{3.1}$$

Dokaz. Dokaz se može naći u [6, str. 9-10]. □

Ovaj teorem ima za posljedicu još jedan važan teorem.

Teorem 3.2 (vidi [2, str. 8])**.** *Neka su f i g racionalne funkcije $\in \mathbb{C}(X)$, $f \neq 0$, $g' \neq 0$. Funkcija $f(x)e^{g(x)}$ može se integrirati u terminu elementarnih funkcija ako i samo ako postoji racionalna funkcija $R \in \mathbb{C}(X)$ takva da vrijedi*

$$R'(X) + g'(X)R(X) = f(X) \tag{3.2}$$

u $\mathbb{C}(X)$.

Dokaz. Dokaz se može naći u [2, str. 10-12]. □

Primjeri nekih neelementarnih integrala:

$$\int e^{-x^2}\, dx \tag{3.3}$$

$$\int \frac{1}{\ln x}\, dx \tag{3.4}$$

$$\int \sin x^2\, dx \tag{3.5}$$

$$\int \cos x^2 \, dx \tag{3.6}$$

$$\int \frac{\sin x}{x} \, dx \tag{3.7}$$

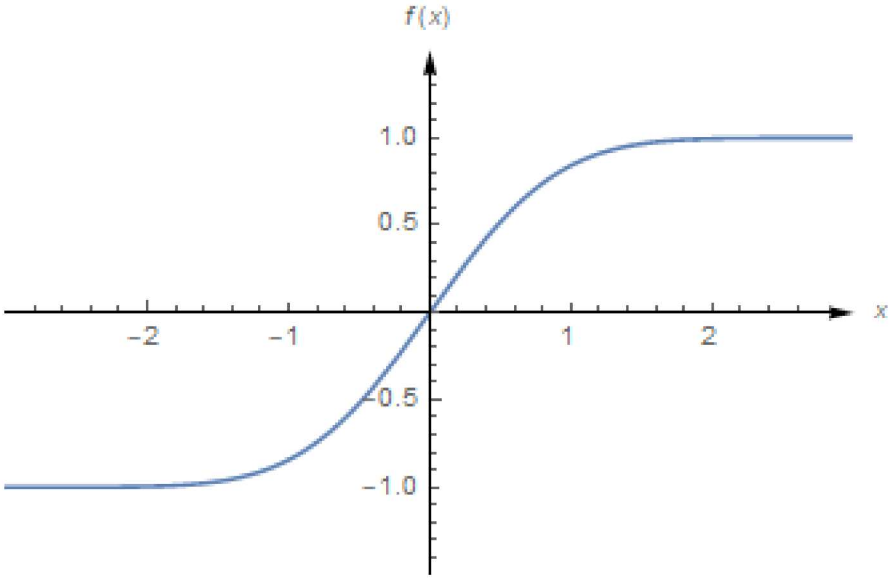
$$\int R(x, \sqrt{P(x)}) \, dx, \tag{3.8}$$

pri čemu je R racionalna funkcija, a P polinom stupnja 3 ili 4 s nultočkama kratnosti 1.

Uz integral 3.3 usko je vezana tzv. funkcija pogreške (eng. *error function*) u oznaci erf dana formulom:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, dt. \tag{3.9}$$

Ona postoji prema teoremu 2.2. Koristeći teorem 3.2 može se pokazati da $\int e^{-x^2} \, dx$ nije



Slika 1: Graf funkcije $erf(x)$

elementaran integral. Dokaz iz [2] navodimo u poglavlju 3.2. Određeni integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$ može se izračunati i on se naziva **Gaussov integral**. Jedna od najpoznatijih primjena dolazi iz teorije vjerojatnosti. Funkcija gustoće normalne distribucije s parametrima μ i σ^2 dana je formulom

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Za $\mu = 0$ i $\sigma^2 = 1$ imamo standardnu normalnu distribuciju. Jedno od svojstava funkcije gustoće jest normiranost, odnosno mora vrijediti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1.$$

Pomoću Gaussovog integrala može se pokazati da za standardnu normalnu distribuciju to vrijedi. Još jedan pojam iz vjerojatnosti je funkcija distribucije slučajne varijable. Da bismo dobili njenu formulu, moramo integrirati funkciju gustoće. Za standardnu normalnu distribuciju to je upravo funkcija $erf(x)$, s tim da za donju granicu uzimamo $-\infty$. Definicija i svojstva funkcije gustoće i funkcije distribucije mogu se naći u [1].

