Teorija slučajnih matrica i Riemannova zeta - funkcija

Behin, Andrea

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Andrea Behin

Teorija slučajnih matrica i Riemannova zeta-funkcija

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Andrea Behin

Teorija slučajnih matrica i Riemannova zeta-funkcija

Diplomski rad

Voditelj: doc. dr. sc. Ivica Martinjak

Osijek, 2019.

Sadržaj

1. Uvod **1**

2. Slučajne matrice **2**

2.1 Motivacija 4

2.2 Svojstvene vrijednosti slučajnih matrica 5

2.2.1 Distribucija svojstvenih vrijednosti slučajnih matrica - polukružna distribucija 8

2.3 Gaussovi modeli slučajnih matrica 11

3. Riemannova zeta-funkcija **18**

3.1 Funkcijska jednadžba i analitička ekstenzija 20

3.2 Nultočke Riemannove zeta-funkcije 23

3.3 Riemannova zeta-funkcija i prosti brojevi 25

3.3.1 Riemannova eksplicitna formula 26

3.4 Nultočke Riemannove zeta-funkcije i slučajne matrice 27

4. Primjene slučajnih matrica u analizi financijskih podataka **30**

4.1 Nepredvidljivost na tržištu vrijednosnica 31

4.1.1 Markowitzeva teorija optimizacije portfelja 32

4.1.2 Primjer upotrebe slučajnih matrica na tržištu dionica 32

Literatura **36**

Sažetak **38**

Ključne riječi **38**

Abstract **39**

Key words **39**

1. Uvod

Sedamdesetih godina prošlog stoljeća teorija slučajnih matrica postala je jedno od važnijih pitanja u teoriji brojeva. Zanimanje za slučajne matrice započelo je početkom 20. stoljeća u kontekstu multivarijatne statistike zahvaljujući J. Wishartu[1] koji je proučavao razlike u karakteristikama populacija (primjerice visina, dohodak, itd.). Znatnije se počelo razvijati 1950-ih godina zahvaljujući E.P. Wigneru[2] koji ih je primjenio u fizici. Osnovna ideja bila je da je u situaciji kada je teško razumijeti pojedinosti spektara povezanih s danom jezgrom sastavljenom od mnogo kvantnih čestica s međusobnim interakcijama razumno pogledati odgovarajuće sustave kao crne kutije i ustanoviti neku vrstu statističkog ponašanja. Interes je naglo porastao kada je dovedena u vezu s nultočkama od Riemannove zeta-funkcije zahvaljujući radu fizičara H. Montgomerya i F. J. Dysona u kojemu je dana pretpostavka da se granična distribucija netrivijalnih nultočaka Riemannove zeta-funkcije može opisati graničnom distribucijom svojstvenih vrijednosti slučajnih matrica. Budući da je problem određivanja nultočaka Riemannove zeta-funkcije, odnosno tzv. *Riemannova slutnja*, jedan od glavnih neriješenih matematičkih problema, takva povezanost vrlo je značajna.

Teorija slučajnih matrica je grana matematike koja se vrlo aktivno razvija, a primjenjuje se u različitim znanstvenim disciplinama povezujući pojmove iz linearne algebre, multivarijatne statistike, matematičke analize, teorije brojeva, teorije vjerojatnosti i fizike. Primjenjuje se u biologiji, inženjerstvu, medicini, ekonomiji i mnogim drugim disciplinama.

Prvo poglavlje rada započinje definicijom slučajne matrice, a navedena je i motivacija za njihovo uvođenje u matematiku i fiziku. Posebno se razmatraju svojstvene vrijednosti takvih matrica i njihova svojstva te je opisan *Gaussov model slučajnih matrica (engl. Gaussian unitary ensemble)* za koji je moguće dati eksplicitno rješenje funkcije gustoće njezinih svojstvenih vrijednosti.

U drugom poglavlju dana je definicija Riemannove zeta-funkcije i njezina osnovna svojstva te je opisana njezina važnost u opisivanju distribucije prostih brojeva. Također, dani su i rezultati (pogledati [23]) koji upućuju na povezanost nultočaka od Riemannove zeta-funkcije sa svojstvenim vrijednostima slučajnih matrica.

U posljednjem poglavlju rada opisana je primjena slučajnih matrica na financijske podatke. Budući da slomovi burze često imaju drastične posljedice na opće stanje gospodarstva, mnogi analitičari i ekonomisti godinama teže pronalasku teorije, odnosno modela, kojim je moguće predvidjeti ponašanje tržišta. Teorija slučajnih matrica pokazala se kao dobar alat za takve analize što je i objašnjeno na primjeru.

[1]John Wishart (1898.-1956.), škotski matematičar i statističar.

[2]Eugene Paul Wigner (1902.-1995.), američki fizičar i matematičar, mađarskog porijekla. Najpoznatiji je po teoriji simetrije u kvantnoj mehanici i istraživanju građe jezgre atoma.

2. Slučajne matrice

Podsjetimo se najprije osnovnih pojmova teorije vjerojatnosti koji su nam potrebni za razumijevanje rada. Prije svega, pretpostavljamo prisutnost nepraznog skupa Ω kojeg nazivamo *prostor elementarnih događaja*. Također, definiramo dovoljno bogatu familiju $\mathcal{F}$ podskupova od Ω koja mora sadržavati određene uvjete.

Definicija 2.1. *Neka je dan neprazan skup Ω. Familija $\mathcal{F}$ podskupova od Ω naziva se σ-algebra podskupova od Ω ako zadovoljava sljedeće uvjete:*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2. *ako je $A \in \mathcal{F}$, onda je i $A^C \in \mathcal{F}$,*
3. *za danu prebrojivu familiju skupova $A_n \subseteq \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, vrijedi $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.*

Definirajmo sada vjerojatnost na odabranoj familiji $\mathcal{F}$.

Definicija 2.2. *Neka je Ω neprazan skup i neka familija $\mathcal{F}$ sadrži određene podskupove od Ω. Funkcija $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ naziva se vjerojatnost na Ω ako zadovoljava sljedeće uvjete:*

(i) (nenegativnost): $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$,

(ii) (normiranost): $P(\Omega) = 1$,

(iii) ($\sigma-$aditivnost): Za danu prebrojivu familiju međusobno disjunktnih skupova $(A_i)_{i\in I}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, iz σ-algebre $\mathcal{F}$, vrijedi $\displaystyle P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i)$.

Definicija 2.3. *Neka je Ω neprazan skup, $\mathcal{F}$ σ-algebra događaja na njemu i P dana vjerojatnost definirana na $\mathcal{F}$. Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ naziva se vjerojatnosni prostor.*

Definicija 2.4. *Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Svaka izmjeriva funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ naziva se realna slučajna varijabla.*

Definicija 2.5. *Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Svaka izmjeriva funkcija $Z : \Omega \to \mathbb{C}$ naziva se kompleksna slučajna varijabla ukoliko su $Re(Z)$ i $Im(Z)$ realne slučajne varijable na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

Realizacija slučajne varijable nije jednoznačno određena početnim uvjetima slučajnog eksperimenta što znači da svakoj vrijednosti slučajne varijable pripada određena vjerojatnost da će se realizirati.
Razlikujemo dva tipa realnih slučajnih varijabli: diskretne slučajne varijable i neprekidne slučajne varijable.

Definicija 2.6. *Za realnu slučajnu varijablu na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kažemo da je diskretna ukoliko joj je skup mogućih realizacija $\mathcal{R}(x)$ konačan ili beskonačan prebrojiv.*

Za svaku pojedinu realizaciju $x_i \in \mathcal{R}(x)$ definiramo realan broj

$$p_i = P(X = x_i).$$

Distribucija diskretne realne slučajne varijable X u potpunosti je zadana skupom $\mathcal{R}(x)$ i pripadnim nizom $(p_i)_{i=1\ldots,n}$ ($\mathcal{R}(x)$ konačan), odnosno $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ($\mathcal{R}(x)$ beskonačan prebrojiv).

Definicija 2.7. *Za realnu slučajnu varijablu X kažemo da je neprekidna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako postoji nenegativna realna funkcija f definirana na skupu realnih brojeva takva da za $a, b \in \mathbb{R}$, $(a \leq b)$, vrijedi*

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Takvu funkciju f zovemo funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X.

Neprekidna slučajna varijabla zadana je ako je poznata njezina funkcija gustoće i tada kažemo da poznajemo distribuciju neprekidne slučajne varijable.
Funkcija distribucije kompleksne slučajne varijable $F_Z : \mathbb{C} \to [0, 1]$ definirana je kao zajednička funkcija distribucije slučajnih varijabli $Re(Z)$ i $Im(Z)$.

Definicija 2.8. *Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka $M_{N\times L}(S)$ označava skup svih $N \times L$ matrica s koeficijentima iz S, gdje je $S = \mathbb{R}$ ili $S = \mathbb{C}$. Svaka izmjeriva funkcija $X : \Omega \to M_{N\times L}(S)$ naziva se slučajna matrica.*

Slučajna matrica je funkcija definirana na Ω koja svakom elementarnom događaju $\omega \in \Omega$ pridružuje matricu s koeficijentima iz S. Dakle, slučajna matrica je NxL matrica s elementima X_{ij}, $i = 1, \ldots, N, j = 1, \ldots, L$ koji su slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Mi ćemo se ovdje koncentrirati na hermitske matrice za koje su svojstvene vrijednosti realne i moguće ih je rangirati. Podsjetimo se, matrica $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ je *hermitska* ako vrijedi $A = A^*$, odnosno $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, za svaki $i, j = 1, \ldots N$. U slučaju $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, takvu matricu zovemo *simetrična* matrica.
Pogledajmo primjer jedne takve slučajne matrice.

Primjer 2.1. *(Wignerova matrica)*
Neka su dane dvije nezavisne familije $\{Z_{ij}\}_{1\leq i<j}$ i $\{Y_i\}_{1\leq i}$ nezavisnih i jednako distribuiranih realnih slučajnih varijabli s očekivanjem 0 tako da je $\mathbb{E}[{Z_{ij}}^2] = 1$ i za sve cijele brojeve $k \geq 1$ vrijedi

$$r_k := \max\left(\mathbb{E}[|Z_{ij}|^k], \mathbb{E}[|Y_i|^k]\right) < \infty.$$

Wignerova realna simetrična matrica je $N \times N$ matrica s elementima

$$X_N(j,i) = X_N(i,j) = \begin{cases} \frac{Z_{ij}}{\sqrt{N}}, & i < j \\ \frac{Y_i}{\sqrt{N}}, & i = j. \end{cases} \tag{2.1}$$

Ukoliko su Y_i realne slučajne varijable, a Z_{ij} kompleksne slučajne varijable s očekivanjem 0 tako da je $\mathbb{E}[{Z_{ij}}^2] = 1$ i $\mathbb{E}[|Z_{ij}|^2] = 1$, matrica definirana s (2.1) naziva se Wignerova hermitska matrica.

U slučaju kada su slučajne varijable Z_{ij} i Y_i Gaussove, matrica iz Primjera 2.1 naziva se *Gaussova Wignerova matrica*. Ako pri tome vrijedi i $\mathbb{E}[{Y_i}^2] = 2$ za Wignerovu realnu simetričnu matricu, odnosno $\mathbb{E}[{Y_i}^2] = 1$ za Wignerovu hermitsku matricu, odgovarajućim skaliranjem s $\sqrt{N}$ dobivamo *Gaussove modele slučajnih matrica* koje ćemo detaljnije opisati u nastavku rada budući da dozvoljavaju eksplicitnu formulu za zajedničku funkciju gustoće svojstvenih vrijednosti.

2.1 Motivacija

Jedna od motivacija za proučavanje slučajnih matrica u matematici su permutacije. Za danu simetričnu grupu S_N (grupa svih permutacija skupa $\{1, \ldots, N\}$) može se dokazati da broj fiksnih točaka slučajno generirane permutacije skupa $\{1, 2, \ldots, N\}$ ima približno Poissonovu distribuciju s parametrom 1 kada $N \to \infty$. Drugim riječima, trag slučajne permutacijske matrice reda N ima približno Poissonovu distribuciju s parametrom 1 kada $N \to \infty$. P. Diaconis[3] ta razmatranja pokušao je proširiti na druge grupe matrica: ortogonalne, unitarne i hermitske.

Promotrimo sada permutaciju $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(N)) \in S_N$ i zanima nas podniz od σ u kojemu su elementi sortirani od najmanjeg prema najvećem. Primjerice, za $N = 6$ jedna od mogućih permutacija je

$$\sigma(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

a najdulji takav podniz je $(2, 4, 5, 6)$. Ono što nas zanima je koliko je operacija potrebno napraviti da bismo sortirali $(2, 1, 4, 3, 5, 6)$ kao $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Za N općenito, označimo s $l_N(\sigma)$ duljinu najduljeg podniza od σ čiji su elementi poredani po veličini. Tada znamo da je potrebno napraviti minimalno $N - l_N(\sigma)$ operacija da bismo sortirali σ. Što je $l_N(\sigma)$ bliže N, potrebno je manje operacija da bismo sortirali niz. Međutim, za veliki N to može biti poprilično komplicirano. Matematički, problem je odrediti distribuciju od $l_N(\sigma)$ pri čemu pretpostavljamo da je svaka permutacija $\sigma \in S_N$ jednako vjerojatna, odnosno $P(\sigma) = \frac{1}{N!}$ (*engl. the longest increasing subsequence*[4]). Neka je

$$F_N(x) = P(l_N(\sigma) \leq x)$$

funkcija distribucije od $l_N(\sigma)$, $x \geq 1$. Intuitivno je jasno da vrijedi

$$\lim_{N \to \infty} F_N(x) = 0,$$

odnosno za fiksan x vjerojatnost da S_N nema sortirani podniz duljine $l_N(\sigma) = 4$ za $N = 6$ je velika, međutim za primjerice $N = 10^6$ nije. Neka N označava red simetrične grupe S_N i pretpostavimo da ima Poissonovu distribuciju s parametrom $t, t > 0$. Tada je $F_N(x)$ također slučajna varijabla i upravo njezina asimptotska svojstva predstavljaju vezu sa slučajnim matricama. Očekivana vrijednost od $F_N(x)$, $x \geq 1$, može se izračunati pomoću *determinante Teoplitzove matrice* što dovodi do povezanosti sa slučajnim matricama. Rješenje ovog problema je u tome da granična distribucija od $l_N(\sigma)$ odgovara distribuciji *maksimalne svojstvene vrijednosti hermitske slučajne matrice s elementima iz Gaussove distribucije (Tracy-Widom distribucija)*, tj.

$$\lim_{N \to \infty} P(l_N(\sigma) \leq 2\sqrt{N} + tN^{\frac{1}{6}}) = F(t),$$

gdje je $F(t)$ funkcija distribucije Tracy-Widom distribucije. Detaljnije rješenje ovog problema može se pronaći u [20].

[3]Persi Warren Diaconis (1945), američki matematičar i mađioničar. Njegovo zanimanje za matematiku nije bilo neovisno o njegovom interesu za magiju jer ju je primjenjivao u mnogim svojim trikovima.

[4]Problem je postavio Stanislaw Ulam (1909.-1984.), poljski znanstvenik u području matematike i nuklearne fizike, krajem 1960-ih. U njegovu rješenju teorija slučajnih matrica imala je jednu od ključnih uloga.

