Apsolutna konvergencija i redovi potencija

Pavlić, Tena

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Tena Pavlić

Apsolutna konvergencija i redovi potencija

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Tena Pavlić

Absolute convergence and power series

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Soldo

Osijek, 2020.

Sažetak

U ovom završnom radu bavimo se temom apsolutne konvergencije redova realnih brojeva i redovima potencija realnih brojeva. Na početku rada ćemo definirati osnovne pojmove kao što su redovi realnih brojeva i konvergencija redova realnih brojeva te navesti teoreme vezane za ispitivanje konvergencije redova realnih brojeva. Zatim ćemo definirati apsolutnu konvergenciju redova realnih brojeva te navesti neke od kriterija za ispitivanje apsolutne konvergencije. Nadalje, definirat ćemo redove potencija realnih brojeva i navesti teoreme kojima se koristimo za ispitivanje konvergencije i radijusa konvergencije redova potencija realnih brojeva. Na kraju ćemo definirati Taylorov red, iskazati Taylorov teorem i razviti neke funkcije u Taylorov odnosno Maclaurinov red.

Ključne riječi

Redovi realnih brojeva, konvergencija redova realnih brojeva, apsolutna konvergencija redova realnih brojeva, redovi potencija realnih brojeva, Taylorov red

Absolute convergence and power series

Summary

In this final paper, we consider the topic of absolute convergence of infinite series of real numbers and power series of real numbers. At the beginning of the paper, we define fundamental terms such as series of real numbers and convergence of series of real numbers and state theorems concerning determination of convergence of series of real numbers. Next we will define absolute convergence of infinite series of real numbers and point some of the criteria for determining the absolute convergence of infinite series of real numbers. Furthermore, we define the power series of real numbers and state theorems that we use to determine the convergence of the power series of real numbers and radius of convergence. Finally, we define Taylor's series, prove Taylor's theorem and develop some functions into Taylor's or Maclaurin's series.

Key words

Series of real numbers, convergence of real numbers, apsolute convergence of real numbers, power series of real numbers, Taylor's series

Sadržaj

Uvod

U ovom završnom radu obrađena je tema apsolutne konvergencije redova realnih brojeva i redovi potencija realnih brojeva. Rad se sastoji od tri poglavlja: *Osnovni pojmovi, Apsolutna konvergencija redova realnih brojeva i Redovi potencija realnih brojeva*.

U prvom poglavlju definiramo pojam reda realnih brojeva i njegove konvergencije. Iskazali smo nužan uvjet konvergencije realnih brojeva, kao i teorem o konvergenciji geometrijskih redova te integralni test.

U drugom poglavlju definirali smo red realnih brojeva s nenegativnim članovima te apsolutnu i uvjetnu konvergenciju redova realnih brojeva. Naveli smo neke od kriterija za ispitivanje apsolutne konvergencije realnih brojeva: poredbeni kriterij, Leibinzov kriterij, D'Alembertov kriterij i Cauchyjev kriterij.

U trećem poglavlju definirali smo red potencija realnih brojeva, njegov radijus konvergencije i područje konvergencije. Iskazali smo Abelov teorem kao i Hadamardovu formulu. Naveli smo teorem o deriviranju i integriranju redova potencija realnih brojeva te aritmetičke operacije redova potencija realnih brojeva. Definirali smo Taylorov red i iskazali Taylorov teorem. Na kraju smo naveli primjere nekih funkcija razvijenih u red potencija realnih brojeva.

1 Osnovni pojmovi

Na početku ovog rada definirat ćemo te primjerima potkrijepiti osnovne pojmove vezane uz redove realnih brojeva.

Definicija 1. *Neka je (a_n) niz realnih brojeva.* ***Red*** *realnih brojeva, u oznaci $\sum a_n$, je uređeni par $((a_n), (s_n))$, gdje je (s_n) niz oblika*

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + \dots + a_n, \dots$$

Za a_n kažemo da je ***opći član*** *reda, a s_n* ***n-ta parcijalna suma*** *reda.*

Definicija 2. *Za red realnih brojeva $\sum a_n$ kažemo da je* ***konvergentan*** *ukoliko je njegov niz (s_n) parcijalnih suma konvergentan. Ako red $\sum a_n$ konvergira, onda se broj $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ naziva njegovom* ***sumom*** *i označava sa*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Red $\sum a_n$ je divergentan ukoliko je niz (s_n) divergentan.

Primjer 1. *Promotrimo red oblika $\sum 2n$. n-ta parcijalna suma ovoga reda ima oblik*

$$\begin{aligned} s_n &= 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n \\ &= \frac{n}{2}(4 + (n-1)2) \\ &= n^2 + n. \end{aligned}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, red divergira.

Primjer 2. *Promotrimo red $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$. n-ta parcijalna suma ovoga reda ima oblik*

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Kako $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{3}{2}$, red konvergira sumi $\frac{3}{2}$.

Nekada se za red realnih brojeva i njegovu sumu koristi isti znak. Tada se iz konteksta rečenice zaključuje radi li se o redu ili njegovoj sumi. Takav slučaj imali smo u prethodnom primjeru.

Primjer 3. *Red oblika $\sum \frac{1}{an+b}$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, nazivamo opći harmonijski red. Svaki harmonijski red je divergentan zato što mu pripadni niz parcijalnih suma divergira. Dokaz ove tvrdnje može se vidjeti u [6] za a=1 i b=0.*

Teorem 1 (Nužan uvjet konvergencije reda realnih brojeva, vidi [4, Teorem 8.1])**.** *Ako red $\sum a_n$ konvergira onda niz (a_n) konvergira nuli.*

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [4] na str. 151.