Integral (3.4) naziva se logaritamski integral. Njegova primjena dolazi iz teorije brojeva. $\pi(x)$ je funkcija koja daje broj prostih brojeva manjih ili jednakih x, $x \in \mathbb{R}^+$. Može se pokazati da vrijedi $\pi(x) \sim Li(x)$, za $x \to \infty$ (vidi [2]), odnosno

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{Li(x)} = 1,$$

pri čemu je

$$Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t}\, dt, \quad x > 2.$$

Uočimo da supstitucijom $u = \ln t$ dobivamo

$$\int \frac{1}{\ln t}\, dt = \int \frac{e^u}{u}\, du,$$

što je još jedan primjer neelementarnog integrala.

Integrali (3.5) i (3.6) nazivaju se Fresnelovi integrali. Primjenjuju se u izgradnji autocesta, preciznije u računanju njihovih zakrivljenosti (vidi [10]).

Integral (3.7) naziva se sinusni ili Dirichletov integral.

Integral (3.8) naziva se eliptički integral. Naziv eliptički dobio je jer se pojavljuje u računanju duljine luka elipse.

3.2 Gaussov integral

Posebno ćemo promatrati Gaussov integral. On je oblika:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx. \tag{3.10}$$

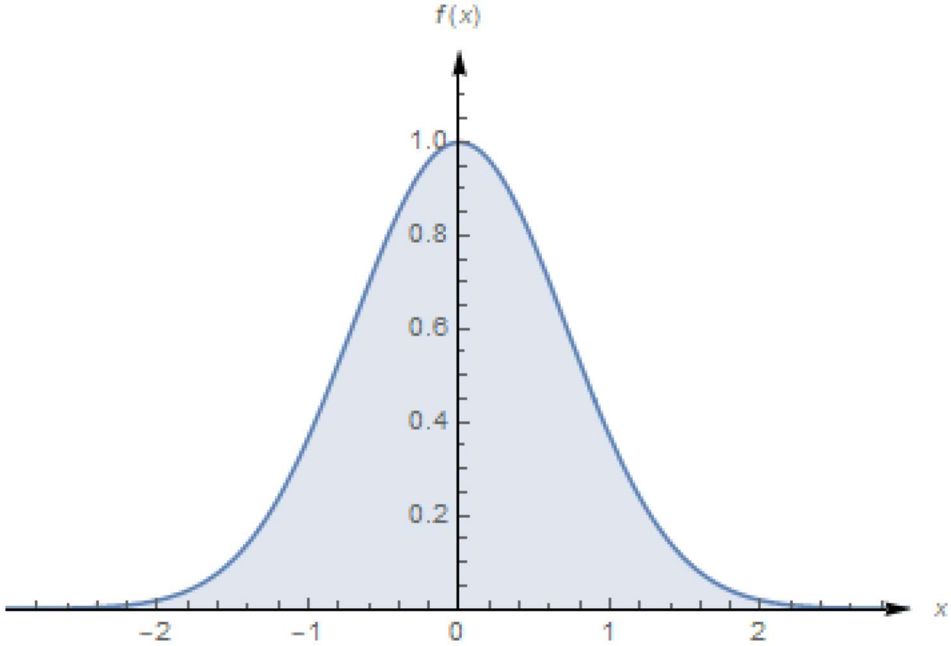
U nastavku ćemo ga riješiti na tri načina. Uvjerimo se najprije da će taj integral konvergirati. Koristeći parnost funkcije na simetričnom intervalu imamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 e^{-x^2}\, dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right). \tag{3.11}$$

Prvi integral s desne strane jednakosti će biti konačan broj jer je funkcija $x \mapsto e^{-x^2}$ neprekidna na segmentu $[0,1]$. Ostaje još provjeriti drugi integral. Znamo da za svaki $x > 1$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
x &< x^2 && / \cdot (-1) \\
-x &> -x^2 && /e \\
e^{-x} &> e^{-x^2} && \text{(monotonost eksponencijalne funkcije)} \qquad / \int_1^{\infty} \\
\int_1^{\infty} e^{-x}\, dx &> \int_1^{\infty} e^{-x^2}\, dx && \text{(monotonost integrala).}
\end{aligned}$$

Lako se pokaže da je integral s lijeve strane jednak $\frac{1}{e}$. Prema teoremu 2.4 zaključujemo da integral (3.10) konvergira.



