Egzotične opcije

Keglević, Nera

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:044599

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**



Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science







Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Nera Keglević

Egzotične opcije

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Nera Keglević

Egzotične opcije

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2019.

Sadržaj

Uvod **1**

1 Financijsko tržište u neprekidnom vremenu **3**
1.1 Brownovo gibanje 3
1.2 Geometrijsko Brownovo gibanje 11

2 Monte Carlo metode **15**
2.1 Motivacija 15
2.2 Efikasnost procjenitelja 17
2.3 Tehnike reduciranja varijance 22

3 Egzotične opcije **24**
3.1 Black-Scholesova formula 26
3.2 Azijska opcija 30
3.3 Barrier opcija 35
3.4 Lookback opcija 38

4 Vrednovanje egzotičnih opcija **42**
4.1 Call opcije 43
4.2 Put opcije 46

Literatura **49**

Sažetak **51**

Summary **52**

Životopis **53**

Dodatak **54**

Uvod

Najpoznatiji su financijski instrumenti za reguliranje rizika na financijskim tržištima:

- **opcije** koje daju pravo, ali ne i obvezu vlasniku opcije da kupi, odnosno proda financijski instrument po unaprijed određenoj cijeni izvršenja i
- ***futures* ugovori** koji obvezuju kupca da kupi, odnosno prodavatelja da proda financijski instrument po unaprijed određenoj cijeni.

Svakodnevno se na burzi *Wall Streeta* trguje dionicama, opcijama i futures ugovorima, međutim spomenuti financijski instrumenti nisu nastali na *Wall Streetu*, kreirani su nešto ranije, točnije 1973. godine kada su se službeno počeli razmjenjivati prvi standardizirani ugovori na *Chicago Board Options Exchangeu*.
Vjeruje se da je osnovni koncept ugovora opcija uspostavljen u antičkoj Grčkoj, točnije trgovanje je opcijama započeo Tales[1]. Talesova su područja istraživanja bila matematika i astronomija. Proučavajući zvijezde predvidio je veliku berbu i potražnju za maslinama u sljedećoj godini i stoga je želio monopolizirati tržište. Međutim, Tales nije bio vlasnik svih polja maslina te je odlučio platiti vlasnicima kako bi osigurao prava na maslenike u vrijeme berbe. Budući da je dobro predvidio, nakon žetve imao je velik profit. Tales je platio za pravo, ali ne i obvezu korištenja nasada maslina u vrijeme žetve. Na taj način je nastala prva *call opcija*.
Osim vremena antičke Grčke, bitno je razdoblje za razvoj opcija bilo 17. stoljeće. U Nizozemskoj u 17. st vladala je takozvana *Tulip Bulb Mania*. Tulipani su postali simbol aristokracije te su postigli veliku popularnost. U to su vrijeme *call i put* opcije bile korištene u svrhu zaštite od rizika rasta ili pada cijene tulipana. Uzgajivači su kupovali *put* opcije kako bi se zaštitili od pada cijene. Kako je rasla cijena tulipana, rasle su i cijene pripadajućih opcija. Ljudi su ulagali uštedevine i nekretnine u *call* i *put* ugovore. Međutim, rast je cijena tulipana postao neodrživ, došlo je do ispuhivanja špekulativnog balona, nizozemsko je gospodarstvo bilo u recesiji. Ovaj je splet događaja smanjio popularnost opcija, štoviše u Londonu, Japanu i još nekim dijelovima svijeta bile su zabranjene do 19. stoljeća.
Krajem 19. stoljeća američki ekonomist Russel Sage kreirao je opcije koje su se razmjenjivale na *over the counter* tržištu u SAD-u. R. Sage prepoznao je postojanje *call-put* pariteta te povezanost cijene dionice i cijene opcije. Opcije su ponovno postale popularne, no kako nije postojala standardna regulativa, investitori su bili nepovjerljivi. Prvo se službeno trgovanje standardiziranim opcijama dogodilo 24. travnja 1973. godine kada je otvorena *Chicago Board Options Exchange*. Ekonomisti Fischer Black[2] i Myron Scholes[3] predstavili su 1973. godine, koja je bila važna za razvoj opcija, Black-Scholesov model za vrednovanje opcija na financijskom tržištu u neprekidnom vremenu za koji su 1997. godine dobili Nobelovu nagradu. Black-Scholesov pristup dodatno je precizirao Robert Merton[4], njegov je rad također objavljen 1973. godine. Zbog toga se model često naziva Black-Scholes-Mertonov model. Model se smatra jednim od najznačajnijih koncepata moderne financijske teorije. Nakon

[1] Tales Milećanin (Milet, oko 624. pr. Kr. – oko 547. pr. Kr.), prvi zapadnjački filozof i otac znanosti.
[2] Fischer Sheffey Black (Washington, 11. siječnja 1938. - New York City, 30. kolovoza 1995.), američki ekonomist.
[3] Myron Samuel Scholes (Ontario, 1. srpnja 1941.), američko - kanadski ekonomist.
[4] Robert Cox Merton (New York City, 31. srpnja 1944.), američki ekonomist.

njih, nekoliko je matematičara dalo važan doprinos financijskoj teoriji. Prvo, američki ekonomist i matematičar J. Cox[5] svojim radom o arbitražnim tehnikama, zatim u suradnji sa S. Rossom[6] i M. Rubinsteinom[7] predstavljen je Cox-Ross-Rubinsteinov model za vrednovanje opcija na financijskom tržištu u diskretnom vremenu korištenjem binarnih stabala.

Osnovni je cilj rada pokazati razliku između vrijednosti europskih, azijskih, *barrier* te *lookback call i put* opcija pri čemu će kretanje cijena dionica biti modelirano geometrijskim Brownovim gibanjem. Opcije ćemo nearbitražno vrednovati Monte Carlo metodama. Budući da ćemo koristiti geometrijsko Brownovo gibanje, bit će također objašnjeno Brownovo gibanje te iskazani osnovni teoremi i karakteristike geometrijskog Brownovog gibanja. U poglavlju 3 proučit ćemo matematičku teoriju azijske, *barrier* i *lookback* opcije te pokazati u kakvom su odnosu s europskim *call i put* opcijama. Dodatno, predstavit ćemo Black-Scholes formulu za vrednovanje europske *call i put* opcije te koncept *call-put* pariteta.

[5]John Carrington Cox (1943.), američki ekonomist.
[6]Stephen Alan Ross (Boston, 3. veljače 1944. – Old Lyme, 3. ožujka 2017.), američki ekonomist.
[7]Mark Edward Rubinstein (8. lipnja 1944.), američki ekonomist.

Poglavlje 1

1 Financijsko tržište u neprekidnom vremenu

Slučajni proces familija je slučajnih varijabli $(X_t, t \in T)$ na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indeksirana elementima nekog skupa T koje često interpretiramo kao vremenske parametre. Stoga, kažemo da pratimo promjene stanja slučajnog procesa kroz vrijeme. Slučajne procese dijelimo na procese u diskretnom i neprekidnom vremenu te na procese s diskretnim i neprebrojivim skupom stanja. U ovom ćemo se radu usmjeriti na primjenu jedne klase procesa u neprekidnom vremenu s neprebrojivim skupom stanja na financijskim tržištima. Iako cijene dionica i opcija pripadaju realnim brojevima iz intervala $[0, x]$, mi ih možemo opservirati samo u konačno mnogo trenutaka, stoga zaključivanja radimo na takvim uzorcima cijena. Predstavit ćemo neke od modela na kojima počiva matematika financijskih tržišta, točnije Brownovo gibanje i geometrijsko Brownovo gibanje.

1.1 Brownovo gibanje

Proučavanje je Brownovog gibanja započeo 1827. biolog Robert Brown[8]. On je izučavao kretanje čestica peludi u vodi te je zamijetio međusobnu sličnost kretanja čestica po putanji. Matematičku je teoriju Brownovog gibanja počeo razvijati Louis Bachelier[9] 1900. godine u svojoj doktorskoj disertaciji, vidi [1]. L. Bachelier predložio je Brownovo gibanje kao adekvatan model za modeliranje cijena rizičnih vrijednosnica. Osim njega, Brownovo je gibanje 1905. istraživao i Albert Einstein[10], dok je postojanje Brownovog gibanja dokazao Norbert Wiener[11] 1923. godine u članku "Differential space", vidi [22]. Zbog njegovog doprinosa Brownovo gibanje još nazivamo i Wienerov proces.

[8]Robert Brown (Montrose, 21. prosinca 1773. - London, 10. lipnja 1858.), škotski biolog.

[9]Louis Bachelier (Le Havre, 11. ožujka 1870. - Sain-Servan-sur-Mer, 28. travnja 1946.), francuski matematičar.

[10]Albert Einstein (Ulm, 14. ožujka 1879. - Princeton, 18. travnja 1955.), njemački fizičar.

[11]Norbert Wiener (Columbia, 26. studenog 1894. - Stockholm, 18. ožujka 1964.), američki matematičar.

Prije same definicije Brownovog gibanja, pogledajmo na koji se način ono može konstruirati. Konstrukciju Brownovog gibanja započet ćemo skaliranom slučajnom šetnjom. Za početak, prisjetimo se definicije jednostavne simetrične slučajne šetnje.

Definicija 1.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor, te neka je $(X_j, j \in \mathbb{N})$ niz Bernoullijevih slučajnih varijabli s tablicom distribucije*

$$X_j = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Slučajni proces $M = (M_k,\ k \in \mathbb{N}_0)$ definiran s

$$M_k = \sum_{j=1}^{k} X_j \quad k = 1, 2, \ldots$$

pri čemu je $M_0 = 0$ nazivamo jednostavna simetrična slučajna šetnja.

Važna su svojstva simetrične slučajne šetnje nezavisnost i stacionarnost prirasta. Dodatno, jednostavna slučajna šetnja je i martingal u odnosu na filtraciju $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ čiji su elementi σ-algebre oblika $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ generirane nezavisnim jednakodistribuiranim slučajnim varijablama $(X_j, j \in \mathbb{N})$. (vidi [16], Poglavlje 1.5.1)
Prirast slučajne šetnje na $(k_i, k_{i+1}]$ definiran je na sljedeći način. Za $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_n$ je:

$$M_{k_{i+1}} - M_{k_i} = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j.$$

Odavde vidimo da prirasti na disjunktnim intervalima ovise o različitim slučajnim varijablama X_j, pa su prirasti nezavisni, a vrijedi i svojstvo stacionarnosti prirasta slučajne šetnje s obzirom na to da će prirasti biti jednakodistribuirani na jednakodugim intervalima. Nezavisnost prirasta označava da su slučajne varijable $M_{k_1} - M_{k_0}, M_{k_2} - M_{k_1}, \ldots, M_{k_n} - M_{k_{n-1}}$ nezavisne.
Prirasti slučajne šetnje imaju dva svojstva:

1. očekivanje prirasta $M_{k_{i+1}} - M_{k_i}$ je nula,
2. varijanca prirasta $M_{k_{i+1}} - M_{k_i}$ iznosi $k_{i+1} - k_i$,

što lako vidimo iz sljedećih izračuna:

$$E(M_{k_{i+1}} - M_{k_i}) = E\left(\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j\right) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} E(X_j) = 0, \text{ te}$$

$$Var(M_{k_{i+1}} - M_{k_i}) = Var\left(\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j\right) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} Var(X_j) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} 1 = k_{i+1} - k_i.$$

Kako bismo konstruirali Brownovo gibanje potrebno je ubrzati vrijeme i smanjiti korak slučajne šetnje. Za fiksni $n \in \mathbb{N}$ i realan $t \geq 0$ definiramo skaliranu slučajnu šetnju $(W^{(n)}(t), t \geq 0)$:

$$W^{(n)}(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt},$$

ako je $nt \in \mathbb{Z}_+$, a ako nt nije element skupa prirodnih brojeva onda skaliranu slučajnu šetnju definiramo na sljedeći način:

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{[nt]} + \frac{1}{\sqrt{n}} (M_{[nt]+1} - M_{[nt]})(nt - [nt]).$$

Prirasti skalirane slučajne šetnje, kao i prirasti jednostavne slučajne šetnje, na disjunktnim intervalima ovise o različitim nezavisnim jednako distribuiranim Bernoullijevim slučajnim varijablama, pa i skalirana slučajna šetnja ima nezavisne priraste:

$$W^{(n)}(t_{i+1}) - W^{(n)}(t_i) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=nt_i+1}^{nt_{i+1}} X_j, \tag{1.1}$$

gdje je nt_j cijeli broj. Nadalje, ako je $s \leq t$, te su ns i nt cjelobrojni, korištenjem formule (1.1) možemo izračunati očekivanje i varijancu prirasta $W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)$ skalirane slučajne šetnje:

$$\begin{aligned} E(W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)) &= E\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(M_{nt} - M_{ns})\right) = 0, \\ Var(W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)) &= \frac{1}{n} Var(M_{nt} - M_{ns}) = \frac{1}{n} \sum_{j=ns+1}^{nt} 1 = t - s. \end{aligned}$$