Obrat prethodnog teorema ne vrijedi, tj. ako niz (a_n) konvergira nuli ne možemo zaključiti da red $\sum a_n$ konvergira.

Primjer 4. *Promotrimo harmonijski red* $\sum \frac{1}{2n+7}$. *Red divergira i vrijedi* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+7} = 0$, *iz čega vidimo da obrat prethodnog teorema ne vrijedi.*

Primjer 5. *Red* $\sum \frac{3n^3+4}{5n^3+7}$ *divergira jer nije ispunjen nužan uvjet konvergencije. Naime,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+4}{5n^3+7} = \frac{3}{5} \neq 0.$$

Sada ćemo navesti rezultat koji nam govori o konvergenciji redova dobivenih zbrajanjem drugih redova ili množenjem skalarom.

Teorem 2 (vidi [4, Teorem 8.2])**.** *Neka su dani redovi* $\sum a_n$ *i* $\sum b_n$, *te neka je* $\lambda \neq 0$ *konstanta.*

1. *Ako* $\sum a_n$ *i* $\sum b_n$ *konvergiraju, onda konvergiraju i redovi* $\sum(a_n + b_n), \sum(a_n - b_n)$ *i* $\sum \lambda a_n$.
2. *Ako red* $\sum a_n$ *divergira, onda divergira i* $\sum \lambda a_n$.

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [4] na str. 151.

Napomena 1. *Neka su* $\sum a_n$ *i* $\sum b_n$ *redovi sa svojstvima iz prethodnog teorema i* $\lambda \neq 0$. *Tada za njihove sume vrijedi:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Teorem 3 (vidi [1, Teorem 26])**.** *Neka su* $a, q \in \mathbb{R}, a \neq 0$. *Red realnih brojeva* $\sum aq^n$ *naziva se geometrijski red. Ako je* $|q| < 1$, *onda geometrijski red*

$$\sum aq^n = a + aq + aq^2 + \dots$$

konvergira i ima sumu $\frac{a}{1-q}$. *Ako je* $|q| \geq 1$, *onda red* $\sum aq^n$ *divergira.*

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [1] na str. 86.

Primjer 6. *Promotrimo geometrijski red* $\sum \left(\frac{2}{5}\right)^n$. *Za zadani red je* $|q| = \left|\frac{2}{5}\right| < 1$, *pa prema prethodnom teoremu red konvergira.*

Neka je $f : [a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a, +\infty\rangle$. Definiramo

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx, \tag{1}$$

i zovemo ga nepravi integral. Nepravi integral konvergira ukoliko limes (1) postoji, u suprotnom integral divergira. Postoje i drugi tipovi nepravih integrala i mogu se pronaći u [1]. Mi ćemo se zadržati na tipu (1). Navedimo sada kriterij za ispitivanje konvergencije redova koristeći nepravi integral (1).

Teorem 4 (Integralni test, vidi [4, Teorem 8.5])**.** *Neka je $f : [1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna, nenegativna i padajuća funkcija, te neka je $\sum a_n$ red takav da $a_n = f(n), \quad n = 1, 2, \ldots$. Tada*

1. *$\sum a_n$ konvergira ako $\int_1^\infty f(x)dx$ konvergira.*
2. *$\sum a_n$ divergira ako $\int_1^\infty f(x)dx$ divergira.*

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [4] na str. 152.

Ovaj kriterij je istinit i ako umjesto intervala $[1, +\infty\rangle$ stavimo interval $[a, +\infty\rangle, a \in \mathbb{Z}$. Dakle, funkcija f mora zadovoljavati uvjete i na tom intervalu.

Primjer 7. *Promotrimo red oblika $\sum \frac{\ln n}{n}$. Označimo sa $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Deriviranjem funkcije f dobivamo*

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0, \ \text{za } x \geq 3.$$

Dakle, funkcija f je neprekidna, nenegativna i padajuća funkcija na intervalu $[3, +\infty\rangle$ pa možemo primjeniti Integralni test za ispitivanje konvergencije polaznog reda.

$$\begin{aligned}\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx &= \lim_{t\to+\infty} \int_3^t \frac{\ln x}{x}dx = \begin{vmatrix} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \end{vmatrix} = \lim_{t\to+\infty} \int_{\ln 3}^{\ln t} udu \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{u^2}{2}\Big|_{\ln 3}^{\ln t} = \frac{1}{2} \lim_{t\to+\infty} (\ln^2 t - \ln^2 3) = +\infty\end{aligned}$$

Kako nepravi integral divergira, prema Integralnom testu divergira i polazni red.

Ako bismo ispitivali konvergenciju integrala $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$, onda bismo mogli iskoristit linearnost integrala i pisati

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^3 \frac{\ln x}{x}dx + \int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$$

i opet bi primjenom prethodnog primjera zaključili divergenciju.

Primjer 8. *Promotrimo red oblika $\sum e^{-n}$. Označimo sa $f(x) = e^{-x}$. Funkcija f je nenengativna i neprekidna funkcija na $[1, +\infty\rangle$. Provjerimo je li funkcija f padajuća. Deriviranjem funkcije f dobivamo*

$$f'(x) = -e^{-x} < 0, \ \text{za } x \geq 1.$$

Dakle, funkcija f je padajuća i zadovoljene su sve pretpostavke Integralnog testa. Provjerimo još konvergira li nepravi integral funkcije f.