Slika 2: Površina ispod grafa funkcije $f(x) = e^{-x^2}$

Pokažimo sada da se funkcija $x \mapsto e^{-x^2}$ ne može integrirati u terminu elementarnih funkcija. Sjetimo se, oznaka $\mathbb{C}(X)$ označava polje racionalnih funkcija nad $\mathbb{C}$. Prema teoremu 3.2 za našu funkciju uzimamo $f = 1$ i $g = -x^2$. Treba pokazati da diferencijalna jednadžba

$$R'(X) - 2XR(X) = 1 \tag{3.12}$$

nema rješenja u $\mathbb{C}(X)$. Pretpostavimo suprotno, neka rješenje h postoji. Znamo da ono nije ni konstanta ni polinom, jer bi u slučaju polinoma stupnja $n > 0$, izraz s lijeve strane jednakosti bio polinom stupnja $n+1$, pa izraz ne može nikako biti 1. Tada mora vrijediti da je $R(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$, gdje su P i Q nenul relativno prosti polinomi, $P, Q \in \mathbb{C}[X], deg\, Q > 1$. Tada jednadžba (3.12) glasi:

$$\left(\frac{P(X)}{Q(X)}\right)' - 2X\frac{P(X)}{Q(X)} = 1. \tag{3.13}$$

Prema pretpostavci, Q nije konstantan polinom, pa prema *Osnovnom teoremu algebre* ima barem jednu kompleksnu nultočku z_0. Također, jer su relativno prosti, vrijedi $P(z_0) \neq 0$. Ako je z_0 nultočka polinoma Q kratnosti $\alpha \geq 1$, onda je $\frac{P(X)}{Q(X)}$ oblika $\frac{k(X)}{(X-z_0)^\alpha}$, gdje je $k(X) \in \mathbb{C}(X)$ racionalna funkcija čiji su brojnik i nazivnik različiti od 0 u točki z_0. Nakon deriviranja dobivamo:

$$\left(\frac{P(X)}{Q(X)}\right)' = \frac{-\alpha k(X)}{(X-z_0)^{\alpha+1}} + \frac{k'(X)}{(X-z_0)^\alpha}. \tag{3.14}$$

Nakon što uvrstimo $|_{X=z}$, apsolutna vrijednost izraza s lijeve strane iz jednadžbe (3.13) bit će pribiližno jednaka $\frac{A}{|z-z_0|^{\alpha+1}}$, $A = |\alpha k(z_0)| \neq 0$ za $z \to z_0$. Ako pogledamo limes

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\alpha k(z_0)}{|z-z_0|^{\alpha+1}}$$

zaključujemo da je taj limes beskonačan i time smo došli do kontradikcije da je taj izraz jednak 1 za svaku točku $z \in \mathbb{C}$. Time smo pokazali da diferencijalna jednadžba (3.12) nema rješenja u $\mathbb{C}(X)$, odnosno da se funkcija $x \mapsto e^{-x^2}$ ne može integrirati u terminu elementarnih funkcija.

3.2.1 Dvostruki integral

Prisjetimo se nekih teorema vezanih za dvostruki integral.

Teorem 3.3 (Fubinijev teorem, vidi [8, str. 172]). *Neka je I pravouktnik $[a, b] \times [c, d]$ i $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je*

1. *funkcija $y \mapsto f(x, y)$ R-integrabilna na $[c, d]$,* $\quad \forall x \in [a, b]$
2. *funkcija $x \mapsto \displaystyle\int_c^d f(x, y)\, dy$ je R-integrabilna na $[a, b]$*
3. $\displaystyle\iint\limits_I f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.$

Analogne tvrdnje vrijede ako se zamjene uloge x i y.

Dokaz. Dokaz se može naći u [8, str. 173-174]. $\square$

Teorem 3.4 (Poopćenje Fubinijevog teorema, vidi [8, str. 175]). *Neka su $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidne realne funkcije takve da je $\varphi_1 \leq \varphi_2$ i neka je $S := \{(x, y) : x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Tada je svaka neprekidna funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ R-integrabilna i vrijedi*

$$\int\limits_S f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Dokaz. Dokaz se može naći u [8, str. 175-176]. $\square$

Teorem 3.5 (Teorem o zamjeni varijabli, vidi [8, str. 180]). *Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompaktan J-izmjeriv skup, $\Omega \supseteq K$ otvoren skup, a $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ injektivno diferencijabilno preslikavanje klase C^1 takvo da je diferencijal $D_\varphi(P)$ regularan u svim točkama $P \in \Omega$. Tada za svaku R-integrabilnu funkciju $f : \varphi(K) \to \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\int\limits_{\varphi(K)} f = \int\limits_K (f \circ \varphi)\, |det\, D_\varphi|.$$

Dokaz. Dokaz se može naći u [8, str. 180-183]. $\square$

Determinantu *det* D_φ zovemo Jacobijan.

Zadatak 1. *Riješiti Gaussov integral koristeći dvostruki integral.*

Rješenje. Vidi [11].

