

# Operativni rizici u bankarskom poslovanju

---

Martinić, Ketii

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:799056>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-06-30**



Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

**Keti Martinić**

# **Operativni rizici u bankarskom poslovanju**

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

**Keti Martinić**

# **Operativni rizici u bankarskom poslovanju**

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Danijel Grahovac

Osijek, 2020.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Operativni rizik</b>	<b>2</b>
2.1	Baselska komisija i Baselski sporazum . . . . .	2
2.2	Operativni rizik . . . . .	3
2.2.1	Jednostavni pristup (BIA) . . . . .	6
2.2.2	Standardizirani pristup (SA) . . . . .	6
2.2.3	Pristup naprednog mjerenja (AMA) . . . . .	9
2.2.4	Primjeri iz Hrvatske . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Pristup distribucije gubitaka - LDA</b>	<b>13</b>
3.1	Učestalost gubitaka . . . . .	14
3.2	Ozbiljnost gubitaka . . . . .	16
3.3	Metode procjene parametara . . . . .	19
3.3.1	Metoda momenata . . . . .	19
3.3.2	Metoda maksimalne vjerodostojnosti . . . . .	20
3.4	Testovi prilagodbe . . . . .	21
3.4.1	Grafičke metode . . . . .	21
3.4.2	Statistički testovi . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Teorija ekstremnih vrijednosti - TEV</b>	<b>25</b>
4.1	Granično ponašanje maksimuma . . . . .	25
4.2	Metoda vrijednosti iznad praga . . . . .	29
4.3	Procjena parametra oblika $\xi$ pod domenom maksimalne privlačnosti . . . . .	31
4.3.1	Hillov procjenitelj za $\alpha = \xi^{-1} > 0$ . . . . .	31
4.3.2	Pickandsov procjenitelj za $\xi \in \mathbb{R}$ . . . . .	32
<b>5</b>	<b>VaR</b>	<b>33</b>
5.1	Monte Carlo metoda . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Primjer</b>	<b>34</b>
6.1	Deskriptivna analiza . . . . .	34
6.2	Učestalost gubitaka . . . . .	36
6.3	Ozbiljnost gubitaka . . . . .	38
6.4	VaR . . . . .	45



# 1 Uvod

Ovaj rad se sastoji od nekoliko poglavlja kroz koja ćemo se upoznati s pojmom operativni rizik te raznim načinima na koji se mogu izračunati kapitalni zahtjevi za operativni rizik, pri čemu ćemo najviše pažnje posvetiti pristupu distribucije gubitaka. Rad je organiziran na sljedeći način.

U poglavlju 2 ćemo definirati operativni rizik i upoznati se s Baselskim sporazumima. Važan pojam koji se spominje u Basel I je adekvatnost kapitala (eng. capital adequacy ratio) koji se definira kao odnos između kapitala i ponderirane aktive. U širem smislu, adekvatnost kapitala prikazuje sposobnost banke da apsorbira gubitke (što je viši kapital banke veći je kapacitet za apsorpciju gubitaka nastali lošim plasmanima). Kapacitet bankarskog sektora za apsorpciju gubitaka se mjeri pomoću indikatora adekvatnosti kapitala među kojima je najčešći stopa adekvatnosti kapitala. Ukoliko središnja banka želi saznati ima li neka komercijalna banka adekvatan kapital, ona ispituje slobodni kapital te institucije odnosno plaćeni kapital (obveznice i rezerve) umanjen za iznos koji je vezala u fiksnim sredstvima (imovini). Minimalna stopa adekvatnosti kapitala u Hrvatskoj definirana je od strane HNB-a i iznosi 10%. Ako stopa padne ispod minimuma, tada banke moraju prodati dio svoje imovine ili izdati dionice, pri čemu treba paziti da ukoliko se prodaje imovina, njena vrijednost ne smije biti manja od knjigovodstvene vrijednosti (vidi [27] i [28]).

Nakon toga ćemo navesti kako se operativni rizik može klasificirati te definirati tri načina na koja se mogu izračunati kapitalni zahtjevi za operativni rizik pri čemu ćemo detaljnije obraditi pristup distribucije gubitaka u poglavlju 3.

Dakle, u poglavlju 3 ćemo se detaljnije upoznati s pristupom distribucije gubitaka. Prvo ćemo definirati formulu za kapitalni zahtjev za operativni rizik ovim pristupom. S obzirom da se ukupna distribucija podataka dijeli na učestalost gubitaka i ozbiljnost gubitaka, navesti ćemo nekoliko načina kako ih modelirati. Kako su parametarski modeli poznati do na nepoznat parametar važno je znati procijeniti vrijednost nepoznatog parametra. Najpopularnije metode za procjenu parametara distribucije su metoda momenata i metoda maksimalne vjerodostojnosti koje ćemo obraditi u poglavlju 3.3. Prilikom modeliranja se susrećemo s rizikom pogrešno odabranog modela. Kako bi se to izbjeglo, nabrojiti ćemo i opisati nekoliko statističkih testova i grafičkih metoda koje se koriste prilikom testiranja sposobnosti modela kako bi vidjeli koji je najprikladniji.

U poglavlju 4 ćemo se upoznati s teorijom ekstremnih vrijednosti koja je od velike važnosti zbog toga što se fokusira na analiziranje gubitaka rijetke učestalosti i velike ozbiljnosti. Opisati ćemo metodu vrijednosti iznad praga. Nakon toga ćemo definirati procjene parametra oblika.

U poglavlju 5 ćemo opisati najpopularniju metodu za izračun VaR-a, tzv. Monte Carlo metodu.

U zadnjem dijelu rada ćemo primijeniti spomenutu teoriju na podatke o gubicima koji se nalaze u R paketu opVaR.



## 2 Operativni rizik

Operativni rizik, čiju definiciju navodimo u poglavlju 2.2, je najmlađi od tri glavne grane rizika. Preostale dvije grane su tržišni i kreditni rizik. **Kreditni rizik** je posljedica ugovorene i/ili moguće financijske transakcije između davatelja i uzimatelja sredstava odnosno varijacija mogućih povrata koji bi se mogli zaraditi na financijskoj transakciji zbog zakašnjelog ili nepotpunog plaćanja glavnice i/ili kamate. Jednostavno rečeno, kreditni rizik se odnosi na vjerojatnost neplateži po ugovoru o novčanom kreditu. **Tržišni rizik** predstavlja potencijalni gubitak uzrokovan nepovoljnim promjenama na tržištu: kamatnih stopa, deviznih tečajeva, cijena, indeksa i/ili ostalih faktora koji utječu na vrijednost financijskih instrumenata. Glavni izvori tržišnog rizika su najčešće devizne pozicije i rizik kamatne stope (vidi [23]).

Termin *Operativni rizik* se počeo upotrebljavati nakon financijskog kraha britanske banke Baring. Naime, 1995. godine je njihov zaposlenik Nick Leeson, koji je imao ured u Singapuru, izgubio 1.3 milijarde dolara na neovlaštenom trgovanju. U to vrijeme ovi gubici se nisu mogli klasificirati niti kao kreditni niti tržišni te se pojavio izraz *operativni rizik* kako bi se mogle definirati situacije kao ove. Sljedeći primjer je primjer gubitaka koji su nastali zbog vanjskih uzroka kao što je teroristički napad. Naime, 11.9.2001. godine dogodio se teroristički napad na svjetski trgovački centar u New York i Pentagon. Dva američka aviona su bila oteta s ciljem da se sruše na Pentagon i Pennsylvaniju. Osim velikih civilnih gubitaka, ovaj događaj je rezultirao i ogromnim gubitkom imovine. Procijenjeno je da je samo The bank of New York izgubila imovinu u vrijednosti 140 milijuna dolara. Financijski gubici uzrokovani 9/11 su prijavljeni kao najskuplji osigurani gubitak imovine u povijesti, sa trenutnom procjenom između 40 i 70 milijardi dolara. Osim što je ovaj događaj rezultirao velikim gubitkom imovine, narušio je poslovanje tvrtki za financijsko pružanje usluga i ostavio ogroman gospodarski i politički utjecaj širom svijeta. Ovo je upečatljiv primjer štete na imovini, poremećaj poslovanja i gubitaka koji su se dogodili zbog vanjskih uzroka (vidi [10, str. 10]).

### 2.1 Baselska komisija i Baselski sporazum

S ciljem da se ojača financijska stabilnost, banke G10 zemalja 1975. godine su osnovale Baselsku komisiju za bankarsku superviziju (eng. Basel Committee on Banking Supervision) koja će ojačati regulacije, nadzor i prakse banaka diljem svijeta. Na čelu BCBS-a se nalazi predsjednik koji je od ožujka 2019. godine Pablo Hernandez de Cos, guverner Španjolske narodne banke. Baselska komisija teži da veza između kapitala kojeg banke posjeduju i rizika kojeg poduzimaju bude što stabilnija. Nakon što je početkom 1980-ih godina svjetska ekonomija ušla u recesiju, povećanje nominalne kamatne stope je prisililo banke da naplaćuju veću kamatnu stopu za kredite sa kraćim rokom otplate. Stoga je BCBS odlučio sastaviti nepristran sustav za mjerenje rizika te je 1988. godine objavio Kapitalni sporazum pod nazivom Basel I. Basel I se bavio samo kreditnim rizicima, a primarni cilj mu je bio uvesti standardnu minimalnu adekvatnost kapitala od 8% kojim je ujednačena početna pozicija

banaka na financijskom tržištu, ali i onemogućeno da banke povećavaju obujam svojih poslova i izloženost riziku, a da to ne prati odgovarajući rast kapitalne adekvatnosti. Međutim, polako se pojavljuju i drugi oblici rizika, pa je 1996. godine objavljen prošireni Basel I u kojem je uključena regulacija tržišnog rizika. Unatoč proširivanju, Basel I i dalje zanemaruje operativni rizik, stoga je 1998. godine napravljen, a 6 godina kasnije i objavljen, nacrt za Basel II u kojem se prvi puta spominju kapitalni zahtjevi koji se definiraju kao minimalna vlastita sredstva kojima kreditne institucije i investicijski fondovi trebaju raspolagati da bi mogli pokriti svoju izloženost rizicima. Ukoliko su ispunjeni kriteriji kapitalnih zahtjeva, tada se smatra da postoji adekvatnost kapitala. Budući je Basel II fleksibilniji i osjetljiviji na rizik od svog prethodnika, omogućava složenije tehnike mjerenja. Iako je prihvaćanje Baselskih standarda slobodan izbor, Europska unija je donijela direktivu kojom je obvezala sve banke svih zemalja članica na primjenu Basela II.

Financijska kriza, koja je trajala u razdoblju od 2007. godine do 2010. godine, razotkrila je neadekvatno upravljanja kreditnim rizikom koje je dovelo do prevelikog rasta kredita i do krize likvidnosti. Zbog toga se BCBS odlučio na stvaranja novog regulativnog okvira pod nazivom Basela III koji se za razliku od svojih prethodnika fokusira na rizike 'run on the bank', odnosno na vjerojatnost da će veliki broj klijenata povući svoje depozite u isto vrijeme (vidi [1] i [23]).

## 2.2 Operativni rizik

Operativni rizik je definiran Baselom II kao rizik gubitka koji je rezultat neadekvatnosti ili pogrešnih internih procesa, ljudi, sustava ili vanjskih događaja. Vjerojatnost da će se operativni rizik dogoditi se povećava povećanjem broja zaposlenika te sa većim brojem napravljenih transakcija. Odnosno vjerojatnije je da će velike banke imati veće operativne gubitke. Pokazatelji izloženosti operativnom riziku su bruto dohodak, količina poslovanja ili novih ponuda, vrijednost imovine u upravljanju, vrijednost i broj transakcija, broj i godišnje iskustvo zaposlenika, struktura kapitala (omjer duga i kapitala), operativni gubici iz prošlosti te povijesna potraživanja osiguranja za operativni rizik.

Operativne rizike je važno kvantificirati s ciljem da se prikupi što više podataka o njima. Kvantifikacija operativnog rizika podržava osnovne poslovne potrebe kao što je smanjenje regulatorne naknade za kapital u okviru Basela II, kvantitativno određivanje koristi od smanjenja rizika na trošak kapitala, analiza efikasnosti osiguranja te optimizacija operativnog rizika kako bi se umanjila ukupna izloženost. Isto tako je važna klasifikacija operativnog rizika koja se prema [10] može napraviti s obzirom na:

- Priroda gubitka - unutarnji ili vanjski uzrok
- Utjecaj gubitka - izravni ili neizravni gubici
- Stupanj očekivanosti - očekivani ili neočekivani gubici
- Vrsta rizika, vrsta događaja i vrsta gubitka



- Ozbiljnost i učestalost gubitka

### **Unutarnji i vanjski operativni gubici**

Operativni gubici mogu nastati zbog unutarnjih ili vanjskih uzroka. Unutarnji uključuju gubitke koji su većinom nastali zbog ljudi ili procesa te tehnoloških kvarova kao što su ljudska pogreška, unutarnja prevara, neovlašteno trgovanje, kvarovi na računalu ili telekomunikacijski kvarovi. Mnoge od njih je moguće spriječiti tako da se pooštire kontrole, poboljša telekomunikacijska mreža kako bi se spriječili ili barem smanjili tehnološki propusti, bolje upravljanje zaposlenicima bi smanjilo njihove pogreške te spriječilo unutarnje prevare. Vanjski izvori uključuju incidente kao što su vanjska prevara, hakiranje, teroristički napad te prirodne katastrofe poput oštećenja imovine zbog uragana, poplava, požara i sl. Zbog toga ih je teže spriječiti, ali je moguće poboljšati osiguranje ili osmisliti druge strategije zaštite kako bi se smanjili ili eventualno uklonili.

### **Izravni i neizravni operativni gubici**

Izravni gubici nastaju direktno iz povezanih događaja npr. ukoliko se trguje valutama, izravan gubitak nastaje zbog nepovoljnog tečaja. Neizravni gubici su uglavnom oportunitentni troškovi i gubici povezani s troškovima koji su nastali zbog rješavanja problema vezanog za operativni rizik poput latentnih gubitaka, potencijalnih gubitaka te izbjegnuti gubici (procijenjeni gubici iz događaja koji su se skoro dogodili ali su uspješno spriječeni). S obzirom da bi definicija rizika trebala biti okrenuta prema budućnosti, baza podataka treba sadržavati trenutne ali i potencijalne događaje koji bi mogli rezultirati materijalnim gubitkom. S toga su izbjegnuti gubici također uneseni u bazu podataka.

### **Očekivani i neočekivani gubici**

Očekivani gubici su manji, rutinski gubici u koje spadaju gubici nastali zbog manjih grešaka zaposlenika ili manje prijevare s kreditnim karticama, te se oni događaju svakodnevno. Neočekivani gubici su veliki i rijetki te u njih spadaju teroristički napadi, prirodne katastrofe te unutarnje prevare velikih razmjera.

### **Vrsta operativnog rizika, vrsta događaja i vrste gubitka**

Banke svoje podatke o operativnim gubicima trebaju kategorizirati s obzirom na vrstu događaja i vrstu gubitka te je važno da se ispravno identificira vrsta rizika (opasnosti). Razlika između ove tri vrste je to što je događaj pojedinačni incident koji vodi izravno k jednom ili više gubitaka, gubitak predstavlja iznos financijske štete koja proizlazi iz događaja, a opasnost tvori jedan ili više čimbenika koji povećavaju vjerojatnost pojave događaja. Dakle, događaj proizlazi iz opasnosti, a gubitak iz događaja. Precizna kategorizacija operativnog rizika prema vrsti opasnosti, događaja i gubitka je također važna za njegovo razumijevanje. Prema Basel II sporazumu, operativni rizik se kategorizira u sedam vrsta događaja tj. kategorija rizika (vidi [19]):

- Interna prijevare

- Eksterna prijevarena
- Odnosi s radnicima i sigurnost na radnom mjestu
- Klijenti, proizvodi i poslovni postupci
- Šteta na materijalnoj imovini
- Prekidi i narušavanja poslovanja i rada sustava
- Izvršenje, isporuka i upravljanje procesima

i šest vrsta operativnih gubitaka (vidi [3, Annex 4]):

- Otpisi - Izravno smanjenje vrijednosti imovine zbog krađe, prijevarena, neovlaštenih aktivnosti ili tržišnih i kreditnih gubitaka koji su nastali zbog operativnih događaja
- Gubitak regresa - Uplate ili isplate koje su izvršene krivim strankama i nisu vraćene
- Povrat - Plaćanje klijentima glavnice i/ ili kamate putem povrata novca ili troškova bilo kojeg drugog oblika naknade isplaćene klijentima
- Pravna odgovornost - Presude, nagodbe i drugi pravni troškovi
- Regulatori i usklađenost - Porezne kazne, ostali izravni troškovi bilo koje druge kazne (npr. oduzimanje licence)
- Gubitak ili oštećenje imovine - Direktno smanjenje vrijednosti imovine zbog nekakve nezgode kao što je zanemarivanje, požar, potres i sl.

### **Učestalost i ozbiljnost operativnih gubitaka**

Operativni gubici se mogu klasificirati u četiri glavne skupine: rijetka učestalost/mala ozbiljnost, velika učestalost/mala ozbiljnost, velika učestalost/velika ozbiljnost, rijetka učestalost/velika ozbiljnost. Nas će najviše zanimati operativni gubici koji pripadaju skupini rijetka učestalost/velika ozbiljnost tj. operativni gubici koji se rijetko dogode ali imaju veliki utjecaj.