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t \to +\infty} -e^{-x}\Big|_1^t = \lim_{t \to +\infty} (-e^{-t} + e^{-1}) = e^{-1}$$

Kako nepravi integral konvergira, prema Integralnom testu konvergira i polazni red.

2 Apsolutna konvergencija redova realnih brojeva

Kada ispitujemo konvergenciju reda $\sum a_n$ često promatramo red $\sum |a_n|$ sastavljen od apsolutnih vrijednosti članova polaznog reda, tj. red s nenegativnim članovima. Kako bi odredili konvergenciju reda $\sum |a_n|$ uspoređujemo ga s nekim poznatim redom za koji se zna konvergira li ili ne.

Definicija 3. *Za red $\sum a_n$ kažemo da je* ***red s nenegativnim članovima*** *ako je $a_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Sada ćemo navesti teorem koji govori o konvergenciji redova s nenegativnim članovima.

Teorem 5 (vidi [7])**.** *Red s nenegativnim članovima je konvergentan onda i samo onda ako mu je niz parcijalnih suma omeđen.*

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [7] na str. 105.

Teorem 6 (Poredbeni kriterij, vidi [1, Lema 4])**.** *Neka je $\sum a_n$ red s nenegativnim članovima.*

1. *Ako je $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ i red $\sum b_n$ konvergira, onda red $\sum a_n$ konvergira i vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

2. *Neka je dodatno $\sum b_n$ red s nenegativnim članovima. Ako $\sum b_n$ divergira i $a_n \geq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, onda red $\sum |a_n|$ divergira.*

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [1] na str. 89.

Primjer 9. *Red $\sum \frac{1}{n^4}$ konvergira jer je $n^4 \geq n^2$ i vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Primjer 10. *Red $\sum n^2$ divergira jer je $n^2 \geq \frac{1}{n}$.*

Definicija 4. *Red realnih brojeva $\sum a_n$ nazivamo* ***alternirajuću red*** *ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$*

$$a_{2n-1} \geq 0,\ a_{2n} \leq 0 \ \text{ili}\ a_{2n-1} \leq 0,\ a_{2n} \geq 0.$$

Sada ćemo navesti kriterij za ispitivanje konvergencije alternirajućih redova.

Teorem 7 (Leibnizov kriterij, vidi [2])**.** *Neka je $\sum a_n$ alternirajući red. Ako niz realnih brojeva $(|a_n|)$ pada i konvergira nuli, onda je red $\sum a_n$ konvergentan.*

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [2] na str. 108.

Primjer 11. *Red $\sum (-1)^n \frac{1+n}{1+n^2}$ je konvergentan jer je niz $|a_n| = \frac{1+n}{1+n^2}$ padajući i konvergira nuli.*

Definicija 5. *Za red* $\sum a_n$ *kažemo da* **apsolutno konvergira** *ukoliko red* $\sum |a_n|$ *konvergira. Red* $\sum a_n$ **uvjetno konvergira** *ukoliko red* $\sum a_n$ *konvergira ali red* $\sum |a_n|$ *divergira.*

Primjer 12. *Promotrimo ponovo red iz prošlog primjera. Red sastavljen od apsolutnih vrijednosti članova polaznog reda je divergentan prema Teoremu 5 jer njegov niz parcijalnih suma nije omeđen. Dakle, dani red ne konvergira apsolutno, tj. konvergira uvjetno.*

Primjer 13. *Promotrimo red oblika* $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. *Prema Leibnizovom kriteriju red konvergira jer njegov pripadni niz* $(|a_n|)$ *pada i konvergira nuli. Polazni red ne konvergira apsolutno jer red koji se sastoji od apsolutnih vrijednosti njegovih članova nema omeđeni niz svojih parcijalnih suma. Dakle, dani red konvergira uvjetno.*

Primjer 14. *Promotrimo red s nenegativnim članovima* $\sum \frac{1}{n^4}$. *Pokazali smo u Primjeru 9. da on konvergira. Kako su apsolutne vrijednosti njegovih članove jednake samim članovima, možemo zaključiti da red konvergira apsolutno. Dakle, apsolutna konvergencija za redove s nenegativnim članovima jednaka je 'običnoj' konvergenciji.*

Teorem 8 (vidi [1, Teorem 28]). *Neka je* (a_n) *niz realnih brojeva. Ako konvergira red* $\sum |a_n|$ *onda konvergira i red* $\sum a_n$ *te vrijedi*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [1] na str. 89.

Obrat prethodnog teorema ne vrijedi, što ćemo pokazati u sljedećem primjeru.

Primjer 15. *Promotrimo alternirajući harmonijski red* $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n+1}$. *Pripadni niz* $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ *je padajući i konvergira nuli, pa prema Leibnizovom kriteriju zadani red konvergira. Red sastavljen od njegovih apsolutnih vrijednosti je harmonijski red, a svaki harmonijski red divergira. Prema tome, obrat Teorema 8 ne vrijedi.*

Primjer 16. *Promotrimo red* $\sum (-1)^n \frac{1}{n3^n}$. *Znamo da red* $\sum \frac{1}{3^n}$ *konvergira. Za red sastavljen od apsolutnih vrijednosti članova polaznog reda, tj. red* $\sum \frac{1}{n3^n}$ *vrijedi*

$$\frac{1}{n3^n} \leq \frac{1}{3^n},$$

pa prema Poredbenom kriteriju red $\sum \frac{1}{n3^n}$ *konvergira. Dakle, polazni red konvergira apsolutno te prema Teoremu 8 konvegira i vrijedi*

$$\left| \sum (-1)^n \frac{1}{n3^n} \right| \leq \sum \frac{1}{n3^n}.$$

Sada ćemo iskazati teorem koji je posljedica Teorema 6 i Teorema 8.