Budući da smo prethodno napomenuli kako je jednostavna slučajna šetnja martingal, u nastavku pokažimo da i skalirana slučajna šetnja također zadovoljava martingalno svojstvo u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}(s)$ generiranu slučajnim varijablama $W^{(n)}(u)$, gdje je $0 \leq u < s$. Ako su $0 \leq s < t$ i $ns, nt \in \mathbb{Z}_+$ tada vrijedi

$$\begin{aligned} E(W^{(n)}(t)|\mathcal{F}(s)) &= E((W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)) + W^{(n)}(s)|\mathcal{F}(s)) \\ &= E((W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s))|\mathcal{F}(s)) + E(W^{(n)}(s)|\mathcal{F}(s)), \end{aligned}$$

a budući da je $W^{(n)}(s)$ $\mathcal{F}(s)$ izmjeriva i $W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)$ nezavisna u odnosu na $\mathcal{F}(s)$ slijedi

$$\begin{aligned} E(W^{(n)}(t)|\mathcal{F}(s)) &= E((W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s))|\mathcal{F}(s)) + W^{(n)}(s) \\ &= E(W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)) + W^{(n)}(s) \\ &= W^{(n)}(s). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Teoriju vezanu uz skaliranu slučajnu šetnju zaključit ćemo izračunavanjem kvadratne varijacije skalirane slučajne šetnje. Kvadratna varijacija sadrži informaciju o sumi kvadriranih prirasta skalirane slučajne šetnje na intervalima segmenta $[0, T]$ generirane subdivizijom $0 < \frac{t}{n} < \frac{2t}{n} < \cdots < \frac{nt}{n}$. Za $t \geq 0$, gdje je nt cijeli broj, definiramo:

$$\begin{aligned} [W^{(n)}(t), W^{(n)}(t)] : &= \sum_{j=1}^{nt} \left(W^{(n)}\left(\frac{j}{n}\right) - W^{(n)}\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{nt} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} X_j\right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{nt} \frac{1}{n} = t. \end{aligned}$$

Bitno je napomenuti kako je kvadratna varijacija skalirane slučajne šetnje slučajna varijabla uvijek jednaka konstanti t. Uočimo da je i ovdje kvadratna varijacija slučajna varijabla (jednaka konstanti t) i računa se za svaki put $t \mapsto W^{(n)}(t)(\omega)$, vidi [21]. Primijetimo, kod

računanja kvadratne varijacije vjerojatnost iz vjerojatnosnog prostora iz definicije (1.1) ne utječe na izračun. U nastavku iskazat ćemo teorem o konvergenciji po distribuciji skalirane slučajne šetnje za fiksan $t \geq 0$, kada $n \to \infty$.

Teorem 1.1. *Neka je $t \geq 0$ fiksan. Kad $n \to \infty$ distribucija skalirane slučajne šetnje $W^{(n)}(t)$ izračunate u trenutku t konvergira prema normalnoj distribuciji s očekivanjem 0 i varijancom t.*

Dokaz. Neka je $t \geq 0$, nt cijeli broj, $(X_j, j \in \mathbb{N})$ nezavisne Bernoullijeve slučajne varijable s vrijednostima ± 1 s parametrom $p = \frac{1}{2}$ i

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{nt} X_j.$$

Definiramo novu slučajnu varijablu $Y_j := \frac{X_j + 1}{2}$. Tada su $(Y_j, j \in \mathbb{N})$ nezavisne slučajne varijable s vrijednostima 0 i 1 koje se realiziraju s vjerojatnostima $\frac{1}{2}$. Nadalje, definiramo

$$B_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j.$$

Tada je B_k binomna slučajna varijabla s parametrima k i $p = \frac{1}{2}$, tj. $B_k \sim B(k, 1/2)$.
Nakon ovako definiranih slučajnih varijabli slijedi:

$$\begin{aligned} W^{(n)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{nt} (2Y_j - 1) \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{nt} (Y_j - \frac{1}{2}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}} \Big(\sum_{j=1}^{nt} Y_j - \sum_{j=1}^{nt} \frac{1}{2} \Big). \end{aligned}$$

Budući da je $\sum_{j=1}^{nt} Y_j \sim B(nt, 1/2)$, očekivanje slučajne varijable B_{nt} je $\frac{nt}{2}$, a varijanca $\frac{nt}{4}$, gornji izraz možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} W^{(n)}(t) &= \frac{2}{\sqrt{n}} (B_{nt} - E(B_{nt})) \\ &= \sqrt{t} \frac{2}{\sqrt{nt}} (B_{nt} - E(B_{nt})) \\ &= \sqrt{t} \frac{B_{nt} - E(B_{nt})}{\sqrt{Var(B_{nt})}}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Za fiksan $t \geq 0$, prema centralnom graničnom teoremu (vidi [19, Teorem 14.1]) niz $(W^{(n)}(t), n \in \mathbb{N})$ konvergira prema slučajnoj varijabli $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, kad $n \to \infty$.

Preciznije, za $x \in \mathbb{R}$ slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{B_{nt} - E(B_{nt})}{\sqrt{Var(B_{nt})}} \leq x\Big) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = P(Z \leq x).$$

Iz gornjeg izraza slijedi da za fiksan $t > 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(W^{(n)}(t) \leq x) &= \lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{B_{nt} - E(B_{nt})}{\sqrt{Var(B_{nt})}} \leq \frac{x}{\sqrt{t}}\Big) \\ &= \int_{-\infty}^{x/\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-y^2/2t} dy. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Izraz (1.4) predstavlja funkciju distribucije normalne slučajne varijable s očekivanjem 0 i varijancom t, time je dokazana tvrdnja teorema. □

Nakon prikazane konstrukcije za fiksan $t \geq 0$ iskažimo definiciju Brownovog gibanja.

Definicija 1.2 (**Brownovo gibanje**). *Slučajni se proces $(B_t, t \geq 0)$ zove standardno Brownovo gibanje ako vrijedi:*

- $B_0 = 0$ *g.s.,*
- *za svaki $\omega \in \Omega$, funkcija $t \mapsto B_t(\omega)$ je neprekidna g.s.,*
- *za svaki k, $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_k$, prirasti $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ su nezavisni,*
- *za svaki $t > s \geq 0$, vrijedi $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.*

U nastavku ćemo iskazati i dokazati teorem koji govori o funkciji autokovarijanci slučajnih procesa sa stacionarnim i nezavisnim prirastima.

Teorem 1.2. *Neka je $(X_t, t \in T)$ proces sa stacionarnim i nezavisnim prirastima t.d. je $E(X_t^2) < \infty$, za svaki $t \in T$ i neka je $X_0 = 0$ g.s. Tada je funkcija autokovarijanci procesa X_t dana izrazom:*

$$Cov(X_t, X_s) = \sigma_1^2 \min(s, t),$$

pri čemu je $\sigma_1^2 = Var(X_1)$, a T skup indeksa procesa.

Dokaz. Neka su $t, s \in T$. Korištenjem definicije varijance imamo

$$\begin{aligned} Var(X_t - X_s) &= E\left(X_t - X_s - E(X_t - X_s)\right)^2 \\ &= E\Big(X_t - E(X_t) - (X_s - E(X_s))\Big)^2, \end{aligned}$$

kvadriranjem dobivamo

$$\begin{aligned} &= E\Big((X_t - E(X_t))^2 - 2(X_t - E(X_t))(X_s - E(X_s)) \\ &+ (X_s - E(X_s))^2\Big) \\ &= Var(X_t) - 2Cov(X_t, X_s) + Var(X_s). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Iz izraza (1.5) dobivamo sljedeći izraz za funkciju autokovarijanci

$$Cov(X_s, X_t) = \frac{1}{2}\Big(Var(X_t) + Var(X_s) - Var(X_t - X_s)\Big).$$

Budući da je $(X_t, t \in T)$ proces sa stacionarnim i nezavisnim prirastima, može se pokazati da vrijedi $Var(X_t) = \sigma_1^2 t$. Stoga, slijedi da je $Var(X_t - X_s) = \sigma_1^2(t-s)$, za $t > s$. Preostalo je raspisati izraz $Cov(X_t, X_s)$.

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_s) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 t + \sigma_1^2 s - \sigma_1^2(t-s)\right), & t > s \\ \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 t + \sigma_1^2 s - \sigma_1^2(s-t)\right), & t < s \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma_1^2 s, & t > s \\ \sigma_1^2 t, & s < t \end{cases} \quad = \sigma_1^2 \min(s,t). \end{aligned}$$

□

U nastavku, izračunajmo funkciju autokovarijanci Brownovog gibanja. Iz $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ slijedi da je za svaki $t \geq 0$ $E(B_t) = 0$, te da je $Var(B_t) = t$. Preostaje nam izračunati kovarijancu slučajnih varijabli B_t i B_s za $t < s$ i tako definirati funkciju autokovarijanci Brownovog gibanja.
Za $t < s$,

$$Cov(B_t, B_s) = E(B_t B_s) = E(B_t^2) + E(B_t(B_s - B_t)),$$

s obzirom na to da su prirasti nezavisni slijedi $E(B_t(B_s - B_t)) = E(B_t)E(B_s - B_t) = 0$ te je

$$Cov(B_t, B_s) = E(B_t^2) = t,$$

općenito za $s, t \geq 0$ je $Cov(B_t, B_s) = \min(t, s)$.
Prije nego što prijeđemo na simuliranje trajektorija Brownovog gibanja, dokažimo propoziciju koja tvrdi da je Brownovo gibanje $\frac{1}{2}$-sebi sličan proces. Definiciju H-sebi sličnog procesa, za $H > 0$ vidi [16, str. 36].

Propozicija 1.1. *Brownovo gibanje $(B_t, t \geq 0)$ je $\frac{1}{2}$-sebi sličan proces, tj. za svaki $T > 0$ i proizvoljne $0 < t_1 < \cdots < t_n$ je*

$$(T^{\frac{1}{2}} B_{t_1}, T^{\frac{1}{2}} B_{t_2}, \ldots, T^{\frac{1}{2}} B_{t_n}) \stackrel{d}{=} (B_{Tt_1}, B_{Tt_2} \ldots, B_{Tt_n}).$$

Dokaz. Brownovo gibanje je Gaussov[12] proces, tj. za sve $0 < t_1 < \cdots < t_n$ je $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{(B_{t_1},\ldots,B_{t_n})})$, gdje je $\Sigma_{(B_{t_1},\ldots,B_{t_n})}$ matrica autokovarijanci slučajnog vektora $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$.

[12]Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 30. travnja 1777. - Göttingen, 23. veljače 1855.), njemački matematičar i astronom.

Iz definicije Brownovog gibanja slijedi da je $B_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, t_i)$, za svaki $i = 1, \ldots, n$. Uočimo da je

$$(T^{\frac{1}{2}} B_{t_1}, T^{\frac{1}{2}} B_{t_2}, \ldots, T^{\frac{1}{2}} B_{t_n}) = \sqrt{T}(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n}) \tag{1.6}$$

linearna transformacija normalnog slučajnog vektora pa je i ona sama normalan slučajan vektor i vrijedi:

$$E(\sqrt{T}(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})) = \sqrt{T}E((B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})) = 0$$

i

$$\begin{aligned} Cov(\sqrt{T}B_{t_i}, \sqrt{T}B_{t_j}) &= T \cdot E(B_{t_i}B_{t_j}) - T \cdot E(B_{t_i})E(B_{t_j}) \\ &= T \cdot Cov(B_{t_i}, B_{t_j}) = T \cdot \min(t_i, t_j). \end{aligned}$$

Slijedi da je $\Sigma_{(\sqrt{T}B_{t_1}, \ldots, \sqrt{T}B_{t_n})} = T\Sigma_{(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})}$.
S druge strane, distribucija slučajnog vektora $(B_{Tt_1}, \ldots, B_{Tt_n})$ jedna je konačnodimenzionalna distribucija Brownovog gibanja; to je normalan slučajni vektor sa sljedećim svojstvima:

$$\begin{aligned} &E((B_{Tt_1}, \ldots, B_{T_{t_n}})) = 0, \\ &Cov(B_{Tt_i}, B_{Tt_j}) = \min(Tt_i, Tt_j) = T \cdot \min(t_i, t_j). \end{aligned}$$

Budući da su $(T^{\frac{1}{2}} B_{t_1}, T^{\frac{1}{2}} B_{t_2}, \ldots, T^{\frac{1}{2}} B_{t_n})$ i $(B_{Tt_1}, B_{Tt_2}, \ldots, B_{Tt_n})$ jednako distribuirani, slijedi tvrdnja teorema. □

Budući da je glavna tema ovog rada simulacija cijena dionica u svrhu vrednovanja cijena egzotičnih opcija na financijskom tržištu u neprekidnom vremenu, u sljedećoj ćemo napomeni objasniti zašto nam je prethodno dokazano svojstvo Brownovog gibanja bilo važno istaknuti.