Za razliku od drugih rizika, operativni rizici i gubici nastali zbog njih imaju distribuciju s teškim repovima tj. veliki broj malih gubitaka i jako mali broj ekstremno velikih gubitaka (vidi definiciju 4.2). Najveći novitet Basela II je obveza izračunavanja kapitalnih zahtjeva za operativni rizik. Banke za izračunavanje kapitalnog zahtjeva potrebnog za podmiriti operativni rizik na raspolaganju imaju tri različita pristupa: jednostavni pristup (eng. Basic indicator approach - BIA), standardizirani pristup (eng. Standardized approach - SA), pristup naprednog mjerenja (eng. Advanced measurement approach - AMA) koje ćemo detaljnije obraditi dalje u radu.



### 2.2.1 Jednostavni pristup (BIA)

Jednostavni pristup je najjednostavnija metoda za izračunavanje kapitalnih zahtjeva. Međutim, unatoč svojoj jednostavnosti često precijenjuje stvarnu vrijednost iznosa kapitala potrebnog za kompenzirati operativni rizik. Ukupni kapitalni zahtjev se može izračunati pomoću formule

$$K_{BIA} = \alpha \times \frac{\sum_{j=1}^3 \max\{GI_j, 0\}}{n}, \quad n = \sum_{j=1}^3 I_{\{GI_j > 0\}}$$

gdje je  $GI$  godišnji bruto dohodak (neto prihod od kamata plus neto nekamatni prihod) tijekom prethodne 3 godine,  $I_{\{GI_j > 0\}}$  je indikator funkcija koja iznosi 1 ukoliko je uvjet unutar  $\{.\}$  istinit, u suprotnom iznosi 0,  $n$  je broj prethodnih godina za koje je prihod pozitivan te se očekuje da on iznosi 3, a  $\alpha$  je fiksni postotak pozitivnog  $GI$  kojeg je komisija za sada fiksirala na 15% (vidi [10, str. 41], [23, str. 84], [5, str. 144]).

### 2.2.2 Standardizirani pristup (SA)

Standardiziranim pristupom se kapitalni zahtjev računa tako da se prvo aktivnosti banke podijele na osam poslovnih linija koje se nalaze u Tablici 3, a propisane su od strane Baselske komisije (vidi [3, Annex 2]). Nakon podjele se izračuna bruto dohodak posebno za svaku od poslovnih linija. S obzirom da je bruto dohodak predstavnik razmjera poslovanja, on je dobar pokazatelj koliko je svaka poslovna linija izložena operativnom riziku. Zatim se bruto dohodak svake poslovne linije množi sa stopom inicijalnog kapitalnog zahtjeva ( $\beta$ ) koji je od strane komisije fiksiran za svaku poslovnu liniju kao što je navedeno u Tablici 3. Ukupni kapitalni zahtjev  $K_{TSA}$  se računa na sljedeći način:

$$K_{TSA} = \frac{\sum_{j=1}^3 \max \left\{ \sum_{k=1}^8 GI_{jk} \times \beta_k, 0 \right\}}{3}.$$

Kako bi mogle primjenjivati ovaj pristup za izračun kapitalnih zahtjeva, banke moraju zadovoljiti minimalne kvalitativne zahtjeve koje je propisao Baselski odbor. Pod kvalitativne zahtjeve spadaju formiranje organizacijske jedinice koja će imati jasnu odgovornost za upravljanje operativnim rizikom te osigurati redovito praćenje podataka o operativnom riziku, uključujući značajne gubitke po pojedinoj poslovnoj liniji. Nadalje, viši izvršni menadžment banke, uprava i nadzorni odbor trebaju dobivati redovita izvješća o izloženosti operativnom riziku, a sustav upravljanja operativnim rizikom treba biti dobro dokumentiran (interne politike, kontrole i procedure vezane uz sustav upravljanja operativnim rizikom) i redovito podvrgnut neovisnim provjerama. Nakon lipnja 2004. Basel II smjernice nude alternativnu verziju standardnog pristupa (ASA). Kod komercijalnih banaka i banaka za građanstvo kapitalni zahtjev poslovnih linija se računa tako da se za indikator izloženosti operativnom riziku u obzir uzimaju ukupni zajmovi i predujmovi, a ne bruto dohodak. Oba pristupa su lako primjenjiva ali i precizniji od BIA jer uzimaju u obzir razlike u stupnjevima izloženosti operativnom riziku svake od poslovnih linija. Međutim, ovaj pristup može precijeniti stvarni

iznos kapitala potrebnog za kompenzirati operativni rizik. Također, nije dovoljno osjetljiv na rizik te nije primjenjiv u velikim i internacionalnim bankama (vidi [10], [12, str. 9], [5, str. 145]).

Tablica 1: Preuzeta sa službene stranice Hrvatske narodne banke [19]

Poslovne linije	Poslovne aktivnosti	Stope inicijalnoga kapitalnog zahtjeva za poslovne linije
1. Korporativno financiranje	Usluge prodaje financijskih instrumenata uz obvezu otkupa i s tim povezane usluge Investicijsko poslovanje Poslovi savjetovanja pravnih osoba glede strukture kapitala, poslovne strategije te poslovi investicijskog istraživanja i financijske analize	18%
2. Trgovina i prodaja	Trgovanje na svoj račun Zaprimanje i prijenos naloga u vezi s jednim ili više financijskih instrumenata koji nisu obuhvaćeni poslovnom linijom Brokerski poslovi sa stanovništvom Usluge prodaje financijskih instrumenata bez obveze otkupa koje nisu obuhvaćene poslovnom linijom	18%
3. Brokerski poslovi sa stanovništvom	Zaprimanje i prijenos naloga u vezi s jednim ili više financijskih instrumenata Izvršavanja naloga za račun klijenta Usluge prodaje financijskih instrumenata bez obveze otkupa	12%

Poslovne linije	Poslovne aktivnosti	Stope inicijalnoga kapitalnog zahtjeva za poslovne linije
4. Poslovno bankarstvo	<p>Primanje depozita ili drugih povratnih sredstava</p> <p>Odobranje kredita i zajmova</p> <p>Financijski leasing</p> <p>Izdavanje garancija i drugih jamstava</p>	15%
5. Bankarstvo sa stanovništvom	<p>Primanje depozita ili drugih povratnih sredstava</p> <p>Odobranje kredita i zajmova</p> <p>Financijski leasing</p> <p>Izdavanje garancija i drugih jamstava</p>	12%
6. Plaćanja i namire	<p>Usluge platnog prometa u zemlji i s inozemstvom u skladu s posebnim zakonom</p> <p>Izdavanja drugih instrumenata plaćanja i upravljenje njima ako se pružanje tih usluga ne smatra pružanjem usluga platnog prometa u zemlji i s inozemstvom</p>	18%
7. Agencijske usluge	<p>Pohrana i administriranje financijskih instrumenata za račun klijenata, uključujući i poslove skrbništva i s tim povezane usluge</p>	15%
8. Upravljanje imovinom	<p>Upravljanje portfeljima</p> <p>Upravljanje subjektima za zajednička ulaganja</p> <p>Ostali oblici upravljanja imovinom</p>	12%



U poglavlju 2.1. smo definirali kapitalni zahtjev kao minimalna vlastita sredstva kojima kreditne institucije i investicijski fondovi trebaju raspolagati da bi mogli pokriti svoju izloženost rizicima. Prema tome, zaključujemo da što su veći kapitalni zahtjevi da je veća izloženost riziku, a što je veći  $\beta$  to su veći kapitalni zahtjevi. Shodno tome, iz Tablice 3 uočavamo da Baselska komisija smatra kako su najrizičnije poslovne linije 1., 2. i 6., dok su najmanje rizične poslovne linije s  $\beta$  faktorom 12%.

### 2.2.3 Pristup naprednog mjerenja (AMA)

Ovaj pristup je najnapredniji i najsloženiji te za njegovu uporabu banka mora zatražiti i dobiti suglasnost supervizora. Basel II bankama dopušta da prikupljaju povijest svojih gubitaka kako bi ju mogli analizirati te pomoću raznih faktora rizika izračunati vjerojatnost gubitka. Isto tako im je dopušteno korištenje vlastitih modela za procjenu kapitalnih zahtjeva. Pomoću pouzdanosti tih modela se zatim napravi  $8 \times 7$  matrica, koja sadrži tzv. ćelije rizika, čiji su retci poslovne linija, a stupci kategorije rizika. Kako bi potaknula banke na poboljšanje upravljanje rizicima i mjerenjima koja su potrebna da bi se usvojio AMA, Baselska komisija je donijela odluku da potrebni kapitalni zahtjevi budu niži nego što je kod standardnog pristupa i jednostavnog pristupa. Ukoliko banke odluče koristiti pristup naprednog mjerenja operativnog rizika, trebaju uzeti u obzir povezanost između rizika i sljedeće elemente:

**Interni podaci o gubicima** su podaci povezani sa trenutnim aktivnostima banke, tehnološkim procesima i postupcima upravljanja rizikom koji su prikupljeni unutar minimalno pet godina kako bi se mogli koristiti za izračun kapitalnih zahtjeva. Osim informacija o bruto iznosima gubitaka, organizacije trebaju prikupljati informacije o datumu događaja, bilo kakvom povratu i deskriptivne informacije o razlogu zašto se dogodio gubitak. Ovi podaci se koriste za modeliranje distribucije učestalosti i ozbiljnosti gubitaka te za analiziranje strukture modela. Međutim treba napomenuti da postojeća unutarnja baza podataka ima dvije slabosti. Prva je da su interni podaci o gubicima nedovoljni za izračunati operativni rizik zbog toga što je vremenski period za kontinuirano prikupljanje podataka o operativnom riziku smanjen. Drugi razlog je što se većina događaja operativnih gubitaka, koji se nalaze u bazi podataka, klasificira kao događaj visoke učestalosti/male ozbiljnosti, dok je samo nekolicina klasificirana kao rijetka učestalost/velika ozbiljnost.

**Eksterni podaci o gubicima** su podaci o iskustvima s operativnim gubicima koji su se dogodili kod drugih firmi, banki. Ti podaci mogu nadopuniti interne podatke o gubicima te tako pružiti uvid u gubitke koji su zadesili cijelu industriju. Događaji operativnih gubitaka u vanjskoj bazi se popisuju putem podataka koji daju sažet i detaljan opis kada, što, kako i zašto se događaji operativnih rizika događaju.

**Analize scenarija** je subjektivni proces koji se temelji na znanju iskusnih poslovnih menadžera i stručnjaka za upravljanje rizikom kako bi se donijela razumna procjena po-

tencijalne izloženosti operativnom riziku. Analize scenarija se sastoji od dvije kvantitativne komponente (učestalost i ozbiljnost) i jedne deskriptivne (detaljan opis scenarija). Najvažniji razlog stvaranja baze podataka scenarija je da se zabilježe događaji rijetke učestalosti/velike ozbiljnosti. Svaka banka stvara i prikuplja podatke o scenariju, a zatim se ponovno prikupljaju podaci o scenariju na razini koncerna financijskih institucija i regulatornih tijela kako bi se uspostavila baza podataka scenarija. Novonastala baza je od velike važnosti u analizi podataka scenarija diljem bankarske industrije. Za stvaranje scenarija banke koriste sljedeća tri pristupa: individualni pristup, periodni pristup te postotni pristup (vidi [26]).

**Faktori poslovnog okružja i sustava unutarnjih kontrola** su čimbenici koji bi trebali pomoći banci pri procjeni prognoze, tako da se uzmu u obzir kvaliteta kontrole i radno okruženje, te pri usklađivanju procjene kapitala s ciljevima upravljanja rizika.

Naravno, svi ovi elementi koje treba uzeti u obzir se mogu međusobno kombinirati kako bi se procijenila izloženost operativnom riziku. Iako je ovim pristupom bankama omogućeno korištenje vlastitih metoda za ocjenu izloženosti operativnom riziku, pod uvjetom da je dovoljno sveobuhvatna i sistematska, ipak se mogu izdvojiti tri podvrste pristupa:

- Pristup unutarnjeg mjerenja (eng. Internal measurement approach - IMA) - Ovim pristupom banke događaje operativnog rizika podijele po poslovnim linijama  $i = 1, 2, \dots$  i kategorijama rizika  $j = 1, 2, \dots$ . Za svaku od kombinacija  $(i, j)$  supervizor određuje indikator izloženosti,  $EI_{ij}$ , operativnom riziku. Zatim banke, na temelju svojih internih podataka o gubicima, računaju vjerojatnost  $P_{ij}$  da će se gubitak dogoditi tijekom sljedeće godine i parametar  $AL_{ij}$  koji predstavlja prosječne gubitke. Očekivani gubitak za svaku od kombinacija  $(i, j)$  je  $EL = EI \times P \times AL$ . Pristupom unutarnjeg mjerenja se pretpostavlja da je veza između očekivanih i neočekivanih gubitaka fiksna i stabilna. Kapitalni zahtjev  $K_{IMA}$  se računa pomoću sljedeće formule:

$$K_{IMA} = \sum_{i,j} \gamma_{ij} EI_{ij} P_{ij} AL_{ij}$$

gdje je  $\gamma$  faktor koji pretvara očekivani gubitak u kapitalni zahtjev, a propisana je od strane supervizora za svaku kombinaciju poslovna linija/kategorija gubitka (vidi [3]).

- Pristup distribucije gubitaka (eng. Loss distribution approach - LDA) - Najveći problem kod ovog pristupa je dostupnost i vjerodostojnost podataka. Stoga da bi se svladao taj problem, posebno se procijeni distribucija učestalosti gubitaka, a posebno distribucija ozbiljnosti gubitaka. Učestalost predstavlja broj događaja, a ozbiljnost veličinu gubitka po događaju. Prema [12] i [4], neka je  $X_i$  ukupan gubitak  $i$ -tog događaja, a  $N$  broj događaja gubitaka. Iako nema restrikcija na tipove distribucija učestalosti i ozbiljnosti, pretpostavlja se da su  $X_1, X_2, \dots$  međusobno nezavisne i jednako distribuirane (n.j.d.), te da su učestalost i ozbiljnost gubitaka međusobno nezavisne. Pristup distribucije gubitka se temelji na modeliranju godišnje učestalosti  $N$  i ozbiljnosti  $X_1, X_2, \dots$  događaja operativnih rizika za svaku ćeliju rizika. Godišnji gubitak za



$j$ -tu ćeliju rizika iznosi

$$Z^{(j)} = X_1^{(j)} + X_2^{(j)} + \dots + X_{N^{(j)}}^{(j)},$$

a ukupni gubitak za sve ćelije rizika tijekom promatrane godine iznosi

$$Z = \sum_{j=1}^d Z^{(j)}.$$

Tada je kapitalni zahtjev definiran kao 0.999 VaR, koji je kvantil distribucije za godišnji gubitak sljedeće godine  $Z$ :

$$VaR_\alpha[Z] = \inf\{z \in \mathbb{R} : P(Z > z) \leq 1 - \alpha\}$$

pri čemu je  $\alpha$  iz intervala  $[0.995, 0.999]$ , u našem slučaju je  $\alpha = 0.999$  propisana od strane BCBS (vidi [3]). Jednostavnije rečeno, postoji 0.1% šanse da banka neće biti u mogućnosti pokriti operativne gubitke.

Za razliku od pristupa unutarnjeg mjerenja, LDA za cilj ima procijeniti neočekivane gubitke direktno, a ne putem pretpostavke o vezi između očekivanih i neočekivanih gubitaka. Zbog toga, pod ovim pristupom nije potrebno određivati  $\gamma$  faktor. Više o LDA u sljedećem poglavlju.

- Pristup bodovne karte (eng. Scorecard approach) - Prema [12], banke određuju početnu razinu kapitala za operativni rizik na razini firme ili poslovnih linija, a zatim te iznose modificiraju tijekom vremena pomoću kvalitativnog rangiranja ili bodovanja svakog razvoja rizika. Ovaj pristup je dizajniran tako da odražava poboljšanja u području kontrole rizika s ciljem da se smanji učestalost i ozbiljnost budućih gubitaka uzrokovane operativnim rizicima. Isto tako kombinira izgubljene podatke sa indikatorom rizika te obavlja samoprocjenu potencijalnih operativnih rizika po poslovnim linijama.

Kapitalni zahtjev  $K_{SCA}$  se računa na sljedeći način:

$$K_{SCA} = \sum_{i,j} w_{ij} EI_{ij} \times RS_{ij}$$

gdje je  $w_{ij}$  iznos kapitala po jedinici pokazatelja izloženosti,  $EI_{ij}$  indikator izloženosti za svaku od ćelija rizika tj. za svaku od kombinacija poslovna linija/tip događaja, a  $RS_{ij}$  je faktor rizika. Pomoću pristupa bodovne karte banka svakom događaju operativnog rizika dodjeljuje vrijednosti pomoću kojih će uspoređivati različite operativne rizike. Ova metoda se oslanja na procjenu stručnjaka pri odabiru indikatora. Nedostatak ovog pristupa je u tome što su bodovne karte subjektivne te još uvijek nisu napravljeni standardi za ključni indikator rizika koji bi se koristio za svaku vrstu rizika te za razvoj metoda bodovne karte.

#### 2.2.4 Primjeri iz Hrvatske

Za primjer ćemo uzeti sljedeće banke: OTP, PBZ i Zagrebačku banku. Sve podatke koje ćemo navesti se nalaze u bonitetnim izvješćima koji se nalaze na službenim stranicama

navedenih banaka.

