Granični vrhovi u grafovima

Kuzminski, Marin

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:307098

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**



Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science







Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Marin Kuzminski

Granični vrhovi u grafovima

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Marin Kuzminski

Granični vrhovi u grafovima

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Snježana Majstorović

Osijek, 2022.

Boundary vertices in graphs

Sažetak

U ovom radu predstavljamo specijalne vrhove povezanoga grafa koji se nazivaju graničnim vrhovima. Navodimo njihova osnovna svojstva, a potom definiramo i karakteriziramo granične pografove povezanog grafa te uspostavljamo odnose između graničnih, ekscentričnih i perifernih podgrafova oslanjajući se na već poznata svojstva ekscentričnih i perifernih grafova. Navodimo nekoliko primjera grafova u kojima granični, ekscentrični i periferni podgrafovi imaju jednak broj vrhova. Rad zaključujemo tvrdnjama o egzistenciji povezanih grafova čiji spomenuti specijalni podgrafovi imaju unaprijed zadane brojeve vrhova, fiksne ili ovisne o broju vrhova zadanog grafa.

Ključne riječi

granični vrh, potpun vrh, periferni vrh, ekscentrični vrh, samogranični graf, dijametar

Abstract

In this thesis we present special vertices of a connected graph called boundary vertices. We list some of their basic properties, define and characterize boundary subgraphs of a connected graphs and establish relations between boundary, eccentric and peripheral subgraphs, relying on well-known properties of eccentric and peripheral graphs. We give some examples of connected graphs for which numbers of vertices of boundary, eccentric and peripheral subgraphs are equal. Final result in this thesis concerns the existence of connected graphs with prescribed numbers of vertices of the above mentioned subgraphs. These numbers are either constants or functions of the number of vertices of a given graph.

Key words

boundary vertex, complete vertex, peripheral vertex, eccentric vertex, self-boundary graph, diameter

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Osnovni pojmovi iz teorije grafova **1**

3 Granični vrhovi **3**

3.1 Potpuni vrhovi 4

4 Granični grafovi **6**

5 Granica, ekscentrični podgraf i periferija grafa **9**

1 Uvod

Posljednjih godina teorija grafova se dokazala kao važan matematički alat u rješavanju problema kod operativnih istraživanja, kemije, genetike, elektrotehnike, geografije, arhitekture pa čak i sociologije te lingvistike. Istodobno se pojavila i kao vrijedna matematička disciplina sama po sebi. Početci teorije grafova datiraju iz 1736. godina kada je matematičar Leonhard Euler riješio problem Königsbergških mostova. U teoriji grafova izraz graf ne odnosi se na grafikone podataka, kao što su linijski ili stupčasti grafikoni. Umjesto toga, odnosi se na skup vrhova (tj. točaka ili čvorova) i bridova (ili linija) koji povezuju vrhove.

Među brojnim važnim tvrdnjama iz teorije grafova, pojavljuju se i zanimljive tvrdnje o takozvanim graničnim vrhovima koji imaju primjenu u problemima lokacije objekata [4], a kasnije su se koristili u problemu konstrukcije grafa iz nekih njegovih podskupova [2]. Müller [7] je povezao granične vrhove s najmanjim i najvećim stupnjem vrha u grafu. Zatim se pojavio problem karakterizacije grafova s malim brojem graničnih vrhova (2 ili 3) [6].

Mi ćemo se baviti osnovnim svojstvima graničnih vrhova te ih povezati s ekscentričnim i perifernim vrhovima onako kako je to napravio Chartrand u svom radu [5]. U drugom odjeljku navodimo brojne tvrdnje iz teorije grafova koje su nužne za razumijevanje glavnog dijela rada. U trećem odjeljku definiramo granične vrhove i navodimo njihova osnovna svojstva ističući njihovu povezanost s potpunim grafovima, dok u četvrtom poglavlju definiramo granične grafove te ih uspoređujemo s ekscentričnim i perifernim grafovima. Zadnji odjeljak odnosi se na rezultate o odnosu broja vrhova u graničnim, ekscentričnim i perifernim grafovima.

2 Osnovni pojmovi iz teorije grafova

Da bismo razumjeli glavne tvrdnje o graničnim grafovima, najprije ćemo definirati neke osnovne pojmove iz teorije grafova. Čitav rad odnosi se na netrivijalne povezane grafove G sa skupom vrhova $V(G)$ i skupom bridova $E(G)$ pa će i sve navedene tvrdnje podrazumijevati da je G povezan bez eksplicitnog navođenja.

Definirajmo neke osnovne grafove. **Potpun graf** K_n je jednostavan graf s n vrhova u kojemu su svaka dva vrha spojena bridom. **Put** P_n s n vrhova je graf sa skupom vrhova $V(P_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i skupom bridova $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} : i = 1, \ldots, n-1\}$. Ukoliko stavimo da je $u = v_1$, a $v = v_n$, onda govorimo o $(u, v)-$putu ističući vrh u kao početni, a v kao krajnji vrh puta.

Ako je $\emptyset \neq V' \subseteq V(G)$, onda se podgraf od G čiji je skup vrhova V', a skup bridova je podskup od $E(G)$, čija su oba kraja u V' zove **podgraf induciran s** V' i označava s $G[V']$. Pišemo $G[V'] \leq G$.

Svakom grafu G možemo particionirati skup vrhova na skupove $V_1, V_2, \ldots, V_k$, $k \in \mathbb{N}$ tako da su dva vrha $u, v \in V$ povezana u G ako i samo ako postoji $i \in \{1, \ldots, k\}$ takav da vrijedi $u, v \in V_i$. Grafove $G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_k]$ zovemo **komponentama povezanosti** od G.

Neka je k prirodan broj. Za graf G ćemo reći da je $k-$povezan ako sadrži više od k vrhova te ostaje povezan ako mu uklonimo manje od k vrhova.

Udaljenost $d(u, v)$ vrhova u i v u G je duljina najkraćeg $(u, v)-$puta u G. Često se $(u, v)-$put duljine $d(u, v)$ naziva $(u, v)-$geodetski put pa ćemo u radu koristiti taj naziv.