Kvadrirajmo početni integral. Tada imamo:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \right)^2, \text{ što možemo zapisati kao } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy.$$

Budući da je drugi integral konstanta za prvi, to možemo napisati ovako:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Ovdje uočavamo dvostruki integral, odnosno integral po cijeloj ravnini $\mathbb{R}^2$. Prijeđimo sada na polarne koordinate i izračunajmo Jacobijan.

$$\begin{gathered}
\begin{matrix} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} \phi \in [0, 2\pi\rangle \\ r \in [0, +\infty\rangle \end{matrix} \\
\varphi(r,\phi) = (r\cos\phi, r\cos\phi) \\
|detD_\varphi| = |\begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix}| = |r| = r
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\,d\phi = 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr = \begin{vmatrix} -r^2 = u \\ -2r\,dr = du \\ r = 0 \to u = 0 \\ r = \infty \to u = -\infty \end{vmatrix} \\
&= 2\pi\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^u\,du = \pi\cdot\lim_{t\to-\infty}(e^0 - e^t) = \pi.
\end{aligned}$$

Kako je $I^2 = \pi$, slijedi da je

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}. \tag{3.15}$$

□

Propozicija 3.6. *[11] Neka je $\alpha > 0$ te $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2+\beta x+\gamma}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}+\gamma}. \tag{3.16}$$

Dokaz. Neka je $\beta = \gamma = 0$. Tada se, slično kao u prethodnom zadatku, može pokazati da vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \tag{3.17}$$

Ako je integral oblika $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+\beta)^2}\,dx$, supstitucijom $x+\beta = t$ dobiva se integral (3.17). Konačno, ako je integral oblika $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2+\beta x+\gamma}\,dx$, izraz u eksponentu može se nadopuniti do potpunog kvadrata. Tada imamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+\frac{\beta}{2\alpha})^2+\frac{\beta^2}{4\alpha}+\gamma}\,dx. \tag{3.18}$$

Iz (3.17) i (3.18) slijedi tvrdnja propozicije. □

3.2.2 Gama funkcija

Gaussov integral može se riješiti i pomoću Gama funkcije. Ovdje se nećemo detaljno baviti Gama funkcijom, samo ćemo navesti definiciju i neka svojstva.

Definicija 3.2. Funkciju $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ danu izrazom

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \tag{3.19}$$

nazivamo **Gama funkcija**.

Propozicija 3.7 (vidi [5, str. 169]). *Za Gama funkciju vrijedi:*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{3.20}$$

Dokaz. Za dokaz ove tvrdnje koristit ćemo tzv. *Produktnu formulu.* Ona glasi:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}. \tag{3.21}$$

Dokaz ove formule može se naći u [5, str. 167-169].
Ako u (3.21) uvrstimo $x = \dfrac{1}{2}$ dobivamo:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi \text{ te kako je } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \implies \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

□

Zadatak 2. *Riješiti Gaussov integral koristeći Gama funkciju.*

Rješenje. Primijetimo da je:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Uvedimo supstituciju: $\left|\begin{array}{c} \sqrt{t} = x \\ \frac{dt}{2\sqrt{t}} = dx \\ dt = 2x\, dx \\ t = 0 \to x = 0 \\ t = \infty \to x = \infty \end{array}\right|$. Iz toga slijedi:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x} 2x\, dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

Nadalje, funkcija e^{-x^2} je parna, pa koristeći svojstvo parne funkcije na simetričnom intervalu dobivamo:

$$2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

Koristeći propoziciju 3.6 dobivamo da je Gaussov integral jednak $\sqrt{\pi}$. □

3.2.3 Kompleksna analiza

Riješimo Gaussov integral na još jedan način, koristeći kompleksne funkcije kompleksne varijable. U prvom dijelu dali smo definiciju izoliranog singulariteta. Sada ćemo još definirati reziduum funkcije i jedan vrlo koristan teorem.

Definicija 3.3. Neka je z_0 izolirani singularitet funkcije f. Koeficjent c_{-1} u Laurentovom[1] razvoju funkcije f oko z_0 nazivamo **reziduum funkcije f** i označavamo s $Res(f, z_0)$.