Teorem 9 (vidi [1, Teorem 29]). *Neka je* $\sum a_n$ *red s članovima u* $\mathbb{R}$.

1. *Ako* $|a_n| \leq |b_n|$ *i red* $\sum b_n$ *apsolutno konvergira, onda i red* $\sum a_n$ *apsolutno konvergira.*

2. *Ako* $|b_n| \leq |a_n|$ *i red* $\sum b_n$ *ne konvergira apsolutno onda ni red* $\sum a_n$ *ne konvergira apsolutno.*

Sada ćemo navesti dva kriterija za konvergenciju redova, D'Alembertov i Cauchyjev kriterij, koji se dobivaju usporedbnom redova s geometrijskim redom. Kako se radi o često korištenim kriterijima, navest ćemo i dokaze nekih od navedenih rezultata.

Teorem 10 (D'Alembertov kriterij, vidi [1, Teorem 31])**.** *Neka je* (a_n) *niz realnih brojeva.*

1. *Ako postoji prirodni broj* m *i realni broj* q, $0 \leq q < 1$ *takvi da je*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \tag{2}$$

za svaki $n \geq m$, *onda red* $\sum a_n$ *apsolutno konvergira.*

2. *Ako postoji* $m \in \mathbb{N}$ *takav da je*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \tag{3}$$

za svaki $n \geq m$, *onda red* $\sum a_n$ *divergira.*

Dokaz. 1. Iz (2) dobivamo

$$|a_{m+1}| \leq q|a_m|, \quad |a_{m+2}| \leq q|a_{m+1}| \leq q^2|a_m|, \ldots$$

$$|a_{m+k}| \leq q^k|a_m|, k = 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

Iz (4) dobivamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{m+k}| \leq |a_m| \sum_{k=1}^{\infty} q^k$$

što zajedno s $q \in [0, 1\rangle$ i Teoremom 3 povlači da red $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_{m+k}$ konvergira, pa i red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

2. Iz $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ za svaki $n \geq m$ slijedi nam

$$0 < |a_m| \leq |a_{m+1}| \leq |a_{m+2}| \leq \cdots \leq |a_{m+k}| \leq \ldots ,$$

što pokazuje da opći član reda $\sum a_n$ ne konvergira nuli, pa prema nužnom uvjetu konvergencije taj red divergira. □

U primjeni često koristimo sljedeći oblik D'Alembertovog kriterija:

Teorem 11 (D'Alembertov kriterij u formi limesa, vidi [7])**.** *Neka je* $\sum a_n$ *red s pozitivnim članovima. Ako postoji* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$, *tada je red* $\sum a_n$ *konvergentan za* $L < 1$ *i divergentan za* $L > 1$.

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [7] na str. 110.

Primjer 17. *Red* $\sum \frac{1}{e^{2n}}$ *konvergira jer prema D'Alembertovom kriteriju u formi limesa imamo*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{e^{2n+2}}}{\frac{1}{e^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n}}{e^{2n+2}} = \frac{1}{e^2}.$$

Teorem 12 (Cauchyjev kriterij, vidi [1, Teorem 32])**.** *Neka je* (a_n) *niz realnih brojeva.*

1. *Ako postoje prirodni broj* m *i realan broj* q*,* $0 < q < 1$ *takvi da je*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \tag{5}$$

za svaki $n \geq m$*, onda red* $\sum a_n$ *apsolutno konvergira.*

2. *Ako je*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1, \tag{6}$$

za svaki $n \geq m$*, onda red* $\sum a_n$ *divergira.*

Dokaz. 1. Iz (5) dobivamo $|a_n| \leq q^n$ za $n \geq m$, pa je

$$\sum_{n=m}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q^m}{1-q}.$$

Prema tome red $\sum a_n$ konvergira apsolutno.

2. Ako vrijedi (6) za beskonačno indeksa n, onda opći član reda $\sum a_n$ ne konvergira nuli, što znači da nije ispunjen nužan uvjet konvergencije reda pa red $\sum a_n$ divergira. □

U primjeni često koristimo sljedeći oblik Cauchyjevog kriterija:

Teorem 13 (Cauchyjev kriterij u formi limesa, vidi [7])**.** *Neka je* $\sum a_n$ *red s nenegativnim članovima. Ako postoji* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$*, onda red* $\sum a_n$ *konvergira za* $L < 1$ *i divergira za* $L > 1$*.*

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [7] na str. 111.

Primjer 18. *Red* $\sum \frac{n^4}{e^n}$ *konvergira je prema Cauchyjevom kriteriju u formi limesa imamo*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^4}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^4}}{e} = \frac{1}{e}.$$

Primjedba. *Ako je* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1$*, onda D'Alambertov kriterij ne može biti primjenjen. To pokazuju redovi*

$$\sum \frac{1}{n^2(n+1)}, \quad \sum \frac{1}{n+1}$$

od kojih prvi konvergira, a drugi divergira. Naime,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}}{\frac{1}{n^2(n+1)}} = \frac{n^3+n}{n^3+4n^2+5n+2} \to 1, \ \textit{za } n \to \infty,$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \to 1, \text{ za } n \to \infty.$$

Također, ako je $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ *Cauchyjev kriterij se ne može primjeniti. To pokazuju redovi*

$$\sum \frac{1}{n^4}, \quad \sum \frac{1}{n}$$

od kojih prvi konvergira, a drugi divergira. Ovdje imamo

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^4}} \to 1, \text{ za } n \to \infty,$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1, \text{ za } n \to \infty.$$

Primjedba. *Ako je* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 1$, *onda je i* $\sqrt[n]{|a_n|} \neq 1$. *Dakle, Cauchyjev kriterij daje konvergenciju odnosno divergenciju reda kad god to daje D'Alembertov kriterij. Obrat nije istinit, zbog čega kažemo da je Cauchyjev kriterij "jači" od D'Alembertovog kriterija.*

Navedimo sada još nekoliko primjera u kojima ćemo ispitati konvergenciju danih redova.