Napomena 1.1. *Budući da je Brownovo gibanje $\frac{1}{2}-$sebi sličan proces, dovoljno je simulirati trajektoriju Brownovog gibanja na $[0, 1]$. Ako simuliramo $(B_{Tt_1}, \ldots, B_{Tt_n})$ za $t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$, gdje su $0 < t_1 < \cdots < t_n$, onda odgovarajućim skaliranjem za $T > 0$ dobivamo trajektoriju na $[0, T]$.*

Simulacija trajektorija Brownovog gibanja

U sljedećem ćemo dijelu pokazati na koji način možemo simulirati trajektoriju Brownovog gibanja $(B_t, t \geq 0)$. Označimo s $\Delta B_k = B_{k\Delta T} - B_{(k-1)\Delta T}$. Neka je interval $[0, T]$ podijeljen sa N podintervala duljine $\Delta T = \frac{T}{N}$.
Vrijedi:

$$B_T = B_{N\Delta T} = \sum_{k=1}^{N} (B_{k\Delta T} - B_{(k-1)\Delta T}) = \sum_{k=1}^{N} \Delta B_k. \tag{1.7}$$

Iz izraza (1.7) slijedi da se Brownovo gibanje na k-tom intervalu može prikazati kao:

$$B_{k\Delta T} = B_{(k-1)\Delta T} + \Delta B_k.$$

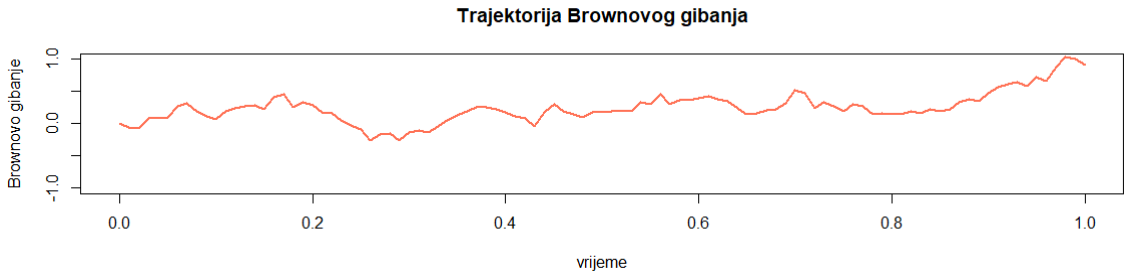
Vidimo da je za simuliranje trajektorije Brownovog gibanja dovoljno znati simulirati njegove priraste na disjunktnim intervalima.

Kao što smo prethodno napomenuli, Brownovo gibanje $(B_t, t \geq 0)$ ima $E(B_t) = 0$ i $Var(B_t) = t$. U nastavku ćemo proučiti linearnu transformaciju Brownovog gibanja gdje su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ konstante,

$$X_t = \mu t + \sigma B_t. \tag{1.8}$$

Ovako se definirano Brownovo gibanje $(X_t, t \geq 0)$ naziva **Brownovo gibanje s driftom.** Prilikom računanja očekivanja i varijance procesa X_t dobivamo: $E(X_t) = \mu t, Var(X_t) = \sigma^2 t$, iz čega slijedi da je X_t, za svaki $t \geq 0$, normalno distribuirana slučajna varijabla. Preciznije, $X_t \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$.

Brownovo gibanje nije dobar izbor procesa za modeliranje cijene dionica jer ima nezavisne priraste, tj. odsustnost pamćenja i može poprimiti negativne vrijednosti, dok cijene dionica ne mogu biti negativne. Osim toga, očekivanje slučajne varijable $B_t - B_s$ je nula, dok je varijanca proporcionalna proteklom vremenu. Važno je napomenuti kako je trajektorija Brownovog gibanja neprekidna g.s., ali nije nigdje diferencijabilna. Stoga, u sljedećem ćemo dijelu rada predstaviti geometrijsko Brownovo gibanje koje ćemo koristiti kao model za cijene dionica prilikom vrednovanja egzotičnih opcija.



Slika 1.1: Simulirana trajektorija Brownovog gibanja

1.2 Geometrijsko Brownovo gibanje

Definicija 1.3 (Geometrijsko Brownovo gibanje). *Geometrijsko Brownovo gibanje* $(S_t, t \geq 0)$ *je proces u neprekidnom vremenu s neprekidnim skupom stanja i g.s. neprekidnim trajektorijama takav da je:*

- $S_0 > 0$ *konstanta,*
- $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$,

gdje je $(B_t, t \geq 0)$ *standardno Brownovo gibanje,* $\mu \in \mathbb{R}$ *i* $\sigma > 0$ *konstante.*

Geometrijsko Brownovo gibanje $(S_t, t \geq 0)$ dano izrazom

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}, \tag{1.9}$$

za $s < t$ ima sljedeća svojstva:

S1) $E(\ln(\frac{S_t}{S_s})) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)$,

S2) $Var(\ln(\frac{S_t}{S_s})) = \sigma^2(t-s)$,

S3) $(S_t, t \geq 0)$ je Markovljev[13] proces (vidi [8, str. 147]).

Prije dokaza objasnit ćemo zašto su nam log-povrati važni. Za početak definirajmo relativni povrat. Relativni je povrat u financijskoj literaturi definiran kao relativna promjena cijene financijske imovine u određenom vremenskom trenutku. Osim relativnih povrata često se koriste i log-povrati. Jednoperiodni je relativni povrat u trenutku t definiran na sljedeći način:

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}},\ t \in \{1, \ldots, T\},$$

iz čega slijedi:

$$1 + R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}.$$

Jednoperiodni je log-povrat u trenutku t definiran na sljedeći način:

$$r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1}),\ t \in \{1, \ldots, T\}.$$

Standardna je devijacija log-povrata jedna mjera rizika, naziva se volatilnost. Osim toga, log-povrati su prigodni za promatranje jer je n-periodni log-povrat jednak sumi jednoperiodnih log-povrata, tj.

$$\begin{aligned} r_t(n) &= \ln(1 + R_t(n)) = \ln\left((1+R_t)(1+R_{t-1})\cdots(1+R_{t-n+1})\right) \\ &= \ln(1+R_t) + \ln(1+R_{t-1}) + \cdots + \ln(1+R_{t-n+1}) \\ &= r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-n+1}, \end{aligned}$$

što nije slučaj s relativnim povratima. Odnos nam je relativnih i log-povrata zanimljiv i zbog činjenice što se za dovoljno mali x, gdje je $x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+x)$ može dobro aproksimirati s x, tj. za male su promjene cijena relativni i log-povrati približno jednaki.

[13] Andrej Andrejevič Markov (Rjazan, 14. lipnja 1856. - Petrograd, 20. srpnja 1922.), ruski matematičar.

Dokažimo prethodno navedena svojstva geometrijskog Brownovog gibanja.

Dokaz. Za početak pogledajmo kako izgleda log-povrat geometrijskog Brownovog gibanja $(S_t, t \geq 0)$:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_s}\right) = \ln\left(e^{\sigma(B_t-B_s)+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)}\right) = \sigma(B_t - B_s) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s). \tag{1.10}$$

Budući da je $B_t - B_s$ prirast standardnog Brownovog gibanja, te vrijedi $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, izraz (1.10) linearna je transformacija normalne slučajne varijable $\mathcal{N}(0, t-s)$. Stoga slijede tvrdnje S1) i S2).
Preostaje još dokazati da geometrijsko Brownovo gibanje zadovoljava Markovljevo svojstvo. Neka je t sadašnjost, a $(t+h)$ budućnost, gdje je $h > 0$. Tada je:

$$S_{t+h} = e^{\sigma B_{t+h}+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(t+h)} = e^{\sigma(B_{t+h}-B_t+B_t)+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)h} = \\ = S_t \cdot e^{\sigma(B_{t+h}-B_t)+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)h}.$$

Uz danu sadašnjost S_t, budućnost S_{t+h} ovisi samo o prirastu Brownovog gibanja na $\langle t, t+h]$, a kako su oni nezavisni, slijedi da S_{t+h} ovisi samo o S_t, za $0 \leq h < t$. □

Iz prethodno navedenih svojstava log-povrata slijedi da je volatilnost modela $\sigma\sqrt{t-s}$, na intervalu $\langle s, t\rangle$. Volatilnost se modela koristi kao jedna od mjera rizičnosti financijske imovine jer je ono standardna devijacija povrata i daje informaciju o raspršenosti log-povrata oko očekivanja.

U sljedećem ćemo primjeru pokazati da je (1.9) rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

Dokaz ćemo provesti pomoću Itôve[14] leme. Vidi [16, str. 117].
Neka je X_t Itôv proces:

$$X_t = \int_0^t \sigma(s)dB_s + \int_0^t (\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s))ds.$$

Neka je proces kretanja cijena dan sljedećim izrazom:

$$S_t = S_0 e^{X_t}.$$

Definiramo funkciju $f(x) = S_0 e^x$. Primijetimo da za funkciju f vrijedi: $f(x) = f'(x) = f''(x)$. Iz Itôve formule za Itôv proces slijedi:

$$S_t - S_0 = \int_0^t f(X_s)\sigma(s)dB_s + \int_0^t f(X_s)(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s))ds + \frac{1}{2}\int_0^t f(X_s)\sigma^2(s)ds = \\ = \int_0^t f(X_s)\mu(s)ds + \int_0^t f(X_s)\sigma(s)dB_s$$

tj. slijedi

$$dS_t = f(X_t)\mu(t)dt + f(X_t)\sigma(t)dB_t.$$

[14]Kiyosi Itô (Honshu, 7. rujna 1915. – Kyoto, 10. studenoga 2008.), japanski matematičar.

Ako su funkcije $\mu(t)$ i $\sigma(t)$ konstante, dobivamo jednadžbu geometrijskog Brownovog gibanja, tj.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

Budući da je trajektorija geometrijskog Brownovog gibanja neprekidna transformacija trajektorije standardnog Brownovog gibanja, za

$$\omega \in \Omega,\ \omega \mapsto S_t(\omega) = e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t(\omega)},$$

slijedi da ona preuzima sva svojstva trajektorije standardnog Brownovog gibanja, tj. neprekidna je g.s., ali nije nigdje diferencijabilna. Nadalje, pogledajmo interpretaciju koeficijenata geometrijskog Brownovog gibanja.
Za početak definirajmo relativni povrat u kontekstu geometrijskog Brownovog gibanja $(S_t, t \geq 0)$.

$$\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} = \mu dt + \sigma(B_{t+dt} - B_t),\ \textit{na intervalu } \langle t, t+dt].$$

Uočimo sljedeće:

$$E\Big(\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t}\Big) = \mu dt + \sigma E(B_{t+dt} - B_t) = \mu dt$$

Kažemo da je μ očekivana ili srednja stopa povrata.

$$Var\Big(\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t}\Big) = \sigma^2 Var(B_{t+dt} - B_t) = \sigma^2 dt$$

Vidimo da je volatilnost i standardna devijacija relativnog povrata.

Simulacija trajektorija geometrijskog Brownovog gibanja

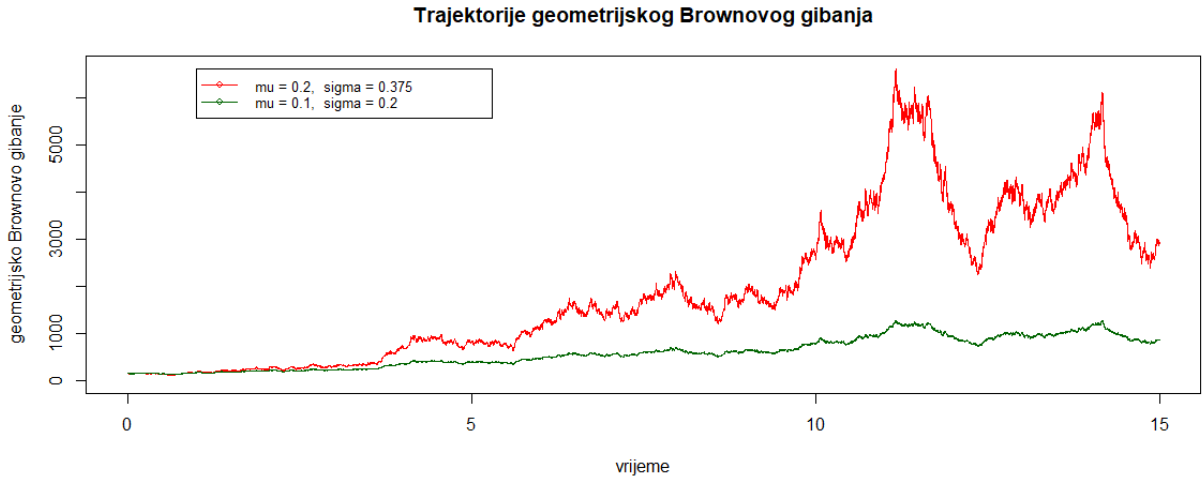
Neka je $[0, T]$ interval podijeljen na N dijelova duljine $\Delta T = \frac{T}{N}$. Tada je

$$S_T = S_{N\Delta T} = S_0 \prod_{k=1}^{N} \frac{S_{k\Delta T}}{S_{(k-1)\Delta T}} = S_0 \prod_{k=1}^{N} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta T + \sigma \Delta B_k}.$$

Cijenu dionice u k-tom trenutku možemo računati pomoću sljedećeg izraza:

$$S_k \Delta T = S_{(k-1)\Delta T} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta T + \sigma \Delta B_k}. \tag{1.11}$$

Formula (1.11) je korištena prilikom Monte Carlo simulacija cijena dionica.
Geometrijsko je Brownovo gibanje model koji su 1973. iskoristili američki ekonomisti Fischer Black i Myron Scholes za analitičko vrednovanje europske *call i put* opcije u radu, vidi [3].