Zagrebačka banka je 31.09.2019. imala 16.762 milijuna kuna regulatornog kapitala, a ukupni kapitalni zahtjevi Grupe Zagrebačke banke iznose 6.112 milijuna kuna, dok je minimalna stopa adekvatnosti kapitala 8%. Za računanje kapitalnih zahtjeva za operativni rizik, Zagrebačka banka koristi AMA, dok ostale članice Grupe Zagrebačke banke koriste SA. Izloženost operativnom riziku se računa kao zbroj kapitalnih zahtjeva za Zagrebačku banku, koji se računaju pomoću AMA, i kapitalnih zahtjeva izračunatih pomoću SA za ostale Članice Grupe pomnoženih s 12,5. Izloženost operativnom riziku 30.09.2019. iznosi 6.653 milijuna kuna, što je za 6 milijuna kuna više nego 30.06. iste godine. Kapitalni zahtjevi za operativni rizik iznose 525 milijuna kuna.

PBZ, kao i Zagrebačka banka, za izračunavanje kapitalnih zahtjeva za operativni rizik koristi SA i AMA. Regulatorni kapital PBZ-a 30.06.2019. iznosi 16.108 milijuna kuna. Ukupni kapitalni zahtjevi za tržišni, kreditni i operativni rizik iznose 5.950 milijuna kuna, od toga su najmanji kapitalni zahtjevi za operativni rizik koji iznose 476 milijuna kuna.

Za razliku od prethodno navedenih banaka, OTP banka za izračunavanje kapitalnih zahtjeva potrebnih za pokrivanje operativnog rizika koristi BIA. Regulatorni kapital OTP banke je 31.03.2019. iznosio 5.353 milijuna kuna, a izloženost operativnom riziku je iznosila 3.284 milijuna kuna što je za 167 milijuna manje nego 31.12.2018. Kapitalni zahtjevi za operativni rizik OTP banke iznose 263 milijuna kuna.



### 3 Pristup distribucije gubitaka - LDA

U ovom poglavlju ćemo najprije definirati formulu za računanje kapitalnih zahtjeva za operativni rizik pomoću pristupa distribucije gubitaka. Nakon toga ćemo se upoznati s učestalosti i ozbilnosti gubitaka te ćemo navesti nekoliko načina kako ih modelirati. Metode koje se koriste za procjenu parametara distribucije su metoda maksimalne vjerodostojnosti i metoda momenata koje se detaljno obrađene u poglavlju 3.3. Nakon toga ćemo navesti nekoliko testova prilagodbe pomoću kojih se provjerava da li je odabrani model prikladan. Kao što smo u prethodnom poglavlju spomenuli, pristup distribucije gubitaka je statistički pristup za računanje ukupne distribucije gubitaka. Ovaj pristup se prvenstveno zasniva na promatranim internim podacima o gubicima iz prošlosti koji su, po potrebi, dodatno prošireni s eksternim podacima o gubicima. Temeljeno na konceptu koji se koristi kod statističkih modela, LDA se sastoji od odvojene parametarske procjene distribucije učestalosti pojave operativnih gubitaka i distribucije ozbilnosti pojedinačnih gubitaka, a zatim ih pomoću Monte Carlo metode (vidi poglavlje 5) i drugih statističkih metoda kombinira kako bi se dobila ukupna distribucija gubitka. Isto tako, ovaj pristup uključuje modeliranje operativnog rizika pomoću teorije ekstremnih vrijednosti (eng. Extreme value theory - EVT) koju ćemo detaljno obraditi u poglavlju 4.

Prema [4] i [18], Gregoriu je 2009. godine opisao sljedeći način računanja kapitalnih zahtjeva. Neka je  $\xi_{i,j}$  slučajna varijabla koja opisuje iznos jednog događaja gubitka pri čemu  $i$  predstavlja poslovnu liniju, a  $j$  kategoriju rizika. Drugim riječima  $\xi_{i,j}$  je ozbilnost gubitka. Nadalje, neka je  $F_{i,j}$  funkcija distribucije ozbilnosti gubitka,  $N_{i,j}$  slučajna varijabla koja opisuje broj događaja gubitaka u vremenskom intervalu  $[t, t + \tau]$ , odnosno  $N_{i,j}$  je učestalost gubitaka, i neka je  $p_{i,j}(k)$  vjerojatnost  $k$  gubitaka u vremenskom intervalu  $[t, t + \tau]$ . Prema Baselskom sporazumu, uzima se da je  $\tau = 1$  godina. Drugim riječima, gubici se promatraju u vremenskom razdoblju duljine jedne godine. Ukupni gubitak u tom vremenskom intervalu dan je slučajnom varijablom

$$L_{i,j} = \sum_{n=0}^{N_{i,j}} \xi_{i,j;n}.$$

Postoje razne pretpostavke o vezi između različitih događaja gubitaka te između učestalosti i ozbilnosti događaja. Najjednostavnija pretpostavka je da su različiti  $\xi_{i,j}$  međusobno nezavisni, tj. dva različita gubitka u istoj čeliji rizika su međusobno nezavisna, te da je svaka pojedina ozbilnost nezavisna o odgovarajućoj učestalosti događaja.

Označimo s  $G_{i,j}$  distribuciju slučajne varijable  $L_{i,j}$ . Tada je

$$G_{i,j}(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} p_{i,j}(n) F_{i,j}^{n*}(x), & x > 0 \\ p_{i,j}(0), & x = 0 \end{cases}$$

pri čemu je  $*$  operator konvolucije. Konvolucija dvije funkcije  $f, g$  definirana je s

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau,$$

dok je  $n$ -struka konvolucija definirana induktivno s  $F^{n*} = F * F^{n-1}$ .

Očekivani gubitak u poslovnoj liniji  $i$  za vrstu događaja  $j$  je

$$EL_{i,j} = E[L_{i,j}] = \int_0^{\infty} x dG_{i,j}(x).$$

Kapitalni zahtjev  $K$  za ćeliju rizika  $(i, j)$  je dan izrazom

$$K_{i,j;\alpha} = EL_{i,j} + UL_{i,j;\alpha} = G_{i,j}^{-1}(\alpha),$$

pri čemu je

$$UL_{i,j;\alpha} = G_{i,j}^{-1}(\alpha) - E[L_{i,j}]$$

nepokriveni gubitak na razini pouzdanosti  $\alpha$ , npr. ako je  $\alpha = 0.995$  tada postoji 0.5% šanse da banka neće moći pokriti svoje operativne gubitke. Nadalje,

$$G_{i,j}^{-1}(\alpha) = \inf\{x : G_{i,j}(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1)$$

je funkcija kvantila.

Odnosno,  $K$  je mjera  $VaR$ -a koji se definira kao mjera rizika od gubitka, u našem slučaju, procijenjuje maksimalnu izloženost gubitku tijekom određenog vremenskog razdoblja. Za gubitak  $L_{i,j}$  u vremenskom razdoblju  $[t, t + 1]$ ,  $VaR_{\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , je  $\alpha$  kvantil distribucije od  $L_{i,j}$  definiran izrazom

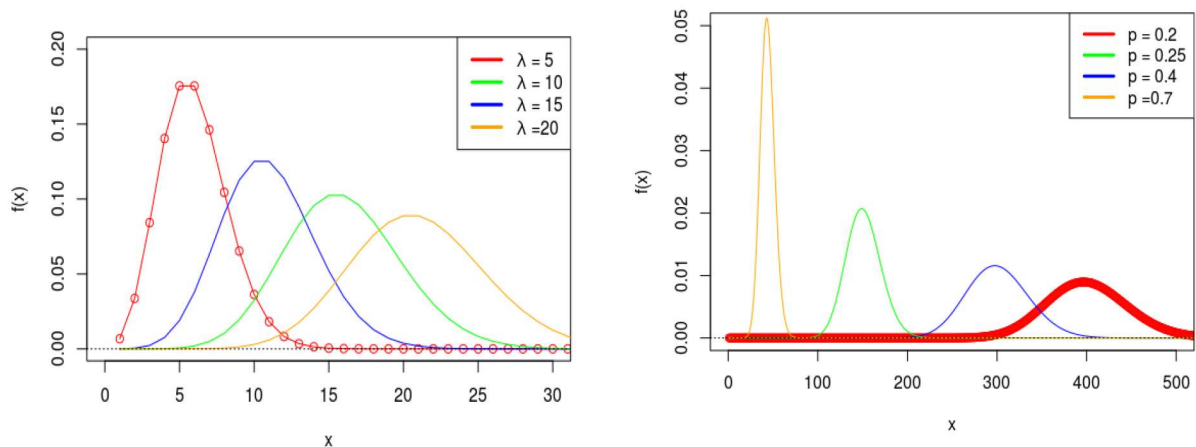
$$VaR_{\alpha}(L_{i,j}) = G_{i,j}^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : G_{i,j}(x) \geq \alpha\}.$$

Ukupni kapitalni zahtjev  $K_{LDA}$  se računa kao suma kapitalnih zahtjeva svake ćelije rizika, tj.

$$K_{LDA} = \sum_i^8 \sum_j^7 G_{i,j}^{-1}(\alpha) = \sum_i^8 \sum_j^7 VaR_{\alpha}(L_{i,j}).$$

### 3.1 Učestalost gubitaka

Učestalost gubitaka je diskretna varijabla koja broji koliko puta se dogodio gubitak u određenom vremenskom periodu, za koji se najčešće uzima godina dana. Učestalost operativnih gubitaka je povezana s neiskusnošću radnika koji naprave pogrešku koju neće uočiti ili ju zbog straha neće prijaviti nadređenom, kreditnim prevarama i sl. Za modeliranje učestalosti operativnih gubitaka se najčešće koriste Poissonova i negativna binomna distribucija.



(a) Funkcija gustoće Poissonove distribucije (b) Funkcija gustoće negativne binomne distribucije

Slika 3.1: Funkcije gustoće

**Definicija 3.1.** Slučajna varijabla  $X$  ima Poissonovu distribuciju s parametrom  $\lambda > 0$ ,  $X \sim P(\lambda)$ , ako poprima vrijednosti iz skupa  $0, 1, 2, \dots$  s vjerojatnostima

$$p_i = P(X = i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!},$$

pri čemu je  $\lambda$  očekivanje i varijanca slučajne varijable  $X$ .

**Poissonova distribucija** se u praksi najčešće koristi zbog svojstva da ako je  $X \sim P(\lambda_x)$  i  $Y \sim P(\lambda_y)$ , onda je  $X + Y \sim P(\lambda_x + \lambda_y)$ . Odnosno, dodavanje podataka u bazu neće promijeniti analitičku strukturu.

Osim Poissonove distribucije, u praksi se još često koristi **negativna binomna distribucija**.

**Definicija 3.2.** Slučajna varijabla  $X$  ima negativnu binomnu distribuciju s parametrima  $r \in (0, \infty)$ ,  $p \in (0, 1)$  s funkcijom vjerojatnosti

$$P(X = k) = \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k, \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Očekivanje i varijanca slučajne varijable  $X \sim \text{NegBinomna}(r, p)$  je

$$E[X] = \frac{r(1-p)}{p}, \quad \text{Var}[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Ukoliko je  $r$  pozitivan cijeli broj, tada se slučajna varijabla  $X$  može interpretirati kao broj neuspjeha u nizu nezavisnih pokusa do  $r$  uspjeha, pri čemu je  $p$  vjerojatnost uspjeha u svakom od pokusa (vidi [10], [11] i [12, str. 89]).

S obzirom da se ne zna kada će se sljedeći gubitak dogoditi, realno je za pretpostaviti da su ti gubici međusobno nezavisni i jednako distribuirani. Zbog toga se učestalost gubitaka modelira Poissonovim procesom.



**Definicija 3.3.** *Proces  $(N_t, t \geq 0)$  sa skupom stanja  $\mathbb{N}_0$  je **homogen Poissonov proces** ako zadovoljava sljedeće zahtjeve:*

1.  $N_0 = 0$
2.  $(N_t, t \geq 0)$  ima nezavisne priraste, tj. za  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  su prirasti  $N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$  međusobno nezavisne slučajne varijable.
3. (Stacionarnost prirasta) Broj događaja u bilo kojem intervalu duljine  $t$  modeliran je slučajnom varijablom  $N_t$  koja ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem  $\lambda t, \lambda > 0$  tj.  $\forall s, t > 0$  je

$$P(N_{t+s} - N_s = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Vrijednost slučajne varijable  $N_t$  interpretiramo kao broj realizacija promatranog događaja, u našem slučaju gubitaka, u svakom vremenskom intervalu duljine  $t$ . Kako je u praksi moguće da očekivani broj događaja na vremenskim intervalima jednake duljine nije konstantan, uvodimo tzv. *nehomogeni Poissonov proces ili Cox-ov proces*.

**Definicija 3.4.** *Proces  $(N_t, t \geq 0)$  sa skupom stanja  $\mathbb{N}_0$  je **nehomogen Poissonov proces ili Cox proces** s funkcijom intenziteta  $\lambda(t), t \geq 0$ , ako vrijedi*

1.  $N_0 = 0$
2.  $N_t$  ima nezavisne priraste
3. Za  $0 \leq s < t$  je

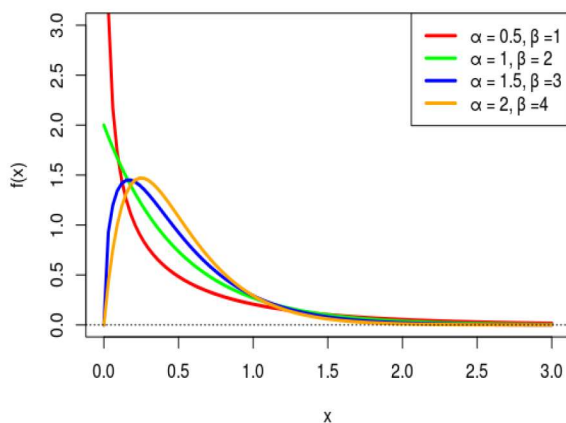
$$N_t - N_s \sim P\left(\int_s^t \lambda(u) du\right)$$

Ukoliko je  $\lambda(t) = \lambda$ , tada dobijemo homogeni Poissonov proces. Međutim, da bi mogli upotrijebiti ovaj model potreban nam je opsežan skup podataka (vidi [10] i [25]).

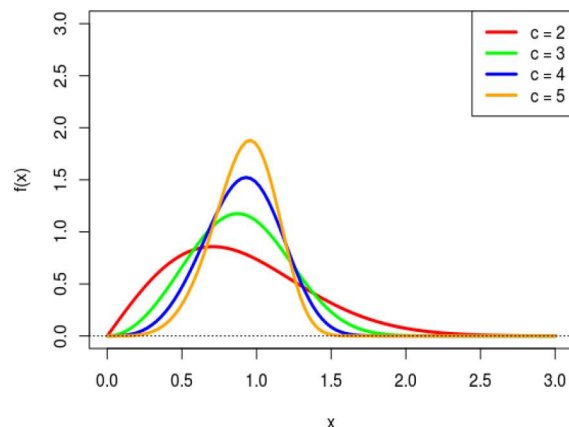
## 3.2 Ozbiljnost gubitaka

Ozbiljnost gubitaka je varijabla koja mjeri ekonomski utjecaj rizika kada se on dogodi, pri čemu se kao i kod učestalosti gubitaka pretpostavlja nezavisnost i jednaka distribuiranost. Pri modeliranju ozbiljnosti gubitaka najveći problem stvara nedostatak podataka, zbog čega se podaci uzimaju još iz eksternih podataka o gubicima i analize scenarija kako bi se poboljšala pouzdanost modela. U nastavku navodimo najčešće korištene distribucije za modeliranje ozbiljnosti gubitaka.

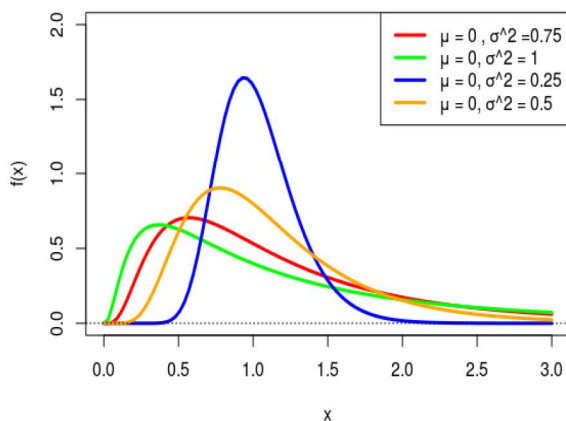




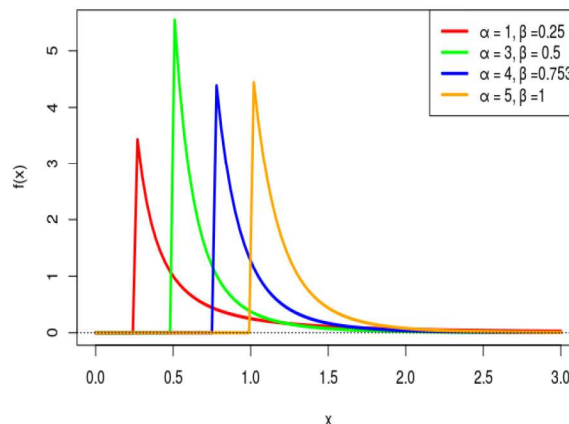
(a) Funkcija gustoće Gamma distribucije



(b) Funkcija gustoće Weibullove distribucije



(c) Funkcija gustoće lognormalne distribucije



(d) Funkcija gustoće Pareto distribucije

Slika 3.2: Funkcije gustoće

**Definicija 3.5.** Slučajna varijabla  $X$  ima Gamma distribuciju s parametrima  $\alpha$  i  $\beta$ , ako joj je funkcija gustoće dana s

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), \quad \alpha, \beta > 0, \quad x > 0$$

gdje je  $\Gamma(\alpha)$  gama funkcija

$$\Gamma(\alpha) = \begin{cases} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt, & \alpha \text{ kompleksan broj s pozitivnim realnim dijelom} \\ (\alpha - 1)!, & \alpha \text{ pozitivan cijeli broj.} \end{cases}$$

Očekivanje i varijanca slučajne varijable  $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$  je

$$E[X] = \alpha\beta, \quad \text{Var}[X] = \alpha\beta^2.$$

Gamma distribucija je generalizirani oblik eksponencijalne distribucije, a koristi se za predikciju vremena čekanja do određenog događaja.