Za vrh v grafa G **ekscentricitet** $e(v)$ je udaljenost između vrha v i vrha najudaljenijeg od v, tj.

$$e(v) = \max_{u \in V(G)} d(u, v).$$

Najmanji ekscentricitet među svim vrhovima grafa G zove se **radijus** grafa G i označavamo ga s $\mathrm{rad}(G)$, dok se najveći ekscentricitet zove **dijametar** grafa G i označavamo ga s $\mathrm{diam}(G)$. Preciznije

$$\mathrm{rad}(G) = \min_{v \in V(G)} e(v), \quad \mathrm{diam}(G) = \max_{v \in V(G)} e(v).$$

Za vrh v grafa G kažemo da je **centralni vrh** u G ako vrijedi $e(v) = \mathrm{rad}(G)$, a podgraf induciran centralnim vrhovima grafa G zovemo centrom grafa G i označavamo ga s $\mathrm{Cen}(G)$.

Nadalje, za vrh v grafa G kažemo da je **periferni vrh** ako vrijedi $e(v) = \mathrm{diam}(G)$. Podgraf grafa G induciran njegovim perifernim vrhovima zovemo **periferijom grafa** G i označavamo ju s $\mathrm{Per}(G)$.

U nastavku ćemo definirati ekscentrične vrhove grafa koji će nas uvesti u svijet graničnih vrhova. Primijetimo da za vrhove u i v grafa G te za vrh w koji je susjed vrha u, vrijedi $|d(u, v) - d(w, v)| \leq 1$.

Neka je u vrh grafa G. Vrh v je **ekscentrični vrh** vrha u ako je $d(u, v) = e(u)$, odnosno ako je svaki vrh na najvećoj udaljenosti od u ekscentrični vrh vrha u. Vrh u je **ekscentrični vrh** grafa G ako je u ekscentrični vrh nekog vrha u G. Podgraf grafa G induciran njegovim ekscentričnim vrhovima zovemo **ekscentričnim podgrafom** grafa G i označavamo ga s $\mathrm{Ecc}(G)$. Posljedično, ako je v ekscentrični vrh vrha u, a w je susjed vrha v, onda je $d(w, u) \leq d(u, v)$. No, vrh v može imati navedeno svojstvo čak i ako nije ekscentrični vrh vrha u. Zato ima smisla definirati granične vrhove u grafu.

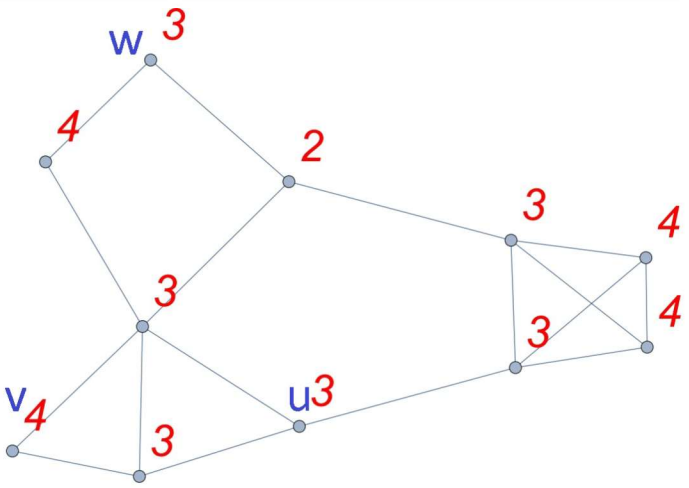
3 Granični vrhovi

U ovom odjeljku ćemo definirati granične vrhove grafa te ćemo navesti neka njihova svojstva. S $N(v)$ ćemo označiti skup susjeda vrha v u grafu G, a s $N[v]$ skup susjeda vrha v koji uključuje i vrh v.

Definicija 3.1. *U nekom grafu vrh v je **granični vrh** vrha u ako je $d(w,u) \leq d(u,v)$ $\forall w \in N(v)$.*

Dok udaljenost vrha u u grafu G do vrha v koji je ekscentrični vrh od u postiže globalni maksimum $\max_{w \in V(G)} d(u,w)$, udaljenost od u do njegovog graničnog vrha v postiže lokalni maksimum $\max_{w \in N[v]} d(u,w)$. Drugim riječima, vrh v je granični vrh od u ako se nijedan $(u,v)-$geodetski put ne može proširiti u vrhu v do duljeg geodetskog puta. Dakle, počevši od vrha u, granični vrh v od u je dosegnut onda kada se lokalno ne možemo pomaknuti dalje od vrha u. Udaljenost između u i v možda neće doseći globalni maksimum u smislu udaljenosti vrha u do ostalih vrhova grafa G, ali će postići lokalni maksimum.

Za vrh v kažemo da je **granični vrh** grafa G ako je v granični vrh nekog vrha u grafu G. U grafu H na Slici 1 vrh v je granični vrh vrha u, ali nije ekscentrični vrh vrha u. Vrh w je ekscentrični vrh vrha u, ali w nije periferni vrh grafa H.



Slika 1: Periferni, ekscentrični i granični vrhovi u grafu H. Svakom vrhu je pridružen njegov ekscentricitet.

Postoje vrhovi grafa koji nisu granični vrhovi. Primjerice, takvi vrhovi su rezni vrhovi. Za vrh x povezanog grafa G kažemo da je **rezni vrh** ako njegovim uklanjanjem G prestaje biti povezan, tj. $G - x$ se sastoji od najmanje dvije komponente povezanosti. Dokažimo da rezni vrhovi nisu granični!

Propozicija 3.2. *Nijedan rezni vrh grafa G nije granični vrh.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji graf G i rezni vrh u u G koji je ujedno i granični vrh nekog vrha v. Neka su G_1 i G_2 dvije različite komponente povezanosti grafa $G - u$, pri čemu je $v \in V(G_1)$, a w je susjed od u koji pripada komponenti G_2. Tada je $d(v,w) = d(v,u) + 1$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je u granični vrh vrha v. □

S obzirom da u 1−povezanim grafovima nema graničnih vrhova, ograničit ćemo se na 2−povezane grafove. Prije sljedeće propozicije, potrebno je definirati blok grafa.

