Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Elza Jolić

Fourierovi polinomi

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Elza Jolić

Fourierovi polinomi

Završni rad

Mentor:
izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2021.

Sažetak

Povijesno gledano, Fourierov polinom izveden je iz Fourierovog reda koji je nastao u svrhu matemaričkog modela za rješavanja problema provođenja topline u metalnoj pločici.
U radu smo najprije pobliže objasnili temeljne dijelove za postojanje Fourierovih polinoma počevši s periodičnosti, a zatim smo se osvrnuli na aproksimaciju funkcije trigonometrijskim polinomom. Tako smo došli do trigonometrijskog polinoma koji nam pomaže pri zapisu i izračunu Fourierovog polinoma. Na samom kraju smo se dotakli Fourierovog reda iz kojega u konačnici možemo dobiti dovoljno dobru aproksimaciju funkcije.

Ključne riječi: Fourierov polinom, temeljni period, aproksimacija funkcija, trigonometrijska funkcija

Abstract

The Fourier polynomial is derived from the Fourier series which was developed for the purpose of a mathematical model for solving the problem of heat conduction in a metal plate.
In this paper, we first explain in more detail the fundamental parts for the existence of Fourier polynomials starting from periodicity and then we look at the approximation of a function by a trigonometric polynomial. So we came up with a trigonometric polynomial that helps us to write and calculate a Fourier polynomial. In the end, we touched a little on the Fourier Order, which ultimately give us approximation of function that is good enough.

Key words: Fourier polynomial, fundamental period, approximation of the function, trigonometric function

Sadržaj

1 Uvod

Davne 1807. godine francuski matematičar i fizičar Joseph Fourier tvrdio je da svaka funkcija na ograničenom intervalu može biti prikazana u obliku trigonometrijskog reda, pri čemu njegova suma može bit konačna ili beskonačna.

Znanstvenicima njegova doba, kao što su Laplace, Poisson i Lagrange trebalo je 15 godina da prihvate Fourierovu metodu. Zamjerali su mu nedostatak matematičke preciznosti, jer neke njegove tvrdnje nisu bile točne. Točnije, tvrdio je da se sve funkcije mogu razviti u trigonometrijski red, odnosno trigonometrijski polinom.

No, postoje uvjeti koji određuju koje se funkcije mogu razviti u takav red, a ti uvjeti su poznati kao Dirichletovi uvjeti. Tu metodu iskoristio je u svojoj teoriji o širenju topline, koju je objavio 1882. godine u radu *O širenju topline u čvrstim tijelima*. Mnogi veliki znanstvenici prije njega - Bernoulli, Euler, D'Alembert, pokušali su doći do sličnih tvrdnji, ali to je uspjelo tek Fourieru koji je svojom metodom bio ispred vremena u kojem je živio.

Postavlja se pitanje zašto je razvoj funkcije u trigonometrijski polinom, odnosno red Fourieru bio toliko zanimljiv i bitan, da je na njega utrošio godine predanog rada? Odgovor leži u problemu provođenja topline u metalnoj pločici. Jednadžba provođenja topline je parcijalna diferencijalna jednadžba. Fourier je koristio razvoj u trigonometrijski red da bi riješio jednadžbu provođenja topline. Kasnije je uočio da neke tehnike rješavanja jednadžbe provođenja topline mogu biti primijenjene pri rješavanju nekih drugih matematičkih i fizikalnih problema. Fourierovi polinomi, odnosno redovi imaju primjenu u elektroničkom inženjerstvu, analizi vibracija, akustici, optici, procesiranju signala i slika.

U prvom dijelu rada pozabavit ćemo se s periodičnosti i aprokisimacijom funkcije, te dalje u radu ćemo razmotriti razvoj funkcije pomoću trigonometrijskih funkcija odnosno kako dobivamo Fourierov polinom funkcije.

1.1 Osnovne definicije

U ovom završnom radu često ćemo se koristiti određenim pojmovima, pa ćemo ih u nastavku definirati.