Primjetimo da za  $\alpha = 1$  imamo:

$$\Gamma(1) = (1 - 1)! = 0! = 1$$

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}, \quad x > 0$$

odnosno dobijemo eksponencijalnu distribuciju s parametrom  $\beta$ .

*Weibullova distribucija* je također generalizacija eksponencijalne distribucije, a koristi se za analizu neuspjeha.

**Definicija 3.6.** *Slučajna varijabla  $X$  ima Weibullovu distribuciju s parametrima  $\alpha$  i  $\beta$ , ako joj je funkcija gustoće dana s*

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Očekivanje i varijanca slučajne varijable  $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$  je

$$E[X] = \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \quad Var[X] = \beta^2 \left( \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \left( \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right)^2 \right).$$

**Definicija 3.7.** *Slučajna varijabla  $X$  ima lognormalnu distribuciju, ako joj je funkcija gustoće dana s*

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma^2 > 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad x > 0.$$

Očekivanje i varijanca slučajne varijable  $X \sim lognormal(\mu, \sigma^2)$  je

$$E[X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}. \quad Var[X] = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

Ukoliko je  $X \sim lognormal(\mu, \sigma^2)$ , tada slučajna varijabla  $Y = \ln X$  ima normalnu distribuciju i obratno. Ukoliko je  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , tada  $X = \exp Y$  ima lognormalnu distribuciju. Lognormalna distribucija se koristi u financijama za analizu cijena dionica, pri modeliranju zaraznih bolesti, preživljavanju bakterija u dezinfekcijskim sredstvima i slično.

**Definicija 3.8.** *Slučajna varijabla  $X$  ima Pareto distribuciju s parametrima  $\alpha$  i  $\beta$ , ako joj je funkcija gustoće dana s*

$$f(x) = \frac{\alpha \beta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad \beta > 0, \quad \alpha > 0, \quad x \in (\beta, \infty),$$

a očekivanje i varijanca su

$$E[X] = \frac{\alpha \beta}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1, \quad Var[X] = \frac{\alpha \beta^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2,$$

$k$ -ti moment je  $E[X^k] = \frac{\alpha \beta^k}{\alpha - k}$ , pod uvjetom da je  $k < \alpha$ .

Pareto distribucija je distribucija s teškim repovima (vidi definiciju 4.2) koja se koristi za modeliranje distribucije prihoda, modeliranje distribucije stanovništva i sl. (vidi [10, str. 116], [8], [22] i [12]).

### 3.3 Metode procjene parametara

U ovom radu se bavimo parametarskim modelima koju su nam poznati do na nepoznati parametar  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ . Stoga nam je potrebno znati kako procijeniti vrijednost nepoznatog parametra. Neka od važnijih svojstava procjenitelja su konzistentnost i asimptotska normalnost (vidi [7]).

**Definicija 3.9.** *Neka je  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  slučajan uzorak iz parametarskog statističkog modela  $\mathcal{P} = \{F_\theta : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$ . Niz procjenitelja  $(T_n, n \in \mathbb{N})$  je **konzistentan** za parametar  $\theta$  ako vrijedi:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(|T_n - \theta| > \epsilon) = 0, \quad \forall \theta \in \Theta, \quad \epsilon > 0, \quad \text{tj. } T_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \theta.$$

**Definicija 3.10.** *Neka je  $(T_n, n \in \mathbb{N})$  niz procjenitelja za  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ . Kažemo da je  $T_n$  **asimptotski normalan** ako postoji niz nenegativnih brojeva  $(a_n, n \in \mathbb{N})$  tako da je*

$$\frac{T_n - \theta}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Najpopularnije metode za procjenu parametara distribucije slučajne varijable ozbiljnosti gubitaka i učestalosti gubitaka su metoda maksimalne vjerodostojnosti i metoda momenata. S obzirom da su procjenitelji dobiveni metodom maksimalne vjerodostojnosti konzistentni i asimptotski normalni, oni su najjednostavniji za analizirati. Ukratko ćemo opisati obje metode.

#### 3.3.1 Metoda momenata

Metoda momenata se zasniva na principu supstitucije, odnosno statistički momenti koji su izračunati na danom uzorku se izjednačavaju s teorijskim momentima. Neka je  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  jednostavan slučajan uzorak iz distribucije  $F_\theta$ ,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ , koji ima  $r$ -ti moment  $\mu_r = E[X^r]$ . Pretpostavimo da možemo definirati  $k$  funkcionalnih parametara

$$\begin{aligned} \eta_1(F) &= g_1(\theta) \\ \eta_2(F) &= g_2(\theta) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \eta_k(F) &= g_k(\theta) \end{aligned}$$

gdje su  $g_1, \dots, g_k$  parametarske funkcije. Zatim  $\eta_1(F), \dots, \eta_k(F)$  procijenimo po principu supstitucije s  $\eta_1(F_n), \dots, \eta_k(F_n)$  gdje je  $F_n$  empirijska funkcija distribucije. Ako postoji jedinstveno



rješenje sustava

$$\begin{aligned}\eta_1(F_n) &= g_1(\theta) \\ \eta_2(F_n) &= g_2(\theta) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \eta_k(F_n) &= g_k(\theta)\end{aligned}$$

po  $\theta$ , tada je to rješenje procjena za  $\theta$  dobivena metodom momenata (vidi [7]).

**Primjer 3.1.** Neka je slučajna varijabla  $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ . Metodom momenata ćemo procijeniti parametre  $\alpha$  i  $\beta$ .

Od prije znamo da je  $E[X] = \alpha\beta$ , a  $\text{Var}[X] = \alpha\beta^2$ . Izjednačimo odgovarajuće uzoračke momente:

$$\begin{aligned}E[X] = \bar{X}_n &\Rightarrow \alpha\beta = \bar{X}_n \Rightarrow \alpha = \frac{\bar{X}_n}{\beta} \\ \text{Var}[X] = \hat{\sigma}^2 &\Rightarrow \beta^2\alpha = \hat{\sigma}^2 \Rightarrow \beta = \frac{\hat{\sigma}^2}{\bar{X}_n}\end{aligned}$$

Dakle, statistike  $\hat{\alpha} = \frac{\bar{X}_n^2}{\hat{\sigma}^2}$  i  $\hat{\beta} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\bar{X}_n}$  su procjenitelji nepoznatih parametara  $\alpha$  i  $\beta$  Gamma distribucije u smislu metode momenata.

### 3.3.2 Metoda maksimalne vjerodostojnosti

Metoda maksimalne vjerodostojnosti je statistička metoda koju ćemo koristiti za procjenu parametara distribucije učestalosti gubitaka. Neka je  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  jednostavan slučajni uzorak s funkcijom gustoće  $f(\mathbf{x}; \theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ . Za fiksni  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je  $\theta \mapsto f(\mathbf{x}, \theta)$  funkcija vjerodostojnosti koja je definirana kao

$$L(\mathbf{x}; \theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n P_\theta(X_i = x_i), & X_i \text{ je diskretna slučajna varijabla,} \\ \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta), & X_i \text{ je neprekidna slučajna varijabla,} \end{cases}$$

a log likelihood funkcija je  $l(\mathbf{x}) = \ln L(\mathbf{x}; \theta)$ . Uz danu realizaciju  $\mathbf{x}$  slučajnog uzorka, neka familija vjerodostojnosti  $L(\mathbf{x}; \theta)$  postiže svoj maksimum po  $\theta$  u  $s(\mathbf{x})$  tj.

$$\max_{\theta \in \Theta} L(\mathbf{x}; \theta) = L(\mathbf{x}; s(\mathbf{x})), \quad s(\mathbf{x}) \in \Theta.$$

Tada je statistika  $S = s(\mathbf{X})$  procjenitelj maksimalne vjerodostojnosti, tj. ML procjenitelj za  $\theta$ .

Metoda maksimalne vjerodostojnosti ima jedno važno svojstvo tzv. svojstvo invarijantnosti.

**Definicija 3.11.** Neka je  $\phi = g(\theta)$ , pri čemu je  $g$  bijektivna funkcija, te neka je  $\hat{\theta}$  ML procjenitelj za  $\theta$ . Tada je  $g(\hat{\theta})$  ML procjenitelj za  $g(\theta) = \phi$  (vidi [7]).

**Primjer 3.2.** Neka je  $X_1, X_2, \dots, X_n$  jednostavan slučajan uzorak iz lognormal( $\mu, \sigma^2$ ). Tada je log likelihood funkcija dana s

$$l(\mathbf{x}) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - n\log(\sigma) - \sum_{j=1}^n \log(x_j) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n (\log(x_j) - \mu)^2. \quad (3.1)$$

Deriviranjem jednadžbe (3.1) po  $\mu$  dobijemo ML procjenitelj

$$0 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n \log(x_j) - \frac{n\mu}{\sigma^2} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu} = \sum_{j=1}^n \frac{\log(x_j)}{n}.$$

Ukoliko jednadžbu (3.1) deriviramo po  $\sigma^2$ , dobijemo ML procjenitelj

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(\log(x_j) - \hat{\mu})^2}{n}.$$

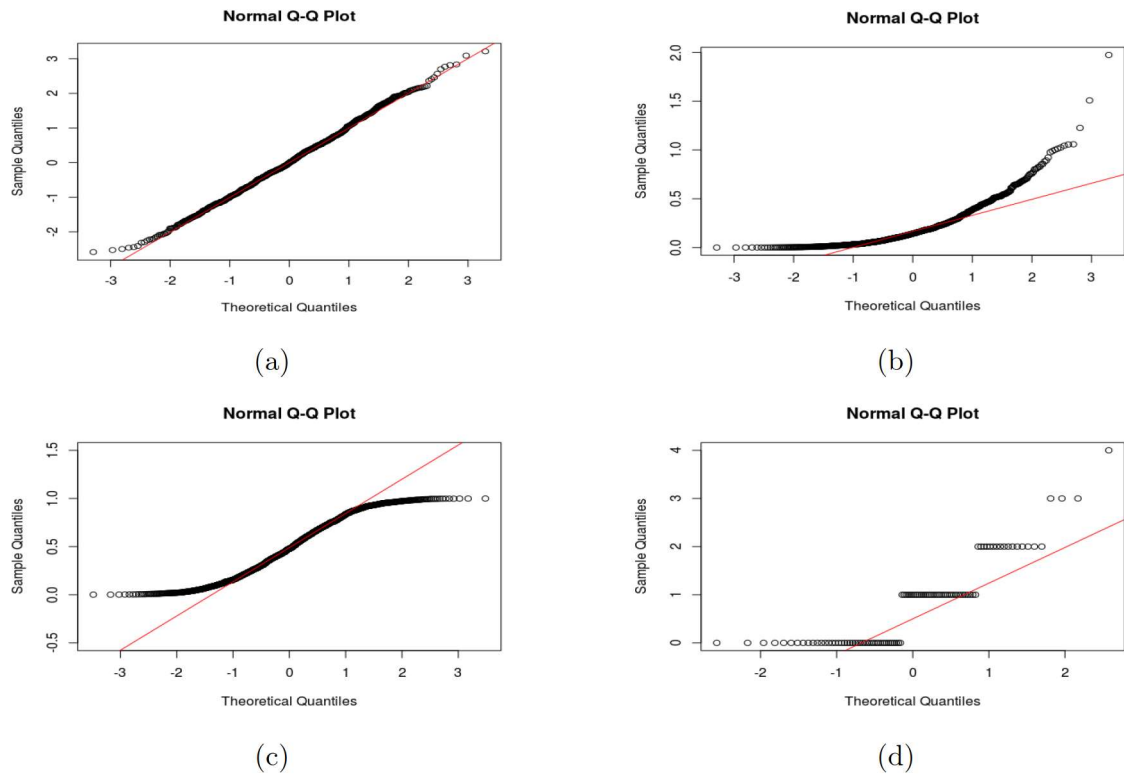
### 3.4 Testovi prilagodbe

Testovi prilagodbe se koriste za testiranje dolazi li uzorak iz određene distribucije. Pri modeliranju operativnih gubitaka često se susrećemo s rizikom odabira pogrešnog modela. Pogrešno odabran model će imati ozbiljne posljedice na iznos procijenjenog VaR- a. Naime, podcijenjeni VaR može ugroziti sposobnost banke da dugotrajno održava dovoljnu količinu kapitala u rezervama kako bi se zaštitila od katastrofalnih operativnih gubitaka, dok bi precijenjeni VaR ograničio količinu sredstava dostupnih za investiranje. Stoga je važno testirati sposobnost modela kako bi vidjeli koji je najprikladniji. To možemo napraviti pomoću grafičkih metoda ili statističkih testova.

#### 3.4.1 Grafičke metode

Grafičke metode koje se najviše koriste su QQ (quantile-quantile) plot i graf očekivanog prekoračenja (eng. Mean excess plot - ME plot).

QQ plot prikazuje krivulju funkcije  $Q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiranu s  $Q(f) = (F_{x_1}^{-1}(f), F_{x_2}^{-1}(f))$ , pri čemu su  $X_1$  i  $X_2$  varijable sa pripadnim funkcijama distribucije  $F_{x_1}, F_{x_2}$ . Odnosno, u koordinatnom sustavu prikazuje teorijske kvantile neke distribucije u ovisnosti o uzoračkim kvantilima danog uzorka. Obično se kvantili teorijske distribucije crtaju na  $x$ -osi, a kvantili uzoračke distribucije na  $y$ -osi. Ukoliko su te dvije distribucije jednake, tada točke leže približno na pravcu  $y = x$  kao na Slici 3.3a. Ukoliko se lijevi i desni krajevi nalaze ispod ili iznad pravca  $y = x$  kao na Slici 3.3b, zaključujemo da se repovi distribucije ne podudaraju. Ukoliko je QQ plot zakrivljen, izbočen ili ima oblik slova S kao što je na Slici 3.3c, zaključujemo da jedna distribucija ima teže repove od druge distribucije, a ako je dobiveni graf stepenast kao na Slici 3.3d, tada zaključujemo da je uzorak diskretan. (Vidi [7], [17]).



Slika 3.3: Primjeri QQ plot

ME plot je grafička metoda koji se koristi za uvid u ponašanje repova distribucije i pri selekciji modela ekstremnih vrijednosti koje ćemo obraditi u poglavlju 4.

**Definicija 3.12.** *Neka je  $X$  slučajna varijabla s funkcijom distribucije  $F$  i desnom rubnom točkom  $x_F \leq \infty$ . Za fiksni  $u < x_F$  ME funkcija od  $X$  je*

$$e(u) = E[X - u | X > u].$$

Drugim riječima,  $e(u)$  možemo interpretirati kao očekivani gubitak za gubitke koji se nalaze iznad zadanog praga  $u$ . Empirijska ME funkcija računa na sljedeći način:

$$e_n(u) = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - u)_+}{\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{x_j > u\}}}.$$

Ova funkcija crta vrijednosti teorijske funkcije prekoračenja  $e(u)$  naspram raznih vrijednosti od  $u$ . Za distribuciju s teškim repovima,  $e(u)$  većinom teži u beskonačno, a graf očekivanog prekoračenja je nagnut prema gore (vidi [13, str. 294]). Funkcija očekivanog prekoračenja će nam biti od velike važnosti u teoriji ekstremnih vrijednosti.

### 3.4.2 Statistički testovi

Postoji više statističkih testova kojima se mogu testirati hipoteze:

$H_0$  : Podaci dolaze iz određene distribucije

$H_1$  : Podaci ne dolaze iz određene distribucije



U ovom dijelu ćemo navesti i opisati nekoliko formalnih testova prilagodbe za diskretnu i za neprekidnu distribuciju.

### Pearson $\chi^2$ test i generalizirani test kvocijenta vjerodostojnosti

Neka je  $\mathbf{X}$  slučajan uzorak s realizacijom  $\mathbf{x}$ . Nadalje, neka je  $\mathcal{P}$  parametarski statistički model  $\mathcal{P} = \{f(\mathbf{x}; \theta) : \theta \in \Theta\}$  te neka su dane hipoteze

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta \in \Theta_0 \\ H_1 &: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0 \end{aligned}$$

Tada je **generalizirani kvocijent vjerodostojnosti** definiran kao

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\max_{\theta \in \Theta_0} f(\mathbf{x}; \theta)}{\max_{\theta \in \Theta} f(\mathbf{x}; \theta)} = \frac{f(\mathbf{x}; \hat{\theta}_{0ML})}{f(\mathbf{x}; \hat{\theta}_{ML})}.$$

Zbog  $\Theta_0 \subseteq \Theta$ , slijedi da je  $\lambda(\mathbf{x}) \leq 1$ .

Pretpostavimo da podaci dolaze iz diskretne distribucije, i da je hipotetska distribucija

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1.$$

Želimo testirati hipoteze

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{Podaci dolaze iz zadane distribucije} \\ H_1 &: \text{Podaci ne dolaze iz zadane distribucije} \end{aligned}$$

Neka je

$$\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \dots \ p_m]^T \quad m - \text{dimenzionalan parametar.}$$

Kako je  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ , tada je npr.  $p_m = 1 - p_1 - \dots - p_{m-1}$ , odnosno imamo  $m - 1$  slobodan parametar. Stoga je  $\Theta$   $m - 1$  dimenzionalan prostor.