Slika 1.2: Simulirane trajektorije geometrijskog Brownovog gibanja

Poglavlje 2

2 Monte Carlo metode

2.1 Motivacija

Posljednjih je godina narasla kompleksnost numeričkih operacija u financijskoj teoriji i praksi, stoga je sve važnija efikasnost i brzina numeričkih metoda. Numeričke se metode svakodnevno koriste u financijskom svijetu prilikom npr. vrednovanja opcija, analize rizika i stres-testiranja portfelja. Danas vrednovanje opcija igra važnu ulogu u istraživanju kvalitete financijskog tržišta. Tri su glavne metode za vrednovanje opcija: binarne metode *(binomial methods)*, model konačnih razlika *(finite difference models)* te Monte Carlo metode. Binarnu su metodu vrednovanja opcija objavili 1979. godine J. Cox, S. Ross i M. Rubinstein, vidi [7]. Osnova binarne metode vrednovanja su binarna stabla. Broj rešetki stabla ovisi o vremenu između vrednovanja opcije i datuma isteka opcije. Svaki čvor rešetke predstavlja moguću cijenu imovine u trenutku t, vidi [11, str. 392]. Cilj je modela konačnih razlika modelirati diferencijalnu jednadžbu kao skup jednadžbi koje se mogu iterativno riješiti, vidi [11, str. 418].

U ovom ćemo radu koristiti Monte Carlo metode za vrednovanje vrijednosti egzotičnih opcija. Povijest Monte Carlo metoda seže u 1940. kad je S. Ulam[15] izučavao nuklearno oružje u nacionalnom laboratoriju u Los Almosu. Nakon njegovog otkrića John von Neumann[16] proveo je Monte Carlo simulacije koristeći ENIAC računalo. Rad je Ulama i von Neumanna zahtijevao tajno ime, a Nicholas Metropolis predložio je, po Monte Carlo kasinu u Monacu, ime Monte Carlo. Za početak objasnimo generalno Monte Carlo metodu.

Monte Carlo simulacije korisne su prilikom računanja cijena opcija koje su ovisne o trajektoriji cijene dionica, tzv. *path-dependent* opcije. Cilj je Monte Carlo simulacije simulirati veliki broj trajektorija cijena dionica od početka do vremena dospijeća opcije te nakon toga izračunati aritmetičku sredinu prethodno dobivenih simulacija za svaki trenutak t. Najveći je problem Monte Carlo metoda vrijeme, jer je točnost procjene proporcionalna broju simula-

[15] Stanislaw Marcin Ulam (Lemberg, 13. travnja 1909. - Santa Fe, 13. svibnja 1984.), poljski matematičar i nuklearni fizičar.

[16] John von Neumann (Budimpešta, 28. prosinca 1903. - Washington D.C., 8. veljače 1957.), mađarsko-američki matematičar, fizičar, inženjer - polimat.

cija. Također, varijanca Monte Carlo procjenitelja iznosi σ^2/N, što znači ako želimo smanjiti varijancu procjenitelja imamo dvije mogućnosti: povećanje N-a, tj. povećanje uzorka ili smanjenje σ^2. Budući da je brzina konvergencije metode relativno spora, često se odlučujemo za tehnike smanjivanja varijance *(variance reduction techniques)* kako bismo povećali efikasnost metode. Primjerice, promotrimo integral:

$$I = \int_0^1 \frac{\cos x}{x + \sin^2 x} dx. \tag{2.1}$$

Izračunati gornji integral nije jednostavno analitičkim putem, stoga se odlučujemo za numeričke metode. Kako bismo mogli iskoristiti Monte Carlo metodu, prvo ćemo zapisati integral (2.1) kao očekivanje transformacije uniformne slučajne varijable U na $\langle 0, 1\rangle$. Ako je $g(U)$ transformacija slučajne varijable $U \sim U(0,1)$ funkcijom g, tada je njezino očekivanje

$$E(g(U)) = \int_0^1 g(u)du.$$

Tada integral I funkcije $g(x) = \dfrac{\cos x}{x + \sin^2 x}$ možemo zapisati na sljedeći način:

$$I = E\Big(\frac{\cos U}{U + \sin^2 U}\Big).$$

Nakon što smo zapisali integral I pomoću očekivanja, možemo primijeniti Monte Carlo metodu. Ako imamo niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli $U_1, \ldots, U_N$, tada je procjenitelj integrala I slučajna varijabla:

$$\hat{I} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(U_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\cos U_i}{U_i + \sin^2 U_i}.$$

Za $N = 10000$ korištenjem softvera R dobivamo procjenu $\hat{I} = 10.09425$. Dodatno smo izračunali i 95% tni pouzdani interval za I koji u ovom slučaju iznosi $[6.35065, 13.83785]$.
Osim prethodnog primjera, navodimo primjer iz svakodnevnog života koji je rješiv Monte Carlo metodama.

Primjer 2.1 (**Nagel[17]-Schreckenberg[18]**)**.** U ovom ćemo primjeru kratko objasniti Nagel-Schreckenbergov model prometa koji se rješava pomoću Monte Carlo simulacija. Model je predstavljen 1990. godine. Najzahtjevniji je dio prometa predviđanje i učestalost prometnih gužvi. Najveći su problem dijelovi svijeta u kojima nema dovoljno prometnih trakova, gdje se vrlo lako počnu stvarati prometne gužve. Promatramo jednodimenzionalni niz s L polja. Najviše jedno vozilo može biti u jednom polju. Vozila se kreću brzinom od 0 do v_{max}. Postoje četiri pravila modela koja se izvršavaju paralelno na svakom vozilu:

1. Akceleracija: Ako se vozilo kreće brzinom $v < v_{max}$ i ako je udaljenost do sljedećeg vozila veća od $v + 1$ onda će vozilo povećati svoju brzinu: $v \mapsto v + 1$.

2. Usporavanje: ako je vozilo na mjestu i, a drugo vozilo je na mjestu $i + j$, pri čemu je $v \geq j$, onda će vozilo smanjiti svoju brzinu na $j - 1$, tj. $v \mapsto j - 1$.

[17]Kai Nagel (Köln, 17. rujna 1965.), njemački fizičar.
[18]Michael Schreckenberg (Düsseldorf, 28. rujna 1956.), njemački fizičar.

3. Slučajnost: s vjerojatnošću p brzina se vozila smanjuje za 1, tj. $v \mapsto v - 1$.

4. Kretanje: svako se vozilo kreće naprijed v koraka

Ovim se modelom pokušalo realistično opisati svakodnevni promet. Korak 3 bitan je zbog realističnosti modela, morali smo dodati slučajnost kako model ne bi bio suviše deterministički.

Nakon uvodne motivacije i opisa Nagel-Schreckenbergovog modela, objasnimo na koji su način konkretno Monte Carlo metode korištene prilikom vrednovanja egzotičnih opcija u Poglavlju (4). Svaka opcija zahtijeva određene predefinirane parametre kao što su cijena dionice u trenutku $t = 0$, broj Monte Carlo simulacija, cijena izvršenja opcije, vrijeme izvršenja opcije te parametri potrebni za simulaciju geometrijskog Brownovog gibanja (σ i kamatna stopa r). Svaki algoritam započinje simulacijom uzorka iz normalne distribucije te nakon toga, zajedno s predefiniranim parametrima simuliramo geometrijsko Brownovo gibanje koje predstavlja trajektoriju cijena dionice. Broj Monte Carlo simulacija odgovara dimenziji simuliranog uzorka iz normalne distribucije. Budući da je trajektorija cijena dionice svaki put drukčija, cilj je Monte Carlo metoda pronaći prosjek svih simulacija u trenutku T. Nakon što dobijemo vrijednost prosjeka svih Monte Carlo simulacija u trenutku T, tj. dobijemo prosjek vrijednosti dionice, računamo iznos isplate koju bi dobio vlasnik dionice. S obzirom na dobiveni iznos isplate, cijena je opcije diskontirani iznos cijene dionice s obzirom na vrijeme T i kamatnu stopu r. Konkretnije, cijena opcije u trenutku $t = 0$:

$$\text{cijena opcije} = e^{-rT} \frac{\text{prosjek cijene dionice}}{M},$$

gdje je M broj Monte Carlo simulacija.

Prijeđimo na matematičku pozadinu Monte Carlo metoda.

2.2 Efikasnost procjenitelja

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i X slučajna varijabla na njemu s nepoznatim očekivanjem i varijancom. Nadalje, neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija takva da je kompozicija $g(X)$ dobro definirana te neka je $E(|g(X)|) < \infty$. Pretpostavimo da želimo procijeniti očekivanje od $g(X)$, označimo ga θ. Procjenu ćemo dobiti numeričkim putem, Monte Carlo simulacijama, aproksimirajući integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(y)dy,$$

pri čemu je funkcija $f(y)$ funkcija gustoće od X, dakle nenegativna je i vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1.$$

U tom slučaju možemo simulirati N nezavisnih jednako distribuiranih (slučajnoj varijabli X) slučajnih varijabli $X_1, X_2, ..., X_N$. Procjenitelj $\hat{\theta}$ dan je sljedećim izrazom:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N}(g(X_1) + g(X_2) + ... + g(X_N)) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i) \tag{2.2}$$

Teorem 2.1. *Procjenitelj* $\hat{\theta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i)$ *je nepristran, tj. vrijedi:*

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Dokaz. Korištenjem svojstva linearnosti očekivanja dobivamo sljedeće:

$$E(\hat{\theta}) = E\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i)\Big) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E(g(X_i)).$$

Budući da su X_i nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable, one imaju jednaka očekivanja te slijedi:

$$\frac{1}{N} \cdot N \cdot E(g(X_1)) = E(g(X_1)).$$

□

Budući da Monte Carlo metode koriste simulacije, bitna nam je varijanca. Procjenitelj varijance od X dan je sljedećim izrazom:

$$S_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(g(X_i) - \hat{\theta})^2.$$

S_N^2 možemo izraziti i na sljedeći način:

$$\begin{aligned} S_N^2 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big(g^2(X_i) - 2g(X_i)\hat{\theta} + \hat{\theta}^2\Big) \\ &= \frac{1}{N}\Big(\sum_{i=1}^{N} g^2(X_i) - 2\hat{\theta}\sum_{i=1}^{N} g(X_i) + \sum_{i=1}^{N}\hat{\theta}^2\Big) \\ &= \frac{1}{N}\Big(\sum_{i=1}^{N} g^2(X_i) - 2N\hat{\theta}^2 + N\hat{\theta}^2\Big) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g^2(X_i) - \hat{\theta}^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sljedećim ćemo izračunom pokazati da je procjenitelj S_N^2 pristran. Neka je $\sigma^2 = Var(g(X_i))$.

Računamo

$$E(S_N^2) = E\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(g(X_i) - \hat{\theta})^2\Big)$$

zbog (2.3) slijedi

$$\begin{aligned}
&= E\Big(\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g^2(X_i)\Big) - \hat{\theta}^2\Big) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E(g^2(X_i)) - E(\hat{\theta}^2) \\
&= E(g^2(X_i)) - E(\hat{\theta}^2) \\
&= \big(E(g^2(X_i)) - E^2(g(X_i))\big) + E^2(g(X_i)) - \Big((E(\hat{\theta}^2) - E^2(\hat{\theta})) + E^2(\hat{\theta})\Big) \\
&= \sigma^2 + E^2(g(X_i)) - \Big(Var(\hat{\theta}) + E^2(\hat{\theta})\Big) \\
&= \sigma^2 + E^2(g(X_i)) - \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} Var(g(X_i)) - E^2(\hat{\theta}) \\
&= \sigma^2 + E^2(g(X_i)) - \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} Var(g(X_i)) - E^2(g(X_i)) \\
&= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{N} = \frac{N-1}{N}\sigma^2.
\end{aligned}$$

Kako bi procjenitelj za varijancu bio nepristran, koristimo transformaciju:

$$\hat{S}_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(g(X_i) - \hat{\theta})^2.$$

Kolmogorovljev[19] jaki zakon velikih brojeva (vidi [19, Teorem 12.15]) i Lêvyjev[20] centralni granični teorem (vidi [19, Teorem 14.1]) koriste se u analizi asimptotskih svojstava Monte Carlo metode. Budući da je $E(|g(X)|) < \infty$, prema jakom zakonu velikih brojeva slijedi:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i) \overset{g.s.}{\to} E(g(X)),\ \ kad\ N \to \infty, \tag{2.4}$$

dok prema centralnom graničnom teoremu slijedi:

$$\sqrt{N}\frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{Var(\hat{\theta})}} \overset{d}{\to} \mathcal{N}(0,1),\ \ kad\ N \to \infty. \tag{2.5}$$

Prethodna svojstva (2.4) i (2.5) procjenitelja $\hat{\theta}$ za očekivanje nazivamo još konzistentnost i asimptotska normalnost.

[19] Andrej Nikolaevich Kolmogorov (Tambov, 25. ožujka 1903. - Moskva, 20. listopada 1987.), ruski matematičar.

[20] Paul Pierre Lêvy (Pariz, 15. rujna 1886. - Pariz, 15. prosinca 1971.), francuski matematičar.