Definicija 1.1. *Neka je na $I \subseteq \mathbb{R}$ zadana funkcija f. Kažemo da je* ***funkcija f neprekidna*** *u točki $c \in I$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki x iz I za koji je $|x - c| < \delta$ vrijedi $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.*

Definicija 1.2. *Funkciju $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu s*

$$P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \;\; n \in \mathbb{N}_0, \;\; a_i \in \mathbb{R}, \;\; a_n \neq 0 \tag{1}$$

nazivamo polinomom n-tog stupnja nad $\mathbb{R}$. Brojeve $a_i \in \mathbb{R}$ nazivamo koeficijenti polinoma. Specijalno broj a_n nazivamo vodeći koeficijent, a a_0 slobodni koeficijent. Ako je $a_n = 1$, kažemo da je polinom normiran.

Definicija 1.3. *Neka je G neprazan skup i $+$ binarna operacja na G, tj. preslikavanje $+ : G \times G \to G$, $(a + b) \mapsto a + b$. Uređeni par $(G, +)$ nazivamo* ***grupa****, ako vrijedi:*

1) Asocijativnost: $\forall\, a, b, c \in G$ vrijedi $(a + b) + c = a + (b + c)$

2) Postojanje neutralnog elementa: $\exists\, 0 \in G$ tako da je $a + 0 = 0 + a \;\; \forall\, a \in G$

3) Postojanje inverznog elementa: $\forall\, a \in G$ tako da je $a + b = b + a = 0$ (tj. tada zapisujemo da je $b = -a$ i tada vrijedi $a + (-a) = -a + a = 0$)

Definicija 1.4. *Kažemo da je grupa $(G, +)$* ***Abelova*** *ili* ***komutativna*** *ako je binarna operacija zbrajanja komutativna, tj. $\forall\, a, b \in G$ vrijedi $a + b = b + a$.*

Definicija 1.5. *Neka je K neprazan skup na kojem su zadane dvije binarne operacije $+ : K \times K \to K$ i operacija $\cdot : K \times K \to K$ $((a, b) \mapsto a + b,\ (a, b) \mapsto a \cdot b)$. Kažemo da je uređena trojka $(K,+,\cdot)$ polje ako vrijedi:*

1) $(K, +)$ je Abelova grupa

2) $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa

3) Množenje je distributivno u odnosu na zbrajanje, tj. $\forall\, a, b, c \in K$ vrijedi $a \cdot (b + c) = ab + ac$, te $(a + b) \cdot c = ac + bc$

Definicija 1.6. *Neka je V neprazan skup i neka je K polje. Neka je zadana binarna operacija zbrajanja $+ : V \times V \to V$ i operacija množenja sa skalarom $\cdot : K \times V \to V$ $(a, b \in V \;\; (a, b) \mapsto a + b, \quad \lambda \in K, a \in V \;\; (\lambda, a) \mapsto \lambda \cdot a)$. Uređenu trojku $(V, +, \cdot)$ nazivamo* ***vektorski prostor nad poljem K*** *ako vrijedi:*

1) $(V, +)$ Abelova grupa

2) Distributivnost obzirom na zbrajanje u V tj. za $a, b \in V$ i $\lambda \in K$ vrijedi $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$

3) Distributivnost obzirom na zbrajanje u K tj. za $\lambda, \mu \in K$ i $a \in V$ vrijedi $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$

4) Kvaziasocijativnost tj. za $\lambda, \mu \in K$ i $a \in V$ vrijedi $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$

5) Jedinica $1 \in K$ zadovoljava $1 \cdot a = a, \quad \forall a \in V$

Definicija 1.7. ***Skalarni produkt*** *na vektorskom prostoru* $\mathbf{V}$ *nad poljem* $\mathbb{K}$ *je preslikavanje*

$$(\cdot|\cdot) : V \times V \to V$$

sa sljedećim svojstvima za svaki $x, y, z \in V$, $\alpha \in K$:

1) pozitivnost: $(x|x) \geq 0$

2) definitnost: $(x|x) = 0 \iff x = 0$

3) (konjugirana) simetričnost: $(x|y) = \overline{(y|x)}$

4) aditivnost u prvom argumentu: $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$

5) homogenost u prvom argumentu: $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$

Definicija 1.8. *Prostor na kojemu je zadan skalarni produkt nazivamo* ***unitaran prostor****.*

Definicija 1.9. *Neka je V bilo koji vektorski prostor nad poljem K. Svako preslikavanje $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$ koje ima sljedeća svojstva za svaki $\lambda \in K$, $x, y \in V$:*