Sada imamo hipoteze

$$\begin{aligned} H_0 &: \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \\ H_1 &: \mathbf{p} \neq \mathbf{p}_0 \end{aligned}$$

te je generalizirani kvocijent vjerodostojnosti

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\max_{\mathbf{p} \in \Theta_0} f(\mathbf{x}; \mathbf{p})}{\max_{\mathbf{p} \in \Theta} f(\mathbf{x}; \mathbf{p})}.$$

Tada je statistika  $T = -2 \ln \lambda(\mathbf{x})$ , a u slučaju istinitosti nulhipoteze je  $T \sim \chi^2(m - 1)$  s  $m - 1$  stupnjeva slobode.

**Pearsonov  $\chi^2$  test** se koristi isključivo frekvencijama i primjenjuje se kada su podaci kvalitativni. Ovaj test zahtjeva veliki broj podataka (veći od 30) i rezultat ovisi o izboru particija, odnosno, za različit odabir particija daje različite rezultate.

Neka su podaci podijeljeni u  $m$  particija. Tada je test statistika, pod pretpostavkom istinitosti nulhipoteze, definira s

$$T_{Pearson} = \sum_{i=1}^m \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

gdje je  $O_i$  opažena frekvencija za particiju  $i$  dobivena iz podataka o gubicima,  $E_i$  očekivana frekvencija particije  $i$ . Očekivana frekvencija  $E_i$  je dana izrazom

$$E_i = n \left( F(X_u(i)) - F(X_l(i)) \right)$$

pri čemu je  $X_u(i)$  gornja granica particije  $i$ , a  $X_l(i)$  donja granica particije  $i$ . Ako je nulhipoteza istinita, tada je  $T_{Pearson} \sim \chi^2(m - 1)$  (vidi [7]).

### Kolmogorov- Smirnov (KS) test

KS test je formalni postupak zaključivanja za provjeru da li uzorak dolazi iz populacije s poznatom distribucijom (test na jednom uzorku) ili alternativni za zaključivanje da li dvije populacije imaju jednaku distribuciju. Ovaj test računa maksimalnu udaljenost između teorijske i stvarne distribucije. U ovom radu ćemo opisati test na jednom uzorku.

Neka su  $X_1, X_2, \dots, X_n$  n.j.d. slučajne varijable gubitka iz neprekidne distribucije  $F_0$ ,  $d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$d(\mathbf{X}) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F_0(x)|,$$

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{x_i \leq x\}}, \quad \text{za zadane } (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

KS test statistika, pod pretpostavkom istinitosti nulhipoteze, je  $D_n = d(\mathbf{x})$  i ona je jednako definirana za sve neprekidne distribucije  $F_0$ .

Prednost ovog testa je što nema nikakvih ograničenja na veličinu uzorka odnosno može se provesti i na malim uzorcima ( $n < 30$ ), a nedostatak je što općenito nije primjenjiv za diskretne distribucije (vidi [7]).



## 4 Teorija ekstremnih vrijednosti - TEV

U prethodnim poglavljima smo predstavili nekoliko načina pomoću kojih se mogu izračunati kapitalni zahtjevi potrebni za operativni rizik. Međutim, najveći gubici su oni koji se rijetko dogode ali imaju jak utjecaj, odnosno gubici rijetke učestalosti/visoke ozbiljnosti. Upravo distribucija tih gubitaka najviše zabrinjava upravitelje rizika.

Distribucija gubitaka se može podijeliti na tijelo i rep. Za gubitke koji se nalaze ispod određenog praga kažemo da se nalaze u tijelu distribucije, a za gubitke koji se nalaze iznad praga kažemo da se nalaze u repu distribucije. Ovi najveći gubici su upravo ti koji se nalaze u repu distribucije te za razliku od analize tržišnih i kreditnih rizika, faktori operativnog rizika u većini slučajeva prate distribuciju koja je neovisna o distribuciji skupa podataka. Grana statistike koja se bavi ekstremnim pojavama, ili u našem slučaju ekstremnim gubicima, je *teorija ekstremnih vrijednosti - TEV* (eng. Extreme value theory - EVT). Financije i osiguranja su teoriju ekstremnih vrijednosti preuzele iz hidrologije s ciljem da se ovakve pojave predvide ili barem da izgrađeni model kojim bi se predvidjeli ovakvi gubici bude pouzdaniji i praktičniji. U ovom poglavlju ćemo objasniti metodu vrijednosti iznad praga (eng. peak over threshold method - POT). Uzmimo na primjer gradnju brane. Ovaj pristup se koristi pri dizajniranju brane jer inženjeri trebaju s određenim stupnjem pouzdanosti izračunati razinu rijeke u proteklim godinama kako bi znali moguću razinu rijeke u budućnosti s ciljem da ne dođe do poplava, tj. da se kontrolirala poplava. Također je važan i kod operativnog rizika. Međutim, kod izračuna kapitalnih zahtjeva osnovni cilj je izmjeriti utjecaj svih gubitaka tijekom jedne godine. Modeliranje svih velikih gubitaka koji prelaze određeni prag se provodi metodom vrijednosti iznad praga. Metoda vrijednosti iznad praga se preferira kada podaci nemaju jasnu sezonalnost kao što je to slučaj s podacima o operativnom riziku. Prednost teorije ekstremnih vrijednosti je u tome što se fokusira na analiziranje gubitaka rijetke učestalosti/visoke ozbiljnosti te su lako dostupne tehnike potrebne za procjenu parametara modela. S druge strane, nedostaci su mogućnost pristranosti parametara modela zbog nedovoljno podataka, nema dostupnog analitičkog postupka za određivanje visokog praga u POT metodi već se visina praga, tj. odabir mjesta gdje počinje rep, temelji na vizualnom ispitivanju grafa očekivanog prekoračenja. U ovom poglavlju ćemo se koristiti referencama [13], [21], [12], [10], [20].

### 4.1 Granično ponašanje maksimuma

Granično ponašanje maksimuma nizova slučajnih varijabli je temelj teorije ekstremnih vrijednosti.

Neka je  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  niz n.j.d. slučajnih varijabli koje predstavljaju operativne gubitke s zajedničkom funkcijom distribucije  $F$ . Nadalje, označimo maksimalan gubitak s

$$M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

i neka je  $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$  desna krajnja točka funkcije distribucije  $F$  (vidi definiciju 3.12). S obzirom da su svi gubici međusobno nezavisni te da ne može svaki gubitak prijeći

maksimum, funkcija distribucije maksimuma je

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = (F(x))^n.$$

Kako je  $F(x) < 1$  ili  $F(x) = 1$ , tada  $F_{M_n}(x)$ , kada  $n \rightarrow \infty$ , konvergira k degeneriranoj distribuciji koja je 0 za  $x < x_F$  ili 1 za  $x > x_F$ . Da bismo dobili nedegeneriranu funkciju distribucije <sup>1</sup> kao limes, potrebna je normalizacija. Jedina moguća nedegenerirana granična distribucija za normalizirane maksimume po blokovima je *generalizirana distribucija ekstremnih vrijednosti* - GEV. Granične distribucije za normalizirane maksimume su dali Fisher i Tippett 1928. godine.

**Teorem 4.1.** *Neka je  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  n.j.d niz. Ako postoje konstante  $c_n > 0$ ,  $d_n \in \mathbb{R}$  i nedegenerirana funkcija distribucije  $H$  tako da je*

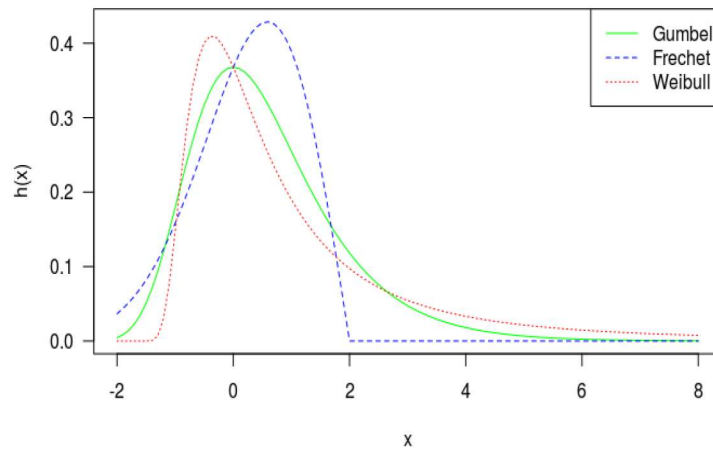
$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} H,$$

tada  $H$  pripada jednoj od sljedeće tri distribucije:

$$\text{Fréchet: } \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & , \quad x > 0 \end{cases}, \quad \alpha > 0$$

$$\text{Weibull: } \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha) & , \quad x \leq 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}, \quad \alpha > 0$$

$$\text{Gumbel: } \Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}.$$



Slika 4.1: Distribucije ekstremnih vrijednosti

<sup>1</sup>Pod nedegeneriranom funkcijom distribucije misli se na ograničenu distribuciju koja nije koncentrirana u jednoj točki.

Jednparametarska reprezentacija ove tri distribucije je poznata pod nazivom *standardna generalizirana distribucija ekstremnih vrijednosti* i dana je s:

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}) & , \quad \xi \neq 0 \\ \exp(-e^{-x}) & , \quad \xi = 0 \end{cases}, \quad \text{gdje je } 1 + \xi x > 0. \quad (4.1)$$

Primjetimo, ukoliko uzmemo za  $\xi = \frac{1}{\alpha}$  dobijemo Fréchetovu distribuciju, za  $\xi = -\frac{1}{\alpha}$  dobijemo Weibullovu distribuciju, a za  $\xi = 0$  dobijemo Gumbelovu distribuciju. Parametar  $\xi$  definira oblik repa i zovemo ga indeks ekstremnih vrijednosti, a u slučaju  $\xi > 0$  parametar  $\alpha = 1/\xi$  zovemo repni indeks i on određuje težinu repa distribucije. Što je vrijednost parametra  $\alpha$  niža to su ekstremni gubici vjerojatniji. Osim jednparametarske GEV distribucije, u praksi se još koristi i GEV distribucija s tri parametra

$$H_{\xi,\sigma,\mu} = H_\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) & , \quad 1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma} > 0, \quad \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(\frac{x-\mu}{\sigma})) & , \quad x \in \mathbb{R}, \quad \xi = 0 \end{cases}$$

**Definicija 4.1.** Za funkciju distribucije  $F$  za koju vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) = H(x) \quad (4.2)$$

gdje je  $d_n$  pozitivan niz realnih brojeva, a  $c_n$  niz realnih brojeva, kažemo da pripada domeni privlačnosti od  $H$  i pišemo  $F \in MDA(H)$ .

**Primjer 4.1.** Neka je dana Pareto( $\alpha, \beta$ ) distribucija čija je funkcija distribucije

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad \beta \geq 0, \quad x \geq 0.$$

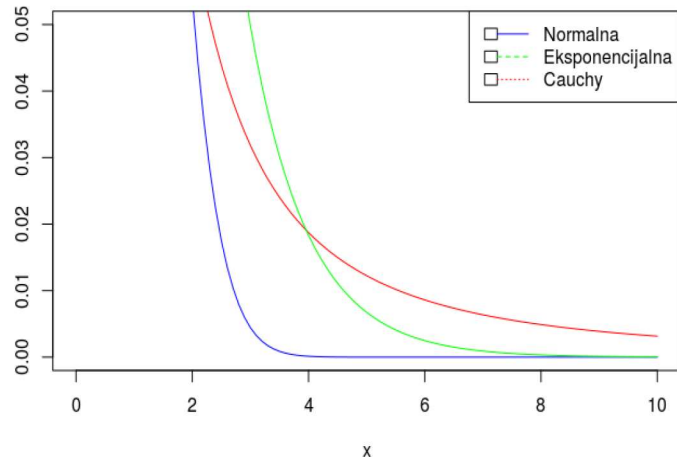
Pomoću (4.2) slijedi

$$\begin{aligned} F^n(c_n x + d_n) &= \left(1 - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right)^n, \quad 1 + \frac{x}{\alpha} \geq n^{-\frac{1}{\alpha}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) &= \exp\left(-\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right), \quad 1 + \frac{x}{\alpha} > 0. \end{aligned}$$

Iz čega zaključujemo da je  $F \in MDA(H_{\frac{1}{\alpha}})$ .

Distribucije koje pripadaju domeni privlačnosti  $MDA(H_\xi)$ ,  $\xi > 0$ , su distribucije s teškim repovima čiji repovi opadaju u 0 sporije od repova eksponencijalne distribucije koju smatramo da je granični slučaj između distribucija s teškim i lakim repovima. To možemo vidjeti na sljedećoj slici:





Slika 4.2: Usporedba distribucije s teškim repovima, lakim repovima i eksponencijalne

**Definicija 4.2.** Za slučajnu varijablu  $X$  s funkcijom distribucije  $F$  kažemo da ima *distribuciju s teškim repom* ako je

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = L(x)x^{-\alpha}$$

gdje  $\alpha > 0$  zovemo repni indeks, dok je  $L$  funkcija takva da je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1, \quad t > 0.$$

Mnoge situacije spadaju u distribucije s teškim repovima, za primjer uzmimo tzv. Pareto princip koji kaže da je 80% bogatstva u vlasništvu 20% stanovništva. U distribucije s teškim repovima spadaju lognormalna, Pareto, Studentova t-distribucija, Fréchetova, Cauchyjeva distribucija i mnoge druge.

Sljedeći teorem nam daje karakterizaciju funkcija koje pripadaju domenama privlačnosti distribucija definiranih u Teoremu 4.1.

**Teorem 4.2** (Fréchet MDA, Gnedenko). Za  $\xi > 0$ ,

$$F \in MDA(H_\xi) \text{ ako i samo ako } \bar{F}(x) = x^{-\frac{1}{\xi}}L(x).$$

Ove distribucije se najviše proučavaju u TEV, a od velikog su značaja u financijskim primjenama. Ako je  $X$  slučajna varijabla s funkcijom distribucije  $F$  koja je element  $MDA(H_\xi)$ ,  $\xi > 0$ , tada se može pokazati da je  $E[X^k] = \infty$  za  $k > 1/\xi$ , dok u Gumbelovom slučaju vrijedi da je  $E[X^k] < \infty, \forall k > 0$ . Karakterizacija distribucija u domeni privlačnosti Gumbelove distribucije,  $\xi = 0$ , je kompliciranija od karakterizacije u Fréchet slučaju iz razloga što obuhvaća razne distribucije kao što su gamma, normalna, lognormalna i mnoge druge distribucije čiji su repovi teži od normalne. Zbog toga je pogrešno za pretpostaviti da je u financijskom modeliranju zanimljiva samo klasa Fréchetovih distribucija. Za razliku od

ove dvije klase, Weibull je najmanje zanimljiva kad se radi o financijskom modeliranju jer distribucije koje pripadaju ovoj klasi imaju konačne desne krajeve. Iako su svi potencijalni financijski gubici i gubici u osiguranjima u praksi ograničeni, ipak se favoriziraju modeli koji imaju neograničeni nosač distribucije za modeliranje gubitaka. Izuzetak jedino može biti područje modeliranja kreditnog rizika.

## 4.2 Metoda vrijednosti iznad praga

Kod metode vrijednosti iznad praga se upotrebljavaju svi ekstremni podaci u smislu da prelaze posebno određeni visoki prag. Veliku važnost kod modeliranja vrijednosti iznad praga ima tzv. *Generalizirana Pareto distribucija* -  $GPD(\beta, \xi)$

$$G_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & , \quad \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) & , \quad \xi = 0 \end{cases}$$

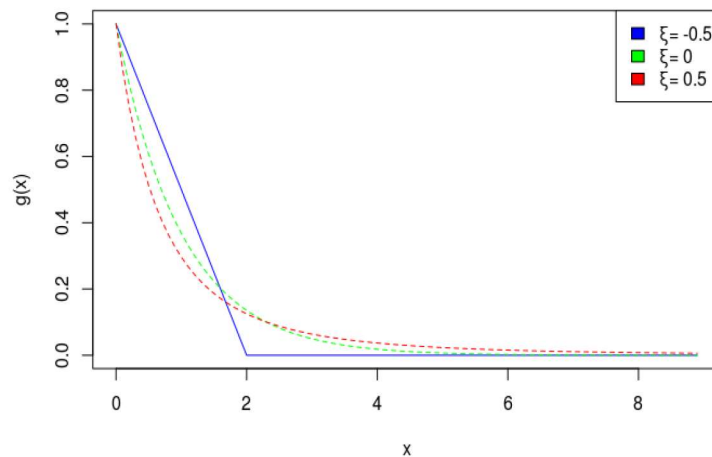
gdje je  $\xi$  parametar oblika, a  $\beta > 0$  parametar skaliranja.