Teorem 3.8 (O reziduumima, vidi [5, str. 112])**.** *Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitička na području Ω osim u konačno mnogo izoliranih singulariteta $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Tada za bilo koje višestruko povezano područje $D \subseteq \Omega$ koje sadrži točke $z_1, z_2, \ldots, z_n$ vrijedi*

$$\oint_{\partial D} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

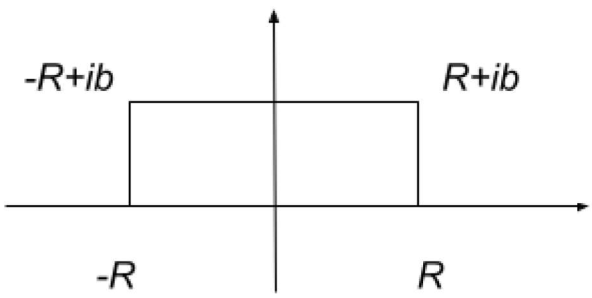
Zadatak 3. *Riješiti Gaussov integral koristeći kompleksnu analizu.*

Rješenje. Vidi [9, str. 8-10].

Definirajmo pomoćnu funkciju:

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{1 + e^{-\lambda z}}, \quad \text{pri čemu je } \lambda = \sqrt{\pi}(1 + i).$$

Za početak ćemo objasniti kako smo konstruirali tu funkciju. Neka su $-R$, R, $R+ib$, $-R+ib$ vrhovi pravokutnika po kojem integriramo funkciju te neka f teži prema 0 na dijelovima $[R, R + ib]$ i $[-R, -R + ib]$, kada R teži u ∞.



Tada prema teoremu 3.8 vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx + \int_{\infty}^{-\infty} f(x + ib)\, dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i),$$

pri čemu su z_i polovi funkcije f s imaginarnim dijelom između 0 i b. To je ekvivalentno s

$$\int_{\infty}^{-\infty} (f(x) - f(x + ib))\, dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i).$$

[1] Za više o Laurentovom razvoju funkcije u red vidi [5, str. 80]

Dakle želimo da $f(z)$ zadovoljava sljedeće:

$$f(z) - f(z+ib) = e^{-\frac{z^2}{2}}, \tag{3.22}$$

a $f(z)$ i b još trebamo odrediti. Neka je $f(z) = \dfrac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{g(z)}$, pri čemu je $g(z)$ funkcija čije su nultočke polovi funkcije $f(z)$. Želimo da $f(z)$ zadovoljava:

$$f(z) - f(z+\lambda) = e^{-\frac{z^2}{2}}, \tag{3.23}$$

za neki λ koji neće biti čisto imaginaran. Uvrstimo $f(z)$ u jednadžbu (3.23). Tada imamo:

$$e^{-\frac{z^2}{2}} \left(\frac{1}{g(z)} - \frac{e^{-\lambda z - \frac{\lambda^2}{2}}}{g(z+\lambda)} \right) = e^{-\frac{z^2}{2}}. \tag{3.24}$$

Pretpostavimo dodatno da je funkcija g periodična, tj. da vrijedi $g(z) = g(z+\lambda)$. Tada iz prethodne jednadžbe slijedi $g(z) = 1 - e^{-\lambda z - \frac{\lambda^2}{2}}$. Zbog periodičnosti funkcije g dobivamo da g zadovoljava (3.23) ako i samo ako je $e^{\lambda^2} = 1$, odnosno ako i samo ako je $\lambda^2 = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$. Za $k = 1$ dobivamo $\lambda = \sqrt{\pi}(1+i)$.

Dakle, funkciju $f(z)$ integrirat ćemo po stranicama pravokutnika s vrhovima $-R$, R, $R + i\sqrt{\pi}$, $-R + i\sqrt{\pi}$, odnosno po krivulji $C = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$. Singularitet funkcije f je točka za koju vrijedi $1 + e^{-\lambda z} = 0$

$$e^{-\lambda z} = -1 = e^{\pi(2k+1)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$z = -\frac{i\pi(2k+1)}{\sqrt{\pi}(1+i)} = -\frac{(2k+1)\sqrt{\pi}(1+i)}{2} = -\frac{\lambda(2k+1)}{2}.$$

Međutim, jedini singularitet koji će biti u pravokutniku je za $k = -1$, što je $\frac{\lambda}{2}$. Tada prema teoremu 3.8 vrijedi:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i Res\left(f, \frac{\lambda}{2}\right)$$

$$Res\left(f, \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{8}}}{-\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{2}}} = \frac{e^{\frac{3\lambda^2}{8}}}{-\lambda} = -\frac{e^{\frac{3\pi(1+i)^2}{8}}}{\sqrt{\pi}(1+i)} = -\frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}(1+i)} = -\frac{\sqrt{2}(-1+i)}{2\sqrt{\pi}(1+i)} = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}$$

Zato je

$$\oint_C f(z)\,dz = \sqrt{2\pi}. \tag{3.25}$$

Gornji integral možemo napisati kao sumu integrala po krivuljama $\gamma_i, i = 1, 2, 3, 4$. Izračunajmo integral za svaku krivulju.