1) pozitivnost: $||x|| \geq 0$,

2) definitnost: $||x|| = 0 \iff x = 0$

3) homogenost: $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$

4) nejednakost trokuta: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

naziva se ***norma*** *na prostoru X.*

Lema 1.10 (3, str 16.). *Ako je $(x, y) \mapsto (x|y)$ skalarni produkt na prostoru V, onda je $x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ norma na V.*

Definicija 1.11. *Vektorski prostor na kojemu je zadana norma naziva se* ***normiran prostor****.*

Definicija 1.12. *Neka je U unitaran prostor. Kažemo da su vektori $x, y \in U$* ***ortogonalni*** *ako je $(x|y) = 0$.*

Definicija 1.13. *Kažemo da je podskup S unitarnog prostora U* ***ortogonalan*** *ako za sve $u_1, u_2 \in S$ tako da je $u_1 \neq u_2$ vrijedi $(u_1|u_2) = 0$*
Za skup $S \subseteq U$ kažemo da je ***ortonormiran*** *ako za svaki $u \in S$ vrijedi $||u|| = 1$.*

2 Periodičnost funkcija

U tehnici i fizici često se susrećemo s periodičnim pojavama i procesima. Znamo da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **periodična funkcija** ako postoji $T \neq 0$ takav da vrijedi $f(x) = f(x+T)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. T se zove **period** od f. Svaki cjelobrojni višekratnik od perioda T je također period od f. Nadalje znamo i to da je suma i razlika dvaju perioda od f opet period od f. Ekstremni primjer periodičke funkcije je konstanta, čiji je period svaki realan broj $T \neq 0$. U primjenama redovito susrećemo funkcije s minimalnim pozitivnim periodom koji se zove **osnovni period**. Pitanje postojanja osnovnog perioda rješava sljedeća propozicija.

Propozicija 2.1. *Ako neprekidna i periodička funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nije konstanta, anda ona ima osnovni period.*

Dokaz. Kada f ne bi imala osnovni period, onda bismo mogli izabrati niz pozitivnih perioda $T_1, T_2, \ldots$ koji konvergira k nuli. Svi cjelobrojni višekratnici članova niza predstavljali bi svugdje gust podskup od $\mathbb{R}$, pa bi u svakoj točki tog podskupa f imala vrijednost $f(0)$. Zbog neprekidnosti f bi bila konstanta, što je u suprotnosti s pretpostavkom. □

Kada računamo s periodičkim funkcijama, uvijek ćemo raditi s takvima koje imaju osnovni period, kojeg kratko zovemo period funkcije. Ako je f definirana na poluotvorenom segmentu $< a, a+T]$ ili $[a, a+T >$ onda se f može na očigledan način proširiti od periodičke funkcije $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, koja se onda zove **periodičko proširenje** od f. Lako se dokazuje da je zbroj, razlika, produkt i kvocijent dviju periodičnih funkcija s istim periodom T ponovno periodična funkcija s periodom T.

Pokažimo da vrijedi sljedeća lema.

Lema 2.2. *Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična s periodom T i integrabilna (tj. Riemann-integrabilna) na $[0, T]$, onda vrijedi*

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \tag{2}$$

za svaki $a \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

□

Ponovimo terminologiju vezanu za sinusnu funkciju, koja je u primjenama jedna od osnovnih periodičnih funkcija. Imamo

$$y = A\sin(\omega x + \varphi), \tag{3}$$

onda se A zove **amplituda**, ω - **kružna frekvencija** (kutna brzina), φ- **početni fazni kut**, $T = \frac{2\pi}{\omega}$-**period**, $f = \frac{1}{T}$ - **frekvencija**, $\frac{\varphi}{\omega}$ - **pomak**.
Funkcija

$$y_k = A_k \sin(k\omega x + \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

zove se k-ti **harmonik** od funkcije (3) i vrijedi $T = kT_k$. T je period svakog harmonika, tako da je suma

$$f_N(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \sin(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k) \tag{5}$$

periodična funkcija s periodom T koja se zove **trigonometrijski polinom**.

3 Aproksimacija funkcije trigonometrijskim polinomom

Graf periodične funkcije sastoji se od istih dijelova krivulje, a svaki taj dio krivulje nalazi se u intervalu dužine T. Na primjer, funkcija $\sin x$ ima temeljni period 2π.