Vrijedi spomenuti da je prethodno navedenim rezultatima prethodilo razmatranje E.P. Wignera koji je 1950-ih godina slučajne matrice primjenio u kvantnoj mehanici nastojeći opisati ponašanje *nelinearnih dinamičkih sustava koji imaju kaotično ponašanje.* Temeljno načelo kvantne mehanike je da su *energijske svojstvene vrijednosti*[5] takvih sustava "kodirane" u spektru njegovog *Hamiltonijana*[6] koji je hermitski operator na obično *beskonačnodimenzionalnom Hilbertovom prostoru.* Poznavanjem Hamiltonijana sustava izravno slijedi kvantnomehanička jednadžba gibanja tog sustava. Međutim, problem je u određivanju svojstvenih vrijednosti energije E i svojstvenih funkcija ψ pridruženih Hamiltonijanu H (H nije poznat za svaki specifičan slučaj, a čak i da ga je moguće zapisati, riješiti problem njegovih svojstvenih vrijednosti je iznimno velike računalne složenosti), u vremenski neovisnoj *Schrödingerovoj jednadžbi*

$$H\psi = E\psi.$$

Wigner je predložio da se Hamiltonijan može modelirati slučajnom hermitskom matricom velike dimenzije čija granična distribucija svojstvenih vrijednosti odgovara onoj od svojstvenih vrijednosti Hamiltonijana. Ideja je odabrati matrični model s kojim bi se mogla opisati istaknuta svojstva Hamiltonijana u limesu (nepredvidljivost kvantnih sustava dolazi od nedeterminističke prirode samog sustava) i da mogu, ali i ne moraju sadržavati svojstvo *reverzibilne simetrije vremena (engl. time reversal symmetry).* Došao je do zaključka da Wignerova matrica (pogledati Primjer 2.1) s elementima iz Gaussove distribucije dobro modelira Hamiltonijan kvantnog sustava: realna simetrična one sa svojstvom reverzibilne simetrije vremena, a hermitska kvantne sustave bez tog svojstva. Takav model pokazao se kao dobar odabir budući da svojstvene vrijednosti imaju svojstvo da je mala vjerojatnost da su dvije susjedne svojstvene vrijednosti blizu jedna drugoj što je slučaj i kod Hamiltonijana. Naravno, takav pristup ne predviđava detaljne informacije o kvantnom sustavu, ali nam daje informaciju o temeljnom poretku u naizgled nasumičnim podacima.

2.2 Svojstvene vrijednosti slučajnih matrica

Kada želimo primijeniti slučajne matrice za opisivanje danog sustava, prije svega trebamo odabrati slučajnu matricu S za null-hipotezu. Ideja je da dobivene informacije iz te matrice možemo razdvojiti na one koje odstupaju i one koje se poklapaju u usporedbi s vrstom informacija koje želimo odrediti u izvornim podacima. Neka je p_{null} vjerojatnost različitih događaja A na temelju svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora matrice S. Ako promatramo događaj A u izvornim podacima, tada null-hipotezu možemo odbaciti s pouzdanošću $1 - p_{null}$.

Za različite familije slučajnih matrica kojima je moguće opisati ponašanje sustava kojeg promatramo zanima nas:

- granična distribucija svojstvenih vrijednosti
- razumijeti jesu li te distribucije osjetljive na izbor slučajne matrice u null-hipotezi, odnosno što se događa sa spektrom i kakva su odstupanja ako radimo male perturbacije naše slučajne matrice.

Podsjetimo se najprije definicije svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora matrice.

[5]vrijednosti ukupne energije dinamičkog sustava koje pripadaju svojstvenim funkcijama Hamiltonijana tog sustava

[6]operator jednak zbroju operatora kinetičke i operatora potencijalne energije

Definicija 2.9. *Kažemo da je skalar λ svojstvena vrijednost matrice A ako postoji ne-nul vektor $\vec{x}$ takav da vrijedi*

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x},$$

a svaki takav $\vec{x}$ zove se svojstveni vektor matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.

Svojstvene vrijednosti matrice A računaju se kao nultočke karakterističnog polinoma

$$p(\lambda) = det(\lambda I_N - A),$$

gdje je I_N jedinična matrica reda N.

Za elementarni događaj $\omega \in \Omega$, ukoliko slučajna matrica ima svojstvene vrijednosti $\lambda_1(\omega), \ldots, \lambda_N(\omega)$, one su također slučajne varijable.

Pogledajmo sada jednostavan primjer 2×2 matrice koji opravdava naš interes za proučavanjem svojstvenih vrijednosti, odnosno razlika susjednih svojstvenih vrijednosti slučajnih matrica. Neka je dana slučajna matrica

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{bmatrix}$$

takva da vrijedi:

- $x_1, x_2 \sim N(0,1)$ s funkcijom gustoće $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$,
- $x_3 \sim N(0, \frac{1}{2})$ s funkcijom gustoće $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$

i međusobno su nezavisne. Karakteristična jednadžba matrice A dana je s

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0, \tag{2.2}$$

gdje $tr(A)$ označava trag matrice A, a $\det(A)$ determinantu matrice A. Iz (2.2) lako se dobiju svojstvene vrijednosti matrice A

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[x_1 + x_2 \pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4(x_1 x_2 - {x_3}^2)}\right]. \tag{2.3}$$

Neka je s

$$S = \lambda_2 - \lambda_1 \tag{2.4}$$

označena razlika svojstvenih vrijednosti matrice A. Uvrštavanjem (2.3) u (2.4) slijedi

$$S = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4{x_3}^2}. \tag{2.5}$$

Naš cilj je odrediti funkciju gustoće slučajne varijable S. Iz (2.5) vidimo da S ovisi o tri slučajne varijable, odnosno elementima matrice x_1, x_2 i x_3. Funkcija gustoće slučajne varijable S dana je s

$$p(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}({x_1}^2 + {x_2}^2) - {x_3}^2} \delta\left(s - \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4{x_3}^2}\right) \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{dx_2}{\sqrt{2\pi}} \frac{dx_3}{\sqrt{\pi}}, \tag{2.6}$$

gdje je δ Diracova delta funkcija za koju vrijedi

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Prelaskom na polarne koordinate, odnosno supstitucijom

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= r\cos(\theta) \\ 2x_3 &= r\sin(\theta) \\ x_1 + x_2 &= \psi \end{aligned} \tag{2.7}$$

dobije se

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{r\cos(\theta) + \psi}{2} \\ x_2 &= \frac{\psi - r\cos(\theta)}{2} \\ x_3 &= \frac{r}{2}\sin(\theta). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Jacobijeva matrica dana je s

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_1}{\partial \psi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial \psi} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} & \frac{\partial x_3}{\partial \psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{cos(\theta)}{2} & -\frac{r}{2}sin(\theta) & \frac{1}{2} \\ -\frac{cos(\theta)}{2} & \frac{r}{2}sin(\theta) & \frac{1}{2} \\ \frac{sin(\theta)}{2} & \frac{r}{2}cos(\theta) & 0 \end{bmatrix},$$

odakle se lako izračuna $|det(J)| = \frac{r}{4}$. Sada još preostaje zapisati integral (2.6) u terminima iz (2.8).

$$\begin{aligned} p(s) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\frac{1}{4}\int_0^{+\infty} r\delta(s-r)dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{rcos(\theta)+\psi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\psi - rcos(\theta)}{2}\right)^2 + 2\frac{r^2}{4}sin^2(\theta)\right]} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\frac{1}{4}s\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s^2cos^2(\theta)+\psi^2+2s\psi cos(\theta)}{4} + \frac{\psi^2+s^2cos^2(\theta)-2s\psi cos(\theta)}{4} + \frac{s^2}{2}sin^2(\theta)\right)} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\frac{1}{4}se^{-\frac{s^2}{4}}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi e^{-\frac{\psi^2}{4}} \\ &= \frac{s}{2}e^{-\frac{s^2}{4}}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ovdje smo koristili trigonometrijski identitet $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ čime je integral (2.9) znatno pojednostavljen. Također, važno je naglasiti da je ovdje ključno što je varijanca nedijagonalnih elemenata duplo manja od varijance dijagonalnih elemenata. U slučaju drugih omjera varijanci izračunati $p(s)$ znatno je otežano.

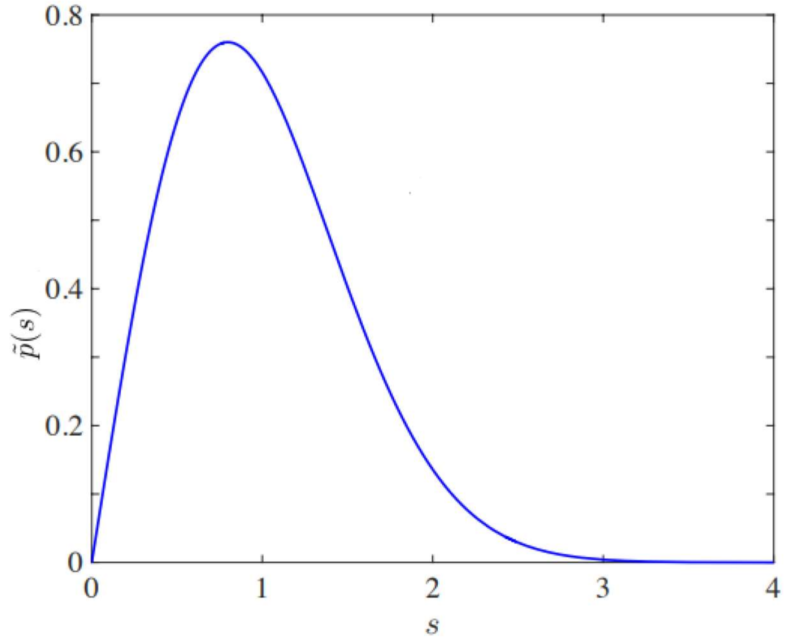
Često se $p(s)$ prilagođava tako da izračunamo

$$\tilde{p}(s) = \langle s \rangle p(s\langle s \rangle),$$

gdje je $\langle s \rangle = \int_0^{+\infty} sp(s)ds$ očekivana razlika svojstvenih vrijednosti. Za gore navedeni primjer matrice A vrijedi

$$\tilde{p}(s) \approx \frac{\pi s}{2}e^{-\frac{\pi s^2}{4}}. \tag{2.10}$$

Na Slici 1 vidimo da je graf funkcije gustoće $\tilde{p}(s)$ gotovo linearan za male razlike što nam



Slika 1: Graf funkcije gustoće $\tilde{p}(s)$

govori da je vjerojatnost da su dvije svojstvene vrijednosti "vrlo bliske" jedna drugoj ($s \to 0$) vrlo mala (slikovito rečeno, svaka svojstvena vrijednost "osjeća" prisutnost susjedne svojstvene vrijednosti i pokušava se odmaknuti, ali ne previše, *engl. level repulsion*). Do ovog zaključka došao je Wigner te je po njemu dobilo i ime (*engl. Wigner surmise*).

Sljedeći teorem jedan je od ključnih za ovaj rad budući da daje formulu koja povezuje elemente matrice koji su slučajni s njezinim svojstvenim vrijednostima. Podsjetimo se, trag matrice jednak je sumi elemenata na njezinoj dijagonali.

Teorem 2.1. *Za nenegativan cijeli broj k i matricu $A \in M_N(S)$ sa svojstvenim vrijednstima $\lambda_i(A)$, vrijedi*

$$tr(A^k) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(A)^k, \tag{2.11}$$

gdje je

$$tr(A^k) = \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_k=1}^{N} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{k-1} i_k} \cdots a_{i_N i_1}.$$

Dokaz. Vidi [18]. □

2.2.1 Distribucija svojstvenih vrijednosti slučajnih matrica - polukružna distribucija

Promotrimo realne simetrične slučajne $N \times N$ matrice. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da elementi matrice dolaze iz unaprijed fiksirane distribucije p s očekivanjem 0 i varijancom 1 i nezavisni su. Bitno je napomenuti da se ovdje koncentriramo na standardizirane svojstvene vrijednosti $\frac{\lambda_i}{2\sqrt{N}}$. Prirodno je pitati se koliko standardiziranih svojstvenih vrijednosti možemo očekivati u danom intervalu $[a, b]$. Neka je

$$\mu_{A,N}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta\left(x - \frac{\lambda_i}{2\sqrt{N}}\right)$$

funkcija gustoće standardiziranih svojstvenih vrijednosti, gdje je δ Diracova delta funkcija. $\int_a^b \mu_{A,N}(x)dx$ daje nam postotak standardiziranih svojstvenih vrijednosti unutar intervala $[a, b]$.

Neka $M_{N,k}(A)$ označava k-ti moment za $\mu_{A,N}(x)$. Sljedeća lema daje jedan od ključnih rezultata koji se lako dokaže primjenjujući Teorem 2.1.

Lema 2.1. *Vrijedi:*

$$M_{N,k}(A) = \frac{tr(A^k)}{2^k N^{\frac{k}{2}+1}}.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} M_{N,k}(A) = E[x^k]_A &= \int_R x^k \mu_{A,N}(x)dx \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_R x^k \delta\left(x - \frac{\lambda_i}{2\sqrt{N}}\right) dx \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i{}^k}{(2\sqrt{N})^k} \\ &= \frac{Tr(A^k)}{2^k N^{\frac{k}{2}+1}}. \end{aligned}$$

□

Definicija 2.10. *Neka je X neprekidna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Kažemo da slučajna varijabla X ima polukružnu distribuciju (engl. semicircle distribution) na $[-1, 1]$ ako joj je funkcija gustoće dana s*

$$P(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - x^2}, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{2.12}$$

Neka $C(k)$ označava k-ti moment od X koja ima polukružnu distribuciju. Tada vrijedi

$$C(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k P(x)dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} x^k \sqrt{1 - x^2}dx. \tag{2.13}$$

Supstitucijom $x = \sin(\theta)$ u (2.13) dobije se

$$C(k) = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^k(\theta) \cos^2(\theta)d\theta. \tag{2.14}$$

Zbog simetričnosti vrijedi $C(k) = 0$, za neparan k. Za paran k, $k = 2m$, supstitucijom $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$ dobije se

$$C(k) = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}(\theta)d\theta - \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2}(\theta)d\theta. \tag{2.15}$$

Neka je

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)\cdots 4\cdot 2, & \text{ako je } n \text{ paran broj} \\ n(n-2)\cdots 3\cdot 1, & \text{ako je } n \text{ neparan broj.} \end{cases} \tag{2.16}$$

Računanjem oba integrala u (2.15) te primjenjujući (2.16) dobije se

$$\begin{aligned} C(2m) &= 2\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} - 2\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!} \\ &= 2\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\left(1 - \frac{2m+1}{2m+2}\right) \\ &= 2\frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Neka $M_{N,k} = \mathbb{E}[M_{N,k}(A)]$ označava očekivanu vrijednost od $M_{N,k}(A)$.