1.

$$\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz \overset{param.}{=} |\gamma(t)=t| = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\frac{-t^2}{2}}}{1+e^{-\lambda t}}\,dt \xrightarrow{R\to\infty} \int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-t^2}{2}}}{1+e^{-\lambda t}}\,dt$$

2. Pokažimo da će integral po krivulji γ_2 biti jednak 0.

$$0 \le \left|\oint_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| = |\gamma(t)=R+it| = \left|\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{(R+it)^2}{2}}}{1+e^{-\lambda(R+it)}}\,dt\right|$$

$$\le \int_0^{\sqrt{\pi}} \left|\frac{e^{\frac{-R^2-2Rit+t^2}{2}}}{1+e^{-\lambda(R+it)}}\right| dt$$

Član e^{-Rit} će po apsolutnoj vrijednosti biti jednak 1. Kada R teži u beskonačnost, budući da je t ograničen, brojnik će težiti prema 0. Eventualni bi problem mogao biti ako bi nazivnik također težio nuli, ali to se neće dogoditi.

$$\left|1+e^{-\lambda R-\lambda it}\right| \ge 1-\left|e^{-\sqrt{\pi}(1+i)R}\right|\cdot\left|e^{-\sqrt{\pi}(1+i)it}\right| = 1-e^{-\sqrt{\pi}(R+t)} \xrightarrow{R\to\infty} 1>0$$

3.

$$\oint_{\gamma_3} f(z)\,dz = |\gamma(t)=(R-t)+i\sqrt{\pi}| = \int_0^{2R} -\frac{e^{-\frac{((R-t)+i\sqrt{\pi})^2}{2}}}{1+e^{-\lambda((R-t)+i\sqrt{\pi})}}\,dt$$

$$\left|\begin{array}{c} u=R-t \\ du=-dt \\ t=0\to u=R \\ t=2R\to u=-R \end{array}\right| = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-\frac{(u+i\sqrt{\pi})^2}{2}}}{1+e^{-\lambda(u+i\sqrt{\pi})}}\,du \xrightarrow{R\to\infty} -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(u+i\sqrt{\pi})^2}{2}}}{1+e^{-\lambda(u+i\sqrt{\pi})}}\,du$$

4. Integral $\oint_{\gamma_4} f(z)\,dz$ će također biti jednak nuli. Dokaz je sličan dokazu za integral $\oint_{\gamma_2} f(z)\,dz$.

Dakle, prema (3.25) vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1+e^{-\lambda t}}\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(t+i\sqrt{\pi})^2}{2}}}{1+e^{-\lambda(t+i\sqrt{\pi})}}\,dt = \sqrt{2\pi}. \tag{3.26}$$

Iz definicije λ možemo napisati $i\sqrt{\pi}=\lambda-\sqrt{\pi}$. Tada imamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\lambda-\sqrt{\pi})\,dt.$$

Uz supstituciju $\begin{vmatrix} u = t - \sqrt{\pi} \\ du = dt \end{vmatrix}$ to možemo zapisati kao $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) + f(t+\lambda))\, dt$. Podintegralna funkcija može se pojednostaviti.

$$f(t) - f(t+\lambda) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1+e^{-\lambda t}} - \frac{e^{-\frac{(t+\lambda)^2}{2}}}{1+e^{-\lambda(t+\lambda)}} = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(\frac{1}{1+e^{-\lambda t}} - \frac{e^{-\lambda t} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}}}{1+e^{-\lambda(t+\lambda)}} \right).$$

Pogledajmo član $e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$. $\lambda^2 = \pi(1+i)^2 = -2\pi i$. Iz toga slijedi da je $e^{-\frac{\lambda^2}{2}} = e^{i\pi} = -1$ pa je izraz u zagradi jednak 1. Ostaje nam samo $e^{-\frac{t^2}{2}} = f(t) - f(t+\lambda)$. Dakle, integral iz (3.26) sveli smo na integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$, a ta jednakost nam daje da je integral jednak $\sqrt{2\pi}$. Pomoću supstitucije $\begin{vmatrix} v = \frac{t}{\sqrt{2}} \\ dv = dt \end{vmatrix}$ dobivamo da je Gaussov integral jednak $\sqrt{\pi}$. $\square$