Slika generalizirane Pareto distribucije je

$$x \in \begin{cases} [0, \infty) & , \quad \xi \geq 0 \\ [0, -\frac{\beta}{\xi}) & , \quad \xi < 0 \end{cases}$$

dok je funkcija gustoće dana izrazom

$$g(x; \xi, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-1-\frac{1}{\xi}} & , \quad \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) & , \quad \xi = 0 \end{cases} \quad \text{pri čemu je } g(x=0) = \frac{1}{\beta}.$$



Slika 4.3: Funkcija gustoće generalizirane Pareto distribucije

Svojstva generalizirane Pareto distribucije ovise o parametru oblika  $\xi$ :

- Slučaj kada je  $\xi = 0$  odgovara eksponencijalnoj distribuciji čiji je desni rep neograničen.
- Ako je  $\xi > 0$ , onda je desni rep od GPD neograničen te imamo distribuciju s teškim repovima pa neki momenti ne postoje. Posebno za  $\xi \geq \frac{1}{m}$  momenti veći ili jednaki  $m$  ne postoje npr. ako uzmemo da je  $m = 2$ , tada varijanca i veći momenti ne postoje.
- Ako je  $\xi < 0$ , onda je  $x \in [0, -\frac{\beta}{\xi}]$  tj. imamo ograničenije desnog repa. Međutim ovaj slučaj nije ni važan pri modeliranju operativnog rizika jer svi prijavljeni rezultati do sada pokazuju nenegativan parametar oblika. Jedini slučaj kada bi bilo bitno promatrati  $\xi < 0$  je ukoliko se počne razmišljati o mehanizmu kontrole rizika koji ograničava gubitke pomoću gornje granice. Navedimo neke od posebnih slučajeva za negativni parametar oblika: ako je  $\xi = -\frac{1}{2}$ , tada je  $h(x) = \frac{1}{\beta}(1 - \frac{x}{2\beta})$  linearna funkcija; ako je  $\xi = -1$ , onda je  $h(x) = \frac{1}{\beta}$  konstanta; ako je  $\xi < -1$ , onda je  $h(x)$  beskonačna na granici domene  $-\frac{\beta}{\xi}$ .

Problem kod metode vrijednosti iznad praga se javlja pri odabiru odgovarajućeg praga zbog toga što za to još uvijek ne postoji analitičko rješenje već se koriste vizualna zapažanja na osnovu ME funkcije od GPD.

Neka je  $X$  slučajna varijabla s distribucijom  $F(X) = P(X \leq x)$ . S obzirom na prag  $u$ , funkcija distribucije prekoračenja od  $X$  preko  $u$  dana je izrazom:

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)}. \quad (4.3)$$

pri čemu je  $0 \leq x < x_F - u$ ,  $x_F \leq \infty$  desna krajnja točka funkcije  $F$ . Ukoliko je  $F = G_{\xi, \beta}$ , tada iz (4.3) slijedi da je  $F_u(x) = G_{\xi, \beta(u)}(x)$  gdje je  $\beta(u) = \beta + \xi u$  pri čemu je  $0 \leq x < \infty$  ako je  $\xi \geq 0$  i  $0 \leq x \leq -\frac{\beta}{\xi} - u$  ako je  $\xi < 0$ . Funkcija prekoračenja praga ostaje GPD s istim parametrom oblika  $\xi$ , ali parametar skaliranja više nije  $\beta$  nego  $\beta + \xi u$  odnosno povećanjem praga  $u$  parametar skaliranja raste linearno. Funkcija srednjeg prekoračenja (vidi definicija 3.12) od GPD je

$$e(u) = \frac{\beta(u)}{1 - \xi} = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}$$

gdje je  $0 \leq u < \infty$  za  $0 \leq \xi < 1$  i  $0 \leq u \leq -\frac{\beta}{\xi}$  za  $\xi < 0$ .

**Lema 4.1.** (vidi [21, str. 279]) *Ako je  $F$  funkcija distribucije gubitka s desnom krajnjom točkom  $x_F$  te ako je za odabrani visoki prag funkcija distribucije prekoračenja dana s  $F_u = G_{\xi, \beta}(x)$  za  $0 \leq x < x_F - u$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$ , tada je  $F_v(x) = G_{\xi, \beta + \xi(v-u)}(x)$  za svaki visoki prag  $v \geq u$ .*

Ovako funkcija distribucije prekoračenja preko visokog praga ostaje GPD s istim parametrom oblika  $\xi$ , ali parametar skaliranja raste linearno uz prag  $v$ . Ako je  $\xi < 1$ , onda je ME funkcija dana s

$$e(v) = \frac{\beta + \xi(v - u)}{1 - \xi} = \frac{\xi v}{1 - \xi} + \frac{\beta - \xi u}{1 - \xi}, \quad (4.4)$$



pri čemu je  $u \leq v < \infty$  za  $0 \leq \xi < 1$  i  $u \leq v < u - \frac{\beta}{\xi}$  za  $\xi < 0$ .  
 Podsjetimo se, empirijska ME funkcija dana je formulom:

$$e_n(v) = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - v) \mathbf{I}_{\{X_j > v\}}}{\sum_{j=1}^n \mathbf{I}_{\{X_j > v\}}}.$$

Za analiziranje ovih funkcija se konstruira ME graf  $\{(X_{i,n}, e_n(X_{i,n})), 2 \leq i \leq n\}$ , pri čemu je  $X_{i,n}$   $i$ -ta uređajna statistika. Ukoliko podaci prate GPD model preko visokog praga, tada (4.4) ukazuje da će povećanjem vrijednosti  $v$  graf biti linearniji.

U prethodnom poglavlju 4.1 smo naveli karakterizacije domena privlačnosti GEV distribuciju za slučajeve kada je  $\xi > 0$ ,  $\xi = 0$  i  $\xi < 0$ . Sljedeći teorem nam daje karakterizaciju za  $MDA(H_\xi)$ ,  $\forall \xi$ .

**Teorem 4.3** (Pickands-Balkema-de Haan). (*vidi [21, str. 277]*) Funkcija  $\beta(u)$  takva da je

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0$$

postoji ako i samo ako je  $F \in MDA(H_\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Odnosno, ovaj teorem kaže da ako i samo ako je  $F$  funkcija distribucije za koju distribucija maksimuma (4.2) je GEV dana s (4.1), tada povećanjem praga  $u$  funkcija distribucije prekoračenja  $F_u$  konvergira k GPD (4.2).

### 4.3 Procjena parametra oblika $\xi$ pod domenom maksimalne privlačnosti

Često se događa da nemamo dovoljan broj podataka o operativnim gubicima u gornjem repu čime se procjena parametara GPD distribucije može zakomplicirati.

#### 4.3.1 Hillov procjenitelj za $\alpha = \xi^{-1} > 0$

Neka su  $X_1, \dots, X_n$  n.j.d. podaci s funkcijom distribucije  $F \in MDA(\Phi_\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ . Tada je po Teoremu 4.2  $\bar{F}(x) = L(x)x^{-\alpha}$ . Cilj nam je pronaći procjenitelja za repni indeks  $\alpha$  pomoću danih podataka. Hillov procjenitelj za  $\alpha$  dan je izrazom

$$\hat{\alpha}^H = \hat{\alpha}_{k,n}^H = \left( \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n} \right)^{-1}, \quad 2 \leq k \leq n,$$

pri čemu je  $k$  broj podataka koji se nalaze iznad praga.

U praksi se najčešće koristi graf Hillova procjenitelja za različite vrijednosti  $k$ , čime se dobije Hillov graf  $\{(k, \hat{\alpha}_{k,n}^H) : k = 2, \dots, n\}$ . Postoje razne metode pomoću kojih se mogu izvesti asimptotski ekvivalenti za  $\hat{\alpha}^H$  koje možete pogledati u [13] i [21].

### 4.3.2 Pickandsov procjenitelj za $\xi \in \mathbb{R}$

Kao i Hillov procjenitelj, Pickandsov procjenitelj se temelji na uređajnim statistikama  $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ .

Neka su  $X_1, \dots, X_n$  nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s funkcijom distribucije  $F \in MDA(H_\xi)$ . Pickandsov procjenitelj za  $\xi \in \mathbb{R}$  je definiran izrazom

$$\hat{\xi}_{k,n}^P = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{X_{k,n} - X_{2k,n}}{X_{2k,n} - X_{4k,n}}.$$

Slično kao kod Hillova procjenitelja, i ovdje se za analizu koristi tzv. Pickandsov graf  $\{(k, \hat{\xi}_{k,n}^P : k = 1, \dots, n)\}$ , pri čemu se  $\hat{\xi}_{k,n}^P$  odabire iz područja gdje je graf približno horizontalan. Svojstva Pickandsova procjenitelja možete pogledati u [13].



## 5 VaR

Operativni VaR-a je dio jednogodišnjeg iznosa kapitala koji je dostatan za pokrivanje svih neočekivanih gubitaka. Dakle, kao što smo ranije spomenili, VaR određuje najgori mogući gubitak koji se može dogoditi u danom pouzdanom intervalu tijekom određenog vremenskog perioda. Prije izračuna VaR-a treba biti zadana razina pouzdanosti, razdoblje procjene te temeljna valuta. Prema Basel II kapitalni zahtjev za operativni rizik treba se računati za jednogodišnji period, a razina pouzdanosti je propisana od strane BCBS i iznosi 99.9%.

### 5.1 Monte Carlo metoda

Monte Carlo metoda je prvotno nastala za primjenu u fizici i kemiji. Međutim zbog svoje jednostavnosti, računanje distribucije ukupnog gubitka se temelji na Monte Carlo simulacijama scenarija gubitaka. Pretpostavimo da učestalost gubitaka prati Poissonovu distribuciju s parametrom  $\lambda$ . Tada je algoritam sljedeći:

1. Simulirati velik broj realizacija iz Poissonove distribucije s parametrom  $\lambda$ . Time se dobije niz  $n_1, n_2, \dots, n_{100.000}$  koji predstavlja scenarije ukupnog broja događaja gubitaka tijekom jedne godine.
2. Za svaki od scenarija  $n_k$ ,  $1 \leq k \leq 100.000$ , simulira se  $n_k$  broj iznosa gubitaka iz distribucije gubitaka.
3. Za svaki od scenarija  $n_k$ ,  $1 \leq k \leq 100.000$ , izračunaju se iznosi gubitaka generirani u prethodnom koraku da bi se dobio niz cjelokupnih jednogodišnjih gubitaka.

Pomoću ovog algoritma se lako dobije VaR kao  $\alpha$  kvantil iz simuliranog uzorka ukupnih gubitaka. U poglavlju 6 ćemo generirati broj iz Poissonove distribucije s procjenjenim parametrom za svaki od 365 dana. Ukoliko se u nekom danu dogodilo  $k$  gubitaka, tada se generira  $k$  brojeva iz lognormalne distribucije. Potom se sumira i dobije zbroj gubitaka po danu. Nakon toga sumiramo svih 365 dana te dobijemo ukupne godišnje gubitke za godinu dana. Postupak ponovimo 1000 puta te dobijemo simulaciju za 1000 godina. Kvantili tih podataka nam daju VaR.

## 6 Primjer

### 6.1 Deskriptivna analiza

U ovom dijelu diplomskog rada ćemo modelirati podatke o gubicima koji su prikupljeni u vremenskom razdoblju do 01.01.2010. do 26.12.2010. godine, a nalaze se u R paketu opVaR. R paket opVaR se sastoji od pet elemenata:

- losses - dodjeljuje broj gubitaka, datum kada se gubitak dogodio te bruto iznos gubitka svakoj poslovnoj liniji i kategoriji rizika
- risk - dodjeljuje brojeve kategorijama rizika
- rcateg - sadrže imena kategorija rizika
- business - dodjeljuje broj gubitaka svakoj poslovnoj liniji
- blines - sadrže imena poslovnih linija

Internal BL ID	Internal RC ID	First Date of Event	Gross Loss Amount
3	2	2010-01-01	6118.118
8	3	2010-01-01	2020.120
8	3	2010-01-01	1216.180
1	2	2010-01-02	15485.235
1	6	2010-01-02	8224.022
8	3	2010-01-02	1288.661

Tablica 2

Prvi stupac svakoj poslovnoj liniji pridružuje određeni broj, tako je npr. poslovnoj liniji "Brokerski poslovi sa stanovništvom" pridružen broj 3, "Trgovina i prodaja" broj 8 itd. Drugi stupac pridružuje broj svakoj od kategorija rizika pa je npr. kategorija rizika broj 2 "Klijenti, proizvodi i poslovni postupci". Isto tako iščitavamo da se u toj ćeliji rizika (2,3) prvi gubitak dogodio 01.01.2010., a bruto iznos gubitka iznosi 6118.118. Pogledajmo numeričke karakteristike gubitaka.

Datum događaja	Bruto iznos gubitka
2010-01-17	Min. : 26
2010-04-01	1st Qu.: 3569
	Median : 8694
	Mean : 82217
2010-09-04	3rd Qu.: 25483
2010-04-06	Max. :19060393

Tablica 3: Deskriptivna statistika podataka

Uočavamo da se minimalni gubitak dogodio 17.01.2010. i iznosio je 26,00, dok je maksimalni gubitak nastupio 06.04.2010. i iznosio je 19.060.393,00.

Na Slici 6.1 se nalazi matrica čije stupce čine poslovne linije, a retci su kategorije rizika. U svakoj ćeliji se nalaze tri broja, ukoliko se u toj ćeliji dogodio gubitak. Gornji broj predstavlja broj gubitaka, srednji broj je prosječni iznos gubitaka koji se dogodio u toj ćeliji, a donji broj je iznos maksimalnog gubitka. Tako je npr. u ćeliji (1,2), odnosno "Agencijske usluge"/"Klijenti, proizvodi i poslovni postupci", bilo 108 gubitaka pri čemu prosječni gubitak iznosi 123765.0357, a maksimalni gubitak 3334580. Minimalni gubitak za tu ćeliju rizika se može izračunati te se dobije da iznosi 302.4618. Isto tako lako se može iščitati da gubitaka nema u kategoriji rizika "Prekidi i narušavanja poslovanja i rada sustava" i niti jednoj poslovnoj liniji.

broj gubitaka
prosječni gubitak
max gubitak

Kategorije rizika	Internal Fraud	10 213930.9042 1674822.318	27 102977.455 768371.6335	10 3104.864 7181.9867	0	15 1283953.621 19060392.7674	10 4923.8959 12231.5363	12 31823.7752 209302.0109	0
	External Fraud	21 59875.9398 620323.8888	0	8 16383.9826 53510.6858	7 4027.1698 7795.5252	0	0	0	3 3301.1455 7028.1014
	Execution, Delivery & Process Management	0	21 111007.4339 1161367.6303	0	5 1576.65 3485.077	12 22219.2283 69359.5108	3 227859.0643 670307.3176	29 18037.382 42767.3888	0
	Employment Practices and Workplace Safety	0	0	22 5832.1241 40266.0151	0	12 16457.0626 27853.2443	0	0	0
	Damage to Physical Assets	0	0	0	23 5043.1729 14810.5447	45 20104.0662 305483.7754	0	0	35 8879.7342 66063.197
	Clients, Products & Business Practices	108 123765.0357 3334580.1974	0	58 4716.3682 22667.2064	0	0	0	76 24348.7132 321220.4866	0
	Business Disruption and System Failures	0	0	0	0	0	0	0	0
		Agency Services	Asset Management	Commercial Banking	Corporate Finance	Payment & Settlement	Retail Banking	Retail Brokerage	Trading & Sales

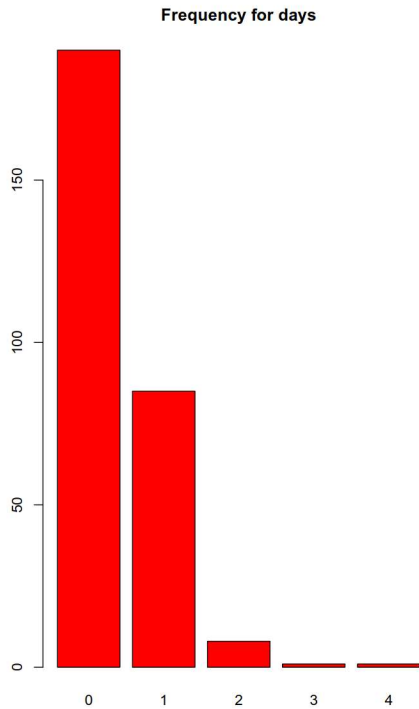
Poslovne linije

Slika 6.1: Matrica gubitaka

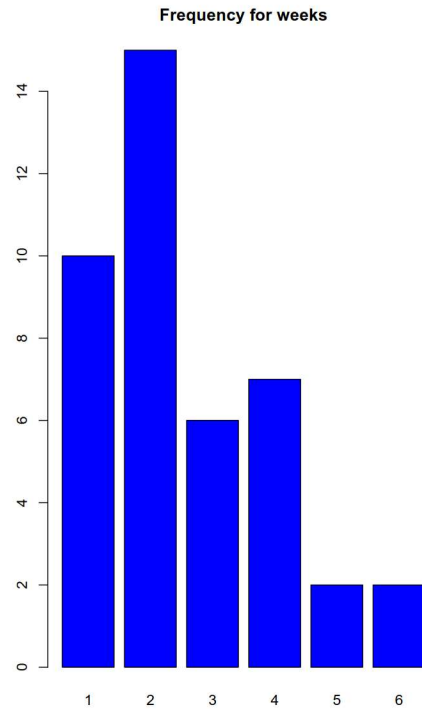
## 6.2 Učestalost gubitaka

Kao što smo ranije napisali, za modeliranje učestalosti gubitaka najčešće se koriste Poissonova i negativna binomna distribucija. Analizirajmo učestalost gubitaka za prvu poslovnu liniju "Agencijske usluge" i drugu kategoriju rizika "Klijenti, proizvodi i poslovni postupci". Sa Slike 6.2 te tablice 4 vidimo da je 190 dana bilo bez gubitaka, 85 dana s jednim gubitkom, 8 dana s dva gubitka, te po jedan dan s tri i četiri gubitka. Ukoliko za period uzmemo tjedne, vidimo da se 10 tjedana nije dogodio niti jedan gubitak, 15 tjedana je bilo s dva gubitka, 6 tjedana je bilo s tri gubitka, 7 tjedana sa četiri gubitka, 2 tjedna s pet gubitaka te 2 tjedna sa šest gubitka.