Blok B grafa G je maksimalan 2−povezan podgraf grafa G, odnosno ne postoji 2−povezan podgraf B' od G takav da je $|V(B')| > |V(B)|$ i B je podgraf od B'.

Propozicija 3.3. *Neka je v vrh bloka B u grafu G i neka v nije rezni vrh. Tada je v granični vrh grafa G ako i samo ako je v granični vrh od B.*

Dokaz.
$\Leftarrow$ Jasno je da je granični vrh bloka grafa G također i granični vrh od G. Ostaje nam dokazati i obrnutu tvrdnju.
$\Rightarrow$ Neka je v granični vrh u G. Tada je v granični vrh nekog vrha w u G. S obzirom da v nije rezni vrh, on pripada jedinstvenom bloku B grafa G. Ako je $w \in V(B)$, dokaz je završen. Pretpostavimo da vrijedi $w \notin V(B)$. Neka je w vrh bloka B', pri čemu $B' \neq B$. Za svaki $y \in V(B)$, svaki (w, y)−geodetski put sadrži jedinstveni rezni vrh x grafa G koji pripada bloku B. Slijedi $d(w, v) = d(w, x) + d(x, v)$. Neka je $u \in N(v)$. Tada je $u \in V(B)$ i $d(w, u) = d(w, x) + d(x, u)$. No, jer je v granični vrh od w, to je $d(w, u) \leq d(w, v)$, a onda vrijedi i $d(x, u) \leq d(x, v)$ pa je v granični vrh i od vrha x. □

3.1 Potpuni vrhovi

Definicija 3.4. *Za vrh nekog grafa kažemo da je **potpun** (ekstreman ili simplicijalan) ako je podgraf induciran skupom njegovih susjeda potpun graf.*

Iz definicije je jasno da je svaki vrh stupnja jedan potpun vrh. Primijetimo da ako je v potpun vrh i u mu je susjed, tada je $d(w, u) = d(w, v) = 1$ za svaki $w \in N(v)$. Slijedi da je v granični vrh od u. Stoga je svaki potpun vrh grafa također i granični vrh tog grafa. Specijalno, svaki vrh čiji je stupanj jednak jedan je granični vrh grafa.

Slijede dvije važne tvrdnje o potpunim vrhovima.

Propozicija 3.5. *Vrh v grafa G je granični vrh svakog vrha različitog od v ako i samo ako je v potpun vrh od G.*

Dokaz.
$\Leftarrow$ Neka je v potpun vrh u grafu G i neka je w vrh različit od v. Nadalje, neka je $w = v_0v_1 \dots v_k = v$ (w, v)−geodetski put i neka je u susjed od v. Ako $u = v_{k-1}$, onda je $d(w, u) < d(w, v)$. Pretpostavimo da je $u \neq v_{k-1}$. Kako je v potpun, to je $uv_{k-1} \in E(G)$ i $w = v_0v_1 \dots v_{k-1}u$ je (w, u) put u G, iz čega proizlazi $d(w, u) \leq d(w, v)$. Slijedi da je v granični vrh vrha w.
$\Rightarrow$ Koristit ćemo kontrapoziciju. Neka je v vrh u G koji nije potpun. Tada postoje različiti nesusjedni vrhovi $u, w \in N(v)$. S obzirom da vrijedi $d(u, w) > d(u, v)$, vrh v nije granični vrh od u. □

Propozicija 3.6. *Neka je u vrh grafa G. Svaki vrh različit od vrha u je granični vrh od u ako i samo ako je $e(u) = 1$.*

Dokaz.
$\Leftarrow$ Pretpostavimo najprije da je $e(u) = 1$ i neka je v vrh grafa G različit od u. Nadalje, neka je w susjed od v. Tada je $d(u, w) \leq 1$ i $d(u, v) = 1$ pa je v granični vrh od u.

$\Rightarrow$ Pretpostavimo suprotno, tj. svaki vrh grafa G različit od u je granični vrh od u, ali $e(u) \neq 1$. Tada postoji vrh x u G takav da je $d(x,u) = 2$. Neka je xyu put u G. Tada je u susjed od y i $d(x,u) = 2$, dok je $d(y,u) = 1$. Zaključujemo da y nije granični vrh od u, što je u kontradikciji s pretpostavkom pa je tvrdnja dokazana. $\square$

4 Granični grafovi

Sjetimo se da smo s $\mathrm{Ecc}(G)$ označili ekscentrični podgraf grafa G, a s $\mathrm{Per}(G)$ periferiju grafa G. Slično definiramo **granicu** $\partial(G)$ grafa G. To je podgraf od G induciran njegovim graničnim vrhovima. Za svaki graf G vrijedi

$$\mathrm{Per}(G) \leq \mathrm{Ecc}(G) \leq \partial(G) \leq G. \tag{4.1}$$

Za graf H kažemo da je **granični** ako je $H = \partial(G)$ za neki graf G. Graf G je **samogranični** ako je $G = \partial(G)$. Odmah je jasno da je svaki samogranični graf ujedno i granični graf. U [1] su karakterizirani svi grafovi koji su periferije nekog grafa, dok su u [4] karakterizirani svi grafovi koji su ekscentrični podgrafovi nekog grafa. Ti rezultati su uobličeni u dva teorema koji slijede.

Teorem 4.1. *Graf F je periferija nekog povezanog grafa ako i samo ako je svaki vrh grafa F ekscentriciteta 1 ili u F ne postoji takav vrh.*

Teorem 4.2. *Graf F je ekscentrični podgraf nekog grafa ako i samo ako je svaki vrh grafa F ekscentriciteta 1 ili u F ne postoji takav vrh.*

Iz teorema 4.1 i 4.2 možemo zaključiti da su periferni grafovi oni grafovi koji su ekscentrični podgrafovi tog grafa. Međutim, za granične grafove nekog grafa imamo drugačiju karakterizaciju. Navedimo najprije dvije pomoćne tvrdnje.