Od funkcije $\sin x$, koja ima period 2π, amplitudu 1 i početnu vrijednost 0 (za $x = 0$) mogu se napraviti funkcije s proizvoljno malim periodom, proizvoljnom amplitudom i proizvoljnom početnom vrijednošću, jer funkcija $K\sin(nx+\alpha)$, za koju vrijedi $n \in \mathbb{N}$, ima temeljni period $\frac{2\pi}{n}$, amplitudu K i početnu vrijednost $K\sin\alpha$, a ove se veličine mogu mijenjati promjenom brojeva n, K i α.

Slično vrijedi i za funkciju $\cos x$ koja se od funkcije $\sin x$ razlikuje u pomaku, $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x, \forall x$.

Zbog $K\sin(nx+\alpha) = K\cos\alpha \cdot \sin(nx) + K\sin\alpha \cdot \cos(nx)$, može se funkcija $K\sin(nx+\alpha)$ načiniti zbrajanjem funkcija $A\sin(nx)$ i $B\cos(nx)$ ako se stavi $A = K\cos\alpha$, $B = K\sin\alpha$.

Kako se kod obje ove funkcije izborom broja n može postići proizvoljno brza promjena znaka, a izborom brojeva A i B proizvoljno velike odnosno male amplitude, objašnjava se činjenica da se zbrajanjem više izraza oblika $A_k\sin(kx) + B_k\cos(kx)$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ mogu izvesti funkcije različitog toka, ili govoreći o krivuljama, može se reći: pozicioniranjem krivulja oblika $y = A_k\sin(kx) + B_k\cos(kx)$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ mogu se izraditi krivulje različitog oblika. Izraz

$$T_n(x) = \frac{1}{2}A_0 + (A_1\cos x + B_1\sin x) + (A_2\cos(2x) + B_2\sin(2x)) + \cdots + (A_n\cos(nx) + B_n\sin(nx)),$$

naziva se trigonometrijski polinom. Broj n je red trigonometrijskog polinoma.

Do sad smo vidjeli da se funkcija $f(x)$ može, uz određene uvjete, aproksimirati Taylorovim ili Mac-Laurin-ovim polinomom koji prelaze u beskonačne redove ako ostatak $R_n(x) \to 0$ kada $n \to \infty$.

I periodične i neperiodične funkcije mogu se u danom intervalu aproksimirati i trigonometrijskim polinomima $T_n(x)$, a ovi polinomi mogu prijeći u beskonačan trigonometrijski red, koji uz određene uvjete predstavlja funkciju $f(x)$ tj. funkcija $f(x)$ može biti razvijena u svoj trigonometrijski red.

Od neperiodičnih funkcija $f(x)$ promatra se samo dio na segmentu $[-\pi, \pi]$, a vrijednosti funkcije $f(x)$ koje ona ima prema svom analitičkom izrazu izvan tog segmenta se odbacuju.

Izvan segmenta $[-\pi, \pi]$ definira se nova funkcija

$$f(x + 2k\pi) = f(x), \qquad (k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Tako se od dijela neperiodične funkcije $f(x)$, promatrana samo na segmentu $[-\pi, \pi]$, stvara nova periodična funkcija koja se naziva *periodičnim produženjem* funkcije $f(x)$.

4 Oblici koeficijenata trigonometrijskog polinoma

Koeficijenti A_k i B_k trigonometrijskog polinoma

$$T_n(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx) \tag{6}$$

izražavaju se pomoću polinoma $T_n(x)$ sljedećim oblicima:

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\cos(kx)\,dx, \qquad B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\sin(kx)\,dx. \tag{7}$$

Za brojeve $a, b \in \mathbb{Z}$ za koje je $a + b \neq 0$, $a - b \neq 0$ postoje integrali:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(ax)\cdot\sin(bx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]\,dx = 0 \tag{8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ax)\cdot\cos(bx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]\,dx = 0$$

za $a \neq b$ i

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(ax)\cdot\cos(bx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]\,dx = 0; \tag{9}$$

za $a = b$ je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(ax)\,dx = \pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ax)\,dx = 0, \tag{10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(ax)\,dx = \pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ax)\,dx = 0,$$

Jednakost (6) pomnoži se sa $\cos(px)$, $(p = 0, 1, 2, \dots, n)$ i integrira se u granicama $< -\pi, \pi >$.
Dobivamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\cos(px)\,dx = \frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(px)\,dx + \sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(px)\,dx + \sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(px)\,dx \tag{11}$$

Prema (8), (9) i (10) dobivamo:
za $p = 0$ na desnoj strani je samo prvi integral različit od nule,

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\,dx = \frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{A_0}{2}2\pi$$

tj.