Teorem 2.2. *Pretpostavimo da elementi realne simetrične slučajne matrice dolaze iz unaprijed odabrane distribucije p s očekivanjem 0 i varijancom 1 te konačnim momentom svakog višeg reda. Tada vrijedi*

$$\lim_{N\to\infty} M_{N,k} = C(k),$$

tj. očekivana vrijednost od $M_{N,k}(A)$ konvergira prema k-tom momentu polukružne distribucije $C(k)$, kada $N \to \infty$.

Dokaz. Primjenjujući Lemu 2.1 lako se izračuna sljedeće:

$$M_{N,0} = \mathbb{E}[M_{N,0}(A)] = \frac{1}{N}\mathbb{E}[tr(I)] = \frac{1}{N}\mathbb{E}[N] = 1. \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} M_{N,1} = \mathbb{E}[M_{N,1}(A)] &= \frac{1}{2N^{3/2}}\mathbb{E}[tr(A)] \\ &= \frac{1}{2N^{3/2}}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} a_{ii}\right] \\ &= \frac{1}{2N^{3/2}}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}[a_{ii}]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Također vrijedi: $\mathbb{E}[a_{ii}] = 0$, $\forall i = 1, \ldots N$ i $\mathbb{E}[{a_{ij}}^2] = 1$, $\forall i, j = 1, \ldots N$. Dakle, $M_{N,1} = 0$. Nadalje, A je simetrična matrica pa vrijedi

$$tr(A^2) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} {a_{ij}}^2.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} M_{N,2} = \mathbb{E}[M_{N,2}(A)] &= \frac{1}{4N^2}\mathbb{E}[tr(A^2)] \\ &= \frac{1}{4N^2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} {a_{ij}}^2\right] \\ &= \frac{1}{4N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}[{a_{ij}}^2]. \end{aligned}$$

Matrica A ima N^2 elemenata pa je stoga $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}[{a_{ij}}^2] = N^2$. Dakle, $M_{N,2} = \frac{1}{4}$.
Momenti višeg reda dobiju se na analogan način pa izostavljamo taj račun. Ova distribucija je u potpunosti određena s momentima budući da se njihova vrijednost ne povećava naglo s većim k pa nam je dovoljno usporediti momente distribucije svojstvenih vrijednosti i polukružne distribucije. Iz (2.17) znamo da vrijedi $C(0) = 1, C(1) = 0, C(2) = \frac{1}{4}$ i $C(3) = 0$, a vrijednost im je jednaka prethodno izračunatim momentima polukružne distribucije na $[-1, 1]$. □

Činjenica da granična distribucija svojstvenih vrijednosti za slučajnu matricu s nezavisnim elementima i odgovarajućom varijancom odgovara polukružnoj distribuciji jedan je od primjera univerzalnosti u teoriji slučajnih matrica. Za Wignerovu matricu definiranu u Primjeru 2.1 granična distribucija svojstvenih vrijednosti odgovara polukružnoj distribuciji na $[-2, 2]$ s odgovarajućom funkcijom gustoće.

2.3 Gaussovi modeli slučajnih matrica

Vrlo je važno analizirati određene prototipe, odnosno one slučajne matrice u kojima je distribucija unosa unaprijed dana i imamo uvjete na samu konstrukciju matrice. To nam je od velike važnosti budući da je ponekad moguće reći nešto o svojstvima općenitijih slučajeva ukoliko ih je moguće opisati jednostavnijim za koje eksplicitna rješenja postoje. Upravo Gaussovi modeli slučajnih matrica dozvoljavaju takva eksplicitna rješenja, a razlikuju se po tome promatramo li realnu simetričnu ili hermitsku matricu.

Prije svega, napomenimo da ovdje razmatramo slučaj Gaussovih Wignerovih matrica definiranih u Primjeru 2.1.
Neka $\mathcal{S}_N = \{A \in \mathbb{R}^{N\times N} : A = A^T\}$ označava skup svih realnih simetričnih slučajnih matrica reda N. Gaussov ortogonalan model GOE (*engl. Gaussian orthogonal ensemble*) sadržava matrice $A \in \mathcal{S}_N$ s elementima

$$A_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & 1 \le i < j \le N \\ X_{ji}, & 1 \le j < i \le N \\ X_{ii}, & 1 \le i = j \le N, \end{cases} \tag{2.20}$$

gdje su $\{X_{ij}\}_{1\le i<j<\infty}$ nezavisne i jednako distribuirane Gaussove slučajne varijable s očekivanjem 0 i varijancom $\mathbb{E}[X_{ij}^2] = 1$, $\{X_{ii}\}_{1\le i=j<\infty}$ nezavisne i jednako distribuirane Gaussove slučajne varijable s očekivanjem 0 i varijancom $\mathbb{E}[X_{ii}^2] = 2$ i pretpostavimo da su nezavisne od $\{X_{ij}\}_{1\le i<j<\infty}$. Upravo taj odnos varijanci dijagonalnih i nedijagonalnih elemenata omogućava nam eksplicitnu formulu za zajedničku funkciju gustoće svojstvenih vrijednosti. Također, za matricu M iz GOE modela i neslučajnu ortogonalnu matricu Q ($QQ^T = I$) reda N distribucija od M jednaka je distribuciji od QMQ^T.
Razjasnimo sada GOE model na primjeru 2×2 matrica te dokažimo da elementi takve matrice moraju imati Gaussovu distribuciju. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_2$$

matrica GOE modela. Tada $P(A)$ mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

(i) elementi matrice su nezavisni, stoga vrijedi $P(A) = P_{11}(a_{11})P_{12}(a_{12})P_{22}(a_{22})$

(ii) za realnu ortogonalnu matricu Q vrijedi $P(QAQ^T) = P(A)$ (vjerojatnost matrice invarijantna je u odnosu na odabir baze).

Teorem 2.3. *Neka matrica $A \in \mathcal{S}_2$ zadovoljava prethodno navedene uvjete. Tada elementi matrice A dolaze iz Gaussove distribucije, odnosno P_{11}, P_{12} i P_{22} su funkcije gustoće Gaussove distribucije, a $P(A)$ je proporcionalna $e^{-\frac{1}{4}tr(A^2)}$.*

Dokaz. Promotrimo infinitezimalnu rotaciju za kut θ, odnosno matricu

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + O(\theta^2) & -\theta + O(\theta^3) \\ \theta + O(\theta^3) & 1 + O(\theta^2) \end{bmatrix},$$

koja točke iz xy-ravnine rotira za kut θ suprotno od smjera kazaljke na satu u odnosu na ishodište. Budući da za matricu A mora vrijediti $P(QAQ^T) = P(A)$, direktnim računom dobije se

$$QAQ^T = \begin{bmatrix} a_{11} - 2\theta a_{12} + O(\theta^2) & a_{12} - \theta(a_{22} - a_{11}) + O(\theta^2) \\ a_{12} - \theta(a_{22} - a_{11}) + O(\theta^2) & a_{22} + 2\theta a_{12} + O(\theta^2) \end{bmatrix}.$$

Taylorov razvoj daje

$$\begin{aligned} P_{11}(a_{11} - 2\epsilon a_{12} + O(\theta^2)) &= P_{11}(a_{11}) - 2\theta a_{12}\frac{dP_{11}}{da_{11}} + O(\theta^2) \\ P_{12}(a_{12} - \theta(a_{22} - a_{11}) + O(\theta^2)) &= P_{12}(a_{12}) - \theta(a_{22} - a_{11})\frac{dP_{12}}{da_{12}} + O(\theta^2) \\ P_{22}(a_{22} + 2\theta a_{12} + O(\theta^2)) &= P_{22}(a_{22}) + 2\theta a_{12}\frac{dP_{22}}{da_{22}} + O(\theta^2). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Budući da je vjerojatnost matrice A zbog nezavisnosti jednaka umnošku vjerojatnosti svakog elementa, uvrštavanjem izraza dobivenih u (2.21) imamo

$$\begin{aligned} P(QAQ^T) &= P_{11}(a_{11} - 2\theta a_{12} + O(\theta^2))P_{12}(a_{12} - \theta(a_{22} - a_{11}) + O(\theta^2))P_{22}(a_{22} + 2\theta a_{12} + O(\theta^2)) \\ &= P_{11}(a_{11})P_{12}(a_{12})P_{22}(a_{22}) - \Bigg[2a_{12}P_{12}(a_{12})P_{22}(a_{22})\frac{dP_{11}}{da_{11}} + (a_{22} - a_{11})P_{11}(a_{11})P_{22}(a_{22})\frac{dP_{12}}{da_{12}} \\ &- 2a_{12}P_{11}(a_{11})P_{12}(a_{12})\frac{dP_{22}}{da_{22}}\Bigg] + O(\theta^2). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Uvrštavanjem $P(A) = P_{11}(a_{11})P_{12}(a_{12})P_{22}(a_{22})$ u (2.22) slijedi

$$\begin{aligned} \frac{P(A) - P(QAQ^T)}{P_{11}(a_{11})P_{12}(a_{12})P_{22}(a_{22})} &= \theta\left[\frac{2a_{12}}{P_{11}(a_{11})}\frac{dP_{11}}{da_{11}} + \frac{(a_{22} - a_{11})}{P_{12}(a_{12})}\frac{dP_{12}}{da_{12}} - \frac{2a_{12}}{P_{22}(a_{22})}\frac{dP_{22}}{da_{22}}\right] \\ &+ O\left(\frac{\theta^2}{P_{11}(a_{11})P_{12}(a_{12})P_{22}(a_{22})}\right). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Za svaku ortogonalnu matricu Q vrijedi $P(A) = P(QAQ^T)$ pa stoga koeficijent θ mora iščezavati u (2.23) ili mora vrijediti

$$\frac{2a_{12}}{P_{11}(a_{11})}\frac{dP_{11}}{da_{11}} + \frac{(a_{22} - a_{11})}{P_{12}(a_{12})}\frac{dP_{12}}{da_{12}} - \frac{2a_{12}}{P_{22}(a_{22})}\frac{dP_{22}}{da_{22}} = 0. \tag{2.24}$$

Sada jednadžbu (2.24) zapišemo u obliku

$$\frac{1}{a_{12}P_{12}(a_{12})}\frac{dP_{12}}{da_{12}} = -\frac{2}{a_{22}-a_{11}}\left(\frac{1}{P_{11}(a_{11})}\frac{dP_{11}}{da_{11}} - \frac{1}{P_{22}(a_{22})}\frac{dP_{22}}{da_{22}}\right). \tag{2.25}$$

Lijeva strana jednadžbe (2.25) ovisi samo o parametru a_{12}, a desna strana ovisi o parametrima a_{11} i a_{22}. Jedino rješenje za koje jednadžba (2.25) vrijedi za svaki izbor parametara a_{11}, a_{12} i a_{22} je da su obje strane jednadžbe jednake konstanti koju označimo s $-C$.
Lijeva strana jednadžbe (2.25) daje nam diferencijalnu jednadžbu prvog reda

$$\frac{1}{a_{12}P_{12}(a_{12})}\frac{dP_{12}}{da_{12}} = -C, \tag{2.26}$$

odnosno

$$\frac{dP_{12}}{da_{12}} = -Ca_{12}P_{12}(a_{12}). \tag{2.27}$$

Diferenciranjem (2.27) dobivamo

$$P_{12}(a_{12}) = \sqrt{\frac{C}{2\pi}}e^{\frac{-C{a_{12}}^2}{2}}. \tag{2.28}$$

Također je i svaki $\alpha P_{12}(a_{12})$ rješenje jednadžbe (2.27), za proizvoljan α. Vidimo da P_{12} predstavlja funkciju gustoće Gaussove distribucije $N(0, \frac{1}{\sqrt{C}})$ pa mora vrijediti $C > 0$. Za $C = 1$ funkcija dana s (2.28) predstavlja funkciju gustoće standardizirane Gaussove distribucije.
Sada analizirajmo desnu stranu jednadžbe koja je također jednaka konstanti $-C$, odnosno vrijedi

$$-\frac{2}{a_{22}-a_{11}}\left(\frac{1}{P_{11}(a_{11})}\frac{dP_{11}}{da_{11}} - \frac{1}{P_{22}(a_{22})}\frac{dP_{22}}{da_{22}}\right) = -C. \tag{2.29}$$

Budući da lijeva strana od (2.29) ovisi o dva parametra a_{11} i a_{22}, cilj nam je zapisati ju tako da svaka strana jednadžbe ovisi o jednom parametru. Računanjem se dobije

$$\frac{2}{P_{11}(a_{11})}\frac{dP_{11}}{da_{11}} + Ca_{11} = \frac{2}{P_{22}(a_{22})}\frac{dP_{22}}{da_{22}} + Ca_{22}. \tag{2.30}$$

Jedino rješenje za koje jednadžba (2.30) vrijedi za svaki izbor parametara a_{11} i a_{22} je da su obje strane jednadžbe jednake konstanti koju označimo s CD. Računanjem se dobije

$$2\frac{dP_{11}}{da_{11}} = -C(a_{11}-D)P_{11}(a_{11}), \tag{2.31}$$

$$2\frac{dP_{22}}{da_{22}} = -C(a_{22}-D)P_{22}(a_{22}). \tag{2.32}$$

Ponovno smo dobili diferencijalne jednadžbe prvog reda čija su rješenja

$$P_{11}(a_{11}) = \sqrt{\frac{C}{4\pi}}e^{\frac{-C(a_{11}-D)^2}{4}}, \tag{2.33}$$

$$P_{22}(a_{22}) = \sqrt{\frac{C}{4\pi}}e^{\frac{-C(a_{22}-D)^2}{4}}. \tag{2.34}$$

Konačno, funkcije gustoće P_{11}, P_{12} i P_{22} dane su s

$$P_{11}(a_{11}) = \sqrt{\frac{C}{4\pi}} e^{\frac{-C(a_{11}-D)^2}{4}} \tag{2.35}$$

$$P_{12}(a_{12}) = \sqrt{\frac{C}{2\pi}} e^{\frac{-C a_{12}{}^2}{2}} \tag{2.36}$$

$$P_{22}(a_{22}) = \sqrt{\frac{C}{4\pi}} e^{\frac{-C(a_{22}-D)^2}{4}}. \tag{2.37}$$

Za $D = 0$ i $C = 1$ vidimo da $a_{11}, a_{22} \sim N(0, 2)$ i $a_{12} \sim N(0, 1)$. Zbog nezavisnosti elemenata matrice A slijedi

$$\begin{aligned} P(A) &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} e^{\frac{-a_{11}{}^2}{4}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\frac{-a_{12}{}^2}{2}} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} e^{\frac{-a_{22}{}^2}{4}} \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}(a_{11}{}^2 + 2a_{12}{}^2 + a_{22}{}^2)} \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}Tr(A^2)}. \end{aligned}$$

□

Analogan rezultat može se dokazati i za $A \in \mathcal{S}_N$ GOE modela koja je u potpunosti određena s $\frac{N(N+1)}{2}$ elemenata, odnosno odabirom N dijagonalnih elemenata i $\frac{N(N-1)}{2}$ elemenata iznad glavne dijagonale.

Sada ćemo definirati Gaussov unitaran model te pokazati da za oba modela postoji formula za zajedničku funkciju gustoće svojstvenih vrijednosti.