Napomena 2.1. *Procjenitelj pogreške (pristranost) Monte Carlo metode je:*

$$\varepsilon_N = E(g(X)) - \frac{1}{N}(g(X_1) + g(X_2) + ... + g(X_n)).$$

Budući da vrijedi izraz (2.5), za veliki N i $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi sljedeće:

$$P\Big(\hat{\theta} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{S}_N^2}{\sqrt{N}} < \theta < \hat{\theta} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{S}_N^2}{\sqrt{N}}\Big) \approx 1 - \alpha.$$

Ako je $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$ te primjenom prethodne jednadžbe na 95%tni interval pouzdanosti dobivamo:

$$P(|G| \leq 1.96) \approx 0.95,$$

tj. interval pouzdanosti za θ je:

$$\Big[\hat{\theta} - 1.96\frac{\hat{S}_N^2}{\sqrt{N}}, \hat{\theta} + 1.96\frac{\hat{S}_N^2}{\sqrt{N}}\Big].$$

Prethodno se opisana Monte Carlo metoda naziva još gruba Monte Carlo metoda *(Crude Monte Carlo)* jer ima sporu brzinu konvergencije. Primijetimo, kako bismo smanjili standardnu devijaciju za faktor 0.1, moramo povećati N 100 puta. U sljedećem ćemo primjeru ilustrirati važnost veličine broja N.

Primjer 2.2. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor na kojem su definirane slučajne varijable $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ i Y. Neka je Y slučajna varijabla takva da je

$$Y = g(X) = e^{\beta X},$$

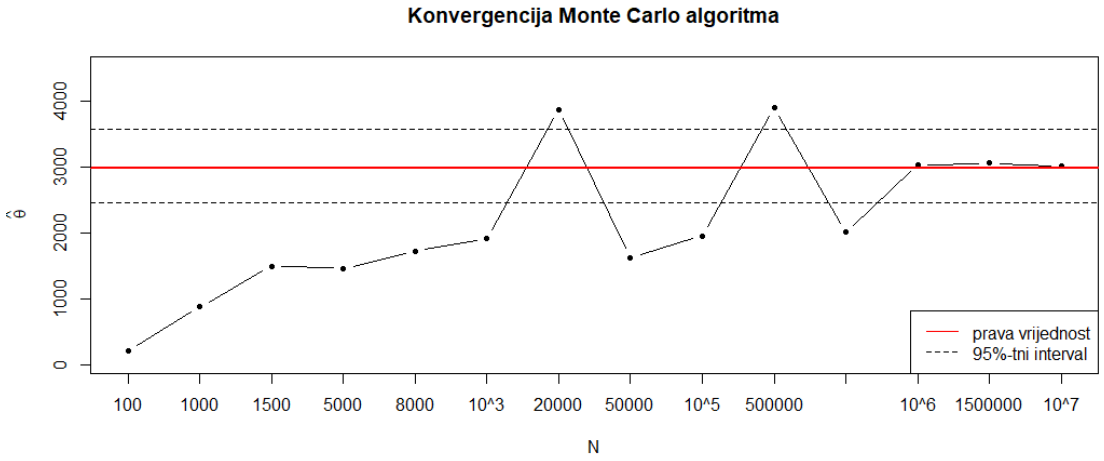
gdje je $\beta \in \mathbb{R}$. Y ima log-normalnu distribuciju s parametrima $(0, \beta^2)$. Želimo izračunati $E(Y)$, u ovom slučaju za $\beta = 4$.

Analitička se vrijednost očekivanja može izračunati kao $E(Y) = e^{\frac{\beta^2}{2}}$. Prava se vrijednost standardne devijacije može dobiti kao: $\sigma = \sqrt{e^{2\beta^2} - e^{\beta^2}}$. U našem su slučaju dobivene vrijednosti $E(Y) = 2980.958$ i $\sigma = 8886110$. Prilikom dobivanja sljedećih izračuna koristili smo softver R. U tablici navodimo očekivanje, standardnu devijaciju i 95%tni pouzdani interval koji su izračunati Monte Carlo metodom. Algoritam za računananje preuzet je iz [12].

N	$E(Y)$	σ	95%tni pouzdani interval za $E(Y)$
100	210.0994	933.870	$[27.06, 393.14]$
1000	880.302	13824.58	$[23.44578, 1737.159]$
10000	1921.378	59989.06	$[745.5922, 3097.163]$
10^6	3041.614	461620.2	$[2136.839, 3946.39]$
10^7	3020.481	890280	$[2468.679, 3572.282]$

Tablica 2.1: Konvergencija Monte Carlo metode u odnosu na povećanje N-a

Iz prethodne je tablice važno primijetiti nekoliko bitnih značajki: 95%tni pouzdani intervali izračunati pomoću procijenjene standardne devijacije za $N = 100$ i $N = 1000$ ne sadrže pravu vrijednost $E(Y)$, osim toga razlika između prave vrijednosti $E(Y)$ i dobivene Monte Carlo vrijednosti je prevelika - zaključujemo da je uzorak premali, tj. za $N = 100$ i $N = 1000$ nije nam jasno može li se distribucija dobro aproksimirati s $\mathcal{N}(0, 1)$, dakle nastavljamo povećavati broj simulacija. Za $N = 10000$ prava vrijednost ulazi u dobiveni pouzdani interval $[745.5922, 3097.163]$, međutim opet je pogreška prevelika. Za $N = 10^6$ i $N = 10^7$ dobivamo bolje procjene, a samim time i uže 95%tne pouzdane intervale.
Primijetimo još da su 95%tni pouzdani intervali izračunati pomoću prave vrijednosti standardne devijacije preveliki; samim time nisu korisni. Preveliki su zbog velike prave vrijednosti standardne devijacije. Sljedeći graf pokazuje dobivene vrijednosti procjenitelja $\hat{\theta}$ za očekivanje $E(Y)$ Monte Carlo metodom u odnosu na povećanje uzorka. Na x-osi prikazana je veličina uzorka N, dok su na y-osi dobivene vrijednosti procjenitelja $\hat{\theta}$.



Slika 2.1: Konvergencija Monte Carlo algoritma u odnosu na N

Budući da povećanje N-a ponekad nije primjenjivo, u sljedećem ćemo dijelu poglavlja predstaviti tehnike reduciranja varijance.

2.3 Tehnike reduciranja varijance

Iz prethodnog primjera zaključujemo kako je brzina konvergencije Monte Carlo metode relativno spora, iz tog razloga želimo smanjiti varijancu Monte Carlo procjenitelja $\hat{\theta}$. Konkretnije, želimo smanjenje varijance procjenitelja $\hat{\theta}$ uz točniju procjenu, bez povećavanja veličine uzorka N. Glavni je cilj tehnika reduciranja varijance procjenitelja pronaći slučajnu varijablu Y takvu da je

$$E(X) = E(Y),$$

pri čemu slučajna varijabla Y ima dosta manju varijancu od slučajne varijable X, tj.

$$Var(Y) << Var(X).$$

Jedna od najpopularnijih metoda smanjivanja varijance naziva se *control variate* metoda. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor, X, Y slučajne varijable na njemu, te neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija t.d. $E(g(X))$ postoji. *Control variate* metoda je primjenjiva ako postoji Y t.d. $E(Y) = E(X)$, a da se očekivanje od Y može eksplicitno izračunati. Vrijedi:

$$E(g(X)) = E(g(X) - Y) + E(Y).$$

Ovdje je vrlo važno da je

$$Var(g(X) - Y) << Var(g(X)).$$

Kako bismo to ilustrirali, simuliramo n-dimenzionalni uzorak iz dvodimenzionalne distribucije slučajnog vektora (X_n, Y_n), $n \in \mathbb{N}$, koji su jednako distribuirani kao (X, Y). Ponovit ćemo definiciju procjenitelja za $E(g(X))$ koji smo definirali u (2.2) na početku poglavlja:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g(X_i).$$

Tada je procjenitelj *control variate* metodom dan sljedećim izrazom:

$$\hat{\theta}_{CV} = E(Y) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (g(X_n) - Y_n).$$

Pokazat ćemo da je procjenitelj $\hat{\theta}_{CV}$ također nepristran:

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}_{CV}) &= E\left(E(Y) + \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (g(X_n) - Y_n) \right) \right) \\ &= E(Y) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} E(g(X_n)) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} E(Y_n) \\ &= E(Y) + E(g(X)) - E(Y) \\ &= E(g(X)) = \theta. \end{aligned}$$

Preostalo nam je još izračunati varijancu procjenitelja *control variate* metodom:

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\theta}_{CV}) &= Var\left(E(Y) + \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(g(X_n) - Y_n)\right)\right) \\
&= Var\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(g(X_n) - Y_n)\right) \\
&= Var\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(X_n)\right) + Var\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Y_n\right) - 2Cov\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(X_n), \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Y_n\right) \\
&= Var\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(X_n)\right) + \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N} Var(Y_n) - \frac{2}{N^2}\sum_{n=1}^{N} Cov\left(g(X_n), Y_n\right).
\end{aligned}$$

Budući da je $Y = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Y_n$, a $\hat{\theta} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(X_n)$, prethodni izraz možemo zapisati na sljedeći način:

$$Var(\hat{\theta}_{CV}) = Var(\hat{\theta}) + \frac{1}{N}\Big(Var(Y) - 2Cov(g(X), Y)\Big). \tag{2.6}$$

Varijanca $\hat{\theta}_{CV}$ bit će manja od varijance procjenitelja $\hat{\theta}$ ako je $Var(Y) - 2Cov\left(g(X), Y\right) < 0$, tj. ako je $Cov(g(X), Y) > \frac{Var(Y)}{2}$. Kako bismo objasnili metodu smanjenja varijance u ovom primjeru, u nastavku ćemo umjesto Y promatrati αY, kojim kontroliramo koreliranost, gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$. S obzirom na (2.6), dobivamo sljedeći izraz koji je potrebno minimizirati kao funkciju od α:

$$\begin{aligned}
&Var(\alpha Y) - 2Cov(g(X), \alpha Y) = \alpha^2 Var(Y) - 2\alpha Cov(g(X), Y) \\
&= Var(Y)\left(\alpha^2 - 2\alpha\frac{Cov(g(X), Y)}{Var(Y)} + \frac{Cov^2(g(X), Y)}{Var^2(Y)}\right) - \frac{Cov^2(g(X), Y)}{Var(Y)} \\
&= Var(Y)\left(\alpha - \frac{Cov(g(X), Y)}{Var(Y)}\right)^2 - \frac{Cov^2(g(X), Y)}{Var(Y)}.
\end{aligned}$$

Optimalan izbor za minimizaciju funkcije je očito $\alpha = \frac{Cov(g(X), Y)}{Var(Y)}$, u tom je slučaju varijanca smanjena za $\frac{Cov^2(g(X), Y)}{Var(Y)}$.

Control variate metoda općenito se primjenjuje prilikom vrednovanja azijske *call* opcije čija je vrijednost u trenutku T dana sljedećim izrazom:

$$(A_T - K)_+,$$

pri čemu je $A_T = \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt$, a $(S_t, t \geq 0)$ geometrijsko Brownovo gibanje.

Poglavlje 3

3 Egzotične opcije

U posljednjih je 30 godina trgovanje financijskim izvedenicama postalo ekstremno važno u području financija. Izvedenicama se trguje na burzovnom tržištu (*stock market*) i na tzv. OTC tržištu (*over the counter market*). Burzovno je tržište ono na kojem pojedinci trguju standardiziranim ugovorima. Burzovna tržišta postoje već duže vrijeme, a prvo je uspostavljeno u Chicagu (Sjedinjene Američke Države) 1848. godine (*The Chicago Board of Trade*). Cilj je burzovnog tržišta 1848. godine bio uspostaviti vezu između poljoprivrednika i trgovaca, konkretnije, standardizirati količinu i kvalitetu poljoprivrednih proizvoda kojima se trguje. Tako je nastao prvi *forward* ugovor koji je bio poznat kao *to-arrive* ugovor. *The Chicago Board Options Exchange* počela je trgovati *call* opcijama 1973. godine, dok je trgovanje *put* opcijama započelo četiri godine kasnije, 1977. godine.

Osim trgovanjem na burzovnom tržištu, opcijama se danas trguje i na OTC tržištu. Štoviše, trgovanje na OTC tržištu ima mnogo veći volumen od trgovanja na burzovnom tržištu. Razmjene na ovom tržištu odvijaju se telefonski ili preko internetske veze između brokera.

Opcije su financijske izvedenice. Nazivamo ih izvedenicama jer je cijena opcije direktno vezana uz cijenu dionice za koju opciju želimo kupiti. Dioničari kupuju opcije kako bi učinili svoj portfelj što fleksibilnijim prilikom špekulacije o budućoj cijeni dionica te kako bi se zaštitili od mogućeg rizika pada ili rasta cijene dionica *(hedging)*. Budući da su glavna tema ovog rada opcije i njihovo nearbitražno vrednovanje, za početak definirajmo opciju.