Lema 4.3. *Neka je G graf dijametra 2. Tada je svaki vrh v granični vrh grafa G osim ako je v jedinstven vrh u G ekscentriciteta 1.*

Dokaz. Neka je $v \in V(G)$. Ako je $e(v) \neq 1$, tada je $e(v) = 2$ jer je $\mathrm{diam}(G) = 2$. Stoga postoji vrh u takav da $d(u, v) = 2$. Budući da je $d(w, u) \leq 2\ \forall w \in N(v)$, slijedi da je v granični vrh od u pa je v granični vrh grafa G. Ako je $e(v) = 1$ i postoji još jedan vrh v' u G sa svojstvom $e(v') = 1$, tada su v i v' jedan drugome granični vrhovi. Konačno, pretpostavimo da je v jedinstven vrh grafa G ekscentriciteta 1. Pokazat ćemo da v nije granični vrh od G. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je v granični vrh nekog vrha w. Jer je $e(w) \neq 1$, postoji vrh u koji nije susjed vrhu w. Međutim, u je susjed od v, $d(u, w) = 2$ i $d(w, v) = 1$, što je u kontradikciji s pretpostavkom. □

Prije nego predstavimo sljedeću lemu, definirajmo sumu grafova.

Definicija 4.4. *Suma $G = G_1 + G_2$ grafova G_1 i G_2 je graf sa skupom vrhova $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ i skupom bridova $E(G)$ koji se sastoji od svih bridova grafova G_1 i G_2 te bridova koji spajaju svaki vrh grafa G_1 sa svakim vrhom grafa G_2.*

Lema 4.5. *Neka je F graf u kojemu ne postoje vrhovi ekscentriciteta 1 i neka je $G = F + K_k$, pri čemu je $k \geq 1$. Graf G je samogranični ako i samo ako je $k \geq 2$.*

Dokaz.
$\Rightarrow$ Ako $v \in V(F)$, onda $e_G(v) = 2$ jer u F nema vrhova ekscentriciteta 1, a ako su neka dva vrha grafa F na udaljenosti većoj od dva, u G će biti udaljeni za 2 i to preko vrhova u K_k. Nadalje, za $v \in V(K_k)$ vrijedi $e_G(v) = 1$. Zaključujemo da je $\mathrm{diam}(G) = 2$. Ako je $k = 1$, tada prema lemi 4.3 vrijedi $\partial(G) = F \neq G$ pa G nije samogranični graf.
$\Leftarrow$ Pretpostavimo da je $k \geq 2$ i $v \in V(G)$. Ako v pripada grafu K_k, tada je v granični vrh svakog vrha u K_k koji je različit od v, ali ako v pripada grafu F, tada je v granični vrh svakog vrha u F koji je različit od v. Slijedi $\partial(G) = G$. □

Teorem 4.6. *Graf H je granica nekog povezanog grafa ako i samo ako H nema točno jedan vrh ekscentriciteta 1.*

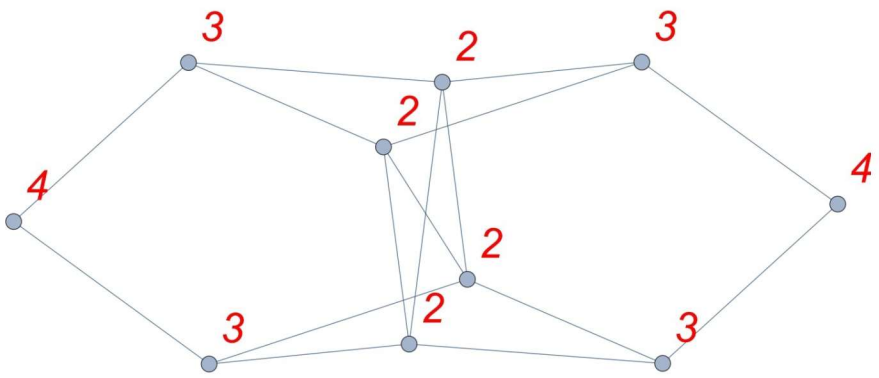
Dokaz.
$\Rightarrow$ Najprije pretpostavimo da je H granica nekog povezanog grafa G i da H ima točno jedan vrh v ekscentriciteta 1. Tada je $\text{diam}(H) = 2$ i $H = F + K_1$ za neki graf F, pri čemu $V(K_1) = \{v\}$ i niti jedan vrh grafa F nije ekscentriciteta 1. Prema lemi 4.5 graf H nije samogranični pa je $H \neq G$. S druge strane, budući da je H granica od G, slijedi $\text{Per}(G) \leq H$ pa je također $\text{diam}(G) = 2$. Zaključujemo $e(v) = 1$ ili $e(v) = 2$ za svaki $v \in V(G)$. No, zbog $\text{Per}(G) \leq H$ imamo $e(v) = 1$ za sve $v \in V(G) - V(H)$. Neka je $k = |V(G)| - |V(H)| \geq 1$. Tada je $G = H + K_k = F + K_{k+1}$, pri čemu $k + 1 \geq 2$. Kako niti jedan vrh u F nije ekscentriciteta 1 u F, to iz leme 4.5 proizlazi da je graf G samogranični, odnosno $G = \partial(G)$, što je nemoguće.
$\Leftarrow$ Pretpostavimo da H ne sadrži točno jedan vrh ekscentriciteta 1. Razmatramo tri slučaja.
Slučaj 1: Svi vrhovi u H su ekscentriciteta 1. Tada je $H = K_n$ za neki n i $H = \partial(H)$.
Slučaj 2: Niti jedan vrh H nema ekscentricitet 1. Neka je $G = H + K_1$. Tada iz leme 4.5 slijedi da je $H = \partial(G)$.
Slučaj 3: Barem dva vrha u H su ekscentriciteta 1 i barem jedan vrh je ekscentriciteta 2 ili više. Neka je $V(H) = V_1 \cup V_2$ tako da je $e(v) = 1$ ako je $v \in V_1$ i $e(v) \geq 2$ ako $v \in V_2$. Nadalje, neka je $|V_1| = n_1$ i $|V_2| = n_2$. Prema pretpostavci, $n_1 \geq 2$ i $n_2 \geq 1$. No, kako H sadrži barem dva periferna vrha, vrijedi $n_2 \geq 2$. Zatim, $H = K_{n_1} + F$, gdje je $V(K_{n_1}) = V_1$ i $V(F) = V_2$. Prema lemi 4.5 slijedi da je H samogranični graf pa je $H = \partial(H)$. □

Sada ćemo navesti primjedbu koja povezuje samogranične i vršno tranzitivne grafove. S tim u vezi, potrebno je definirati vršno tranzitivne grafove.