Neka $\mathcal{M}_N = \{A \in \mathbb{C}^{N\times N} : A = A^*\}$ označava skup svih hermitskih slučajnih matrica reda N. Gaussov unitaran model GUE (*engl. Gaussian unitary ensemble*) sadržava matrice $A \in \mathcal{M}_N$ s elementima

$$A_{ij} = \begin{cases} X_{ij} + iZ_{ij}, & 1 \le i < j \le N \\ X_{ji} - iZ_{ji}, & 1 \le j < i \le N \\ X_{ii}, & 1 \le i = j \le N, \end{cases} \tag{2.38}$$

gdje su $\{X_{ij}\}_{1\le i<j<\infty}$ i $\{Z_{ij}\}_{1\le i<j<\infty}$ nezavisne familije nezavisnih i jednako distribuiranih Gaussovih slučajnih varijabli s očekivanjem 0 i varijancom $\mathbb{E}[X_{ij}^2] = \mathbb{E}[Z_{ij}^2] = \frac{1}{2}$, a $\{X_{ii}\}_{1\le i=j<\infty}$ familija nezavisnih i jednako distribuiranih Gaussovih slučajnih varijabli s očekivanjem 0 i varijancom $\mathbb{E}[X_{ii}^2] = 1$ i pretpostavimo da su nezavisne od $\{X_{ij}\}_{1\le i<j<\infty}$ i $\{Z_{ij}\}_{1\le i<j<\infty}$. Kao i u slučaju GOE, odnos varijanci dijagonalnih i nedijagonalnih elemenata omogućava nam eksplicitno rješenje za zajedničku funkciju gustoće svojstvenih vrijednosti. Također, za matricu M iz GUE modela i neslučajnu unitarnu matricu U ($UU^* = I$) reda N distribucija od M jednaka je distribuciji od UMU^*.

Neka $\mathcal{H}_N{}^{(\beta)}$, $\beta = 1, 2$, označava familiju slučajnih matrica X GOE modela za $\beta = 1$, odnosno GUE modela za $\beta = 2$ sa zajedničkom funkcijom gustoće elemenata $p_N{}^{(\beta)}$. Neka su s $\{X_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ i $\{Y_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ dane nezavisne familije nezavisnih i jednako distribuiranih realnih slučajnih Gaussovih varijabli s očekivanjem 0 i varijancom 1 (odgovarajućim skaliranjem dođe se do odnosa varijanci za GOE, odnosno GUE).

Neka su $p_2{}^{(1)}$, $p_3{}^{(1)}$, ... redom zajedničke funkcije gustoće elemenata realnih simetričnih matrica

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}X_{11} & X_{12} \\ X_{12} & \sqrt{2}X_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_2{}^{(1)}, \quad \begin{bmatrix} \sqrt{2}X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{12} & \sqrt{2}X_{22} & X_{23} \\ X_{13} & X_{23} & \sqrt{2}X_{33} \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_3{}^{(1)}, \ldots.$$

Također, neka su $p_2{}^{(2)}$, $p_3{}^{(2)}$, ... redom zajedničke funkcije gustoće hermitskih matrica

$$\begin{bmatrix} X_{11} & \frac{X_{12}+iY_{12}}{\sqrt{2}} \\ \frac{X_{12}-iY_{12}}{\sqrt{2}} & X_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_2{}^{(2)}, \quad \begin{bmatrix} X_{11} & \frac{X_{12}+iY_{12}}{\sqrt{2}} & \frac{X_{13}+iY_{13}}{\sqrt{2}} \\ \frac{X_{12}-iY_{12}}{\sqrt{2}} & X_{22} & \frac{X_{23}+iY_{23}}{\sqrt{2}} \\ \frac{X_{13}-iY_{13}}{\sqrt{2}} & \frac{X_{23}-iY_{23}}{\sqrt{2}} & X_{33} \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_3{}^{(2)}, \ldots.$$

Pri tome je $p_N{}^{(\beta)}$ dana s

$$p_N{}^{(\beta)} = \begin{cases} 2^{-\frac{N}{2}}(2\pi)^{-\frac{N(N+1)}{4}}e^{-\frac{tr(X^2)}{4}}, & \beta = 1 \\ 2^{-\frac{N}{2}}\pi^{-\frac{N^2}{2}}e^{-\frac{tr(X^2)}{2}}, & \beta = 2. \end{cases} \tag{2.39}$$

Definirajmo prvo Vandermondeovu determinantu kako bismo mogli dati formulu za zajedničku funkciju gustoće svojstvenih vrijednosti od X. Matricu u oznaci $V_N(x)$ definiranu s

$$V_n(x) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1{}^2 & \ldots & x_1{}^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2{}^2 & \ldots & x_2{}^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N{}^2 & \ldots & x_N{}^{N-1} \end{bmatrix}$$

nazivamo *Vandermondeova matrica.* Retci Vandermondeove matrice su geometrijski nizovi.

Teorem 2.4. *Neka je $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^N$. Determinanta Vandermondeove matrice u oznaci $\Delta(x)$ jednaka je polinomu*

$$\Delta(x) = \prod_{1\le i<j\le N}(x_j - x_i).$$

Teorem 2.5. *(Zajednička funkcija gustoće svojstvenih vrijednosti: GOE i GUE) Neka je $X \in \mathcal{H}_N{}^{(\beta)}$ slučajna matrica sa zajedničkom funkcijom gustoće elemenata $p_N{}^{(\beta)}$, $\beta = 1, 2$. Zajednička funkcija gustoće njezinih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_N$ dana je s*

$$p(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = N!C_N{}^{\beta}\mathbf{I}_{\{\lambda_1\le\cdots\le\lambda_n\}}|\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)|^{\beta}\prod_{i=1}^{N}e^{-\frac{\beta\lambda_i{}^2}{4}}, \tag{2.40}$$

gdje je

$$\begin{aligned} N!C_N{}^{\beta} &= N!\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}|\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)|^{\beta}\prod_{i=1}^{N}e^{-\frac{\beta x_i{}^2}{4}}\right)^{-1} \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{\beta N(N-1)}{4}+\frac{N}{2}}\prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma(\frac{\beta}{2})}{\Gamma(\frac{j\beta}{2})}. \end{aligned}$$

Pri tome, za realan $s > 1$ s

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$$

definirana je gama funkcija.

Dokaz. Vidi [2]. $\square$

Sada ćemo razjasniti Teorem 2.5 na primjeru 2×2 matrica GOE modela. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_2$$

matrica GOE modela i neka su $\lambda_1 < \lambda_2$ njezine svojstvene vrijednosti. U svrhu određivanja distribucije ideja je napraviti zamjenu varijabli, odnosno napraviti parametrizaciju elemenata matrice u smislu njezinih svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora. Za matricu A koja zadovoljava uvjete GOE modela funkcija gustoće dana je s

$$p(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}tr(A^2)}. \tag{2.41}$$

Neka je $\tilde{p}(\lambda_1, \lambda_2, \theta)$ funkcija gustoće matrice A u prostoru $(\lambda_1, \lambda_2, \theta)$. Prema teoremu

Teorem 2.6. *Svaka se realna simetrična matrica A može dijagonalizirati ortogonalnom matricom Q promjene baze tako da se na dijagonali pojave svojstvene vrijednosti matrice A onoliko puta kolika je kratnost svojstvene vrijednosti koju ima kao korijen svojstvenog polinoma.*

za takvu matricu A postoji ortogonalna matrica $Q = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, tako da vrijedi

$$Q^T \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \Lambda.$$

Budući da za ortogonalnu matricu Q vrijedi $Q^TQ = I$, vrijedi i

$$\begin{aligned} A = Q\Lambda Q^T &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\theta)\lambda_1 + sin^2(\theta)\lambda_2 & \cos(\theta)\sin(\theta)(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \cos(\theta)\sin(\theta)(\lambda_1 - \lambda_2) & \sin^2(\theta)\lambda_1 + \cos^2(\theta)\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Iz (2.42) vidimo da je promjena varijabli x, y i z u odnosu na transformaciju Q linearna u parametrima λ_1 i λ_2. Kako bismo dobili zajedničku funkciju gustoće od λ_1 i λ_2, $\tilde{p}(\lambda_1, \lambda_2, \theta)$ integriramo po θ, odnosno

$$\tilde{p}(\lambda_1, \lambda_2) = \int \tilde{p}(\lambda_1, \lambda_2, \theta) d\theta. \tag{2.43}$$

Prema teoremu o zamjeni varijabli za funkcije više varijabli, imamo

$$\int\int\int p(x, y, z) dxdydz = \int\int\int |det(J)| \tilde{p}(\lambda_1, \lambda_2, \theta) d\lambda_1 d\lambda_2 \theta,$$

gdje je J Jacobijeva matrica. Matrica J dobije se diferenciranjem x, y i z iz jednakosti (2.42) i jednaka je

$$J = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & \sin(2\theta)(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(2\theta)(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -\sin(2\theta)(\lambda_2 - \lambda_1) \end{bmatrix}. \tag{2.44}$$

Budući da se u trećem stupcu matrice J izraz $(\lambda_2 - \lambda_1)$ pojavljuje u svakom elementu, imamo

$$|det(J)| = |\lambda_2 - \lambda_1| g(\theta), \tag{2.45}$$

gdje je $g(\theta)$ apslutna vrijednost determinante matrice J bez $(\lambda_2 - \lambda_1)$ u trećem stupcu. Možemo izostaviti apsolutnu vrijednost kod $|\lambda_2 - \lambda_1|$ budući je $\lambda_1 < \lambda_2$. Prema Teoremu 2.1 vrijedi $Tr(A^2) = {\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2$ i to ne ovisi o paramteru θ. Dakle, funkcija gustoće matrice A sa svojstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2 dana je s

$$\tilde{p}(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2)}. \tag{2.46}$$

Radi jednostavnosti pretpostavimo da je $C = 1$, odnosno da imamo standardiziranu Gaussovu distribuciju. Tada vrijedi

$$p(x, y, z)dxdydz = |det(J)| \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2)} d\lambda_1 d\lambda_2 d\theta. \tag{2.47}$$

Supstituiranjem (2.45) u prethodnu formulu (2.47), dobije se

$$p(x, y, z)dxdydz = \frac{g(\theta)}{4\pi\sqrt{2\pi}} (\lambda_2 - \lambda_1) e^{-\frac{1}{4}({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2)} d\lambda_1 d\lambda_2 d\theta. \tag{2.48}$$

Sada iz (2.43) imamo

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\lambda_1, \lambda_2) = & \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}} \int (\lambda_2 - \lambda_1) e^{-\frac{1}{4}({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2)} g(\theta) d\theta \\ = & C'(\lambda_2 - \lambda_1) e^{-\frac{1}{4}({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2)}, \end{aligned} \tag{2.49}$$

gdje je $C' = \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}} \int g(\theta)d\theta$, a pri tome mora i zadovoljavati činjenicu da je $\tilde{p}(\lambda_1, \lambda_2)$ funkcija gustoće.

Funkcija gustoće svojstvenih vrijednosti za GUE dobije se na analogan način kao i za GOE pa taj postupak izostavljamo.

3. Riemannova zeta-funkcija

Eulerovu zeta-funkciju za realne brojeve prvi je definirao L. Euler[7] 1737. godine i dokazao povezanost s prostim brojevima kroz tzv. *Eulerovu produktnu formulu.*

Teorem 3.1. *(Eulerova produktna formula)*
Za realan $s > 1$ vrijedi

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}, \tag{3.50}$$

gdje p ide po skupu prostih brojeva.

Dokaz. Neka su s $p_1, \ldots, p_k$ označeni prvih k prostih brojeva. Za svaki prost broj p_i, $i = 1, \ldots k$ vrijedi $|\frac{1}{{p_i}^s}| < 1$ pa je zbog toga geometrijski red

$$\frac{1}{1-{p_i}^{-s}} = 1 + \frac{1}{{p_i}^s} + \frac{1}{{p_i}^{2s}} + \frac{1}{{p_i}^{3s}} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} p^{-ks} \tag{3.51}$$

konvergentan. Tada je produkt

$$\prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{{p_i}^s} + \frac{1}{{p_i}^{2s}} + \frac{1}{{p_i}^{3s}} + \cdots \right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-{p_i}^{-s}} \tag{3.52}$$

konačan i sadrži samo pozitivne članove pa je stoga apsolutno konvergentan. Za $s > 1$ definiramo

$$P_k(s) := \prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{{p_i}^s} + \frac{1}{{p_i}^{2s}} + \frac{1}{{p_i}^{3s}} + \cdots \right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-{p_i}^{-s}}. \tag{3.53}$$

Cilj nam je pokazati da $P_k(s) \to \zeta(s)$ kada $k \to \infty$. Ako raspišemo produkt dan s (3.53), opći član u nastalom redu je $\frac{1}{n^s}$, gdje je $n = {p_1}^{e_1} \cdots {p_k}^{e_k}$ i $e_i \geq 0$. Prema *Osnovnom teoremu aritmetike* koji kaže da je prikaz svakog prirodnog broja većeg od 1 u obliku produkta potencija prostih brojeva jedinstven do na poredak faktora, svaki takav n odgovara točno jednom članu u $P_k(s)$, odnosno

$$P_k(s) = \sum_{n \in A_k} \frac{1}{n^s},$$

gdje je $A_k = \{n : n = {p_1}^{e_1} \cdots {p_k}^{e_k}, e_i \geq 0\}$. Budući da je svaki $n \notin A$ djeljiv s nekim prostim brojem $p > p_k$, vrijedi $n > p_k$. Dakle, za $s > 1$ slijedi

$$|P_k(s) - \zeta(s)| = \sum_{n \notin A_k} \frac{1}{n^s} \leq \sum_{n > p_k} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \sum_{n \leq p_k} \frac{1}{n^s}.$$

Kako je $s > 1$, parcijalne sume reda $\sum \frac{1}{n^s}$ konvergiraju prema $\zeta(s)$ pa stoga vrijedi

$$\sum_{n \leq p_k} \frac{1}{n^s} \to \zeta(s),$$

$k \to \infty$. Stoga $|P_k(s) - \zeta(s)| \to 0$, $k \to \infty$ pa i $P_k(s) \to \zeta(s)$. □

[7]Leonhard Euler (1707.-1783.), švicarski matematičar, fizičar i astronom. Najpoznatiji je po svom doprinosu matematičkoj analizi i teoriji brojeva, posebice za korištenje beskonačnih suma i produkta te za modernije zapise matematičkih pojmova.

Sredinom devetnaestog stoljeća B. Riemann[8] je pokazao da se Eulerova zeta-funkcija uz određene uvjete može definirati i za kompleksne brojeve te time uspio doći do jedne od najvažnijih primjena Riemannove zeta-funkcije, a tiče se određivanja distribucije prostih brojeva. Međutim, najvažnija je Riemannova slutnja koja govori o nultočkama Riemannove zeta-funkcije koju je postavio sam B. Riemann, ali je do danas nitko nije uspio dokazati niti opovrgnuti.

Riemannovu zeta-funkciju možemo shvatiti kao poopćenje Eulerove zeta-funkcije na kompleksnu varijablu s. Podsjetimo se, pod općim Dirichletovim[9] redom smatramo red oblika

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

gdje je $s \in \mathbb{C}$ i $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz kompleksnih brojeva. Također, može se dokazati da Dirichletov red konvergira za $Re(s) > 1$, a divergira za $Re(s) \leq 1$ (za dokaz pogledati [15]). Nas isključivo zanima Dirichletov red u kojemu je $a_n = 1$, za sve $n \in \mathbb{N}$, tj. red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots,$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje konvergira.