Definicija 3.1 (**Opcija**). *Opcije su financijske izvedenice koje daju kupcu opcije pravo, ali ne i obavezu, da kupi* ***(call option)*** *ili proda* ***(put option)*** *financijsku imovinu po unaprijed dogovorenoj cijeni tijekom određenog vremena ili na točno određen datum (trenutak dospijeća). Unaprijed dogovorena cijena naziva se cijena izvršenja (strike price).*

Opcije možemo grubo podijeliti na *vanilla* opcije i *egzotične* opcije. *Vanilla* opcije su one koje imaju sljedeće značajke:

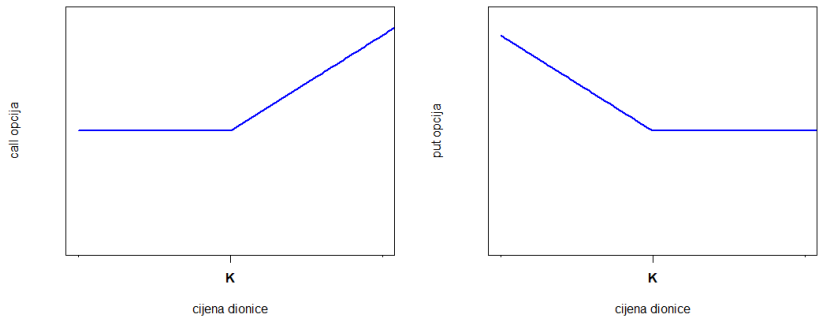
- fiksna cijena izvršenja K *(strike price)*,
- fiksno vrijeme dospijeća T *(maturity)*,
- jedna financijska imovina (dionica, valuta, obveznica).

Usmjerimo se prvo na *vanilla* opcije: europsku *put* i *call* opciju.
Vrijednost europske ***put*** opcije u trenutku T:

$$P^K(S_T, T) = (K - S_T)_+ = \max(0, K - S_T),$$

dok je vrijednost europske ***call*** opcije u trenutku T:

$$C^K(S_T, T) = (S_T - K)_+ = \max(0, S_T - K).$$



Slika 3.1: Vrijednost *call* i *put* opcije u trenutku dospijeća

3.1 Black-Scholesova formula

Kao konkretnu ćemo primjenu geometrijskog Brownovog gibanja obraditi poznati Black-Scholesov model. Otkad je 1973. godine objavljen rad ekonomista F. Blacka i M. Scholesa te rad matematičara Roberta Mertona, vidi [15], korištenje je stohastičkih procesa općeprihvaćeno prilikom modeliranja cijena rizične financijske imovine. U ovom ćemo dijelu rada spomenuti Black-Scholesovu formulu za vrednovanje europske *call* opcije. Prije same formule definirajmo europsku *call i put* opciju. Za početak definirajmo pojam opcije.

Definicija 3.2. *Neka su cijene dionica modelirane geometrijskim Brownovim gibanjem* $(S_t, t \geq 0)$*, neka je* K *cijena izvršenja opcije u trenutku* T*. Vrijednost europske* ***put*** *opcije u trenutku* T*:*

$$P^K(S_T, T) = (K - S_T)_+ = \max(0, K - S_T),$$

dok je vrijednost europske ***call*** *opcije u trenutku* T*:*

$$C^K(S_T, T) = (S_T - K)_+ = \max(0, S_T - K).$$

Neka je K cijena izvršenja, S_t cijena dionice u trenutku t, pri čemu je $(S_t, t \geq 0)$ geometrijsko Brownovo gibanje definirano izrazom (1.9) te $C^K(S_t, t)$ cijena europske *call* opcije u trenutku t. U nastavku izvodimo Black-Scholesovu formulu za vrednovanje europske *call* opcije. Prije izvoda definiramo potrebne pojmove.

Kako bismo dobili formulu za nearbitražno vrednovanje europske *call* opcije, potrebno je upoznati se s novom vjerojatnosnom mjerom P^* na $(\Omega, \mathcal{F})$ u odnosu na koju je proces

$$(e^{-rt} S_t, t \in [0, T])$$

$\mathcal{F}-$martingal u neprekidnom vremenu, pri čemu je $\mathcal{F}$ prirodna filtracija Brownovog gibanja. Koristit ćemo Girsanovljev[21] teorem (vidi [21, Teorem 6.4]) u kojem je vjerojatnost P^* definirana na sljedeći način:

$$P^*(A) = E(S_t I_A),$$

za sve $A \in \mathcal{F}$ takva da je $P^* \approx P$, a proces $(\hat{B}_t, t \in [0, T]), \hat{B}_t = B_t + qt, q \in \mathbb{R}$, standardno Brownovo gibanje na $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$ adaptirano na filtraciju $\mathcal{F}$. Zaključujemo, prema Girsanovljevom teoremu vrijedi sljedeća relacija:

$$E^*(S_0 e^{\sigma \hat{B}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} | \mathcal{F}_s) = S_s,$$

gdje je $s, t \in [0, T]$ i $s < t$.

[21] Igor Vladimirovich Girsanov (Turkistan, 10. rujna 1934. - 16. ožujka 1967.), ruski matematičar.

Računamo vrijednost europske *call* opcije u trenutku $t \in [0, T\rangle$:

$$\begin{aligned} C^K(S_t, t) &= E^*(e^{-r(T-t)} C^K(S_T, T)|\mathcal{F}_t) \\ &= E^*(e^{-r(T-t)}(S_0 e^{\sigma B_T + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T} - K)_+|\mathcal{F}_t) \\ &= E^*(e^{-r(T-t)}(S_0 e^{\sigma(B_T - B_t + B_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t+t)} - K)_+|\mathcal{F}_t) \\ &= E^*(e^{-r(T-t)}(S_t e^{\sigma(B_T - B_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} - K)_+|\mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Neka je x cijena dionice, pretpostavimo da je $S_t = x$, u tom slučaju slijedi:

$$C^K(S_t, t) = E^*(e^{-r(T-t)}(S_t e^{\sigma(B_T - B_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} - K)_+|S_t = x),$$

korištenjem teorema o supstituciji dobivamo

$$= E^*(e^{-r(T-t)}(x e^{\sigma(B_T - B_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} - K)_+|S_t = x).$$

Budući da su prirasti Brownovog gibanja na intervalu $[t, T]$ nezavisni od S_t slijedi:

$$\begin{aligned} C^K(x, t) &= E^*(e^{-r(T-t)}(x e^{\sigma(B_T - B_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} - K)_+) \\ &= E^*((x e^{\sigma(B_T - B_t) + (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} - e^{-r(T-t)}K)_+). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Prema Girsanovljenovljevom teoremu vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} \sigma\hat{B}_u &= \sigma B_u + (\mu - r)u \\ \sigma(B_T - B_t) + (\mu - r)(T - t) &= \sigma(\hat{B}_T - \hat{B}_t), \end{aligned}$$

proces $(\hat{B}_t, t \in [0, T])$ je standardno Brownovo gibanje na $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$, gdje je

$$P^*(A) = E(S_t I_A),$$

za $A \in \mathcal{F}$.
Izraz (3.1) zapisujemo na sljedeći način:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x e^{\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} - e^{-r(T-t)}K)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}} dy. \tag{3.2}$$

Integral (3.2) bit će pozitivan ako vrijedi sljedeće:

$$x e^{\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} > e^{-r(T-t)}K,$$

budući da su cijene dionica uvijek pozitivne te primjenom funkcije prirodnog logaritma dobivamo

$$\begin{aligned} \sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) &> \ln\left(\frac{K}{x}\right) - r(T-t) \\ y &> \frac{1}{\sigma}\left(\ln\left(\frac{K}{x}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) - r(T-t)\right) \\ y &> \frac{1}{\sigma}\left(\ln\left(\frac{K}{x}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right) \\ y &> -\frac{1}{\sigma}\left(\ln\left(\frac{x}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right) = -d_2. \end{aligned}$$

Nastavljamo s računanjem integrala (3.2):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{-d_2}^{\infty}(xe^{\sigma y-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}-e^{-r(T-t)}K)e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}}dy$$
$$=\frac{x}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{-d_2}^{\infty}e^{\sigma y-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)-\frac{y^2}{2(T-t)}}dy-\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}K\int_{-d_2}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}}dy$$

uvođenjem supstitucije y=-z dobivamo sljedeće:

$$=\frac{x}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{-\infty}^{d_2}e^{-\frac{1}{2(T-t)}(z+\sigma(T-t))^2}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}Ke^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{d_2}e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}}dz.$$

Zbog jednostavnosti računa označimo prethodno dobivena dva integrala na sljedeći način:

$$I_1=\frac{x}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{-\infty}^{d_2}e^{-\frac{1}{2(T-t)}(z+\sigma(T-t))^2}dz,$$
$$I_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}Ke^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{d_2}e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}}dz.$$

Računanje integrala nastavljamo odvojeno:

$$I_1=\left|\begin{matrix}\frac{z+\sigma(T-t)}{\sqrt{T-t}}=u\\ dz=\sqrt{T-t}\;du\end{matrix}\right|=\frac{x}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{-\infty}^{\frac{d_2+\sigma(T-t)}{\sqrt{T-t}}}e^{-\frac{u^2}{2}}\sqrt{T-t}\;du$$
$$=\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{d_2+\sigma(T-t)}{\sqrt{T-t}}}e^{-\frac{u^2}{2}}du. \tag{3.3}$$

Budući da je integral (3.3) funkcija distribucije normalne slučajne varijable $\mathcal{N}(0,1)$ vrijednost integrala I_1 zapisujemo na sljedeći način:

$$I_1=x\cdot\Phi\left(\frac{d_2+\sigma(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right)=x\cdot\Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right),$$

pri čemu je $d_1=d_2+\sigma(T-t)$, a $\Phi(t)$ funkcija distribucije normalne slučajne varijable $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$.
Preostaje izračunati vrijednost integrala I_2 :

$$I_2=\left|\begin{matrix}\frac{z}{\sqrt{T-t}}=u\\ dz=\sqrt{T-t}\;du\end{matrix}\right|=K\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{-\infty}^{\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}}e^{-\frac{u^2}{2}}\sqrt{T-t}dy$$
$$=K\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}}e^{-\frac{u^2}{2}}dy=Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right).$$

Konačno, ako u trenutku t dionica vrijedi x, vrijednost europske *call* opcije u trenutku t je:

$$C^K(x,t)=I_1-I_2=x\;\Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right)-Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right),$$

Prema tome, slučajna varijabla kojom modeliramo vrijednost europske *call* opcije je:

$$C^K(S_t,t) = I_1 - I_2 = S_t \cdot \Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right). \tag{3.4}$$

U ovom je dijelu važno spomenuti izraz koji povezuje cijenu europske *call* i *put* opcije, a naziva se *call - put paritet*.

Propozicija 3.1. *Neka je T vrijeme dospijeća opcije, K cijena izvršenja, $C^K(S_T,T)$ vrijednost call opcije i $P^K(S_T,T)$ vrijednost put opcije. Tada vrijedi:*

$$C^K(S_T,T) - P^K(S_T,T) = S_T - K.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} C^K(S_T,T) - P^K(S_T,T) &= (S_T-K)_+ - (K-S_T)_+ \\ &= \begin{cases} S_T - K, & S_T > K \\ 0, & S_T \leq K \end{cases} - \begin{cases} K - S_T, & K > S_T \\ 0, & K \leq S_T \end{cases} \\ &= \begin{cases} S_T - K, & S_T > K \\ S_T - K, & S_T \leq K \end{cases} \\ &= S_T - K. \end{aligned}$$

□

Korištenjem prethodne propozicije i dobivene Black-Scholes formule (3.4) za europsku *call* opciju u trenutku t dobivamo formulu za europsku *put* opciju u trenutku t:

$$P^K(S_t,t) = Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(-\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right) - S_t\Phi\left(-\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right).$$

Razlikujemo europske i američke *vanilla* opcije. Europske opcije mogu biti izvršene jedino u trenutku dospijeća T, dok američke opcije mogu biti izvršene u bilo kojem trenutku prije T, vidi [10, str. 97]. U ovom ćemo se radu koncentrirati na europsku *call i put* opciju.

Egzotična je opcija svaka opcija koja ima jednu ili više različitih karakteristika u odnosu na *vanilla* opciju. Egzotične opcije dijelimo na korelacijske opcije *(correlation options)* i na opcije ovisne o putu *(path-dependent options)*. Utjecaj je globalizacije i integracije svjetskih financijskih tržišta pridonio razvoju korelacijskih opcija. Stvorila se potreba za zaštitom od rizika s više različitih strana. Korelacijske se opcije nazivaju još i *multiassets* opcije jer njihova isplata ovisi o minimalno dvama instrumentima. Instrumenti koji utječu na korelacijske opcije mogu biti dionice, obveznice, valute, burzovni indeksi *S&P100, S&P500, Nikkei*, itd. Neke su od korelacijskih opcija *digital, rainbow, quanto, spread, basket* opcije, vidi [24, str. 365]. S druge strane, dok cijena izvršenja *vanilla* opcije ovisi samo o cijeni dionice u trenutku T, cijena izvršenja *path-dependent* opcija ovisi o distribuciji cijena dionice do trenutka T. Neke su od najpoznatijih *path-dependent* opcija *azijska, barrier, lookback, one-clique, shout, forward-start* opcije, vidi [24, str. 111].