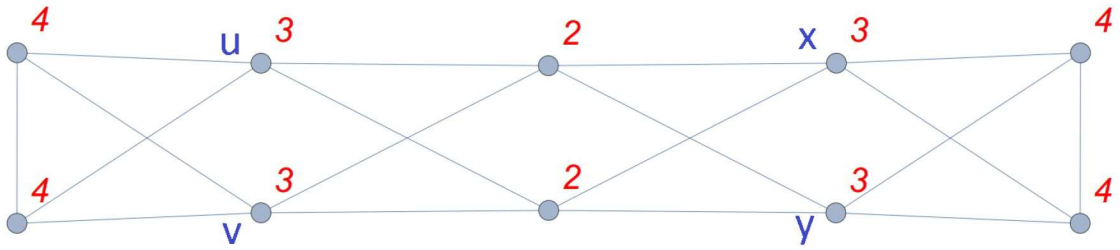
Definicija 4.7. *Za graf G kažemo da je **vršno tranzitivan** ako postoji permutacija $\sigma : V(G) \to V(G)$ za koju vrijedi $v_1v_2 \in E(G)$ ako i samo ako $\sigma(v_1)\sigma(v_2) \in E(G)$ te za svaka dva vrha u_1 i u_2 grafa G vrijedi $\sigma(u_1) = u_2$.*

Primjedba 4.8. *Svaki vršno tranzitivan graf je samogranični graf.*

Obrat primjedbe 4.8 ne vrijedi. Na primjer, promotrimo grafove G i H redom na slikama 2 i 4, pri čemu brojevi pridruženi vrhovima predstavljaju njihove ekscentricitete. Grafovi G i H nisu vršno tranzitivni, no oba su samogranični. Štoviše, svaki vrh grafa G je ekscentrični vrh, dok su samo dva vrha grafa G periferni vrhovi. S druge strane, vrhovi u, v, x, y grafa H nisu čak ni ekscentrični vrhovi.



Slika 2: Samogranični graf G koji nije vršno tranzitivan.



Slika 3: Samogranični graf H koji nije vršno tranzitivan.

5 Granica, ekscentrični podgraf i periferija grafa

Za povezan graf G neka je $\mathcal{B}(G) = V(\partial(G))$, $\mathcal{C}(G) = V(\mathrm{Cen}(G))$, $\mathcal{E}(G) = V(\mathrm{Ecc}(G))$ i $\mathcal{P}(G) = V(\mathrm{Per}(G))$. Postoje brojni primjeri povezanih grafova G za koje vrijede jednakosti

$$\mathcal{P}(G) = \mathcal{E}(G) = \mathcal{B}(G).$$

Primjerice, kotač $W_n = C_n + K_1$, $n \geq 4$ ima navedeno svojstvo. Zaista vrijedi $\mathcal{P}(W_n) = \mathcal{E}(W_n) = \mathcal{B}(W_n) = V(C_n)$.
Drugi primjer takvih grafova su mrežni grafovi $P_m \times P_n$, pri čemu su m i n pozitivni cijeli brojevi. Prije nego to dokažemo, najprije ćemo definirati Kartezijev produkt grafova.

Definicija 5.1. *Kartezijev produkt G grafova G_1 i G_2, u oznaci $G = G_1 \times G_2$ je graf sa skupom vrhova $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, pri čemu su vrhovi (u, u') i (v, v') u G spojeni bridom ako i samo ako ili $u = v$ i u' je susjed s v' u G_2 ili $u' = v'$ i u je susjed s v u G_1.*

Propozicija 5.2. *Za svaki par m, n pozitivnih cijelih brojeva vrijedi*

$$\partial(P_m \times P_n) = \mathrm{Per}(P_m \times P_n).$$

Dokaz.
Prema (4.1) imamo da je $V(\mathrm{Per}(P_m \times P_n)) \subseteq V(\partial(P_m \times P_n))$ pa je dovoljno pokazati da niti jedan vrh grafa G koji nije periferni nije ni granični. Neka je $P_m = u_1u_2 \dots u_m$ i $P_n = v_1v_2 \dots v_n$. Tada je skup vrhova grafa $P_m \times P_n$ jednak $\{(u_i, v_j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. Radi sažetosti ćemo pisati $w_{ij} = (u_i, v_j)$. Periferni vrhovi od $P_m \times P_n$ su w_{11}, w_{1n}, w_{m1} i w_{mn} (ako je $m = 1$ ili $n = 1$, onda barem dva takva vrha nisu različita). Za neke i i j, $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$, neka w_{ij} nije periferni vrh od $P_m \times P_n$ i pretpostavimo suprotno, tj. w_{ij} je granični vrh s obzirom na neki vrh $w_{i'j'}$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $i' \leq i$ i $j' \leq j$. Budući da w_{ij} nije periferni vrh, ili je $i < m$ ili $j < n$ (ili oboje). Pretpostavimo opet bez smanjenja općenitosti da je $i < m$. Tada je vrh $w_{(i+1)j}$ susjed vrhu w_{ij} u $P_m \times P_n$. Posljedično, vrijedi $d(w_{i'j'}, w_{ij}) = i - i' + j - j'$, dok je $d(w_{i'j'}, w_{(i+1)j} = i - i' + j - j' + 1$. Dakle, $d(w_{i'j'}, w_{(i+1)j}) > d(w_{i'j'}, w_{ij})$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je w_{ij} granični vrh od $w_{i'j'}$. Zato vrh w_{ij} ne postoji pa je tvrdnja dokazana. □

Postoje povezani grafovi G za koje vrijedi $\mathcal{P}(G) \subset \mathcal{E}(G)$ ili $\mathcal{E}(G) \subset \mathcal{B}(G)$ ili oboje.