3.2.4 Numerička integracija

Ako funkcija $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ nema primitivnu funkciju koja je elementarna funkcija ili ako funkciju poznajemo u konačno mnogo točaka, koristimo neke numeričke metode kako bismo približno izračunali traženi integral. U nastavku ćemo navesti neke od tih metoda. Osnovna ideja je da se funkcija zamijeni nekom jednostavijom funkcijom φ. Pri tome moramo voditi računa o pogrešci aproksimacije. Ako je a stvarna vrijednost neke veličine onda ćemo s a' označiti približnu vrijednost. Razliku $(a - a')$ zovemo pogreška aproksimacije. Apsolutnu vrijednost pogreške aproksimacije nazivamo **apsolutna pogreška aproksimacije** i označavamo

$$\Delta a' = |a - a'|. \tag{3.27}$$

Za aproksimaciju a' vrijedi

$$|a - a'| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{3.28}$$

Takav ε naziva se **granica pogreške aproksimacije**.
U nastavku ćemo s I označavati integral funkcije g na $[a, b]$, a s I' njegovu aproksimaciju.
Neka je $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Tu funkciju interpolirat ćemo interpolacijskim polinomom P, stupnja 1 koristeći čvorove interpolacije

$$x_0 = a, \quad x_1 = b.$$

Dakle, graf funkcije P je pravac koji prolazi točkama $T_1 = (a, g(a)), T_2 = (b, g(b))$, a P je dan formulom:

$$P(x) = g(a) + \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - a).$$

Tada lako možemo izračunati integral I':

$$I' = \int_a^b P(x)\, dx = \frac{b-a}{2}(g(a) + g(b)). \tag{3.29}$$

Ova metoda naziva se **trapezno pravilo**.

Teorem 3.9 (vidi [7, str. 180]). *Neka je $g \in C^2[a,b]$. Tada postoji $\tau \in \langle a,b \rangle$, takav da je*

$$\int_a^b g(x)\,dx = \frac{b-a}{2}(g(a)+g(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} g''(\tau). \tag{3.30}$$

Dokaz. Dokaz se može naći u [7, str. 180-181] □

Za precizniji rezultat, trapezno pravilo može se poopćiti. To ćemo napraviti tako da početni interval $[a,b]$ podijelimo na više manjih jednako dugačkih podintervala koristeći točke $x_0, \dots, x_m$. Napisat ćemo samo formulu, a izvod se može naći u [7, str. 182]. **Generalizirano trapezno pravilo** glasi:

$$I = I' + E_m, \tag{3.31}$$

pri čemu je

$$I' = \frac{l}{2}(y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{m-1} + y_m), \quad y_i = g(x_i) \tag{3.32}$$

$$E_m = -\frac{b-a}{12} l^2 g''(\tau), \quad l = x_i - x_{i-1},\, i = 1, \dots, m, \quad \tau \in \langle a,b \rangle. \tag{3.33}$$

Pomoću (3.33) možemo ocijeniti apsolutnu pogrešku:

$$\Delta I' = |E_m| \leq \frac{b-a}{12} l^2 M_2 < \varepsilon, \tag{3.34}$$

pri čemu je $M_2 = \max\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)|$. Iz (3.34) možemo dobiti broj podintervala m na koji trebamo podijeliti zadani interval $[a,b]$:

$$m > (b-a)\sqrt{\frac{M_2}{\varepsilon} \cdot \frac{b-a}{12}} \tag{3.35}$$

da bismo primjenom tog pravila postigli zadanu točnost ε.

Navest ćemo još jednu metodu, tzv. **Newton-Cotesovu formulu** m tog reda za aproksimaciju integrala I:

$$\int_a^b P_m(x)\,dx = (b-a)\sum_{i=0}^{m} \omega_i g(x_i), \quad \omega_i = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m} \frac{mv - j}{i - j}\, dv\,, \tag{3.36}$$

pri čemu je P_m Lagrangeov interpolacijski polinom m-tog reda. Posebno, za $m = 2$ dobivamo **Simpsonovo pravilo**. U tom slučaju je $x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b$. Nakon računanja težinskih funkcija Simpsonovo pravilo glasi:

$$I' = \int_a^b P_2(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)\right). \tag{3.37}$$

Može se pokazati da je pogreška aproksimacije jednaka

$$E = I - I' = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 g^{(4)}(c) \text{ za neki } c \in \langle a,b \rangle, \tag{3.38}$$

vidi [7, str. 185]. Na sličan način kao i za produljenu trapeznu formulu (3.31), može se izvesti **generalizirano Simpsonovo pravilo**

$$I' = \frac{l}{3}\left((y_0 + y_{2k}) + 4\sum_{i=1}^{k} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{k-1} y_{2i}\right), \tag{3.39}$$

pri čemu je $m = 2k$ broj podintervala kojima smo podijelili interval $[a, b]$. Pogreška za (3.39) jednaka je

$$E_m = -\frac{b-a}{180} l^4 g^{(4)}(\tau) \text{ za neki } \tau \in \langle a, b \rangle. \tag{3.40}$$

Apsolutnu pogrešku možemo ocijeniti sljedećom nejednakosti:

$$\Delta I' = |E_m| \leq \frac{b-a}{180} l^4 M_4 < \varepsilon, \tag{3.41}$$

pri čemu je $M_4 = \max\limits_{x \in [a,b]} |g^{(4)}(x)|$.