Definicija 3.1. *Riemannova zeta-funkcija definirana je kao red*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{3.54}$$

za $s \in \mathbb{C}$ takav da je $Re(s) > 1$.

Red definiran s (3.54) konvergira za sve $s \in \mathbb{C}$ takve da je $Re(s) > 1$, a divergira za $Re(s) \leq 1$. Može se dokazati da Eulerova produktna formula dana s (3.50) vrijedi i za $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > 1$, a posebnu pozornost ima u analitičkoj teoriji brojeva jer omogućuje primjenu metoda analize za proučavanje prostih brojeva.
Formula za vrijednost Riemannove zeta-funkcije u parnim prirodnim brojevima je poznata i dana s

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k},$$

gdje B_{2k} označava Bernoullijev broj. Pitanje određivanja sume recipročnih vrijednosti kvadrata svih prirodnih brojeva $\zeta(2)$, poznato kao Baselski problem, riješio je L. Euler 1735. godine i dokazao $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Zanimljivo je da se odgovarajućom zamjenom varijabli $\zeta(2)$ može izračunati kao zbroj površina dvaju trokuta budući da izraz $\frac{1}{n^2}$ odgovara površini područja desno od y-osi, lijevo od x-osi i i ispod krivulje dane s $y = \frac{e^{-nx}}{n}$ (za detalje pogledati [16]). O aritmetičkim svojstvima brojeva $\zeta(2k+1)$ ne znamo puno i ne možemo ih odrediti eksplicitno kao za parne brojeve.

Prije nego krenemo sa svojstvima Riemannove zeta-funkcije, definirajmo osnovne pojmove iz kompleksne analize potrebne za njhovo razumijevanje.

---

[8]Bernhard Riemann (1826.–1866.), njemački matematičar. Općenito se smatra jednim od najvećih matematičara 19. stoljeća.

[9]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805.-1859.), njemački matematičar čija je zasluga suvremena "formalna" definicija funkcije.

Definicija 3.2. *Za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da je analitička (holomorfna) ako je derivabilna i derivacija f' je neprekidna na Ω. Za funkciju f kažemo da je analitička u točki z_0 ako postoji okolina točke z_0 na kojoj je f' analitička.*

Definicija 3.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ dana funkcija. Kažemo da funkcija f u točki $z_0 \in Int\overline{\Omega} = \overline{\Omega} \setminus \partial\overline{\Omega}$ ima singularitet ako u točki z_0 funkcija f nije analitička ili uopće nije definirana u toj točki.*

Definicija 3.4. *Za singularitet z_0 kažemo da je izolirani singularitet funkcije f ako je f analitička funkcija na nekom probušenom krugu $K^*(z_0, R)$ oko točke z_0.*

Postoje tri vrste izoliranih singulariteta: uklonjivi, polovi i bitni singulariteti (za detaljnija objašnjenja pogledati [26]).

Pokažimo sada da je $\zeta(s)$ analitička na $Re(s) > 1$. Za $Re(s) \geq x > 1$ vrijedi

$$|n^{-s}| = |e^{-s\ln(n)}| = e^{-Re(s)\ln(n)} \leq e^{-x\ln(n)} = n^{-x},$$

odakle slijedi da red $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s}$ konvergira apsolutno i uniformno na zatvorenoj poluravnini $Re(z) \geq x$, za svaki $x > 1$. Prema tome, $\zeta(s)$ je analitička na skupu $Re(s) > 1$ budući je red (3.54) kojim je funkcija definirana apsolutno i lokalno uniformno konvergentan.
Također se može pokazati da postoji analitička ekstenzija od $\zeta(s)$ na $C \setminus \{1\}$, a u točki $s = 1$ ima pol prvog reda i reziduum 1. Podsjetimo se, ako su $f_1 : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ i $f_2 : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ analitičke funkcije takve da je $\Omega_1 \subset \Omega_2$ i vrijedi $f_2|_{\Omega_1} = f_1$, kažemo da je f_2 analitička ekstenzija funkcije f_1.

3.1 Funkcijska jednadžba i analitička ekstenzija

Eulerova produktna formula prva je od mnogih važnih svojstava od $\zeta(s)$. Sljedeći je korak pokazati da $\zeta(s)$ ima analitičku ekstenziju na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. U tu svrhu podsjetimo se najprije definicije i osnovnih svojstava gama funkcije.

Definicija 3.5. *Za sve $s \in \mathbb{C}$ takve da vrijedi $Re(s) \neq -n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, gama funkcija definirana je nepravim integralom*

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Sljedeći teorem, kojeg navodimo bez dokaza, daje nam neke od važnijih svojstava gama funkcije.

Teorem 3.2. *$\Gamma(s)$ ima sljedeća svojstva:*

1. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
2. *za sve $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ vrijedi* $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{sin(\pi s)}$
3. $\Gamma(s)\Gamma(\frac{1}{2} + s) = 2^{1-2s}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2s)$
4. *ima analitičku ekstenziju na $\mathbb{C} \setminus \{0 - 1, -2, \dots\}$ i reziduumima $\frac{(-1)^k}{k!}$.*

Supstitucijom $x = t\pi$ te iz definicije gama funkcije slijedi

$$
\begin{aligned}
\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\frac{s}{2}-1}\pi^{-\frac{s}{2}}dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\pi t}(\pi t)^{\frac{s}{2}-1}\pi^{-\frac{s}{2}}\pi dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\pi t}t^{\frac{s}{2}-1}dt.
\end{aligned} \tag{3.55}
$$

Uvrštavanjem jednakosti dobivene u (3.55) te supstitucijom $y = \frac{t}{n^2}$, za $Re(s) > 1$ dobije se sljedeće:

$$
\begin{aligned}
\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{1}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{s}{2}-1}}{n^s}e^{-\pi t}dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{n^2}\right)^{\frac{s}{2}}\frac{e^{-\pi t}}{t}dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1}e^{-\pi n^2 y}dy.
\end{aligned} \tag{3.56}
$$

Nepravi integral dan s (3.56) konvergentan je za $Re(s) > 0$ u objema granicama što znači da i red dan s (3.56) konvergira. Dakle, zadovoljen je teorem o monotonoj konvergenciji koji omogućuje zamjenu redoslijeda integracije i sumiranja pa primjenom tog teorema na (3.56) slijedi

$$
\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2 y}dy. \tag{3.57}
$$

Neka je sada

$$
h(y) = \sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2 y}, \quad y > 0. \tag{3.58}
$$

Tako definirana funkcija h povezana je s Jacobijevom theta funkcijom $\theta(y) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 y}$ izrazom $\theta(y) = 1 + 2h(y)$. Također se može pokazati da vrijedi

$$
\theta\left(\frac{1}{y}\right) = \sqrt{y}\theta(y), \quad y > 0,
$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
h\left(\frac{1}{y}\right) &= \frac{1}{2}(\sqrt{y}(1 + 2h(y)) - 1) \\
&= \frac{\sqrt{y}-1}{2} + \sqrt{y}h(y), \quad y > 0.
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

Sada (3.57) zapišemo u terminima od $h(y)$ na sljedeći način:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_0^1 y^{\frac{s}{2}-1}h(y)dy + \int_1^\infty y^{\frac{s}{2}-1}h(y)dy. \tag{3.60}$$

Primjenom metode supstitucije $y \to \frac{1}{y}$ na $\displaystyle\int_0^1 y^{\frac{s}{2}-1}h(y)dy$ slijedi

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_1^\infty y^{-\frac{s}{2}-1}h\left(\frac{1}{y}\right)dy + \int_1^\infty y^{\frac{s}{2}-1}h(y)dy. \tag{3.61}$$

Sada uvrštavanjem (3.59) u prvi intergral s desne strane jednadžbe (3.61) imamo

$$\begin{aligned}\int_1^\infty y^{-\frac{s}{2}-1}h\left(\frac{1}{y}\right)dy &= \int_1^\infty y^{-\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\sqrt{y}-1}{2}+\sqrt{y}h(y)\right)dy\\ &= \frac{1}{2}\int_1^\infty(\sqrt{y}-1)y^{-\frac{s}{2}-1}dy + \int_1^\infty h(y)y^{\frac{(1-s)}{2}-1}dy.\end{aligned} \tag{3.62}$$

Za $Re(s) > 1$ lako se pokaže da vrijedi

$$\frac{1}{2}\int_1^\infty(\sqrt{y}-1)y^{-\frac{s}{2}-1}dy = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} = -\frac{1}{s(1-s)}. \tag{3.63}$$

Uvrštavanjem (3.63) u formulu danu s (3.61) slijedi

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \int_1^\infty y^{\frac{s}{2}-1}h(y)dy + \int_1^\infty h(y)y^{\frac{(1-s)}{2}-1}dy - \frac{1}{s(1-s)}\\ &= \int_1^\infty h(y)(y^{\frac{s}{2}-1}+y^{\frac{(1-s)}{2}-1})dy - \frac{1}{s(1-s)}.\end{aligned} \tag{3.64}$$

Iz

$$h(y) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 y} < \sum_{n=1}^\infty e^{-(\pi y)n} = \frac{1}{e^{\pi y}-1}$$

možemo zaključiti da $h(y)$ apsolutno konvergira što implicira apsolutnu konvergenciju nepravog integrala danog u (3.64) na $\mathbb{C}$. Formula (3.64) ima smisla za sve $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Međutim, $s = 0$ ne predstavlja problem budući da vrijedi

$$\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\frac{1}{s} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}.$$

Dakle, pronašli smo analitičku funkciju na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ s jednostavnim polom u $s = 1$ i koja je jednaka $\zeta(s)$ za $Re(s) > 1$. Stoga možemo definirati funkciju

$$\xi(s) := \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \tag{3.65}$$

nazvanu *kompletirana zeta-funkcija* koja predstavlja analitičku ekstenziju od $\zeta(s)$ na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ i zadovoljava funkcijsku jednadžbu

$$\xi(s) = \xi(1-s). \tag{3.66}$$

Ovo nije jedina analitička ekstenzija Riemannove zeta-funkcije (za više dokaza pogledati [1]), ali zbog jedinstvenosti sve analitičke ekstenzije svode se na (3.64) na bilo kojoj domeni na kojoj su definirane.

Sljedeći teorem daje nam jedno od najvažnijih svojstava Riemannove zeta-funkcije.

Teorem 3.3. *Riemannova zeta-funkcija zadovoljava funkcijsku jednadžbu*

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s). \tag{3.67}$$

Dokaz. Jednadžbu (3.66) zapišemo u obliku

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s). \tag{3.68}$$

Sada iz (3.68) imamo

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}-s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}. \tag{3.69}$$

Koristeći treću tvrdnju iz Teorema 3.2, dobije se

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) = 2^s\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(1-s). \tag{3.70}$$

Sada (3.70) zapišemo u obliku

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = \frac{2^s\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}. \tag{3.71}$$

Uvrštavanjem (3.71) u (3.69) slijedi

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{(2\pi)^s\Gamma(1-s)}. \tag{3.72}$$

Konačno, koristeći drugu tvrdnju iz Teorema 3.2 i sređivanjem dobivene jednadžbe slijedi

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s).$$

□

Iz funkcijske jednadže (3.67) vidimo da je dovoljno razumijeti $\zeta(s)$ npr. na skupu $Re(s) \geq \frac{1}{2}$ jer ako znamo vrijednost $\zeta(s)$ u proizvoljnom kompleksnom broju $s \neq 0, 1$, onda znamo njezinu vrijednost i u $1-s$ koji je centralno-simetričan broju s u odnosu na $\frac{1}{2}$.

3.2 Nultočke Riemannove zeta-funkcije

Jedno od važnijih pitanja u ovom radu je što čini skup nultočaka Riemannove zeta-funkcije. Znamo da vrijedi $cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 0$, za sve $s \in \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$, ali budući da gama funkcija ima jednostavne polove za sve negativne cijele brojeve i nulu ne uzimamo u obzir $s \in \{-1, -3, -5, \ldots\}$. Također, $\zeta(s)$ ima jednostavan pol u $s = 1$ pa to ne može biti njezina nultočka. Dakle, iz funkcijske jednadžbe (3.67) slijedi

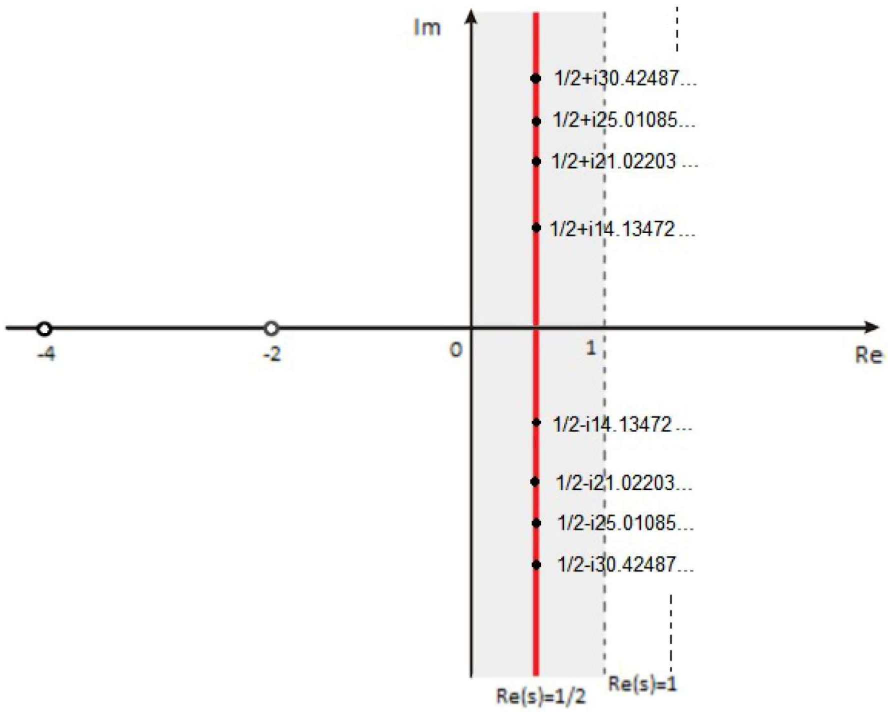
$$\zeta(1-s) = 0, \quad \text{za} \quad s \in \{3, 5, \ldots\},$$

odakle zaključujemo da $\zeta(s)$ ima nultočke u točkama $s = -2k, k \in \mathbb{N}$ koje se nazivaju tzv. *trivijalne nultočke*. Funkcijska jednadžba (3.67) u kombinaciji s Eulerovom produktnom formulom daje još jedan važan rezultat o nultočkama. Znamo da

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

gdje p ide po skupu prostih brojeva, vrijedi za $s \in \mathbb{C}$ t.d. $Re(s) > 1$, a ne postoji takav s koji zadovoljava $\frac{1}{1-p^{-s}} = 0$, za prost broj p. Dakle, za $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > 1$, $\zeta(s)$ nema nultočaka. Nadalje, zbog povezanosti $\zeta(s)$ i $\zeta(1-s)$ iz funkcijske jednadžbe (3.67) i činjenice da nema nultočaka za $Re(s) > 1$, možemo zaključiti da nema nultočaka niti za s takve da je $Re(s) < 0$. Također se može dokazati da $\zeta(s)$ nema nultočaka na pravcima $Re(s) = 0$ i $Re(s) = 1$.
Iz prethodno navedenog jasno je da se netrivijalne nultočke $s \in \mathbb{C}$ od $\zeta(s)$ nalaze unutar otvorene pruge $0 < Re(s) < 1$ koja se naziva *kritična pruga* paralelnoj sa $y-$osi i simetričnoj u odnosu na pravac $Re(s) = \frac{1}{2}$. Netrivijalne nultočke Riemannove zeta-funkcije odgovaraju nultočkama njezine analitičke ekstenzije ξ i one su simetrične s obzirom na pravac $Re(s) = \frac{1}{2}$ i realnu os što nam govori da ako je ρ netrivijalna nultočka Riemannove zeta-funkcije, onda je i $\overline{\rho}$ također njezina nultočka. Riemann je postavio slutnju da su one oblika $\frac{1}{2} + ib$.