Primjer 19. *Red* $\sum \frac{n^2}{(n+3)!}$ *apsolutno konvergira jer prema D'Alembertovom kriteriju imamo*

$$\left|\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+4)!}}{\frac{n^2}{(n+3)!}}\right| = \left|\frac{n^2+2n+1}{n^3+4n}\right| \to 0, \text{ za } n \to \infty.$$

Prema tome, prethodni red konvergira i obično.

Primjer 20. *Red* $\sum \frac{n^3}{4^n}$ *apsolutno konvergira jer prema Cauchyjevom kriteriju imamo*

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n^3}{4^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{|n^3|}}{4} \to \frac{1}{4}, \text{ za } n \to \infty.$$

Dakle, prethodni red konvergira i obično.

Primjer 21. *Red* $\sum \frac{2^n}{(n-1)^2}$ *divergira jer*

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{(n-1)^2}\right|} = \frac{2}{\sqrt[n]{(n-1)^2}} \to 2, \text{ za } n \to \infty.$$

Primjer 22. *Red* $\sum \frac{(n+2)!}{3^n}$ *divergira jer*

$$\left|\frac{\frac{(n+3)!}{3^{n+1}}}{\frac{(n+2)!}{3^n}}\right| = \left|\frac{n+3}{3}\right| \to \infty, \text{ za } n \to \infty.$$

3 Redovi potencija

U ovom poglavlju definirat ćemo redove potencija realnih brojeva te navesti i primjerima potkrijepiti osnovne pojmove vezane uz redove potencija.

Definicija 6. *Neka je $a_0, a_1, a_2, \ldots$ niz realnih ili kompleksnih funkcija definiran na nekom skupu I_0. Tada za svaki $x \in I_0$ imamo niz $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \ldots$ u $\mathbb{R}$ odnosno u $\mathbb{C}$ te red $\sum a_n(x)$. Za red $\sum a_n$ kažemo da je* ***red funkcija****, a skup I svih $x \in I_0$ za koje red $\sum a_n(x)$ konvergira zove se* ***domena konvergencije*** *reda $\sum a_n$.*

Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$) takva funkcija da je za svaki $x \in I$ pripadni broj $f(x)$ suma reda $\sum a_n(x)$. Kažemo da je funkcija f razvijena u red funkcija $\sum a_n$.

Jedni od najjednostavnijih i najvažnijih redova funkcija su redovi potencija dani u sljedećoj definiciji:

Definicija 7. *Neka je (a_n) niz realnih brojeva i $c \in \mathbb{R}$. Red oblika*

$$\sum a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \ldots, \quad x \in \mathbb{R} \tag{7}$$

nazivamo **red potencija** *oko točke c.*

Napomena 2. *Za $c = 0$ red potencija (7) će imati oblik*

$$\sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots.$$

Svaki red potencija oblika $\sum a_n x^n$ konvergira za $x = 0$.

Sljedeći teorem govori nam o konvergenciji redova potencija.

Teorem 14 (Abelov teorem, vidi [2])**.** *Ako red $\sum a_n x^n$ konvergira za neki $x = c$, onda red apsolutno konvergira za svaki x sa svojstvom $|x| < |c|$.*

Dokaz. Kako red potencija konvergira u c, ispunjen je nužni uvjet konvergencije tj. vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} |a_n x^n| = 0.$$

To znači da postoji konačno mnogo članova reda koji se nalaze izvan $\epsilon-$okoline broja nula. Iz toga slijedi da su svi članovi manji od pozitivnog realnog broja broja M, tj.

$$|a_n x^n| < M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Prema Poredbenom kriteriju slijedi

$$|x| < |c| \Rightarrow |a_n x^n| = \left| a_n x^n \frac{c^n}{c^n} \right| < |a_n c^n| \left| \frac{x}{c} \right|^n < M \left| \frac{x}{c} \right|^n.$$

Članovi reda $\sum a_n x^n$ manji su od članova konvergentnog geometrijskog reda, odakle red $\sum a_n x^n$ konvergira apsolutno. $\square$

Navedimo sad još nekoliko korisnih pojmova:

Definicija 8. *Realan broj R naziva se* ***radijus konvergencije*** *reda potencija $\sum a_n(x-c)^n$ ako taj red konvergira za $|x-c|<R$, a divergira za $|x-c|>R$.*

Definicija 9. *Skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje red potencija $\sum a_n(x-c)^n$ konvergira nazivamo* ***područje konvergencije*** *reda $\sum a_n(x-c)^n$.*

Definicija 10. *Neka je (a_n) niz realnih brojeva i $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ skup svih gomilišta toga niza. Supremum skupa A zove se* ***limes superior niza*** *(a_n) i označava sa*

$$\limsup a_n, \quad \overline{\lim} a_n, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \quad \textit{ili} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n.$$