U ovom ćemo se poglavlju koncentrirati na azijsku, *barrier i lookback* opciju. Egzotične je opcije zbog kompleksnosti teže vrednovati, osim toga, njihova se razmjena većinom odvija na *over the counter* tržištu. Iako su kompleksnije, prednosti su koje imaju nad *vanilla* opcijama:

- lakše se prilagođavaju riziku pojedinca,
- bolje se adaptiraju riziku pada, odnosno rasta cijene dionice,
- ponekad su povoljnije.

3.2 Azijska opcija

Azijska je opcija jedna od najpopularnijih *path-dependent* opcija. Glavna je karakteristika azijske opcije da isplata u trenutku T ovisi o prosječnoj cijeni osnovne imovine tijekom unaprijed definiranog vremena života opcije i prethodno definiranom broju opservacija. Glavni je argument za povoljniju cijenu azijske opcije u odnosu na europsku činjenica da je prosječna cijena financijske imovine manje volatilna od same cijene u određenom trenutku. Nadalje, prosječne se cijene azijske opcije mogu računati koristeći aritmetičku ili geometrijsku sredinu. Budući da svaki investitor želi da mu kupovanje opcije bude što povoljnije, geometrijska je azijska opcija postala popularnija od aritmetičke azijske opcije jer joj je cijena niža. To objašnjava AG nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine, tj.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi, vidi [24, str. 115]. Prilikom računanja vrijednosti mi ćemo koristiti aritmetičku sredinu. Definirajmo azijsku *call* i *put* opciju.

Definicija 3.3. *Neka su cijene dionica modelirane geometrijskim Brownovim gibanjem,* $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$*, gdje je* t *vrijeme,* K *cijena izvršenja, a* T *vrijeme dospijeća opcije. Vrijednost se aritmetičke azijske put opcije definira kao:*

$$\Theta(S) = \Big(K - \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\Big)_+.$$

Vrijednost je aritmetičke azijske call opcije:

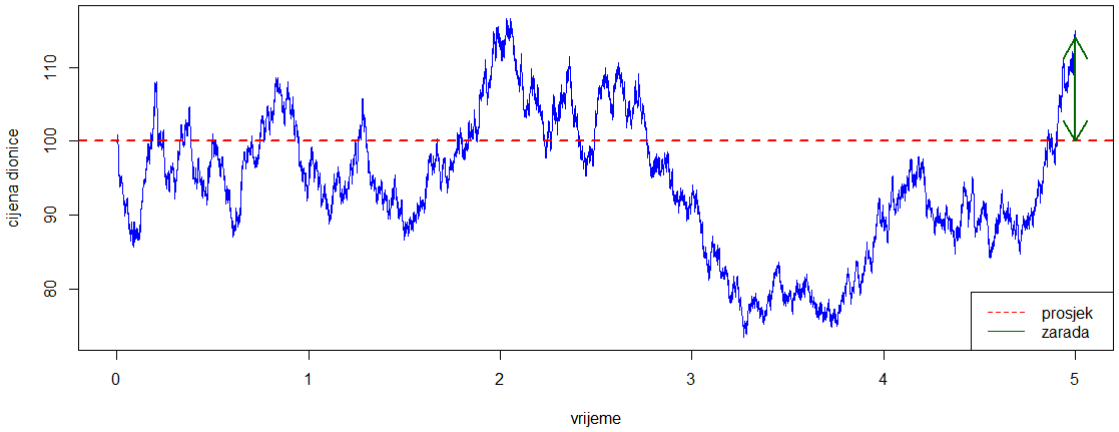
$$\kappa(S) = \Big(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K\Big)_+.$$

Vrijednost ćemo aritmetičke azijske *call* opcije u trenutku t označavati s $C^{K,a}(S_t, t)$, a azijske put opcije s $P^{K,a}(S_t, t)$. Razlikujemo četiri vrste azijskih opcija, čije su vrijednosti sljedeće:

- fiksna azijska *call* opcija: $(A_T - K)_+$,
- fiksna azijska *put* opcija: $(K - A_T)_+$,
- prosječna azijska *call* opcija: $(S_T - A_T)_+$,
- prosječna azijska *put* opcija: $(A_T - S_T)_+$,

pri čemu je $A_T = \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt$ Riemannov[22] integral.

[22] Georg Friedrich Bernhard Riemann (Breselenzu, 17. rujna 1826. – Selaski, 20. srpnja 1866.), njemački matematičar.



Slika 3.2: Trajektorija vrijednosti azijske opcije

Azijske su opcije nastale kako bi se onemogućile špekulacije europskim opcijama. Naime, kako su se opcije približavale vremenu dospijeća, špekulanti su manipulirali cijenom dionica da bi imali što veću zaradu. Karakteristika je aritmetičke azijske opcije da ne postoji analitički izraz za vrijednost opcije, stoga se vrijednost mora izračunavati numeričkim metodama. U ovom ćemo radu koristiti Monte Carlo metodu za vrednovanje azijske opcije.

U dokazu je sljedećih rezultata potrebna sljedeća lema.

Lema 3.1. *Neka je Q slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ takva da je $E(Q) \geq 1$, tada za svaki $m \in \mathbb{N}$ i $K > 0$ vrijedi:*

$$E\Big(\max\Big(\frac{1}{m} + \frac{m-1}{m}Q - K, 0\Big)\Big) \leq E\Big(\max\Big(Q - K, 0\Big)\Big).$$

Dokaz. Neka je $F(x)$ funkcija distribucije slučajne varijable $Q \geq 0$. Vrijedi

$$\frac{1}{m} + \frac{m-1}{m}Q - K \geq 0$$

ako i samo ako

$$Q \geq K_0 = \frac{mK - 1}{m-1}.$$

Razlikujemo dva slučaja, $K_0 \geq 1$ i $K_0 < 1$.

- $K_0 \geq 1$
  Budući da je $K_0 = \dfrac{mK-1}{m-1} \geq 1$ slijedi da je $K \geq 1$. Nadalje,

  $$E(\max(Q - K, 0)) = \int_K^\infty (x - K)dF(x).$$

  Budući da je $K \leq K_0$ slijedi

  $$\int_K^\infty (x - K)dF(x) \geq \int_{K_0}^\infty (x - K)dF(x). \tag{3.5}$$

Vrijedi sljedeće:

$$\frac{1}{m}+\frac{m-1}{m}Q = \frac{1+(m-1)Q}{m} = \frac{1-Q}{m}+Q. \tag{3.6}$$

Kako je $Q \geq 0$, slijedi $\frac{1}{m}+\frac{m-1}{m}Q \leq Q$. Tada nejednakost vrijedi i za svaku realizaciju slučajne varijable Q. Tada iz izraza (3.5) slijedi:

$$\int_{K_0}^{\infty}(x-K)dF(x) \geq \int_{K_0}^{\infty}\Big(\frac{1}{m}+\frac{m-1}{m}x-K\Big)dF(x) = E\Big(\max\Big(\frac{1}{m}+\frac{m-1}{m}Q-K,0\Big)\Big).$$

Konačno,

$$E(\max(Q-K,0)) \geq E\Big(\max\Big(\frac{1}{m}+\frac{m-1}{m}Q-K,0\Big)\Big).$$

- $K_0 < 1$
  Iz definicije $K_0 = \frac{Km-1}{m-1}$ slijedi da je također $K_0 < K < 1$.

$$E(\max(Q-K,0)) = \int_{K}^{\infty}(x-K)dF(x) \geq \int_{K_0}^{\infty}(x-K)dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-K)dF(x) - \int_{0}^{K_0}(x-K)dF(x).$$

  Zbog izraza (3.6) slijedi:

$$E(\max(Q-K,0)) \geq \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{m}+\frac{m-1}{m}x-K\Big)dF(x) - \int_{0}^{K_0}\Big(\frac{1}{m}+\frac{m-1}{m}x-K\Big)dF(x) = \int_{K_0}^{\infty}\Big(\frac{1}{m}+\frac{m-1}{m}x-K\Big)dF(x) = E\Big(\max\Big(\frac{1}{m}+\frac{m-1}{m}Q-K,0\Big)\Big).$$

I u ovom slučaju dobivamo

$$E(\max(Q-K,0)) \geq E\Big(\max\Big(\frac{1}{m}+\frac{m-1}{m}Q-K,0\Big)\Big).$$

□

Važna je karakteristika azijske *call* opcije činjenica da je cijena opcije u trenutku $t = 0$ niža nego cijena klasične europske *call* opcije. Iskažimo i dokažimo tu tvrdnju.

Teorem 3.1. *Neka je $C^{K,a}(S_t,t)$ vrijednost azijske call opcije i neka je $C^K(S_t,t)$ vrijednost europske call opcije u trenutku t. Tada vrijedi:*

$$C^{K,a}(S_t,t) \leq C^K(S_t,t).$$

U ovom ćemo dokazu koristiti oznake

$$S_t = S(t) \text{ i } B_t = B(t)$$

radi lakšeg razumijevanja.
Dokaz ćemo provesti tako što ćemo promatrati cijene u neprekidnom vremenu, diskretizirati ćemo geometrijsko Brownovo gibanje te pustiti n u beskonačno. Prije dokaza pogledajmo očekivanu vrijednost opcije u trenutku T:

$$E(S(T)) = e^{r(T-t)S(t)},$$

očito vrijedi

$$E\Big(S\Big(\frac{iT}{m}\Big)\Big) \leq E(S(T)), \ \textit{za i=0,1,...m.} \tag{3.7}$$

Iz (3.7) slijedi da je

$$E\Big(\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m} S\Big(\frac{iT}{m}\Big)\Big) \leq E\Big(\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m} S(T)\Big).$$

Više o nejednakostima vidi [14, str. 120]. Korištenjem prethodnih formula dobivamo sljedeće vrijednosti opcija:

$$C^K(S_t,t) = \max\Big(\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m} S(T) - K, 0\Big),$$

$$C^{K,a}(S_t,t) = \max\Big(\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m} S\Big(\frac{iT}{m}\Big) - K, 0\Big).$$

Prijeđimo na formalni dio dokaza.

Dokaz. Definirajmo povrat geometrijskog Brownovog gibanja na intervalu $\langle (i-1)T, iT\rangle$:

$$\alpha_i = \frac{S\Big(\frac{iT}{m}\Big)}{S\Big(\frac{(i-1)T}{m}\Big)},\ \alpha_0 = S(0). \tag{3.8}$$

Zbog svojstava eksponencijalne funkcije i Brownovog gibanja, α_i je modeliran sljedećom slučajnom varijablom:

$$\alpha_i = e^{\sigma(B(\frac{iT}{m})-B(\frac{(i-1)T}{m}))+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{T}{m}}. \tag{3.9}$$

Budući da je

$$E(S(t)) = S_0 e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t} E(e^{\sigma B(t)}),$$

te $\sigma B(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$ i $E(e^{\sigma B(t)}) = e^{\frac{\sigma t^2}{2}}$ slijedi da je $E(S(t)) = S(0)e^{\mu t}$. Konačno zaključujemo da je α_i lognormalno distribuirana slučajna varijabla s $E(\alpha_i) = e^{\frac{\mu T}{m}} \geq 1$. Iz definicije α_i očito je da $S(\frac{iT}{m})$ možemo zapisati na sljedeći način:

$$S\Big(\frac{iT}{m}\Big) = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_i,$$

tj. slijedi

$$S(T) = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_m.$$

Kako bismo pokazali tvrdnju teorema, dovoljno je pokazati da vrijedi

$$E\Big(\max\Big(\frac{\alpha_0 + \alpha_0\cdot\alpha_1 + \ldots + \alpha_0\cdot\ldots\cdot\alpha_m}{m+1} - K, 0\Big)\Big) \leq E(\max(\alpha_0\cdot\alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_m - K, 0)). \tag{3.10}$$

Za početak, pokažimo da izraz (3.10) zadovoljava lemu (3.1). Zapišimo lijevi dio izraza na drugi način:

$$\begin{aligned}
&E\Big(\max\Big(\frac{\alpha_0 + \alpha_0\cdot\alpha_1 + \ldots + \alpha_0\cdot\ldots\cdot\alpha_m}{m+1} - K, 0\Big)\Big)\\
&= E\Big(\max\Big(\Big(\frac{\alpha_0}{m+1} + \alpha_0\frac{\alpha_1}{m+1} + \cdots + \alpha_0\frac{\alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_m}{m+1}\Big) - K, 0\Big)\Big)\\
&= E\Big(\max\Big(\alpha_0\Big(\Big(\frac{1}{m+1} + \frac{\alpha_1}{m+1} + \cdots + \frac{\alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_m}{m+1}\Big) - \frac{K}{\alpha_0}\Big), 0\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Neka je $K' = \dfrac{K}{\alpha_0}$ konačno dobivamo sljedeće:

$$E\Big(\max\Big(\alpha_0\Big(\Big(\frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1} + \frac{\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \ldots + \alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_m}{m}\Big) - K'\Big), 0\Big)\Big).$$

Ako prethodni izraz uvrstimo u (3.10) dobivamo da je dovoljno dokazati:

$$E\Big(\max\Big(\frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1}\frac{\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \ldots + \alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_m}{m} - K', 0\Big)\Big) \leq E(\max(\alpha_1\cdot\alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_m - K', 0)).$$

Označimo s

$$Q = \frac{\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + ... + \alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_m}{m},$$

pri čemu je $E(Q) \geq 1$. Budući da su $\alpha_i,\ i = 0, 1, ..., m$, log-normalno distribuirane slučajne varijable i vrijedi

$$E((\alpha_1 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \cdots + \alpha_1 \cdots \alpha_m)/m) \geq 1,$$

možemo primijeniti lemu (3.1), slijedi:

$$\begin{aligned} E\Big(\Big(\frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1}\frac{\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + ... + \alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_m}{m} - K', 0\Big)\Big) \\ \leq E\Big(\frac{\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + ... + \alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_m}{m} - K', 0\Big)\Big) \\ \leq E(\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + ... + \alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_m - K', 0), \end{aligned} \tag{3.11}$$

pri čemu se nejednakost (3.11) može izvesti pomoću indukcije. Time je dokazana tvrdnja teorema.