Slutnja 1. *(Riemannova slutnja)*
Sve netrivijalne nultočke Riemannove zeta-funkcije leže na kritičnom pravcu $Re(s) = \frac{1}{2}$.



Slika 2: Nultočke od $\zeta(s)$ u kompleksnoj ravnini

Ta pretpostavka nazvana *Riemannova slutnja* ima posebnu pozornost u teoriji brojeva budući da mnogi teoremi njezinu istinitost koriste kao polaznu točku, međutim brojni pokušaji da se dokaže ili opovrgne do danas nisu uspjeli. Numerički je provjerena za mnoge brojeve i iako je engleski matematičar G. H. Hardy[10] dokazao da $\zeta(s)$ na kritičnom pravcu $Re(s) = \frac{1}{2}$ ima beskonačno mnogo nultočaka, još nije dokazano da niti jedna netrivijalna nultočka ne leži negdje u kompleksnoj ravnini izvan kritičnog pravca. Sam B. Riemann uspio je odrediti nekoliko prvih nultočaka koje su sve imale realan dio jednak $\frac{1}{2}$. Do danas je poznato oko 10^{13} nultočaka i sve također imaju realan dio $\frac{1}{2}$, ali to nam ne garantira istinitost Riemannove slutnje.

3.3 Riemannova zeta-funkcija i prosti brojevi

Prosti brojevi pobuđuju zanimanje matematičara još od antičkih vremena. Od trenutka kada je Euklid dokazao da prostih brojeva ima beskonačno mnogo, prosti brojevi dobivaju značajnu ulogu u teoriji brojeva. Znamo da su prosti brojevi sporadičniji kako se povećavaju, ali jedno od najznačajnijih pitanja je postoji li neka pravilnost u njihovom pojavljvanju na brojevnom pravcu realnih brojeva.

Broj prostih brojeva koji su manji ili jednaki od nekog realnog broja x označava se s $\pi(x)$. Promatrajući graf funkcije $\pi(x)$, C. F. Gauss[11] je došao do zaključka da je monotono rastuća na sličan način kao i logaritamska funkcija. Uočivši to, odlučio je aproksimirati $\pi(x)$ kvocijentom

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}, \tag{3.73}$$

gdje je s $\ln(x)$ označen prirodni logaritam broja x. Kasnije je C. F. Gauss predložio još bolju aproksimaciju od π funkcijom Li poznata pod nazivom *logaritamska integralna funkcija* koja je dana s

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}. \tag{3.74}$$

Prethodna zapažanja kao dio zakonitosti distribucije prostih brojeva dana su sljedećim teoremom koji opisuje tzv. asimptotsko ponašanje od π.

Teorem 3.4. *(Teorem o prostim brojevima)*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1.$$

Teorem 3.4 nam kaže da je n-ti prost broj p_n asimptotski jednak $n\ln(n)$, ali nam ne daje informacije o grešci pri takvoj aproksimaciji.

Slutnja 2. *Za svaki $\epsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je*

$$|\pi(n) - Li(n)| < n^{\frac{1}{2}+\epsilon},$$

za sve $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$.

Iskazana slutnja govori da je greška pri aproksimaciji $\pi(n)$ s $Li(n)$ u suštini $\sqrt{n}$. Ova slutnja ekvivalentna je Riemannovoj hipotezi što znači da u slučaju njene istinitosti imamo još bolju aproksimaciju distribucije prostih brojeva nego što ju daje Teorem o prostim brojevima.

[10]Godfrey Harold Hardy (1877.-1947.), engleski matematičar. Zaslužan je za mnoge rezultate u matematičkoj analizi i teoriji brojeva.

[11]Jochann Carl Friedrich Gauss (1777.-1855.). Poznat po ključnom doprinosu razvoju teorije brojeva, analize, diferencijalne geometrije, geodezije, magnetizma i astronomije.

3.3.1 Riemannova eksplicitna formula

B. Riemann je koristio $\pi(x)$ da definira svoju vlastitu funkciju prebrojavanja J nazvanu *Riemannova distribucija prostih brojeva.* Funkcija J dana je s

$$J(x) = \sum_{p^n \leq x} \frac{1}{n}, \tag{3.75}$$

gdje je p prost broj. Veza između nultočaka od $\zeta(s)$ i distribucije prostih brojeva već je ranije navedena kroz tzv. Eulerovu produktnu formulu

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \tag{3.76}$$

gdje p ide po skupu prostih brojeva. Logaritmiranjem obje strane jednadžbe (3.76) i koristeći Taylorov razvoj za funkciju ln slijedi:

$$\begin{aligned} \ln \zeta(s) &= -\sum_p \ln\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \\ &= \sum_p \ln\left(\frac{1}{p^s} + \frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{3p^{3s}} + \cdots\right) \\ &= \sum_p \sum_n \frac{p^{-ns}}{n}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Vrijedi

$$p^{-ns} = s \int_{p^n}^{+\infty} x^{-s-1} dx. \tag{3.78}$$

Uvrštavanjem (3.78) u (3.77) slijedi

$$\ln \zeta(s) = s \sum_p \sum_n \frac{1}{n} \int_{p^n}^{+\infty} x^{-s-1} dx. \tag{3.79}$$

Budući da (3.79) apsolutno konvergira za $Re(s) > 1$ možemo je zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \ln \zeta(s) &= s \int_0^{+\infty} \sum_{p^n \leq x} \frac{1}{n} x^{-s-1} dx \\ &= s \int_0^{+\infty} J(x) x^{-s-1} dx. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Pogledajmo sada povezanost od $J(x)$ i $\pi(x)$. Primijetimo da je broj kvadrata prostih brojeva manjih od x očito jednak $\pi(x^{\frac{1}{2}})$. Analogno dolazimo do zaključka da je broj n-tih potencija prostih brojeva manjih od x jednak $\pi(x^{\frac{1}{n}})$. Tada $J(x)$ možemo zapisati kao

$$J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \cdots + \frac{1}{n}\pi(x^{\frac{1}{n}}) + \cdots . \tag{3.81}$$

Važno je spomenuti da je funkcija J konačna jer za neki n vrijedi $\pi(x^{\frac{1}{n}}) = 0$ budući da nema prostih brojeva manjih od 2.

Primjerice, $J(100) = \pi(100) + \frac{1}{2}\pi(10) + \cdots + \frac{1}{7}\pi(1.9307) \approx 28.5333$, a znamo da prostih brojeva manjih od 100 ima 25.
Neka $\mu(n)$ označava Möbiusovu funkciju danu s

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & n = p_1 \cdots p_k, \text{ gdje su } p_1, \ldots, p_k \text{ različiti prosti brojevi} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{3.82}$$

Primjenom Möbiusove formule inverzije na funkciju $J(x)$ danu s (3.75) dobije se

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J(x^{\frac{1}{n}}), \tag{3.83}$$

što povezuje funkciju distribucije prostih brojeva π i Riemannovu funkciju distribucije prostih brojeva J.

1859. godine Riemann je došao do jednog od najvažnijih zapisa funkcije J:

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\rho:\zeta(\rho)=0} Li(x^\rho) - \ln(2) + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\ln(t)}, \tag{3.84}$$

pri čemu ρ ide po skupu netrivijalnih nultočaka od $\zeta(s)$. Takav zapis predstavlja poboljšanje Teorema o prostim brojevima, odnosno točniju procjenu prostih brojeva manjih ili jednakih nekom realnom broju x. Dva posljednja izraza iz (3.84) daju infinitezimalnu promjenu vrijednosti funkcije za velike x, a $\sum_{\rho:\zeta(\rho)=0}$ poboljšava grešku dobivenu pri procjeni $Li(x)$. Riemannova aproksimacija bolja je u usporedbi s Gaussovom. Dokazao ju je H. von Mangoldt[12] 1895. godine tako što je umjesto $\log(\zeta(s))$ promatrao njezinu derivaciju $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$.

3.4 Nultočke Riemannove zeta-funkcije i slučajne matrice

Već smo spomenuli da je dokazano da na kritičnom pravcu leži beskonačno mnogo netrivijalnih nultočaka Riemannove zeta-funkcije. Sada navodimo teorem koji se odnosi na njihovu procjenu, a govori o broju netrivijalnih nultočaka koje se nalaze ispod neke zadane visine.

Teorem 3.5. *(Riemann-Von Mangoldtova formula)*
Neka je $P = \{\sigma + it \in \mathbb{C} : 0 < \sigma < 1, 0 \leq t \leq T\}$. Broj nultočaka Riemannove zeta-funkcije $N(T)$ unutar P zadovoljava

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O(\ln(T)). \tag{3.85}$$

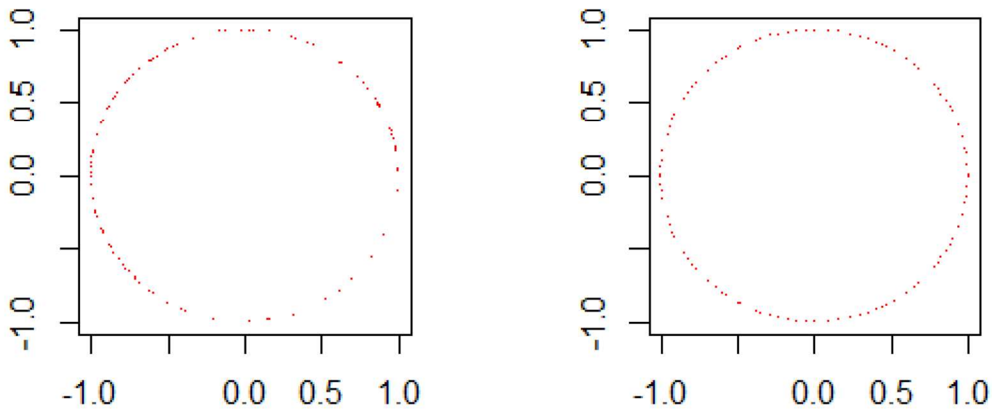
Prethodno navedeni teorem, kojeg je dokazao H. von Mangoldt 1905. godine, temelj je za računsku potvrdu Riemannove slutnje budući da graf funkcije $N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi}$ dobro aproksimira graf distribucije imaginarnih dijelova izračunatih nultočaka od $\zeta(s)$, posebice za one na velikoj visini na kritičnom pravcu. Najbolju aproksimaciju broja nultočaka dao je američki matematičar John B. Conway 1989. godine dokazavši da se više od dvije petine netrivijalnih nultočaka od $\zeta(s)$ nalazi na kritičnom pravcu.

Neka su $\rho_j = \frac{1}{2} + i\theta_j$ sve netrivijalne nultočke od $\zeta(s)$, odnosno pretpostavljamo istinitost Riemannove slutnje. Polazna točka povezanosti sa slučajnim matricama i daljnjeg pročavanja bila je sljedeća slutnja, a glasi:

[12]Hans Carl Friedrich Von Mangoldt (1854.-1925.), njemački matematičar. Dao je veliki doprinos u rješavanju Teorema o prostim brojevima.

Slutnja 3. *(Hilbert-Pòlya slutnja)*
Postoji hermitski operator na beskonačnodimenzionalnom Hilbertovom prostoru čije svojstvene vrijednosti odgovaraju imaginarnom dijelu θ_j netrivijalnih nultočaka od $\zeta(s)$.

Znamo da se spektar hermitskog operatora sastoji samo od realnih svojstvenih vrijednosti pa da bismo pronašli pogodan hermitski operator za rješavanje Hilbert-Pólya slutnje, potrebno je pobliže proučiti lokacije nultočaka od $\zeta(s)$ na kritičnom pravcu. Početkom 1970-ih H. E. Montgomery je bio jedan od prvih koji je razmotrio njihova statistička svojstva na velikoj visini negdje u beskonačnosti na kritičnom pravcu.
Uzmemo primjerice 100 susjednih nultočaka negdje na velikoj visini na kritičnoj pruzi, odnosno njihov imaginaran dio θ_j i zapišemo ih u polarnim koordinatama. Promatrajući udaljenost između susjednih nultočaka na kružnici, možemo uočiti njihovu pravilnu raspoređenost. Takva pojava također se mogla uočiti i za svakih sljedećih 100 susjednih nultočaka. Međutim, za 100 slučajno generiranih brojeva na kružnici to gotovo nikada nije slučaj. To nam sugerira da ima smisla proučavati distribuciju udaljenosti između susjednih nultočaka. Slika 3 prikazuje grafički prikaz svojstvenih vrijednosti ortogonalne slučajne $100x100$ matrice u kompleksnoj ravnini izgenerirane u programskom jeziku *R*. Uočavamo njihovu pravilnu raspoređenost na kružnici kao i kod nultočaka od $\zeta(s)$ (za detalje pogledati [8]). Dakle, iz



Slika 3: Lijevo: 100 slučajno generiranih brojeva na jediničnoj kružnici; Desno: svojstvene vrijednosti slučajne ortogonalne $100x100$ matrice na jediničnoj kružnici u kompleksnoj ravnini

prethodno navedenog jasno je da svojstvene vrijednosti slučajnih matrica, odnosno razlike susjednih svojstvenih vrijednosti, imaju "trend ponašanja" koji može biti ključ u rješavanju problema distribucije nultočaka od $\zeta(s)$.

Sada navodimo rezultate iz rada (pogledati [23]) autorice N.C. Snaith[13] koji upućuju na takvu povezanost. Za $\theta_j > 0$, budući je od interesa fluktuacija lokacija nultočaka na kritičnom pravcu, definiramo novi skup točaka

$$w_j = \theta_j \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\theta_j}{2\pi}.$$

[13]Nina Claire Snaith (1974.), britanska matematičarka. Veliku pozornost daje proučavanju povezanosti između teorije slučajnih matrica i funkcija kao što su Riemannova zeta-funkcija i L-funkcije.

Slutnja 4. *(Montgomeryeva slutnja, 1973.)*

$$\lim_{W\to\infty}\frac{1}{W}\sum_{1\le n,m\le W,n\neq m} f(w_n-w_m)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)R_2(x)dx,$$

gdje je

$$R_2(x)=1-\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2,$$

i f odgovarajuća test-funkcija.