Infimum skupa A zove se ***limes inferior niza*** *(a_n) i označava sa*

$$\liminf a_n, \quad \underline{\lim} a_n, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \quad \textit{ili} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n.$$

Primjer 23. *Promotrimo niz realnih brojeva $a_n = \frac{(-1)^n+1}{2}$. Zadani niz ima dva gomilišta, 0 i 2. Dakle, skup svih gomilišta toga niza je $A = \{0, 2\}$. Iz definicije limes superiora i limes inferiora lako se vidi da je*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 2 \ \textit{i} \ \liminf_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Primjer 24. *Promotrimo niz realnih brojeva $a_n = n$. Zadani niz nema gomilište, pa* $\limsup$ *i* $\liminf$ *divergiraju, tj.*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Sljedeći teorem daje nam izraz za radijus konvergencije reda potencija.

Teorem 15 (Hadamard, vidi [6, Teorem 10.6])**.** *Radijus konvergencije reda potencija $\sum a_n(x-c)^n$ dan je formulom*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

pri čemu uzimamo $R = 0$, ukoliko je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, a $R = +\infty$ ukoliko je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

Dokaz. Neka je $\rho = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-c)^n|} = |x-c| \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Prema Cauchyjevom kriteriju red $\sum a_n(x-c)^n$ apsolutno konvergira ako je $0 \leq \rho < 1$ ili $|x-c| < R$, odnosno divergira ako je $1 < \rho \leq \infty$. Tada prema definiciji radijusa konvergencije slijedi $R = \frac{1}{\rho}$. $\square$

Primjer 25. *Promotrimo geometrijski red*

$$\sum x^n.$$

Ovdje je $c = 0$ i $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Prema Hadamardovoj formuli slijedi

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}} = 1.$$

Dakle, red konvergira za sve $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Sljedeći teorem daje nam izraz za radijus konvergencije reda potencija koji je lakši za primjenu.

Teorem 16 (vidi [3, Teorem 4.5.3]). *Neka je* $\sum a_n(x-c)^n$ *red potencija. Tada je njegov radijus konvergencije dan formulom*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [3] na str. 259.

Primjer 26. *Promotrimo red*

$$\sum \frac{n}{n^2+1} x^n.$$

Prema Teoremu 16 slijedi

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{n+1}{(n+1)^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n}\right| = 1.$$

Dakle, $R = 1$ *i red konvergira za* $x \in \langle -1, 1\rangle$. *Provjerimo konvergira li zadani red u rubovima. Kada uvrstimo* $x = -1$ *i* $x = 1$ *u polazni red dobivamo redove oblika*

$$\sum (-1)^n \frac{n}{n^2+1} \;\; i \;\; \sum \frac{n}{n^2+1}.$$

Prvi red je alternirajući red, a drugi apsolutna vrijednost prvog. Niz $|a_n| = \frac{n}{n^2+1}$ *je padajući i konvergira nuli, pa prema Leibnizovom kriteriju alternirajući red konvergira. Dakle, zadani red konvergira za* $x \in [-1, 1]$.

Primjer 27. *Promotrimo red*

$$\sum 4^n (x-1)^n.$$

Prema Teoremu 16 slijedi

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{4^{n+1}}{4^n}\right| = \lim_{n\to\infty} |4| = 4.$$

Dakle, $R = \frac{1}{4}$ *i red konvergira za* $x \in \langle \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\rangle$. *Provjerimo konvergira li zadani red u rubovima. Uvrstimo li* $x = \frac{3}{4}$ *i* $x = \frac{5}{4}$ *dobivamo redove oblika*

$$\sum (-1)^n \;\; i \;\; \sum 1.$$

Očito prethodni redovi divergiraju, pa polazni red ne konvergira u rubovima.

Primjer 28. *Promotrimo red*

$$\sum n! x^n.$$

Prema Teoremu 16 slijedi

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\in\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} |(n+1)| = \infty.$$

Dakle, $R = 0$ *i red konvergira za* $x = 0$.

Promatrajmo sada redove oblika

$$\sum a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots, \tag{8}$$

gdje su $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ zadani realni brojevi, c također zadan realan broj, a x realna varijabla. Bez smanjenja općenitosti, uzmimo da je $c = 0$ tako da red (8) ima oblik

$$\sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots. \tag{9}$$

Za red potencija

$$\sum n a_n x^{n-1} \tag{10}$$

kažemo da je dobiven deriviranjem član po član reda (8), a za red

$$\sum \frac{a_n}{n+1} x^n \tag{11}$$

da je dobiven integriranjem član po član reda (8).

Sljedeći teorem govori nam o radijusu konvergencije redova (9), (10) i (11).

Teorem 17 (vidi [1, Teorem 34]). *Vrijedi sljedeće:*

1. *Redovi* (9)*,* (10) *i* (11) *imaju isti radijus konvergencije.*
2. *Ako je R radijus konvergencije reda* (9) *i ako $R>0$, onda svaki od redova* (9)*,* (10) *i* (11) *apsolutno konvergira za svaki $x \in \mathbb{R}$ za koje je $|x| < R$ i divergira ako je $|x| > R$.*

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [1] na str. 114.

Sada ćemo iskazati tri teorema koja pokazuju da se redovi potencija uistinu mogu derivirati i integrirati član po član.