Teorem 5.3. *Za svaka tri cijela broja a, b, c za koje vrijedi $2 \leq a \leq b \leq c$, postoji graf G tako da* $\mathrm{Per}(G)$ *ima a vrhova,* $\mathrm{Ecc}(G)$ *ima b vrhova, a $\partial(G)$ ima c vrhova.*

Dokaz. Ako $a = b = c$, tada prema propoziciji 3.5 graf $G = K_a$ ima željena svojstva. Zato razmatramo sljedeća tri slučaja.

Slučaj 1: $a < b = c$. Neka je $G = K_{b-a} + \overline{K}_a$. Tada G ima b vrhova. Budući da je $e(v) = 2$ za $v \in V(\overline{K}_a)$ i $e(v) = 1$ ako je $v \in V(K_{b-a})$, slijedi da je $\mathrm{Per}(G) = \overline{K}_a$ i $\mathrm{Ecc}(G) = \partial(G) = G$. Prema tome, $\mathrm{Per}(G)$ ima a vrhova, a $\mathrm{Ecc}(G)$ i $\partial(G)$ imaju $b = c$ vrhova.

Slučaj 2: $a = b < c$. Pretpostavimo najprije da je $c = b + 1$. Neka je G graf dobiven iz grafova K_{a-1} i $P_5 = v_1v_2 \dots v_5$ dodavanjem novog vrha x, brida xv_2 te bridova između vrha v_1 i svih vrhova iz $V(K_{a-1})$. Graf G je prikazan na slici 4. Budući da je $e(v) = 5$ ako $v \in V(K_{a-1}) \cup \{v_5\}$, $e(v) = 4$ ako $v \in \{v_1, v_4, x\}$ i $e(v) = 3$ ako $v \in \{v_2, v_3\}$, slijedi da je $\mathcal{P}(G) = V(K_{a-1}) \cup \{v_5\}$. Nadalje, neka je v proizvoljan vrh u G i neka je $u \in \{v_1, v_2, v_3, v_4, x\}$. Jer je $e(v) \neq d(u, v)$, slijedi da je $\mathcal{E}(G) = \mathcal{P}(G) = V(K_{a-1}) \cup \{v_5\}$ pa prema propozicijama

3.2 i 3.5 dobivamo $\mathcal{B}(G) = \mathcal{P}(G) \cup \{x\}$.
Za $c \geq b + 2$, neka je G' graf dobiven zamjenom vrha x u grafu G prikazanom na slici 4 s K_{c-b} te dodavanjem bridova između v_2 i svih vrhova iz K_{c-b}. Tada graf G' ima željena svojstva.

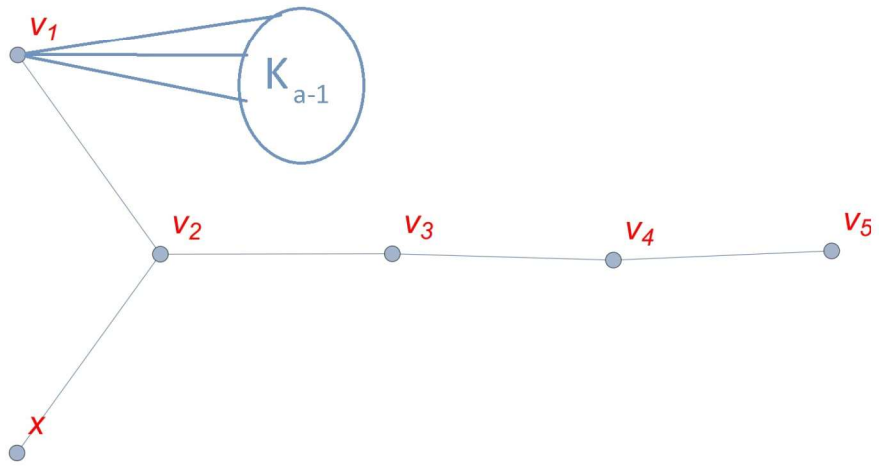
Slučaj 3: Neka vrijedi $a < b < c$. Za $a = 2$, $b = 3$ i $c = 4$ promotrimo graf H prikazan na slici 5, pri čemu je svakom vrhu pridružen njegov ekscentricitet. Rutinskom provjerom lako ustanovimo da vrijedi $\mathcal{P}(H) = \{u, v\}$, $\mathcal{E}(H) = \{u, y, z\}$ i $\mathcal{B}(H) = \{u, w, y, z\}$, gdje je z ekscentrični vrh od w, koji je pak granični vrh od s.
Za svaku trojku a, b, c cijelih brojeva sa svojstvom $2 \leq a < b < c$, konstruiramo graf G iz grafa H sa slike 5 tako da

(1) zamijenimo u s K_{a-1} i spojimo bridom svaki vrh iz K_{a-1} s v,

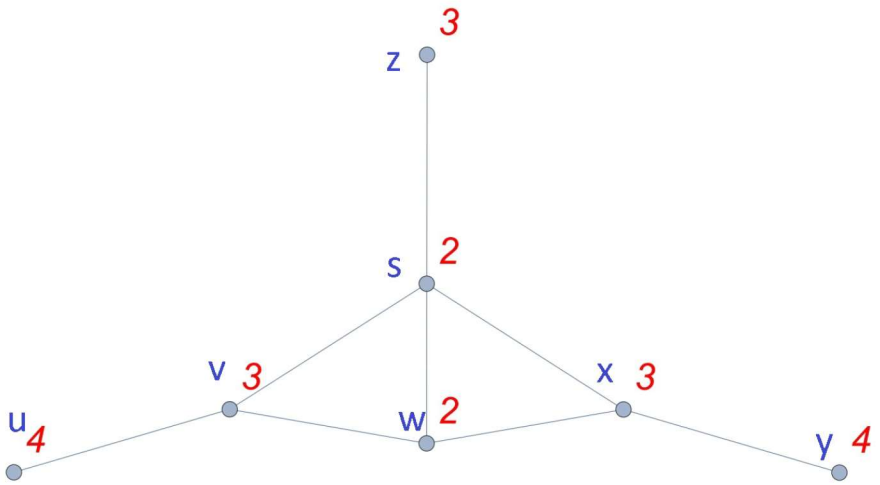
(2) zamijenimo z s K_{b-a} i spojimo bridom svaki vrh iz K_{b-a} sa s i