Intuitivno, $R_2(x)$ ukazuje na vjerojatnost pronalaženja dviju svojstvenih vrijednosti na određenoj udaljenosti. F. Dyson došao je do zaključka da se radi o svojstvenim vrijednostima familije slučajnih unitarnih matrica.

Teorem 3.6. *Vrijedi:*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_{U(N)}\sum_{1\le j,k\le N,j\neq k} f\left(\frac{N}{2\pi}(\theta_j-\theta_k)\right)dA_{Haar}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(1-\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2\right)dx,$$

gdje je $U(N)$ grupa unitarnih matrica reda N, $e^{i\theta_1},\dots e^{i\theta_N}$ svojstvene vrijednosti matrice $A\in U(N)$, a $dA_{Haar}=\prod_{i>k}|e^{i\theta_i}-e^{i\theta_k}|^2\prod_i\theta_i$.

Teorem 3.6 govori da na velikoj visini na kritičnom pravcu distribucija nultočaka od $\zeta(s)$, odgovarajuće skalirane, dobro prati graničnu distribuciju svojstvenih vrijednosti unitarnih matrica.

Teorem 3.7. *(Selber)*
Za pravokutnik $B\in\mathbb{C}$ vrijedi

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left|\left\{t: T\le t\le 2T,\frac{\ln(\zeta(\frac{1}{2}+it))}{\sqrt{\frac{1}{2}\ln\ln(T)}}\in B\right\}\right|=\frac{1}{2\pi}\int\int_B e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy.$$

Teorem 3.7 govori da kada $T\to\infty$, distribucija realnog i imaginarnog dijela od $\frac{\ln(\zeta(\frac{1}{2}+iT))}{\sqrt{\frac{1}{2}\ln\ln(T)}}$ svaka teži, neovisno, Gaussovoj distribuciji s očekivanjem 0 i varijancom 1.

1980-ih godina, motiviran Montgomeryjevom pretpostavkom, poljski matematičar A. Odlyzko započeo je intenzivniju numeričku analizu nultočaka od $\zeta(s)$ te došao do zaključka da distribucija razlika nultočaka negdje u beskonačnosti na kritičnom pravcu dobro prati graničnu distribuciju razlika svojstvenih vrijednosti za Gaussov unitaran model slučajnih matrica.

4. Primjene slučajnih matrica u analizi financijskih podataka

Financijsko tržište je skup mjesta, instrumenata, osoba, tehnika i tokova koji omogućavaju razmjenu novca i kapitala, odnosno na kojem se trguje financijskim instrumentima. Portfelj[14] se sastoji od rizičnih (dionice, obveznice,..) i nerizičnih (novac u domaćoj valuti) financijskih instrumenata. Financijsko tržište bazirano je na *principu ponude i potražnje*: ako je financijski instrument tražen, njegova cijena raste. Ukoliko na tržištu postoji više prodavača nego kupaca, cijena financijskog instrumenta pada. Najvažnija podjela tržišta u financijskom sustavu temelji se na ročnosti instrumenata kojima se na njima trguje, pa razlikujemo *tržišta novca* i *tržišta kapitala.*

Na tržištu novca omogućava se davanje kratkoročnih zajmova, odnosno trgovanje kratkoročnim vrijednosnim papirima[15].

Tržište kapitala nastalo je radi financiranja dugoročnih investicija od strane tvrtki, država i domaćinstava. Najpoznatiji segement tržišta kapitala je *tržište dionica*[16] kojima se trguje na burzama te na drugim uređenim tržištima. Trgovanje dionicama na *primarnom tržištu* podrazumijeva prodaju novih dionica što je izravan način financiranja poduzeća. *Sekundarno tržište dionica*, odnosno trgovanje dionicama koje su već prije emitirane, ima značajan utjecaj na očekivanja tvrtki u smislu budućih investicija što neizravno utječe na zapošljavanje, rast i opće stanje gospodarstva.

Trgovci kupuju i prodaju dionice kako bi ostvarili potencijalni profit i pri tome obraćaju pažnju na rizik kojeg donosi njihova strategija. Zbog nepredvidivih promjena, odnosno velikih fluktuacija cijena dionica u neprekidnom vremenu, teško je predvidjeti cijenu dionice nakon što je kupimo ili prije nego je odlučimo prodati. Međutim, upravo zbog tog rizika ulaganje u dionice može donijeti i veću zaradu od primjerice štednje novca, ali i veliki gubitak. Tehnike kojima se procjenjuje vrijednost dionica i drugih vrijednosnih papira u ekonomiji dijele se na *fundamentalnu i tehničku analizu.* Fundamentalna analiza temelji se na pretpostavci da je ravnotežna cijena određena ponudom i potražnjom pa stoga nastoji definirati sve faktore koji utječu na ponudu i potražnju te na taj način predvidjeti kretanje cijena. Tehnička analiza predviđa kretanje cijena u budućnosti proučavajući prijašnja kretanja cijena, volumena trgovanja i drugih statističkih pokazatelja. Nadalje, sudionici na tržištu dijele se prema očekivanju budućih cijena na *bikove* koji očekuju rast cijena i *medvjede* koji očekuju njihov pad. Općenito, bikovi kupuju, a medvjedi prodaju očekujući da će na tim transakcijama ostvariti dobit. *Špekulativno investiranje* označava odabir visoko rizičnih investicija s ciljem postizanja velikih i brzih dobitaka. U toku takvih špekulacija stvoren je niz *financijskih izvedenica*[17] kao zaštite od financijskih rizika, a najpoznatije su *opcije*[18].

[14]skup financijske imovine pojedinca ili nekog poduzeća, *engl. portfolio*

[15]vrijednosni papiri i zajmovi koji imaju rok dospijeća ispod jedne godine

[16]vlasnički vrijednosni papir koji predstavlja pravo vlasništva u određenom dioničkom društvu, *engl. stock*

[17]ugovori čija je vrijednost izvedena iz nekog drugog osnovnog financijskog instrumenta

[18]daju pravo, ali ne i obvezu da kupac opcije kupi ili proda dionicu po dogovorenoj cijeni u razdoblju do određenog datuma u budućnosti ili na taj datum, ali pri tome plaća premiju

4.1 Nepredvidljivost na tržištu vrijednosnica

Tržišta dionica i drugih vrijednosnica mogu se opisati kao *nelinearni, dinamički sustavi socioekonomskog ponašanja.* *Leptirov efekt*[19] snažno i brzo djeluje i na globalnom tržištu vrijednosnih papira. Strukture dnevnih, mjesečnih i godišnjih grafova cijena često izgledaju slično, međutim izražena ovisnost o inicijalnim uvjetima čini ih teško predvidljivim.

Burzovna povijest prepuna je burzovnih slomova[20]. Rastom trgovanja dionicama sve je veća važnost usmjerena na procjenu i kontrolu postojećih rizika trgovanja, a postojanje takvih rizika posljedica je neizvjesnosti tržišta dionica. Različite nepravilnosti burzovnih indeksa općenito su bile pripisivane nasumičnim šokovima, a mogućnost objašnjenja takvih događanja kako bi se mogle predvidjeti takve pojave privukla je pažnju ekonomskih teoretičara, ali i matematičara i fizičara. Međutim, jedna od središnjih tvrdnji u teoriji tržišnog rizika i ekonomiji općenito, tzv. *hipoteza učinkovitog tržišta*, sugerira da samo predviđanje cijena utječe na buduće cijene, a iskazana je u tri forme. *Slaba forma* tvrdi kako nije moguće predvidjeti buduće cijene dionica na temelju njihovih prethodnih vrijednosti, a *umjerena forma* da to nije moguće niti fundamentalnom analizom. *Jaka forma* navedene hipoteze tvrdi da na efikasnom tržištu sve informacije, uključujući i one privatne, trenutno utječu na cijenu dionica.
Bitno je napomenuti da se u analizama ne koriste cijene dionica zbog njihove karakteristike da imaju trend rasta ili pada, nego relativne promjene cijena koje nazivamo povrati. *Relativni povrat* dan je izrazom

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_t},$$

gdje je S_t cijena dionice u trenutku t. S druge strane, *log-povrati* dani su s

$$r_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1})$$

i oni su nam pogodniji[21] za modeliranje, posebice za duži period.

Logično je pitati se što je razlog proučavanju slučajnih matrica i koja je njihova svrha na tržištu dionica. Imamo matricu popunjenu slučajno generiranim brojevima iz odabrane distribucije elemenata matrice, a moguće je nametnuti i uvjete na samu konstukciju, primjerice simetričnost. Uglavnom je izbor navedenih svojstava određen problemom kojeg želimo opisati. Sve navedeno ih čini konceptualno jednostavnijim, a opet bogate strukture. Teorija slučajnih matrica može se primijeniti (s određenim ograničenjima zbog inherentne prirode sustava) na tržištu vrijednosnica kako bi se analiziralo postoje li određene pravilnosti u sustavu u matematičkom smislu. Također, precizna kvantifikacija kros-korelacija između vremenskih nizova povrata različitih dionica od praktične je važnosti u kvantificiranju rizika vrijednosti portfelja, cijena opcija i predviđanja.

[19] pretpostavka da postoji velika osjetljivost na mala odstupanja od početnih uvjeta što može dovesti do bitno različitih ishoda, *engl. butterfly effect*

[20] pad burze u listopadu 1929. godine koji je označavao početak dugogodišnje Velike gospodarske krize koja je utjecala na većinu država svijeta poznatiji kao "Crni utorak" i "Crni ponedjeljak" 19. listopada 1987. godine kada su gotovo sve svjetske burze doživjele najveće dotad zabilježene padove

[21] empirijska istraživanja ukazuju na činjenicu da se distribucija log-povrata može opisati distribucijama s teškim repom (*engl. heavy-tailed distributions*) što znači da u odnosu na Gaussovu distribuciju postoji veća vjerojatnost za ekstremnim realizacijama podataka poput naglog rasta ili pada dionice u kratkom vremenskom periodu

4.1.1 Markowitzeva teorija optimizacije portfelja

Svi ulagači na tržištu dionica imaju isti cilj, a to je pronaći optimalnu kombinaciju rizika i povrata. Osnovna ideja H. M. Markowitza [22] bila je formirati portfelj koji na određenom stupnju rizika donosi najveći povrat, odnosno portfelj koji za zadani povrat ima minimalan rizik.
Neka se promatrani portfelj sastoji od N dionica. Za svaku dionicu i iz portfelja promatramo vremenski niz povrata Y_i duljine T, gdje je T u praksi često veći od N. Neka je C matrica kros-korelacija povrata. Pri tome pretpostavljamo $N, T \to \infty$ s konačnim omjerom $Q = \frac{N}{T} > 1$. Markowitzeva teorija optimizacije portfelja predstavlja rješavanje problema

$$\begin{aligned} \min_{w \in \mathbb{R}^N} \quad & \frac{1}{2} w^* C w \\ \text{t.d} \quad & w^* g \geq \mathcal{G}, \end{aligned} \tag{4.86}$$

gdje je $w = (w_1, \ldots, w_N)$ (w_i predstavlja udio novca koji želimo uložiti u i-tu financijsku imovinu i pri tome vrijedi $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$), g N-dimenzionalan vektor predikcija povrata[23], a $\mathcal{G}$ predstavlja ukupni očekivani povrat portfelja. Uz pretpostavku da je očekivani povrat porfelja jednak $\mathcal{G}$, uvođenjem Lagrangeovog multiplikatora (4.86) se može zapisati kao

$$\min_{w \in \mathbb{R}^N} \quad \frac{1}{2} w^* C w - \gamma w^* g,$$

a optimalno rješenje je

$$w = \frac{C^{-1} g}{g^* C^{-1} g},$$

uz pretpostavku da je C invertibilna. Međutim, matrica C u praksi nam nije poznata pa umjesto C promatramo procijenjenu matricu kros-korelacija E. Tada je procijenjeni optimalni rizik dan s

$${\mathcal{R}^2}_{est} = \frac{\mathcal{G}^2}{g^* E^{-1} g},$$

međutim problem je što potcijenjuje stvarni rzik

$${\mathcal{R}^2}_{true} = \frac{\mathcal{G}^2}{g^* C^{-1} g}$$

što može uzrokovati znatne probleme. Teorija slučajnih matrica bazirana na Marchenko-Pastur distribuciji daje nam bolje rješenje jer dovodi u vezu stvarni i procijenjeni rizik (za detaljnije objašnjenje pogledati [5]) što ćemo objasniti na sljedećem primjeru.

4.1.2 Primjer upotrebe slučajnih matrica na tržištu dionica

U ovom dijelu radu opisane su korištene metode i dobiveni rezultati u analiziranju kros-korelacija između cijena različitih dionica u [21] koji uključuju slučajne matrice. Bitno je napomenuti da kvaliteta takve analize ovisi o omjeru duljine danog vremenskog niza povrata i broja promatranih dionica. Analizirane su dvije različite baze podataka o vrijednosnim

[22] Harry Max Markowitz (1927.), američki ekonomist. 1990. godine dobio je Nobelovu nagradu za ekonomiju, a posebnu pozornost u ekonomiji dao je traženju alata za mjerenje rizika različitih vrijednosnih papira i njihova kombiniranja u formiranju portfelja

[23] formiranje očekivanja budućih povrata je posao investitora na temelju njegovih informacija i predviđanja pa pretpostavljamo da je g poznat

papirima od tri glavne burze[24] u SAD-u. Prva baza podataka sadržava cijene dionica prvih 1000 kompanija prema tržišnoj kapitalizaciji[25] za dvogodišnje razdoblje (1994.-1995.) za koje je izračunato 6448 povrata (razdoblje od 30 minuta). Druga baza podataka je preuzeta od CRSP[26] te su izračunati dnevni log-povrati za 422 cijene dionica (8685 log-povrata) za razdoblje od 35 godina (1962.–1996.)

Prvo što je potrebno napraviti je izračunati log-povrate, odnosno

$$G_i(t) = \ln S_i(t + \Delta t) - \ln S_i(t),$$

gdje su $i = 1, \ldots, N$ dane dionice, $S_i(t)$ cijena i-te dionice u trenutku t, a Δt razdoblje u kojemu promatramo promjenu cijena. Jedna od mjera rizika[27] je volatilnost[28]. Budući da različite dionice ne moraju imati iste volatilnosti definiramo normalizirane log-povrate

$$g_i(t) = \frac{G_i(t) - \langle G_i \rangle}{\sigma_i},$$

gdje je $\sigma_i = \sqrt{\langle {G_i}^2 \rangle - \langle G_i \rangle^2}$ standardna devijacija od G_i i $\langle G_i \rangle$ označava prosječnu vrijednost od G_i kroz vrijeme. Kros-korelacijska matrica (*engl. equal-time cross-correlation matrix*) $C = [C_{ij}]$ dana je s

$$C_{ij} = \langle g_i(t) g_j(t) \rangle$$

pri čemu vrijedi $-1 \leq C_{ij} \leq 1$. ($C_{ij} = 1$ - potpuna pozitivna korelacija, $C_{ij} = -1$ - potpuna negativna korelacija, $C_{ij} = 0$ - ne postoji korelacija). Također su navedeni i mogući problemi u procjeni matrice C:

- za razliku od većine sustava u fizici, ne postoji ”algoritam” za određivanje ”jakosti” interakcije između dvije tvrtke i i j
- kros-korelacije mogu postojati i u klasterima (između više tvrtki), ne samo između dvije tvrtke
- kros-korelacije se mijenjaju s vremenom
- uvjeti na tržištu mijenjaju se s vremenom
- nestacionarnost log-povrata
- pojava tzv. šuma (greška pri procjeni) za niz konačne duljine (često je problem što je vrijeme u kojem promatramo nedovoljno da bismo imali dobre procjene, međutim nije niti dobro imati prestare podatke budući za tržište dionica vrijedi da ”prošlost ne oslikava budućnost”).