(a) Učestalost gubitaka po danima



(b) Učestalost gubitaka po tjednima

Slika 6.2: Histogrami učestalosti gubitaka za različite periode

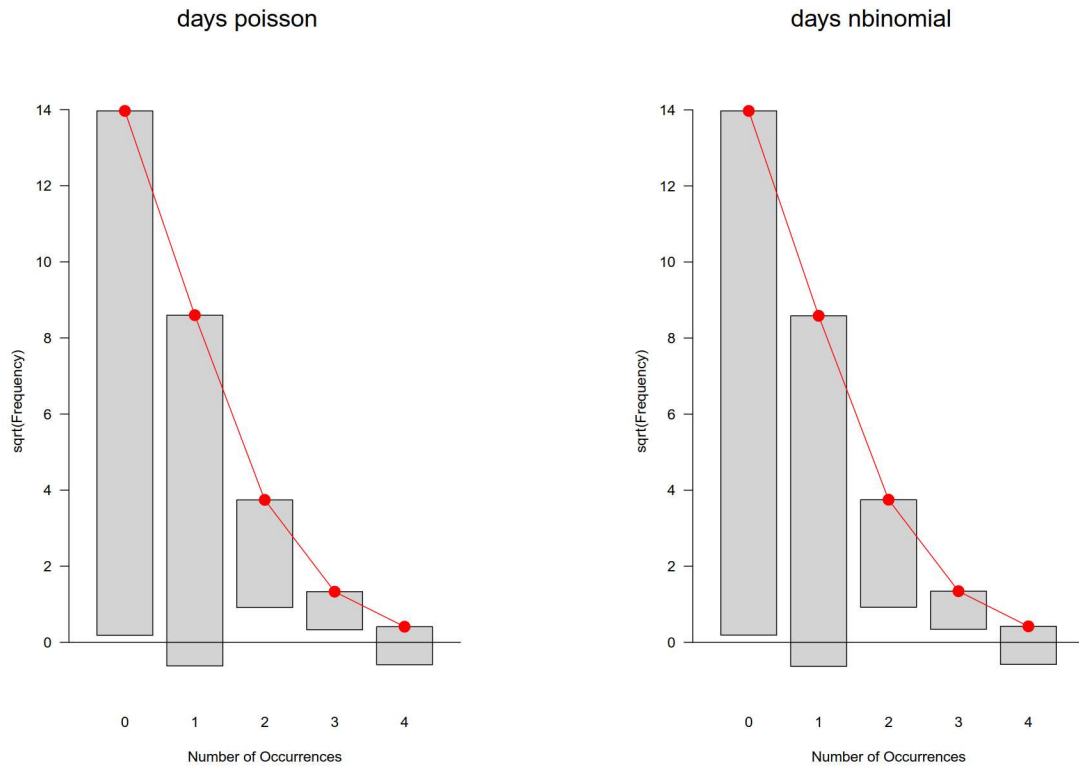
0	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6
190	85	8	1	1	10	15	6	7	2	2

(a) Učestalost gubitaka po danima

(b) Učestalost gubitaka po tjednima

Tablica 4: Učestalost gubitaka kroz različite periode

Sljedeće nas zanima koja od navedene dvije distribucije bolje opisuje podatke o učestalosti gubitaka kada za period uzmemo dane i tjedne. S obzirom da je frekvencija nekih gubitaka mala, npr. imamo samo 1 dan sa četiri gubitka dok je čak 190 dana bez gubitaka, nacrtat ćemo tzv. rootogram (vidi [16]). Naime, rootogram je grafički alat pomoću kojeg vizualno uspoređujemo empirijske frekvencije s prilagođenom frekvencijom pri čemu se na  $y$ -osi nalaze korijeni frekvencija kako bi manje frekvencije bile što preglednije. Na Slici 6.3 su prikazane promatrane frekvencije pomoću stupaca, a prilagođene frekvencije su prikazane pomoću crvenih točaka koje su spojene krivuljom.



(a) Poissonova distribucija

(b) Negativno binomna distribucija

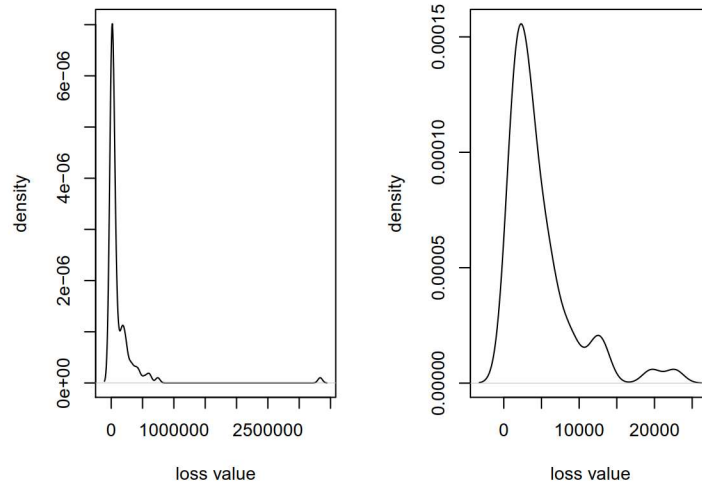
Slika 6.3: Usporedba prilagodbe podacima Poissonove i negativno binomne distribucije

Sa Slike 6.3a uočavamo da za  $k = 0, 2, 3$  Poissonova distribucija blago precjenjuje učestalost gubitaka, dok ih za  $k = 1, 4$  blago podcjenjuje. Sličnu situaciju imamo i za negativnu binomnu distribuciju, međutim nakon što smo pomoću  $\chi^2$ -testa testirali da li uzorak dolazi iz Poissonove distribucije, dobijemo  $p - vrijednost = 0.06879638 > 0.05$ . Stoga, na razini značajnosti 0.05 ne možemo tvrditi da podaci ne dolaze iz Poissonove distribucije. Sličnim postupkom se dobije da Poissonova distribucija bolje opisuje podatke ukoliko se za period uzmu tjedni.

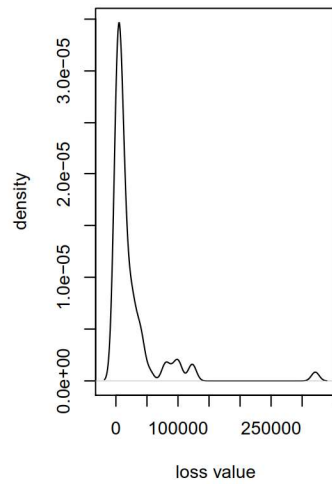
### 6.3 Ozbiljnost gubitaka

U prethodnom dijelu smo modelirali učestalost gubitaka za ćeliju (1, 2). Sada ćemo za tu istu ćeliju pokušati pronaći distribuciju koja najbolje opisuje ozbiljnost gubitaka. Na Slici 6.4 su prikazani neprazni grafovi gustoća za sve poslovne linije i kategorije rizika "Klijenti, proizvodi i poslovni postupci".

**Services/Clients, Products & Busineal Banking/Clients, Products & Busi  
( 108 ) ( 58 )**



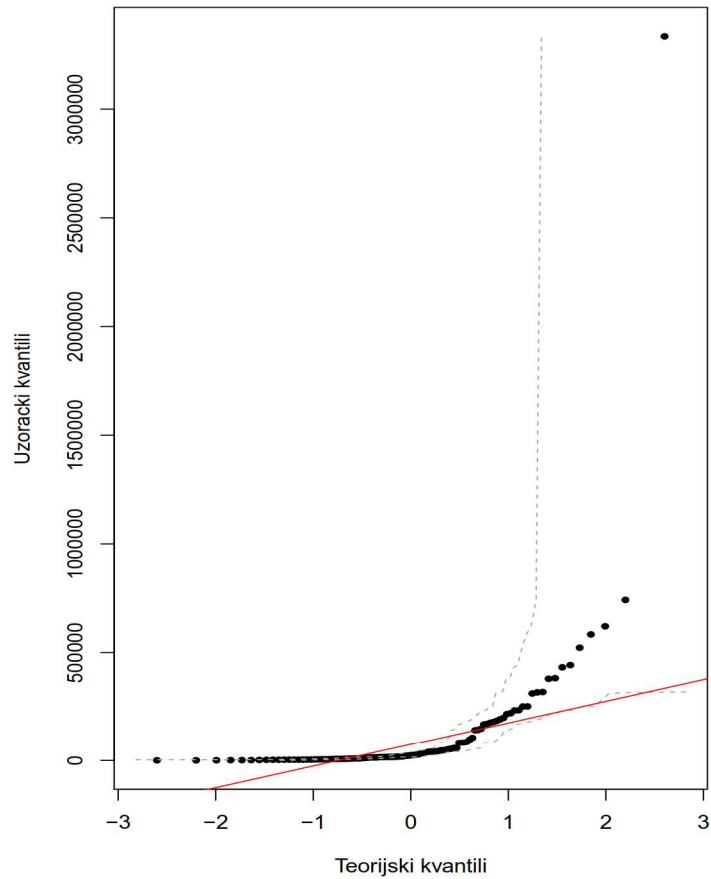
**rokerage/Clients, Products & Busine  
( 76 )**



Slika 6.4: Gustoće gubitaka za sve poslovne linije i kategoriju rizika "Klijenti, proizvodi i poslovni postupci"

Najviše gubitaka je bilo u "Agencijske usluge"/"Klijenti, proizvodi i poslovni postupci", čak 108, dok je najmanje bilo u "Brokerski poslovi sa stanovništvom"/"Klijenti, proizvodi i poslovni postupci". Pogledajmo koja distribucija najbolje opisuje ozbiljnost gubitaka ćelije "Agencijske usluge"/"Klijenti, proizvodi i poslovni postupci". Najprije provjerimo da li su podaci o gubicima normalno distribuirani.

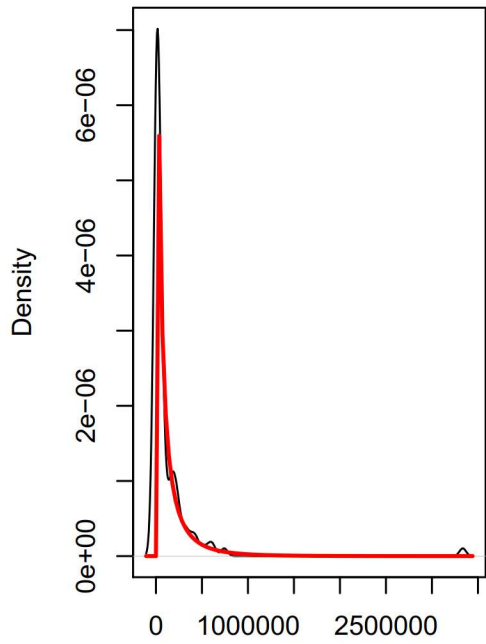




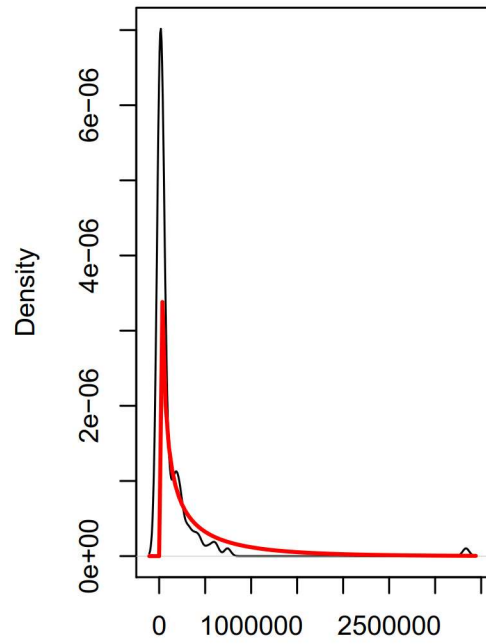
Slika 6.5: QQ plot

Sa Slike 6.5 naslućujemo da podaci nisu normalno distribuirani, ali provjerimo to pomoću Kolmogorov-Smirnov testa. Kako je dobivena  $p - vrijednost = 2.2e - 16 < 0.05$ , na razini značajnosti 0.05 odbacujemo nulhipotezu i prihvaćamo alternativno, odnosno zaključujemo da podaci o gubicima nisu normalno distribuirani. U poglavlju 3.2 smo naveli distribucije koje se najčešće koriste za modeliranje ozbiljnosti gubitaka.

**Empirical and fitted density: weibu    Empirical and fitted density: gamn**

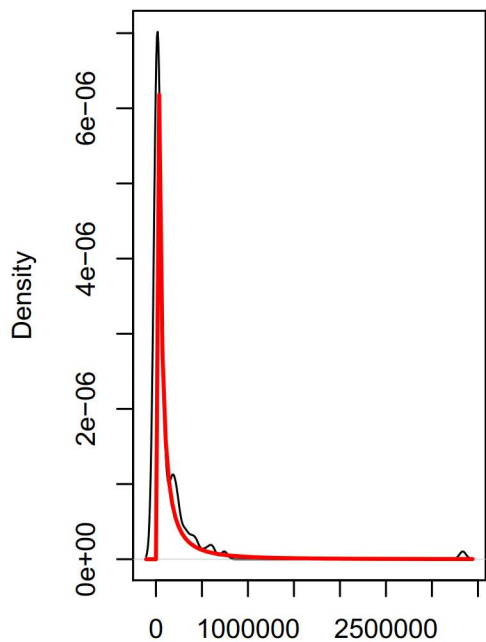


N = 108    Bandwidth = 3.562e+04



N = 108    Bandwidth = 3.562e+04

**Empirical and fitted density: log-nor**

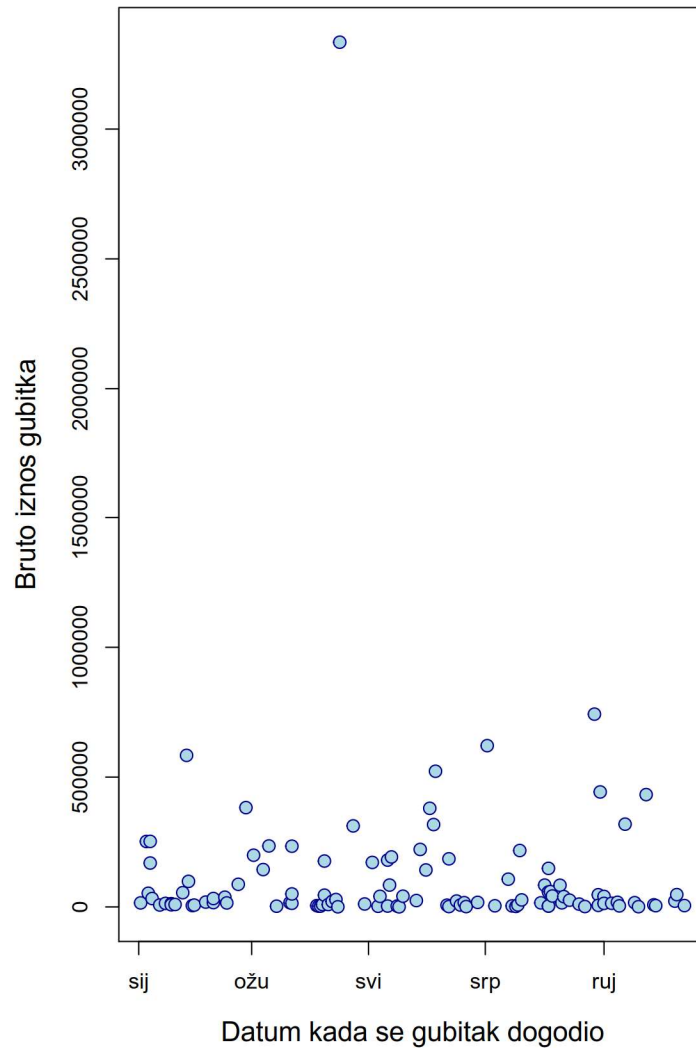


N = 108    Bandwidth = 3.562e+04

Slika 6.6

S prethodne slike naslućujemo da lognormalna distribucija najbolje opisuje ozbiljnost

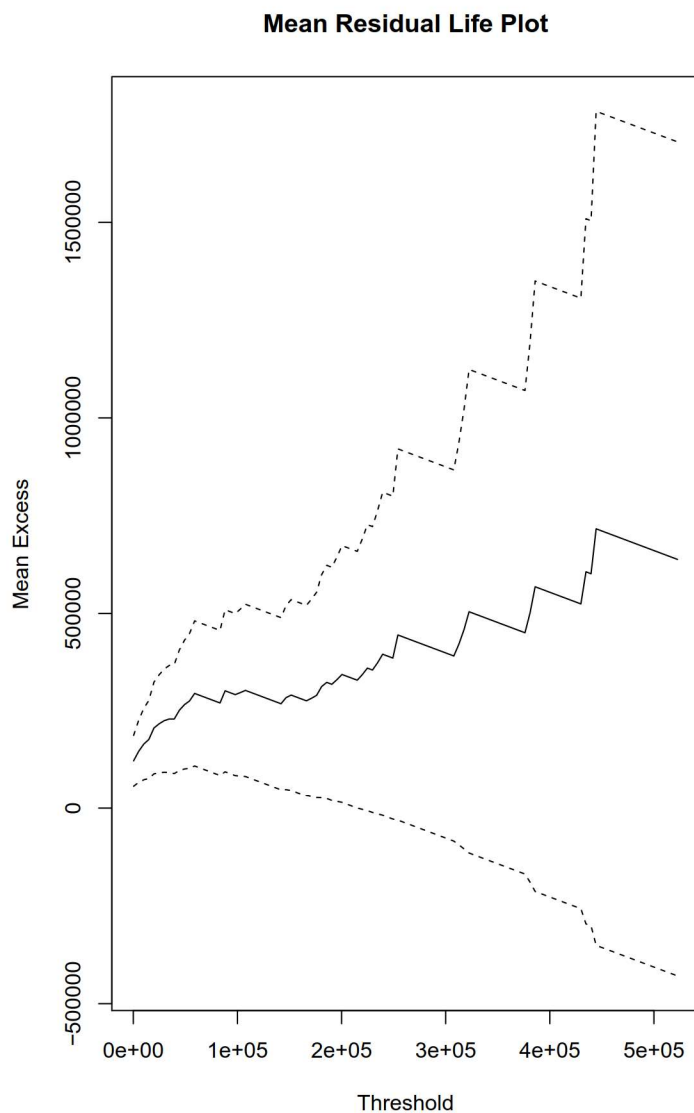
gubitaka. Međutim, nas najviše zanimaju gubici koji su imali najveći utjecaj odnosno gubici rijetke učestalosti/visoke ozbiljnosti i oni se nalaze u repu distribucije. Provesti ćemo metodu vrijednosti iznad praga stoga najprije pronadimo prag  $u$ . Na Slici 6.7 se nalaze gubici po mjesecima. Vidimo da se većina gubitaka nalazi malo iznad nule, stoga nas ti gubici ne zanimaju.