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\, dx \tag{12}$$

za $p = k$ na desnoj strani se pojavljuje samo jedan integral različit od nule

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x) \cos(kx)\, dx = A_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\, dx = A_k \cdot \pi$$

tj.

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x) \cos(kx)\, dx, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

Na isti način, ako se jednakost (6) pomnoži sa $\sin px$ i integrira u granicama $< -\pi, \pi >$, svi integrali će biti jednaki nuli, osim onog za koji je $p = k$, tako se dobije

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x) \sin(kx)\, dx = B_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\, dx = A_k$$

tj.

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x) \sin(kx)\, dx, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{14}$$

Podsjetimo se, u jednakosti (11) svi će integrali biti jednaki nula ako je $p > n$, jer k može biti najviše jednak n.

5 Fourierov trigonometrijski polinom. Razvijanje funkcija u Fourierov red

Za proizvoljnu integrabilnu funkciju perioda 2π mogu se izračunati brojevi

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx, \tag{15}$$

za a_k $k = 0, 1, \ldots, n$, te za b_k $k = 1, 2, \ldots, n$,

i s tim brojevima formirati trigonometrijski polinom

$$F_n(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]. \tag{16}$$

Brojevi (15) nazivaju se Fourierovi koeficijenti funkcije $f(x)$, a polinom (16) je Fourierov trigonometrijski polinom funkcije $f(x)$ i označavamo ga s F_n. Koeficijenti Fourierovog polinoma (16) formirani su pomoću funkcije $f(x)$.

Ako $f(x)$ nije trigonometrijski polinom, mogu se prema jednadžbi (16) formirati beskonačni nizovi Fourierovih koeficijenata

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad\qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

a prema tome i beskonačan niz Fourierovih polinoma

$$F_1(x),\ F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$$

Primjer 1. *Za funkciju* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\pi}|x|$ *treba odrediti Fourierove koeficijente i Fourierov polinom stupnja* $n \geq 1$.

Kako je f parna funkcija, tj. $f(-x) = \frac{1}{\pi}|-x| = \frac{1}{\pi}|x| = f(x)$, funkcija $x \mapsto f(x)\sin(kx)$ je neparna, pa svi koeficijenti $b_1, \ldots, b_n$ iščezavaju. Kako je b_k definirana integralom, $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx,\quad k = 0, 1, \ldots, n$, uvjerili smo se da je $f(x)$ parna funkcija, a $\sin(kx)$ je neparna funkcija. Umnožak parne i neparne funkcije je neparna funkcija, a integral neparne funkcije je na simetričnom intervalu je uvijek jednak nuli, te slijedi $b_k = 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n$. Koeficijenti a_k su dani formulama:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad\qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \qquad\qquad k = 1, \ldots, n.$$

Dakle:

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}|x|\,dx = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2\left[\int_{-\pi}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2\left[\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\pi}\right] =$$
$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)^2\left[0 - \frac{-\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2}\right] = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2}\right] = \frac{1}{\pi^2}\cdot\pi^2 = 1$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{\pi}\,x\,cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi^2}\int_{0}^{\pi} x\,cos(kx)\,dx = \\ &= \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{x}{k}\sin(kx)\Big|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\frac{1}{k}\sin(kx)dx\right] = \frac{1}{\pi^2}\left[0 + \frac{1}{k^2}cos(kx)\Big|_{0}^{\pi}\right] = \\ &= \frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k^2}\left(cos(k\pi) - 1\right) = \frac{2}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0 & ,k \text{ paran} \\ \frac{-4}{k^2\pi^2} & ,k \text{ neparan} \end{cases} \end{aligned}$$

Odgovarajući Fourierov polinom dan je formulom (16), pa uvrštavanjem dobivenih koeficijenata dobivamo:

$$F_n(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + \cdots + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right)$$

Korištenjem Mathematica-programa možemo izračunati Fourierove koeficijente i Fourierov polinom stupnja $n \geq 1$. Na slici 1 prikazan je graf funkcije f i Fourierovi polinomi F_2 i F_3