Tada se iz (3.41) može dobiti broj podintervala na koji trebamo podijeliti zadani interval $[a, b]$ uz točnost ε:

$$m > (b-a) \sqrt[4]{\frac{M_4}{\varepsilon} \cdot \frac{b-a}{180}}. \tag{3.42}$$

Zadatak 4. *Koristeći generalizirano Simpsonovo pravilo aproksimirati integral* $\int_{-3}^{3} e^{-x^2}\,dx$ *uz točnosti* $\varepsilon_1 = 0.005$ *i* $\varepsilon_2 = 0.00005$ *te zatim usporediti s pravom vrijednosti Gaussovog integrala. Sve rezultate treba zaokružiti na 7 decimala.*

Rješenje. Izračunajmo aproksimaciju za točnost ε_1. Odredimo najprije koliko je podintervala potrebno za takvu aproksimaciju. Za to će nam trebati M_4 iz prethodne nejednakosti. Izračunajmo derivacije do 4. reda.

$$\begin{aligned}
g(x) &= e^{-x^2} \\
g'(x) &= -2xe^{-x^2} \\
g''(x) &= 4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2} \\
g'''(x) &= -8x^3e^{-x^2} + 12e^{-x^2} \\
g^{(4)}(x) &= 16x^4e^{-x^2} - 48x^2e^{-x^2} + 12e^{-x^2}
\end{aligned}$$

Dalje se pomoću pete derivacije lako nađe točka lokalnog maksimuma. On se postiže u točki $x_0 = 0$, a iznosi 12. Koristeći formulu (3.42) dobivamo $m > 17.94$, pa uzimamo $m = 18$. Duljina svakog intervala iznosi $l = \frac{1}{3}$. Tada korištenjem formule (3.39) dobivamo sljedeće:

$$I_1' = \frac{1}{9}\left(y_0 + y_{18} + 4\sum_{i=1}^{9} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{8} y_{2i}\right) \approx 1.7724124.$$

Napravimo sada isti postupak uz točnost $\varepsilon_2 = 0.00005$. Za broj podintervala dobivamo $m > 56.74$ pa uzimamo $m = 58$, a duljina svakog od njih je $l = \frac{3}{29}$. Prema formuli (3.39) dobivamo:

$$I_2' = \frac{1}{29}\left(y_0 + y_{58} + 4\sum_{i=1}^{29} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{28} y_{2i}\right) \approx 1.7724147.$$

Usporedimo sada oba rezultata s vrijednosti Gaussovog integrala. Aproksimacije I_1' i I_2' aproksimiraju integral funkcije nad segmentom $[-3, 3]$, dok je Gaussov integral nad cijelim skupom $\mathbb{R}$ (vidi Sliku 2). Gaussov integral, odnosno $\sqrt{\pi}$, zaokružen na 7 decimala iznosi 1.7724539. Apsolutna pogreška za prvi rezultat iznosi $4.15 \cdot 10^{-5}$, a za drugi $3.92 \cdot 10^{-5}$. Možemo zaključiti da ovi rezultati vrlo dobro aproksimiraju vrijednost Gaussovog integrala. $\square$

Literatura

[1] M. Benšić, N. Šuvak *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[2] B. Conrad, *Impossibility theorems for elementary integration*, Department of Mathematics, University of Michigan, Ann Arbor, 1991.

[3] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski *Matematika*, Ekonomski fakultet Osijek, 1994.

[4] B. Guljaš, *Matematička analiza 1 i 2* , PMF-MO, Zagreb, 2018.

[5] H. Kraljević, S. Kurepa, *Matematička analiza 4/I, Funkcije kompleksne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.

[6] Dana P. Williams, *Nonelementary antiderivatives*, Department of Mathematics, Bradley Hall, Dartmouth College, Hanover, 1993.

[7] R. Scitovski, *Numerička matematika - izmijenjeno i dopunjeno izdanje*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2015.

[8] Š. Ungar, *Matematička analiza 3*, Prirodoslovno-matematički fakultet-Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2002.

[9] https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/gaussianintegral.pdf

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_integral

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_integral