Teorem 18 (vidi [5, Teorem 4.5.4]). *Neka red potencija $\sum a_n(x-c)^n$ ima radijus konvergencije $R > 0$. Funkcija $f : \langle c-R, c+R\rangle \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

derivabilna je na $\langle c-R, c+R\rangle$ i vrijedi

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}, \quad \forall x \in \langle c-R, c+R\rangle.$$

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [5] na str. 260.

Teorem 19 (vidi [5, Teorem 4.5.5]). *Neka red potencija*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

ima radijus konvergencije $R > 0$. Funkcija f je klase $C^\infty(\langle c-R, c+R\rangle)$ i za svaki $m \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} a_n (x-c)^{n-m}, \quad \forall x \in \langle c-R, c+R\rangle.$$

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [5] na str. 261.

Teorem 20 (vidi [5, Teorem 4.5.8]). *Neka je*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

red potencija radijusa konvergencije $R > 0$. Tada vrijedi

$$\int_c^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}, \quad \forall x \in \langle c-R, c+R\rangle.$$

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [5] na str. 264.

Primjer 29. *Razvijmo funkciju f zadanu formulom $f(x) = \frac{1}{3-x}$ u red potencija oko točke $c = 0$. Znamo da je*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Slijedi

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}. \tag{12}$$

Dobiveni red potencija konvergira za $x \in \langle -3, 3\rangle$. Deriviranjem (12) dobivamo

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{3^{n+1}} \tag{13}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\frac{x^{n-2}}{3^{n+1}} \tag{14}$$

$$\vdots \tag{15}$$

$$f^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\frac{x^{n-k}}{3^{n+1}}, \tag{16}$$

a integriranjem

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}}. \tag{17}$$

Svi redovi potencija (12), (13), (14), (16) i (17) imaju isti radijus konvergencije $R = 3$.

U sljedeća dva teorema opisane su neke aritmetičke operacije redova potencija.

Teorem 21 (vidi [5, Teorem 4.5.10]). *Neka su*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

i

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$$

redovi potencija s radijusom konvergencije R_1 odnosno R_2. Tada za realne konstante α i β vrijedi

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(x-c)^n, \quad |x-c| < R,$$

gdje je $R \geq min\{R_1, R_2\}$.

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [5] na str. 267.

Teorem 22 (vidi [5, Teorem 4.5.11])**.** *Neka su*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

i

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n$$

redovi potencija s radijusom konvergencije R_1 odnosno R_2. Tada je

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-c)^n, \quad |x-c| < R,$$

gdje je

$$c_n = \sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r} = \sum_{r=0}^{n} a_{n-r} b_r$$

i $R \geq min\{R_1, R_2\}$.

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [5] na str. 268.

Primjer 30. *Razvijmo funkciju f danu formulom $f(x) = \frac{4}{x^2-x-2}$ u red potencija oko točke $c = 0$.*
Najprije rastavimo funkciju f na parcijalne razlomke. Imamo

$$f(x) = \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+1}.$$

Označimo sa $g(x) = \frac{1}{x-2}$ i $h(x) = \frac{1}{x+1}$. Kako je

$$g(x) = \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} \tag{18}$$

i

$$h(x) = \frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \tag{19}$$

dobivamo da je

$$f(x) = 3g(x) + h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{2^{n+1}} + (1)^n\right) x^n. \tag{20}$$

Red potencija (18) ima radijus konvergencije $R_1 = 2$, a (19) $R_2 = 1$. Red potencija (20) konvergira za $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

U sljedećem teoremu iskazana je jedinstvenost prikaza funkcije u obliku redova potencija.

Teorem 23 (vidi [5, Korolar 4.5.7]). *Funkcija f ne može imati dva različita prikaza redovima potencija u okolini točke x=c.*

Dokaz. Neka su

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

i

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n$$

dva različita prikaza redova potencija. Oduzimanjem ta dva reda dobivamo red potencija

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(x-c)^n$$

što znači da je $a_n = b_n, n = 0, 1, 2, \ldots$. □

3.1 Taylorov red

U prethodnoj točki pokazali smo da se red potencija može derivirati član po član i da derivirani red ima isti radijus konvergencije kao i polazni. Ako je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

konvergentan red za $x \in \mathbb{R}$, imamo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} \\
f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-c)^{n-2} \\
&\vdots \\
f^{(k)} &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) a_n (x-c)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Stavimo li u prethodne redove $x = c$ dobivamo

$$f(c) = a_0, \quad f'(c) = a_1, \quad f''(x) = 2a_2, \ldots, \quad f^{(k)}(c) = k! a_k, \ldots,$$

od kuda imamo

$$a_0 = f(c), \quad a_1 = f'(c), \quad a_2 = \frac{f''(c)}{2}, \ldots, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}. \tag{21}$$

Pomoću koeficijenata (21) red

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

prelazi u

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \ldots,$$

gdje je $x \in \langle c - R, c + R\rangle$.

Definicija 11. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $c \in I$ i $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^∞ na I. Red potencija*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \tag{22}$$

zovemo **Taylorov red** *funckije f oko točke c.*

Napomena 3. *Ako za c uzmemo $c = 0$, onda se red* (22) *naziva Maclaurinov red funkcije f.*

Sada navedimo i potkrijepimo dokazom Taylorov teorem koji priprada skupu osnovnih teorema diferencijalnog i integralong računa.