(a) Primjer : Fourierov polinom F_2 (b) Primjer 1: Fourierov polinom F_3

Slika 1: Fourierovi polinomi

U nastavku se nalaz kod iz Mathematica - programa koji nam olakšava izračune Fourierovih koeficijenata i prikazuje Fourierov n-ti polinom (preuzeto iz [4]).

```
n = 2;

f[x_] := (1/Pi) Abs[x]
a0 = (1/Pi) Integrate[f[x], {x, -Pi, Pi}];
a = Table[(1/Pi) Integrate[f[x] Cos[k x], {x, -Pi, Pi}], {k, n}];
b = Table[(1/Pi) Integrate[f[x] Sin[k x], {x, -Pi, Pi}], {k, n}];
Print["a0 =", a0, " a =", MatrixForm[a], " b=", MatrixForm[b]]
F[x_] := a0/2 + Sum[a[[k]] Cos[k x] + b[[k]] Sin[k x], {k, n}]
Plot[{f[x], F[x]}, {x, -Pi, Pi}, Filling → {1 → {2}}]
```

Slika 2: Mathematica kod

Primjer 2. *Zadana je funkcija* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + \pi, & x \in [-\pi, 0\rangle \\ x & , x \in [0, \pi] \end{cases}$. *Ispitajte njenu parnost i odredite Fourierov polinom stupnja* $n \geq 1$. *Korištenjem gore navedenog Mathematica-programa prikažite graf funkcije* f *i Fourierove polinome* F_2 *i* F_5.

Najprije provjerimo parnost funkcije. Dakle,

$f(-x) = -x + \pi \neq f(x) = x$

&

$-f(x) = \begin{cases} -x - \pi, & x \in [-\pi, 0\rangle \\ -x & , x \in [0, \pi] \end{cases} = \begin{cases} -(x + \pi), & x \in [-\pi, 0\rangle \\ -x & , x \in [0, \pi] \end{cases} \neq f(-x) = -x + \pi$

te zaključujemo da funkcija $f(x)$ nije niti parna niti neparna pa je potrebno izračunati koeficijente a_k i b_k $\forall k = 0, 1, \ldots$.

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x^2}{2} + \pi x\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 - \left(\frac{\pi^2}{2} - \pi^2\right) + \frac{\pi^2}{2} - 0\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi^2}{2} + \pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\right] = \frac{1}{\pi}\cdot -\pi^2 = \pi$$

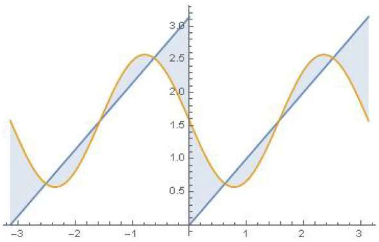
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\cos(kx)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cdot\cos(kx)\,dx\right] =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} x\cos(kx)\,dx + \int_{-\pi}^{0}\pi\cos(kx)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos(kx)\,dx\right] =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{k}\sin(kx)\Big|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\frac{1}{k}\sin(kx)\,dx + \pi\int_{-\pi}^{0}\cos(kx)\,dx + \frac{x}{k}\sin(kx)\Big|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\frac{1}{k}\sin(kx)\,dx\right] =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + \frac{1}{k^2}\cos(kx)\Big|_{-\pi}^{0} - \pi\sin(kx)\Big|_{-\pi}^{0} + 0 + \frac{1}{k^2}\cos(kx)\Big|_{0}^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k^2}\cos(k\pi) + \frac{1}{k^2}\cos(kx)\right] = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\sin(kx)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cdot\cos(kx)\,dx\right] =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} x\sin(kx)\,dx + \int_{-\pi}^{0}\pi\sin(kx)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\sin(kx)\,dx\right] =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{k}\cos(kx)\Big|_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\frac{1}{k}\cos(kx)\,dx - \frac{\pi}{k}\cos(kx)\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{x}{k}\cos(kx)\Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi}\frac{1}{k}\cos(kx)\,dx\right] =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{k}\cos(-\pi x) + \frac{1}{k^2}\sin(kx)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\pi}{k}\cos(-\pi k) - \frac{\pi}{k}\cos(-\pi k) + \frac{1}{k^2}\sin(kx)\Big|_{0}^{\pi}\right] =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-3\pi}{k}\cdot\frac{-pi}{k}\cos(\pi k)\right) = -\frac{1+\cos(k\pi)}{k^2}$$