Slika 6.7: Plot raspršenosti gubitaka tijekom 2010. godine

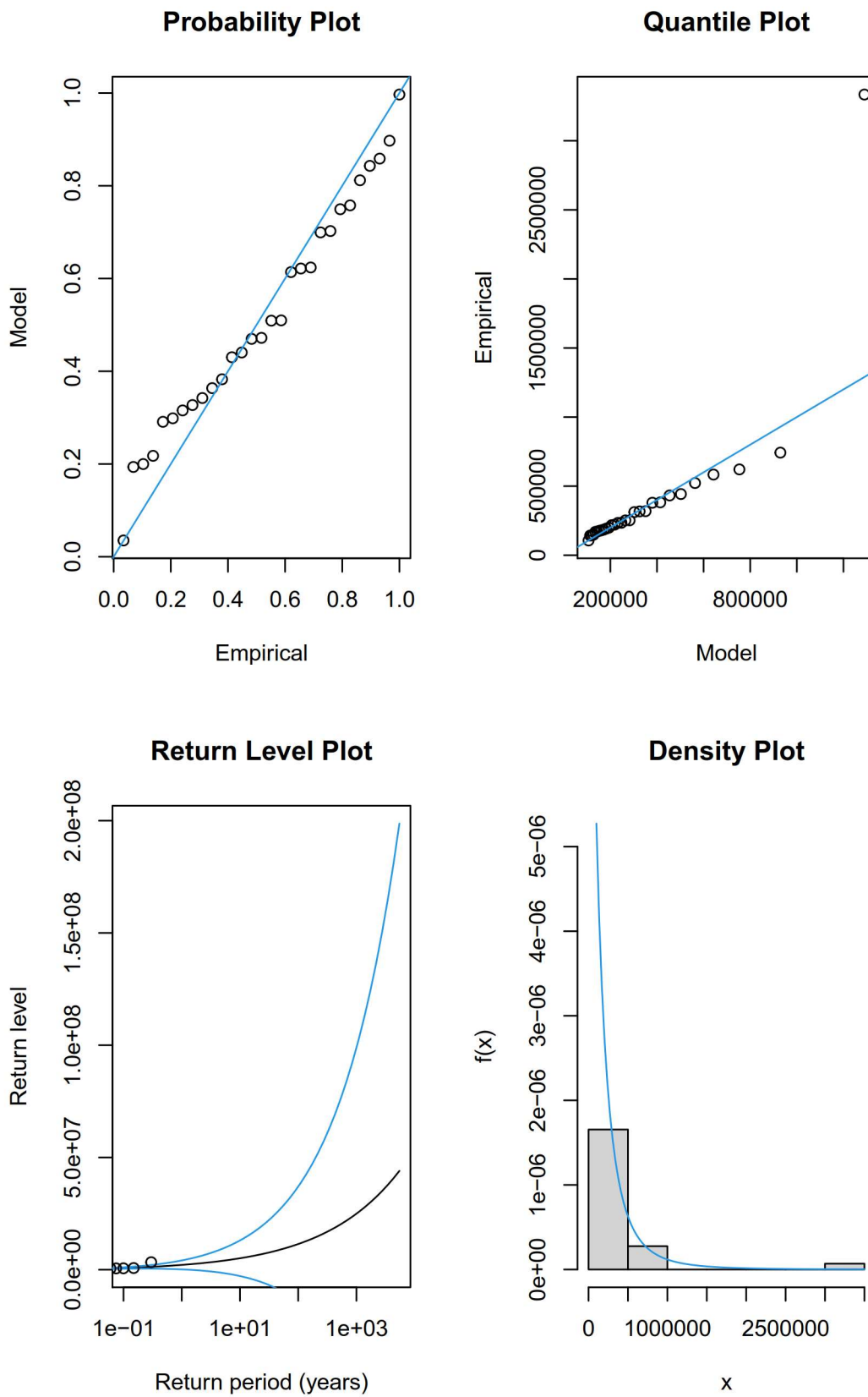
Sa Slike 6.8 uočavamo da imamo blagu krivulju do otprilike 100000, stoga ćemo za prag uzeti 100000. Iscrtkana linija predstavlja 95%-tni pouzdani interval.





Slika 6.8: MRL graf

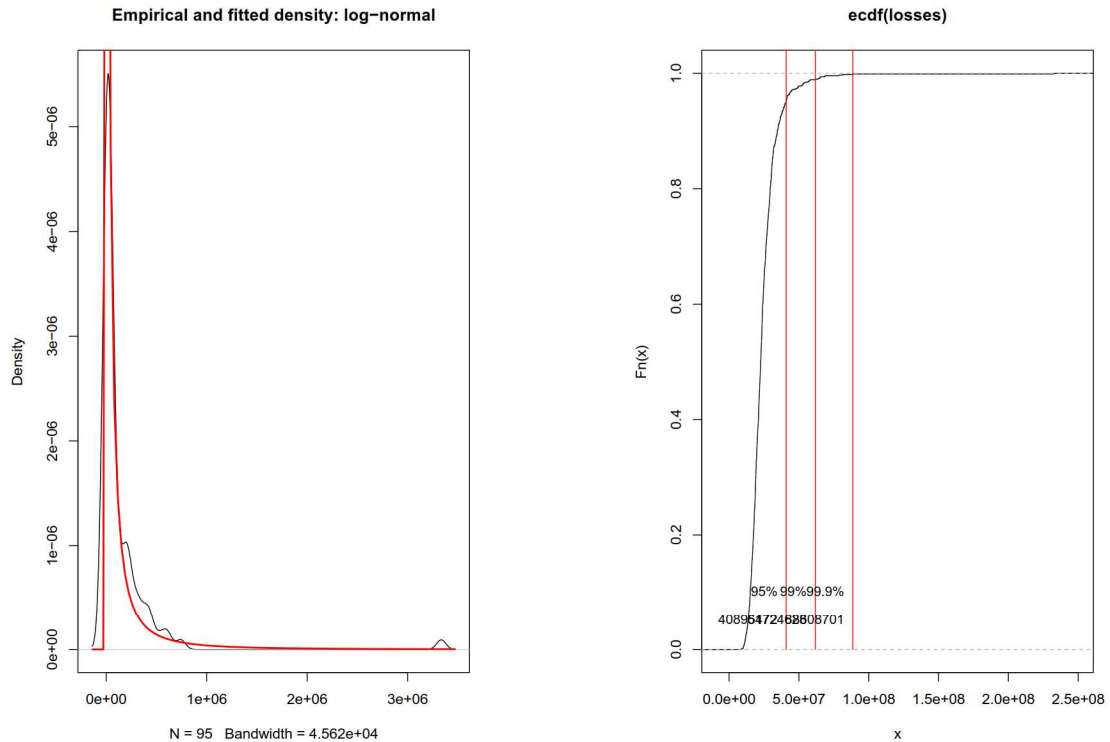
Isto tako uočavamo trend rasta koji ukazuje na distribuciju s teškim repovima pa pokušajmo vidjeti da li GPD dobro opisuje podatke. Koristiti ćemo se funkcijom `gpd.fit()` te dobijemo da su procjenjeni parametri  $\hat{\beta} = 189650.6$  i  $\hat{\xi} = 0.3295935$ , a iznad praga  $u$  se nalazi 29 gubitaka. Na Slici 6.9 primjećujemo da je generalizirana Pareto distribucija korektno prilagođena podacima.



Slika 6.9: Dijagnostički grafovi za analizu praga prekoračenja

## 6.4 VaR

Nakon što smo odabrali distribucije za učestalost i ozbiljnost gubitaka, VaR ćemo izračunati pomoću Monte Carlo simulacija.



Slika 6.10: Lognormalna prilagodba gubicima; Empirijska funkcija distribucije za tisuću simuliranih godišnjih gubitaka za ćeliju (1, 2)

Kao što smo ranije napisali, kapitalni zahtjev je definiran kao 0.999 VaR. U tablici 5 imamo da ukoliko kapitalni zahtjev iznosi 42.080.414,00, tada postoji 5% šanse da banka neće biti u mogućnosti pokriti operativne gubitke koji se nalaze u ćeliji (1, 2), a ako kapitalni zahtjevi iznose 101.163.144,00, tada postoji samo 0,01% šanse da banka neće biti u mogućnosti pokriti operativne gubitke za ćeliju (1, 2).

95%	99%	99.9%
42080414	59239452	101163144

Tablica 5: Kvantili za ćeliju (1, 2)



## Literatura

- [1] I.S. Akkizidis, V. Bouchereau, *Guide to Optimal Operational Risk and BASELII*, Auerbach Publications Taylor & Francis Group, 2005.
- [2] F. Aue, M. Kalkbrener, *LDA at work: Deutsche Bank's approach to quantifying operational risk*, The Journal of Operational Risk, 2007.
- [3] Basel Committee on Banking Supervision, *Consultative Document: Operational Risk*, January 2001
- [4] Basel Committee on Banking Supervision, *Consultative Document: Operational risk – Revisions to the simpler approaches*, October 2014.
- [5] Basel Committee on Banking Supervision, *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*, June 2006.
- [6] Basel Committee on Banking Supervision, *The joint forum: Operational risk transfer across financial sectors*, August 2003.
- [7] M. Benšić, *Statistika*, Predavanja, Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek
- [8] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Predavanja, Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.
- [9] C. Bolancé, J. Gustafsson, M. Guillén, J.P.Nielsen, *Quantitative operational risks models*, Chapman & Hall/CRC finance
- [10] A.S. Chernobai, F.J. Fabozzi, S.T. Rachev, *Operational Risk: A Guide to Basel II Capital Requirements, Models, and Analysis*, John Wiley & Sons, Inc 2007.
- [11] J. Corrigan, *Operational risk modelling framework*, Miliman Research Report, 2013.
- [12] M.G. Cruz, G.W. Peters, P.V. Shevchenko, *Fundamental aspects of operational risk and insurance analytic*, John Wiley & Sons, Inc.
- [13] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch, *Modeling extremal events for insurance and finance*, Berlin Springer-Verlag, 1997.
- [14] P. Embrechtsa, G. Puccettib, L. Rüschendorfc, *Model uncertainty and VaR aggregation*, Journal of banking & finance 37(2013), 2750-2764
- [15] A. Frachot, P. Georges, T. Roncalli, *Loss Distribution Approach for operational risk*, Credit Lyonnais, Groupe de Recherche Operationnelle, Working Paper, 2001.
- [16] M.Friendly, D.Meyer, *Discrete data analysis with R*, April 2015.

- [17] D. Grahovac, *Statistički praktikum*, Predavanja, Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek
- [18] G.N. Gregoriou, *Operational Risk Toward Basel III: Best Practices and Issues in Modeling, Management, and Regulation*, John Wiley & Sons, Inc 2009.
- [19] HNB, *Odluka o adekvatnosti jamstvenoga kapitala kreditnih institucija*, Narodne novine br. 1/2009., 75/2009., 2/2010., 118/2011., 2013.  
<http://old.hnb.hr/propisi/odluke-nadzor-kontrola/odluke-zoki-ozujak-2010/h-odluka-o-adekvatnosti-jamstvenoga-kapitala-ki-od%2030-6-2012.pdf>
- [20] J.R.M. Hosking, J.R. Wallis, *Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution*, *Technometrics* 29(1987), 339-349
- [21] A.J. McNeil, R. Frey, P. Embrechts, *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*, Princeton University Press, 2005.
- [22] *Statistics How To*:  
<https://www.statisticshowto.datasciencecentral.com/>
- [23] N. Šarlija, *Upravljanje kreditnim rizicima*, Predavanja, Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2008.
- [24] N. Šuvak, *Matematičke financije*, Predavanja, Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek
- [25] N. Šuvak, *Slučajni procesi*, Predavanja, Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek
- [26] L. Wei, J. Li, X. Zhu, *Operational loss data collection*, *Annals of data science* 5(2018), 313-337
- [27] <http://struna.ihjj.hr/>
- [28] <https://www.moj-bankar.hr/>

## Sažetak

U ovom radu bavili smo se operativnim rizicima koji su prisutni u svakoj financijskoj instituciji. Na početku rada smo definirali operativne rizike te se upoznali s Baselskim sporazumima koji sadrže smjernice za računanje kapitalnih zahtjeva potrebnih za podmirivanje operativnih rizika. Opisali smo tri načina za računanje kapitalnih zahtjeva pri čemu smo najviše pažnje posvetili AMA jer je to najnapredniji i najsloženiji pristup. AMA sadrži tri podvrste pristupa od kojih smo detaljno obradili pristup distribucije podataka. S obzirom da su najznačajniji gubici koji se rijetko dogode ali imaju velik utjecaj na ekonomiju, uvodimo teoriju ekstremnih vrijednosti kojom se takvi gubici mogu modelirati. U zadnjem teorijskom dijelu smo opisali kako pomoću Monte Carlo metode izračunati VaR. Za kraj smo navedenu teoriju primjenili na podatke iz R paketa opVaR.

**Ključne riječi: Operativni rizik, operativni gubitak, LDA, učestalost operativnih gubitaka, ozbiljnost operativnih gubitaka, teorija ekstremnih vrijednosti, VaR**

## Summary

In this thesis we study operational risks which are present in every financial institution. At the beginning we defined operational risk and introduced the Basel Capital Accord which contains the guidelines for capital requirements for operational risks. We described three approaches for operational risk with a focus on advanced measurement approach (AMA) which is the most complex and the most advanced method. Under AMA three approaches were proposed. One of those approaches is loss distribution approach, which we described in detail. Since the most significant losses are those with low frequency but the highest severity, we introduced extreme value theory which provides models for such losses. In the last theoretical part we described how to calculate VaR using Monte Carlo method. Finally, we applied this theory to the data from the R package opVaR.

**Key words: Operational risk, operational loss, LDA, operational loss frequency, operational loss severity, extreme value theory, VaR**



## Životopis

Keti Martinić rođena je 07.11.1992 godine u Supetru na otoku Braču u Republici Hrvatskoj. Školovanje je započela 1999. godine u osnovnu školu OŠ Pučišća, nakon čijeg je završetka pohađala Prirodoslovnu gimnaziju u Splitu u razdoblju od 2007. godine do 2011. 2014. godine je upisala Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku. Akademski naziv prvostupnice matematike je stekla 2017. godine izradom završnog rada "Fourierovi redovi" pod mentorstvom izv. prof. dr. sc. Krešimira Burazina. Iste godine je upisala Diplomski studij financijske matematike i statistike. Za vrijeme diplomskog studija stručnu praksu je obavila u knjigovodstvenom servisu SKRIF d.o.o.

## Popis tablica

1	Preuzeta sa službene stranice Hrvatske narodne banke [19] . . . . .	7
2	. . . . .	34
3	Deskriptivna statistika podataka . . . . .	35
4	Učestalost gubitaka kroz različite periode . . . . .	37
5	Kvantili za ćeliju (1, 2) . . . . .	45

## Popis slika

3.1	Funkcije gustoće . . . . .	15
3.2	Funkcije gustoće . . . . .	17
3.3	Primjeri QQ plot . . . . .	22
4.1	Distribucije ekstremnih vrijednosti . . . . .	26
4.2	Usporedba distribucije s teškim repovima, lakim repovima i eksponencijalne	28
4.3	Funkcija gustoće generalizirane Pareto distribucije . . . . .	29
6.1	Matrica gubitaka . . . . .	36
6.2	Histogrami učestalosti gubitaka za različite periode . . . . .	37
6.3	Usporedba prilagodbe podacima Poissonove i negativno binomne distribucije	38
6.4	Gustoće gubitaka za sve poslovne linije i kategoriju rizika "Klijenti, proizvodi i poslovni postupci" . . . . .	39
6.5	QQ plot . . . . .	40
6.6	. . . . .	41
6.7	Plot raspršenosti gubitaka tijekom 2010. godine . . . . .	42
6.8	MRL graf . . . . .	43
6.9	Dijagnostički grafovi za analizu praga prekoračenja . . . . .	44
6.10	Lognormalna prilagodba gubicima; Empirijska funkcija distribucije za tisuću simuliranih godišnjih gubitaka za ćeliju (1, 2) . . . . .	45