Pitanje je na koji način se primjenom teorije slučajnih matrica iz C mogu odrediti one kros-korelacije koje nisu rezultat slučajnosti kao posljedica gore navedenih problema. Razmatranje Wignera navedeno u Potpoglavlju 2.1 bilo je ključno za ovaj problem. Odgovor se

[24] NYSE (New York Stock Exchange), AMEX (the American Stock Exchange) i NASDAQ (the National Association of Securities Dealers Automated Quotation)

[25] vrijednost kompanije koja je određena trgovanjem njezinim dionicama na burzi, *engl. market capitalization*

[26] Center for Research in Security Prices, sadržava povijesne podatke o burzama

[27] rizik je latentna varijabla što znači da ga je potrebno procijeniti ili modelirati

[28] procjenjuje se standardnom devijacijom log-povrata, ponekad i varijancom

nalazi u činjenici da se statistika od C testira u odnosu na null-hipotezu koja pretpostavlja slučajnu kros-korelacijsku matricu R dobivenu na temelju međusobno nekoreliranih vremenskih nizova. Cilj je usporediti spektar matrice C sa spektrom matrice R te na temelju toga "filtrirati" matricu na šum (dio matrice C koji odgovara slučajnoj matrici iz null-hipoteze) i dio koji odstupa od njenih svojstava. Upravo ta odstupanja od univerzalnih predviđanja teorije slučajnih matrica identificiraju neslučajna svojstva razmatranog sustava pružajući tragove o interakcijama koje nas zanimaju.

Opišimo sada način konstruiranja matrice iz null-hipoteze. Slučajna matrica R dimenzije kao i matrica C generirana je kao

$$R = \frac{1}{L} A A^T,$$

gdje je A matrica dimenzije NxL čiji su elementi nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s očekivanjem 0 i varijancom 1. Prema načinu konstruiranja matrica R pripada tipu matrice koja se naziva *Wishartova matrica*. Analiza Wishartove matrice provodi se na temelju svojstvenih vrijednosti dekompozicijom

$$R = V \Lambda V^{-1},$$

gdje svojstveni vektori matrice R odgovaraju stupcima matrice V, a dijagonalni elementi matrice Λ odgovoraju svojstvenim vrijednostima matrice R. Svojstva takvih slučajnih matrica su poznata, a od ključne važnosti za ovaj rad je sljedeći teorem.

Teorem 4.1. *(Marchenko-Pastur distribucija)*
Neka je dana matrica X dimenzije NxL čiji elementi su nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s očekivanje 0 i varijancom $\sigma^2 < \infty$ i neka je $R = \frac{1}{L} X X^T$. Kada $N, L \to \infty$ tako da $Q = \frac{L}{N} > 1$, funkcija gustoće svojstvenih vrijednosti λ matrice R dana je s

$$P_{rm}(\lambda) = \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}}{\lambda Q}, \tag{4.87}$$

gdje je $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$ (λ_- najmanja svojstvena vrijednost, a λ_+ najveća svojstvena vrijednost matrice R) i dana s

$$\lambda_\pm = \sigma^2 (1 \pm \sqrt{Q})^2. \tag{4.88}$$

Jedno od najbitnijih svojstava ove distribucije je da nema svojstvenih vrijednosti izvan intervala $[\lambda_-, \lambda_+]$ kada $N, L \to \infty$. Također, iz jednadžbe (4.88) može se vidjeti da u ekstremnom slučaju kada $T \to \infty$ pri čemu je N fiksan, jaz između najvećih i najmanjih svojstvenih vrijednosti predviđenih teorijom slučajnih matrice teži prema 0. Bitno je napomenuti da jednadžba (4.87) odgovara za Gaussovu distribuciju vremenskih nizova, ali i za distribucije s teškim repom s parametrom koji odgovara onome od vremenskog niza log-povrata također postoji dobro podudaranje.
Usporedbom grafova funkcija gustoća svojstvenih vrijednosti matrice C, $P(\lambda)$ i $P_{rm}(\lambda)$ matrice R (konstruirana iz 1000 međusobno nekoreliranih vremenskih nizova, svaki dužine 6448, generirani tako da imaju distribuciju s teškim repom s parametrom kao i log-povrati), moglo se uočiti njihovo podudaranje uz značajna odstupanja za nekoliko najmanjih i najvećih svojstvenih vrijednosti. Posebno je zanimljiva bila najveća svojstvena vrijednost koja je približno 25 puta veća od najveće svojstvene vrijednosti matrice R sugerirajući na korelacije između različitih dionica. Međutim, za slučajne matrice koje imaju istu distribuciju svojstvenih vrijednosti, korelacija između svojstvenih vrijednosti može biti različita. Stoga

je potrebno istraživanje korelacija u svojstvenim vrijednostima. Budući je C po definiciji realna simetrična matrica, testirane su korelacije svojstvenih vrijednosti matrice u odnosu na slučajnu matricu GOE modela. Analizirajući distribucije razlika susjednih svojstvenih vrijednosti[29], ali i za one koje nisu susjedne, uočili su poklapanja s matricom GOE modela te time potvrdili zaključak da je većina svojstvenih vrijednosti matrice C konzistentna onima u R, a one koje odstupaju daju informacije o pravim korelacijama između cijena dionica. Analizirajući svojstvene vektore koji pripadaju tim svojstvenim vrijednostima, došli su do zaključka da najveća svojstvena vrijednost od C predstavlja utjecaj cjelokupnog tržišta koje je zajedničko svim dionicama, a ostale svojstvene vrijednosti koje odstupaju od matrice R pokazuju postojanje kros-korelacija za dionice iste grane industrije, dionica s velikom tržišnom kapitalizacijom i tvrtki koje posluju u određenim geografskim područjima.

Prethodno objašnjena slučajnost većine elemenata matrice C može se primjeniti na već objašnjenu Markowitzevu teoriju optimizacije portfelja. Ukupan povrat na portfelj kojega čine dionice sa cijenom S_i dan je s

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} w_i G_i.$$

Rizik vrijednosti portfelja može se kvantificirati varijancom

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j C_{ij} \sigma_i \sigma_j.$$

Da bismo pronašli optimalni portfelj, potrebno je minimizirati σ^2 pod ograničenjem da je očekivani povrat na portfelj unaprijed zadan. U svrhu analiziranja učinka slučajnosti većine elemenata matrice C na optimizaciju portfelja, podijelili su vremensko razdoblje 1994–1995. u dva jednogodišnja razdoblja te su koristeći kros-korelacije iz matrice C_{94} za 1994. godinu i log-povrate G_i za 1995. godinu dobili familiju optimalnih portfelja. Također su izračunali i rizik portfelja ${\sigma_t}^2$ tijekom 1995. godine koristeći matricu kros-korelacija C_{95} za 1995. godinu te zaključili da je procijenjeni rizik znatno manji u odnosu na stvarni rizik. Budući da je značajna informacija u C sadržana u odstupajućim svojstvenim vektorima koji pripadaju odstupajućim svojstvenim vrijednostima $\lambda_{988}, \ldots, \lambda_{1000}$, konstruirali su "filtriranu" matricu kros-korelacija zadržavanjem samo odstupajućih svojstvenih vektora na način da su uzeli matricu Λ' s dijagonalnim elementima $\lambda'_{ii} = \{0, \ldots, 0, \lambda_{988}, \ldots, \lambda_{1000}\}$ i zatim je zapisali u bazi od C, a da pri tome vrijedi $C_{ii} = 1$. S ovako dobivenom matricom kros-korelacije, odnos stvarnog i procijenjenog rizika smanjio se s približno 170% na približno 25% za podatke iz primjera.

[29]vjerojatnost susjedne svojstvene vrijednosti na nekoj zadanoj udaljenosti od dane svojstvene vrijednosti, *engl. nearest-neighbour spacings*

Literatura

[1] A. Ahlam, F. Stromberg, *The Riemann Zeta Function and Its Analytic Continuation*, British Journal of Mathematics & Computer Science, Volume 22, 2017.

[2] G.W. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni, *An introduction to random matrices*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 118. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[3] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[4] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, 2014.

[5] J. Bun, *Application of Random Matrix Theory to High Dimensional Statistics*, Data Analysis, Statistics and Probability [physics.data-an]. Université Paris-Saclay, 2016.

[6] P. Diaconis, M. Shahshahani, *On the eigenvalues of random matrices*, Journal of Applied Probability, Volume 31, 1994., 49-62.

[7] P. Diaconis, J. Fulman, R. Guralnick, *On fixed points of permutations*, Journal of Algebraic Combinatorics, Volume 28, 2007.

[8] P. Diaconis, *What is a Random Matrix?*, Notices of the American Mathematical Society, Volume 52, 2005., 1348-1349.

[9] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu (skripta).

[10] H.M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Dover Publications, 1974.

[11] Z. Franušić, N. Pavlinić, *O distribuciji prostih brojeva*, ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA Series didactica, Volume 1, 2018., 41-50.

[12] Y. Fyodorov, *On the Eigenvalues of Random Matrices* , Journal of Applied Probability, Volume 31, Studies in Applied Probability, 1994., 49-62.

[13] W.T. Gowers, *The Princeton Companion to Mathematics*, Princeton University Press, New Jersey, 2008.

[14] G.A. Jones, J.M. Jones, *Elementary number theory*, Springer, 2003.

[15] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2000.

[16] J. Kramer, A. von Pippich, *Special Values of Zeta Functions*, Notices of the American Mathematical Society, Volume 63, 2016.

[17] B. Mazur, W. Stein, *Prime Numbers and the Riemann Hypothesis*, Cambridge University Press, 2016.

[18] S.J. Miller, R. Takloo-Bighash, *An Invitation to Modern Number Theory*, Princeton University Press, New Jersey, 2006.

[19] B Novak, *Financijska tržišta i institucije*, Ekonomski fakultet, Osijek, 2005.

[20] J.I. Novak, *Topics in Combinatorics and Random Matrix Theory* , Queen's University Kingston, Ontario, Canada, 2009.

[21] V. Plerou, P. Gopikrishnan, B. Rosenow, L.A. Nunes Amaral, T. Guhr, E. Stanley, *Random matrix approach to cross correlations in financial data*, Physical Review E, Volume 65, 2002.

[22] B. Riemann, *On the Number of Primes Less Than a Given Magnitude*, Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1859.

[23] N.C. Snaith, *Riemann zeros and random matrix theory*, School of Mathematics (University of Bristol), 2009.

[24] T. Tao, *Topics in random matrix theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2012.

[25] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1988.

[26] Š. Ungar, *Kompleksna analiza*, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2009.

[27] E.P Wigner, *Random Matrices in Physics*, SIAM Review, Volume 9, 1967.

Sažetak:

Teorija slučajnih matrica je grana matematike motivirana ostalim područjima matematike i fizike poput kvantne mehanike, linearne algebre i matematičke statistike. Na početku rada definirali smo slučajne matrice i naveli motivaciju za njihovo uvođenje. Posebno smo razmotrili *svojstvene vrijednosti* takvih matrica i njihova svojstva te opisali *Gaussov model slučajnih matrica* za koji je moguće dati eksplicitno rješenje za zajedničku funkciju gustoće njezinih svojstvenih vrijednosti. Nadalje, definirali smo Riemannovu zeta-funkciju $\zeta(s)$ i naveli njezina osnovna svojstva. Riemannova slutnja, koja do danas nije dokazana niti opovrgnuta, govori nam da sve nultočke od $\zeta(s)$ imaju realan dio jednak $\frac{1}{2}$ i važna je zbog povezanosti s distribucijom prostih brojeva, ali i jer mnogi rezultati u teoriji brojeva njezinu istinitost uzimaju kao polaznu pretpostavku. U radu smo opisali povezanost svojstvenih vrijednosti slučajnih matrica s nultočkama Riemannove zeta-funkcije. Na kraju rada na primjeru smo opisali primjenu teorije slučajnih matrica na financijske podatke za *filtriranje* matrice kros-korelacija te u problemu optimizacije portfelja.

Ključne riječi:

slučajna varijabla, slučajna matrica, simetrična matrica, hermitska matrica, funkcija gustoće, svojstvena vrijednost, svojstveni vektor, Riemannova zeta-funkcija, Riemannova hipoteza, prosti brojevi, matrica kros-korelacija

Abstract:

Random matrix theory is a branch of mathematics motivated by many other disciplines of mathematics and physics such as quantum mechanics, linear algebra and mathematical statistics. This text begins with a definition of random matrix and the motivation for its appearance in science. We considered the *eigenvalues* of such matrices and their properties and described *Gaussian unitary ensemble* for which it is possible to give an explicit formula of the joint probability density function of its eigenvalues. In addition, we define Riemann zeta-function $\zeta(s)$ and give its basic properties. Riemann hypothesis, which has not been proved or denied so far, tells us that the real part of all of the zeros of $\zeta(s)$ equals $\frac{1}{2}$ and is important because of the relationship with the distribution of primes and because many results in the number theory take its truthfulness as a starting point. In this paper we have described the connection of the eigenvalues of random matrices with zeros of Riemann's zeta-function. Finally, we discuss an example of approach to cross-correlations in financial data to determine which part of cross-correlation matrix is just noise and which is the real signal and also in portfolio optimization problem.

Key words:

random variable, random matrix, symmetric matrix, hermitian matrix, probability density function, eigenvalue, eigenvector, Riemann zeta-function, Riemann hypothesis, primes, cross-correlation matrix

Životopis:

Rođena sam 14. prosinca 1994. godine u Našicama. 2001. godine obrazovanje započinjem u područnoj školi Veliki Rastovac (Osnovna škola "Ivan Goran Kovačić", Zdenci), a 2005. školovanje nastavljam u Zdencima u navedenoj školi. 2009. godine upisujem opću gimnaziju u srednjoj školi "Stjepan Ivšić", Orahovica. Po završetku srednje škole, 2013. godine odlučujem upisati Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku. Preddiplomski studij matematike završavam 2016. godine s temom završnog rada *Eulerova funkcija* pod mentorstvom doc. dr. sc. Mirele Jukić Bokun, a dio završnog rada objavljen je u časopisu Math.e:hrvatski matematički elektronski časopis 31 (2017). Iste godine upisujem se na Diplomski studij na navedenom odjelu, smjer Financijska matematika i statistika. Tijekom diplomskog studija odradila sam stručnu praksu u Raiffeisenbank d.d. u Zagrebu u odjelu Financijski kontroling. 2018. godine sudjelovala sam na međunarodnoj znanstvenoj konferenciji *Croatian Combinatorial Days* s posterom pod nazivom *The Golden Ratio within Regular Polyhedra and Geometrical Construction*.