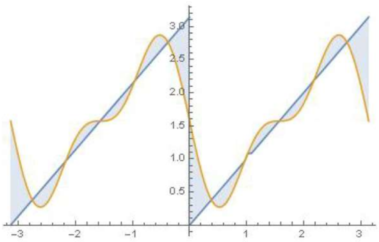
Odgovarajući Fourierov polinom dan je formulom (16), pa uvrštavanjem dobivenih koeficijenata dobivamo:

$$F_n(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{2^2}\sin 2x - \frac{2}{4^2}\sin 4x - \frac{2}{6^2}\sin 6x - \cdots - \frac{2}{n^2}\sin nx.$$

Korištenjem Mathematica-programa možemo izračunati Fourierove koeficijente i Fourierov polinom stupnja $n \geq 1$. Na slici 3 prikazan je graf funkcije f i Fourierovi polinomi F_2 i F_5



(a) Primjer : Fourierov polinom F_2



(b) Primjer 1: Fourierov polinom F_5

Slika 3: Fourierovi polinomi

Primjedba 5.1. *Ako su f, g ortogonalne funkcije, onda za njih vrijedi Pihagorin teorem*

$$||f+g||^2 = ||f||^2 + ||g||^2$$

Općenitije, za ortogonalni sustav $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ vrijedi

$$\left|\left|\sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i\right|\right|^2 = \sum_{i=0}^{n} a_i^2 ||\varphi||^2$$

.

Primjedba 5.2. *Budući da je sustav funkcija $\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx$ ortogonalan za $n \in \mathbb{N}$, možemo promatrati i beskonačni ortogonalni sustav funkcija*

$$\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots,$$

i neke funkcije f pokušati prikazati pomoću sume reda

$$F(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{17}$$

gdje je:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx. \tag{18}$$

Red (17) nazivamo **Fourierov red**, a brojeve (18) **Fourierovi koeficijenti** funkcije f. Kada će Fourierov red (17) za neki x_0 biti konvergentan i hoće li u tom slučaju biti $F(x_0) = f(x_0)$, određeno je *Dirichletovim teoremom*

Teorem 5.3. *Neka je $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ periodična funkcija temeljnog perioda 2π takva da*

(i) na segmentu $[-\pi, \pi]$ ima najviše konačno mnogo prekida prve vrste

(ii) na segmentu $[-\pi, \pi]$ najviše konačno mnogo puta mijenja smisao monotonosti

Tada:

(i) Fourierov red funkcije f konvergira za svaki $x \in \mathbb{R}$. Neka je

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

(ii) Ako je funkcija f neprekidna u točki $x \in [-\pi, \pi]$, onda je $F(x) = f(x)$

(iii) Ako funkcija f ima prekid u točki $x \in [-\pi, \pi]$, onda je $F(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$

(iv) $F(-\pi) = F(\pi) = \frac{1}{2}(f(-\pi+) + f(\pi-))$.

Dokaz. Vidi [3] □

Kako je $F(x) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$ osim možda za njih konačno mnogo, obično pišemo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

i kažemo da je funkcija f razvijena u **Fourierov red**.

Napomena : Može se promatrati i Fourierov razvoj periodične funkcije općenito perioda $T \neq 2\pi$, za koji vrijede analogne tvrdnje i formule za Fourierov polinom, te odgovarajuće Fourierove koeficijente, samo općenito za period T (vidi [2],[4]).
Ovdje nećemo razmatrati tu tematiku.

Literatura

[1] Boško S. Tomić, *Matematika 2*, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 1977.

[2] I. Ivanšić, *Fourierov red i integral. Diferencijalne jednadžbe*, Zagreb - Elektrotehnički fakultet, Zagreb 1978.

[3] S. Kurepa, *Matematička analiza II.*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[4] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2015.

[5] Š. Ungar, *Matematička analiza 3*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovni matematički fakultet, Zagreb, 2004.

[6] http://matematika.fkit.hr/staro/izborna/referati/Vedrana - posječeno u veljači 2021.

[7] http://www.grad.hr/vera/webnastava/primmatematika/primat2.pdf - posječeno u veljači 2021.

[8] https://www.mathos.unios.hr/matefos/Files/predavanja/p3.pdf - posječeno u travnju 2021.