Teorem 24 (Taylorov teorem, vidi [4, Teorem 8.25])**.** *Neka su f i $f^{(r)}$, $r = 1, 2, \ldots n-1$, neprekidne funkcije na $[a, b]$ i neka postoji $f^{(n)}$ na $\langle a, b\rangle$. Tada je*

$$f(b) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^{(r)}(a)}{r!}(b-a)^r + R_n,$$

gdje je

$$R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad a < \xi < b.$$

Dokaz. Definiramo funkciju ϕ na $[a, b]$ kao

$$\phi(x) = f(b) - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^r(x)}{r!}(b-x)^r - R_n \frac{(b-x)^n}{(b-a)^n}. \tag{23}$$

Tako definirana funkcija neprekidna je na $[a, b]$ i postoji $\phi'(x)$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.

Uvrštavanjem $x = a$ odnosno $x = b$ u (23) dobivamo $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Prema Rolleovom teoremu (vidi [1, Teorem 36]) postoji $\xi \in (a, b)$ takav da je $\phi'(\xi) = 0$. Slijedi nam

$$\phi'(x) = -f'(x) + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{f^{(r)}(x)}{(r-1)!}(b-x)^{r-1} - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{f^{(r+1)}(x)}{r!}(b-x)^r + (n+1)R_n \frac{(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}.$$

Stavimo li $r - 1$ umjesto r, dobivamo

$$\begin{aligned}\phi'(x) =& - f'(x) + f'(x) + \sum_{r=2}^{n-1} \frac{f^{(r)}(x)}{(r-1)!}(b-x)^{r-1} - \sum_{r=2}^{n-1} \frac{f^{(r+1)}(x)}{r!}(b-x)^r - \frac{f^{(n)(x)}}{n!}(b-x)^n \\ &+ (n+1)R_n \frac{(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n} = -\frac{(n+1)(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}\left[\frac{f^{(n)(x)(b-a)^n}}{(n+1)!} - R_n\right].\end{aligned}$$

Izraz za R_n dobijemo koristeći činjenicu da je $\phi'(\xi) = 0$ i uvrštavanjem $x = \xi$ u (15). $\square$

Sada ćemo iskazati teorem koji daje uvjete pri kojima će red (22) konvergirati funkciji f u okolini točke $x = c$.

Teorem 25 (vidi [1, Teorem 33])**.** *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $c \in I$ i $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^∞ na I. Ako postoji prirodan broj n_0 i realni brojevi $\delta > 0, M > 0$ i $C > 0$ takvi da je*

$$|f^{(n)}(x)| \leq CM^n n!, \forall x \in I' = (c-\delta, c+\delta) \cap I, \quad \forall n \geq n_0,$$

onda red $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ konvergira k $f(x), \forall x \in I'$ za koji je $|x-c| < \frac{1}{M}$.

Dokaz. Dokaz se može vidjeti u [1] na str. 105.

Navedimo sad nekoliko primjera uz prethodne teoreme.

Primjer 31. *Razvijmo sljedeće funkcije u Taylorov red.*

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = e^x$. *Imamo:*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. $f_2 : R \to [-1,1], \quad f_2(x) = \sin x$. *Imamo:*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. $f_3 : R \to [-1,1], \quad f_3(x) = \cos x$. *Imamo:*

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. $f_4 : \langle -1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = \ln x$. *Imamo:*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad x \in \langle -1, 1].$$

5. $f_5 : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}, \quad f_5(x) = \frac{1}{1-x}$. *Imamo:*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in \langle -1, 1\rangle.$$

6. $f_6 : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}, \quad f_6(x) = (1+x)^k$. *Imamo:*

$$(1+x)^k = 1 + \binom{k}{1}x + \binom{k}{2}x^2 + \cdots + \binom{k}{n}x^n + \ldots, \quad x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Primjer 32. *Razvijmo funkciju f danu formulom* $f(x) = \frac{5}{(1-x)(1+4x)}$ *u red potencija oko točke* $c = 0$.

Najprije rastavimo funkciju f na parcijalne razlomke. Imamo

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{4}{1+4x}.$$

Kako je

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \tag{24}$$

$$\frac{1}{1+4x} = 1 - 4x + (4x)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^n, \tag{25}$$

dobijemo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^n 4^{n+1}\right) x^n. \tag{26}$$

Red (24) konvergira za $|x| < 1$, *a red (25) za* $|x| < \frac{1}{4}$. *Prema tome, red (26) konvergira za* $x \in \langle -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \rangle$.

Primjer 33. *Razvijmo funkciju f zadanu formulom* $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ *u red potencija oko točke* $c = 0$.

Znamo da je

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

i

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

iz čega slijedi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(2n+1)!(2n!)}.$$

Dobiveni red konvergira za sve $x \in \mathbb{R}$.

Primjer 34. *Razvijmo funkciju f zadanu formulom* $f(x) = e^{2x-2} + \frac{1}{2x-1}$ *u red potencija oko točke* $c = 1$.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x-2} + \frac{1}{2x-1} \\ &= e^{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n (x-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} + (-1)^n\right] 2^n (x-1)^n. \end{aligned}$$

Dobiveni red konvergira za $x \in \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle$.

Literatura

[1] S. Kurepa, *Matematička analiza 2, funkcije jedne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.

[2] M. D. Hatton, *Mathematical Analysis*, Hodder and Stoughton, London, 1977.

[3] R. G. Bartle, D. R. Sherbett, *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., Urbana-Champaign, 2011.

[4] M. H. Protter, *Basic Elements of Real Analysis*, Springer, Berkley, 1998.

[5] W. F. Trench, *Introduction to Real Analysis*, Trinity University, San Antonio, 2013.

[6] J. K. Hunter, *An Introduction to Real Analysis*, University of California at Davis, Davis, 2014.

[7] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika*, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.