(3) zamijenimo w s K_{c-b} i spojimo bridom svaki vrh iz K_{c-b} sa svakih vrhom iz $\{s, v, x\}$.

Tada je svaki vrh u K_{a-1} ekscentriciteta 4, svaki vrh u K_{b-a} je ekscentriciteta 3 i svaki vrh u K_{c-b} je ekscentriciteta 2. Slijedi $\mathcal{P}(G) = V(K_{a-1}) \cup \{y\}$, $\mathcal{E}(G) = \mathcal{P}(G) \cup V(K_{b-a})$ i $\mathcal{B}(G) = \mathcal{E}(G) \cup V(K_{c-b})$. □



Slika 4: Graf G u slučaju 2 teorema 5.3.



Slika 5: Graf H slučaju 3 teorema 5.3

Graf H na slici 5 ukazuje na postojanje grafa koji ima točno 2/7 perifernih vrhova, 3/7 ekscentričnih vrhova te 4/7 graničnih vrhova. Nije teško pokazati da ne postoji graf G s n vrhova, $4 \leq n \leq 6$ za koji $\mathrm{Per}(G)$ ima 2 vrha, $\mathrm{Ecc}(G)$ ima 3 vrha, a $\partial(G)$ ima 4 vrha. Konkretno, ne postoji graf sa 6 vrhova koji sadrži trećinu perifernih, polovinu ekscentričnih i dvije trećine graničnih vrhova. Time se postavlja problem preciznog određivanja proporcija perifernih, ekscentričnih i graničnih vrhova grafa. Rješenje problema krije se u sljedećem teoremu.

Teorem 5.4. *Za svaku trojku r, s, t racionalnih brojeva za koje vrijedi $0 < r \leq s \leq t \leq 1$ postoji povezan graf G s n vrhova tako da vrijedi*

$$\frac{|\mathscr{P}(G)|}{n} = r, \quad \frac{|\mathscr{E}(G)|}{n} = s \quad i \quad \frac{|\mathscr{B}(G)|}{n} = t.$$

Dokaz. Neka je $r = a_1/b_1$, $s = a_2/b_2$ i $t = a_3/b_3$, pri čemu su a_i, b_i pozitivni cijeli brojevi, $1 \leq i \leq 3$. Razmotrimo šest slučajeva.

Slučaj 1: $0 < r < s < t < 1$. Koristimo graf H sa 7 vrhova prikazan na slici 5 kao početni graf. Neka je $n_1 = 7a_1b_2b_3$, $n_2 = 7a_2b_1b_3$, $n_3 = 7a_3b_1b_2$ i $n_4 = 7b_1b_2b_3$. Konstruirat ćemo graf G iz grafa H na sljedeći način:

(1) zamijenimo vrh u s K_{n_1-1} i spojimo bridom vrh v sa svim vrhovima iz K_{n_1-1},

(2) zamijenimo vrh w s $K_{n_3-n_2}$ i spojimo bridom svaki vrh iz $K_{n_3-n_2}$ sa svakim vrhom skupa $\{s, v, x\}$,

(3) zamijenimo vrh z s $K_{n_2-n_1}$ i spojimo bridom svaki vrh iz $K_{n_2-n_1}$ sa s i

(4) zamijenimo vrh s s $K_{n_4-n_3-2}$ i spojimo bridom svaki vrh iz $K_{n_4-n_3-2}$ sa svakim vrhom skupa $\{v, x\} \cup V(K_{n_2-n_1}) \cup V(K_{n_3-n_2})$.

Tada je svaki vrh iz $V(K_{n_1-1}) \cup \{y\}$ ekscentriciteta 4, svaki vrh iz $V(K_{n_2-n_1}) \cup \{v, x\}$ je ekscentriciteta 3 i svaki vrh iz $V(K_{n_3-n_2}) \cup V(K_{n_4-n_3-2})$ je ekscentriciteta 2. Stoga je $\mathscr{P}(G) = V(K_{n_1-1}) \cup \{y\}$, $\mathscr{E}(G) = \mathscr{P}(G) \cup V(K_{n_3-n_2})$ jer je svaki vrh iz $K_{n_2-n_1}$ ekscentrični vrh svakog

vrha iz $K_{n_3-n_2}$ te je $\mathcal{B}(G) = \mathcal{E}(G) \cup V(K_{n_3-n_2})$ jer je svaki vrh iz $K_{n_3-n_2}$ granični vrh od $K_{n_4-n_3-2}$. S obzirom da graf G sadrži $n = n_4$ vrhova, imamo

$$\frac{|\mathcal{P}(G)|}{n} = \frac{n_1}{n_4} = r, \quad \frac{|\mathcal{E}(G)|}{n} = \frac{n_2}{n_4} = s \quad \text{i} \quad \frac{|\mathcal{B}(G)|}{n} = \frac{n_3}{n_4} = t.$$

Slučaj 2: $0 < r < s < t = 1$. Koristit ćemo samogranični graf H s 10 vrhova prikazan na slici 2 kao početni graf. Pretpostavimo da vrijedi $a_3 = b_3 = 1$ i neka je $n_1 = 10a_1b_2$, $n_2 = 10a_2b_1$, $n_3 = 10b_1b_2$. Konstruirat ćemo graf G iz grafa H na sljedeći način:

(1) zamijenimo u' s K_{n_1-3} i spojimo bridom svaki vrh iz K_{n_1-3} sa svakim susjedom od u',

(2) zamijenimo z s $K_{n_2-n_1-1}$ i spojimo bridom svaki vrh iz $K_{n_2-n_1-1}$ sa svakim susjedom od z i

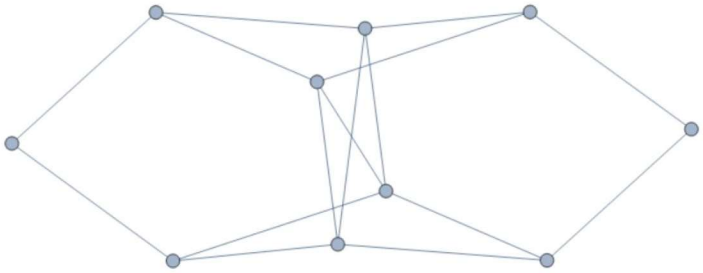
(3) zamijenimo y s $K_{n_3-n_2-3}$ i spojimo bridom svaki vrh iz $K_{n_3-n_2-3}$ sa svakim susjedom od y.

Tada je svaki vrh iz $V(K_{n_1-1}) \cup \{u', x', y'\}$ ekscentriciteta 4, svaki vrh iz $V(K_{n_3-n_2-3}) \cup \{u, v, x\}$ je ekscentriciteta 3 i svaki vrh iz $V(K_{n_2-n_1-1}) \cup \{w\}$ je ekscentriciteta 2. Stoga je $\mathcal{P}(G) = V(K_{n_1-3}) \cup \{u', x', y'\}$, $\mathcal{E}(G) = \mathcal{P}(G) \cup V(K_{n_2-n_1-1}) \cup \{w\}$ jer je svaki vrh iz $K_{n_2-n_1-1}$ ekscentrični vrh od w, a w je ekscentrični vrh svakog vrha iz $K_{n_2-n_1-1}$ i $\mathcal{B}(G) = V(G)$. Budući da graf G sadrži $n = n_3$ vrhova, imamo

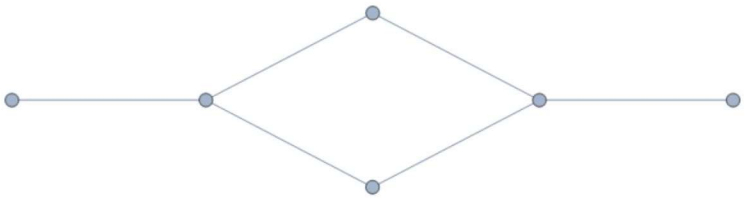
$$\frac{|\mathcal{P}(G)|}{n} = \frac{n_1}{n_3} = r, \quad \frac{|\mathcal{E}(G)|}{n} = \frac{n_2}{n_3} = s \quad \text{i} \quad \frac{|\mathcal{B}(G)|}{n} = t = 1.$$

U preostalim slučajevima konstruiramo četiri osnovna grafa prikazana na slici 6 koji se mogu koristiti za konstruiranje željenog grafa G. Budući da je dokaz svakog slučaja sličan onima korištenim u slučajevima 1 i 2, izostavljamo njihove dokaze.

Slučaj 3: $0 < r < s = t < 1$. Osnovni graf je prikazan na slici 6(a).
Slučaj 4: $0 < r < s = t = 1$. Osnovni graf je prikazan na slici 6(b).
Slučaj 5: $0 < r = s < t < 1$. Osnovni graf je prikazan na slici 7(a).
Slučaj 6: $0 < r = s < t = 1$. Osnovni graf je prikazan na slici 7(b).

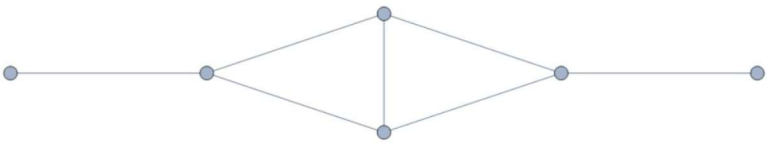


a)

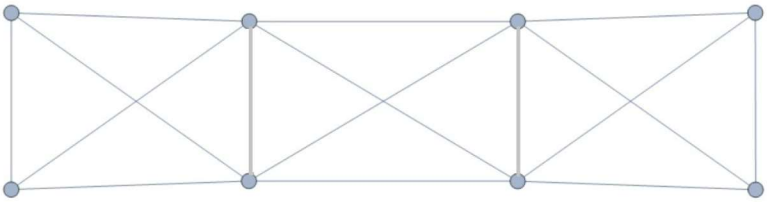


b)

Slika 6: Osnovni grafovi u slučajevima 3 i 4.



a)



b)

Slika 7: Osnovni grafovi u slučajevima 5 i 6.

□

Literatura

[1] H. Bielak, M.M. Syslo, *Peripheral vertices in graphs*, Stud. Sci. Math. Hungary, 18 (1983), 269–275.

[2] J. Cáceres, C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, M. L. Puertas, and C. Seara, *On geodetic sets formed by boundary vertices*, Discrete Math., 306 (2006) 188–198.

[3] G. Chatrand, D. Erwin, G. L. Johns, P. Zhang, *Boundary vertices in graphs*, Discrete Math., 263 (2003), 25–34.

[4] G. Chartrand, W. Gu, M. Schultz, S. J. Winters, *Eccentric graphs*, Networks, 34 (1999), 115–121.

[5] G. Chartrand, M. Schultz, S.J. Winters, *On eccentric vertices in graphs*, Networks, 28 (1996), 181.–186.

[6] M. C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, C. Seara, *Some structural, metric and convex properties of the boundary of a graph*, Ars. Comb., 109 (2013), 267–283.

[7] T. Müller, A. Pór and J. S. Sereni, *Lower bounding the boundary of a graph in terms of its maximum or minimum degree*, Discrete Math., 308 (2008), 6581–6583.

[8] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.