□

Prethodni teorem objašnjava razlog veće popularnosti azijskih opcija u odnosu na europske *call* i *put* opcije. U sljedećem ćemo se dijelu baviti *barrier* opcijama koje su, kao i azijske, bliske europskim opcijama, ali dovoljno različite da im vrijednost bude niža te da samim time budu zanimljivije kupcima opcija.

3.3 Barrier opcija

Glavno je pitanje koje muči dioničare danas, a tako je bilo i kroz povijest, hoće li cijena dionice ostati ispod ili iznad određene razine unutar određenog vremenskog intervala. *Barrier* opcije najstarije su egzotične opcije, počele su se prodavati 1967. godine na američkom tržištu. *Barrier* opcije nazivaju se još i *trigger* opcije zato što premija ovisi o tome je li cijena dionice na koju je *barrier* opcija vezana dosegnula prethodno definiranu barijeru do trenutka dospijeća *barrier* opcije. Ovisnost o trajektoriji je slaba jer je dovoljno znati je li cijena dionice postigla određenu razinu ili ne, svrstavamo ih u "slabe" *path-dependent* opcije. Ako cijena dionice dotakne barijeru, onda vlasnik *barrier* opcije dobiva europsku opciju. S druge strane, ako cijena dionice ne dotakne barijeru, onda vlasnik opcije dobiva rabat. Rabat je predefinirani iznos koji dobiva vlasnik opcije ako opcija postane bezvrijedna. Prethodno je opisana opcija vrsta *barrier* opcije, naziva se *knock in barrier* opcija. S obzirom na postavljenu barijeru L, *barrier* opcija može biti *knocked in* ili *knocked out* što ovisi o tome je li barijera L postignuta od dolje *(up)* ili od gore *(down)*. Točnije, razlikujemo četiri vrste *barrier* opcija:

- *up-and-in*,
- *up-and-out*,
- *down-and-in*,
- *down-and-out*.

Prva je *barrier* opcija koju ćemo definirati u ovom poglavlju *down-and-out call* opcija.

Definicija 3.4. *Neka su cijene dionica modelirane geometrijskim Brownovim gibanjem,* $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$*, gdje je* t *vrijeme,* K *cijena izvršenja i neka je*

$$\tau_L = \inf\{u > 0; S_u \leq L\}$$

trenutak u kojem je cijena dionice dotaknula barijeru L*. Tada je vrijednost down-and-out call opcije:*

$$DOC_{K,L} = E\Big(e^{-rT}(S_T - K)_+ 1_{\{\min_{0 \leq \tau_L < T}(S_t > L)\}}\Big).$$

S obzirom na prethodnu definiciju slijedi:

- *Out barrier* opcija bit će *knocked out* ako cijena dionice dotakne barijeru L, u tom je slučaju vrijednost opcije:

  $$DOC_{K,L} = e^{-r\tau_L} R, \ \ za\ \tau_L < T,$$

  pri čemu je R rabat.
  Ako barijera L nije dotaknuta, vrijednost je *call down-and-out barrier* opcije:

  $$DOC_{K,L} = e^{-rT}(S_T - K)_+, \ \ za\ \tau_L \geq T.$$

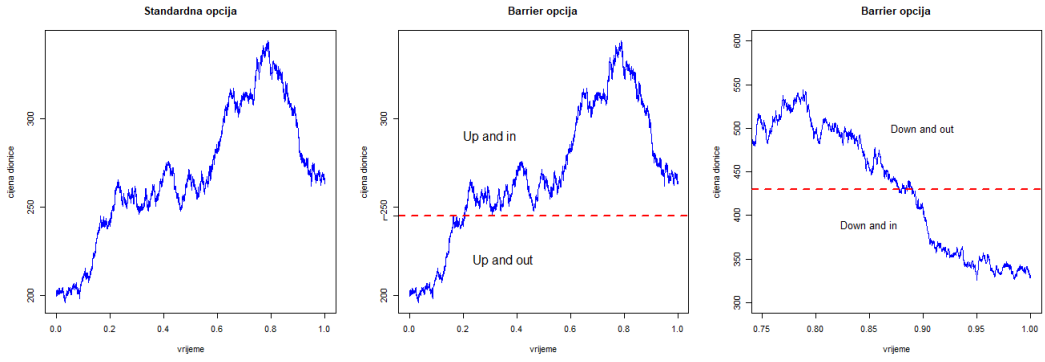
- *In barrier* opcije nemaju vrijednost ako vrijednost dionice ne dotakne barijeru L prije isteka opcije, tj.

  $$DIC_{K,L} = 0, \ \ za\ S_t < L.$$

  Ako je cijena dionice dotakne barijeru L, onda je vrijednost *down-and-in barrier* opcije jednaka pripadnoj europskoj opciji, tj.

  $$DIC_{K,L} = e^{-rT} C^K(S_T, T) = e^{-rT}(S_T - K)_+.$$

Veza je između *vanilla* i *barrier* opcija prikazana na Slici (3.3). Na lijevoj je slici ilustriran put standardne *vanilla* opcije, na slici u sredini odnos *up-and-in* i *up-and-out barrier* opcije, te na desnoj slici *down-and-out* i *down-and-in barrier* opcije.



Slika 3.3: Trajektorija vrijednosti *barrier* opcije

Promotrimo *barrier up* opciju. Ako posjedujemo *up-and-out* opciju ona će imati vrijednost standardne *vanilla* opcije dok god se cijena dionice nalazi ispod barijere L. Kad cijena dionice dotakne barijeru, opcija će postati bezvrijedna. Međutim, ako u tom trenutku posjedujemo *up-and-in barrier* opciju, ona će nastaviti vrijediti kao standardna opcija. Iz ovog razmatranja slijedi $in + out = vanilla$, tj. za prethodno definirane opcije vrijedi:

$$DOC_{K,L} + DIC_{K,L} = C^K(S_T, T), \tag{3.12}$$

ako je rabat jednak nula, a $C^K(S_T, T)$ je vrijednost europske *call* opcije u trenutku $t = T$. Zbog toga će *barrier* opcije biti uvijek povoljnije nego *vanilla* opcije. Kupac opcije mora paziti na rizik do barijere tijekom života opcije, za razliku od *vanilla* opcija gdje mu je rizik bitan kroz cijeli život opcije.

Ako su kamatna stopa r i volatilnost σ konstantne, vrijednost *barrier down-and-out call* opcije iznosi:

$$DOC_{K,L} = C^K(S_t, t) - C^K(L^2, t)\left(\frac{S_t}{L}\right)^{(1-2r)/2\sigma^2}.$$

Budući da za *barrier* opcije vrijedi izraz (3.12) možemo izračunati vrijednost *barrier down-and-in* opcije $DIC_{K,L}$ u trenutku t.

$$\begin{aligned} DOC_{K,L} + DIC_{K,L} &= C^K(S_t, t) \\ DIC_{K,L} &= C^K(S_t, t) - DOC_{K,L} \\ &= C^K(S_t, t) - \left(C^K(S_t, t) - C^K(L^2, t)\left(\frac{S_t}{L}\right)^{(1-2r)/2\sigma^2}\right) \\ DIC_{K,L} &= C^K(L^2, t)\left(\frac{S_t}{L}\right)^{(1-2r)/2\sigma^2}. \end{aligned}$$

Dokazi za analitičke vrijednosti *barrier* opcija možemo pogledati u [10, str. 152].

Investitor kupi opciju na intervalu $[0, T]$. Nakon što ju iskoristi u trenutku $t = T$, on zna povijesno kretanje cijena imovine te mu je jasno što je trebao učiniti u trenutku $t = 0$ kako bi njegov portfelj imao što veću zaradu. On sa žaljenjem gleda unatrag *(look back)*, zato što nije bolje predvidio budućnost, nije kupio dionicu dok joj je cijena bila niža te ju prodao kad joj je cijena narasla. Bilo je praktično investitorima razviti *lookback* opciju.

3.4 Lookback opcija

Lookback se opcija razlikuje od dviju prethodno predstavljenih opcija jer premija ovisi o maksimalnoj i minimalnoj vrijednosti rizične financijske imovine te o vrijednosti financijske imovine u trenutku isplate premije. *Lookback* su opcije postale popularne jer uključuju povijest cijena financijske imovine te na taj način štite investitora. Možemo reći kako *lookback call* opcija daje pravo vlasniku opcije kupiti dionicu po najnižoj cijeni, dok *lookback put* opcija daje pravo prodaje dionice po najvišoj cijeni tijekom *lookback* perioda. Postoji nekoliko vrsta *lookback* opcija: fiksna, plutajuća *(floating)*, parcijalna, američka, itd. Možemo reći da *floating lookback* opcije nude, u kontekstu do sada obrađenih opcija, najbolju zaštitu od rizika pada ili rasta cijene dionice, osim toga imaju i najveće premije. Zbog prethodno navedena dvaju razloga, cijena je *lookback* opcija visoka, a zbog visoke cijene one nisu popularne među investitorima.

Neka su cijene financijske imovine opisane geometrijskim Brownovim gibanjem $(S_t, t \geq 0)$

$$S_t = S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t},$$

$[0, T]$ vrijeme života opcije, a T je trenutak izvršenja opcije. U ovom dijelu rada, srednja stopa povrata μ jednaka je intenzitetu kamate r zbog jednostavnosti dobivenih rezultata. Označimo s

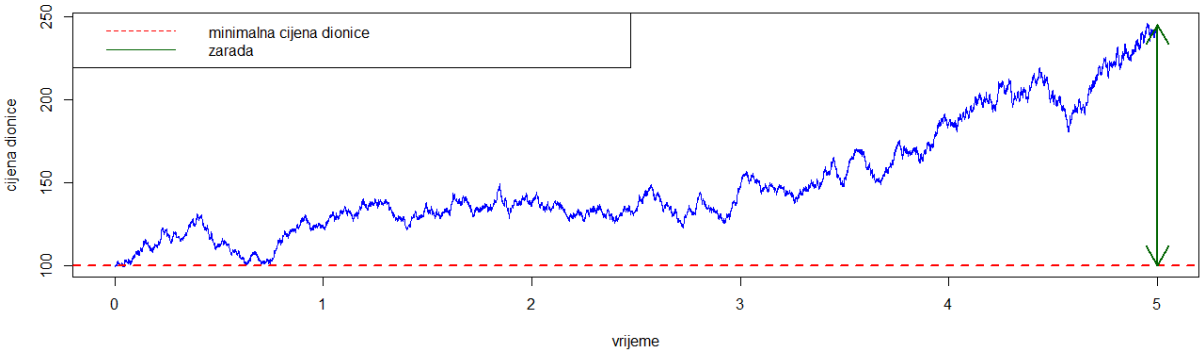
$$M_0^t = \max_{0\leq s\leq t} S_s \text{ i } m_0^t = \min_{0\leq s\leq t} S_s,$$

za $t \in [0, T]$. Budući da je uvijek $S_T \geq m_0^T$ i $S_T \leq M_0^T$, vlasnik će uvijek iskoristiti *lookback* opciju. Standardna je formula za vrijednost *floating lookback call* opciju:

$$LC(T) = S_T - m_0^T, \tag{3.13}$$

s druge je strane vrijednost *floating lookback put*:

$$LP(T) = M_0^T - S_T. \tag{3.14}$$



Slika 3.4: Trajektorija vrijednosti *lookback* opcije

Važno je napomenuti da m_0^T i M_0^T nisu fiksni, oni predstavljaju ekstremne vrijednosti dionice tijekom života opcije. *Lookback call* i *put* opcije definirane u (3.13) i (3.14) predstavljaju najveću moguću premiju *call* i *put* opcije u trenutku T baziranu na povijesnim vrijednostima dionice tijekom života opcije. Kako bismo lakše vrednovali opciju, iskoristit ćemo Girsanovljev teorem (vidi [21, Teorem 6.4]) koji govori o zamjeni vjerojatnosne mjere i odgovarajućoj transformaciji vjerojatnosnog prostora. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}(t), P)$ vjerojatnosni prostor na kojem je definirano geometrijsko Brownovo gibanje S_t, pri čemu je $\mathcal{F}(t)$ σ-algebra generirana slučajnim varijablama S_s, gdje je $0 \leq s < t$. Vrijednost *lookback call* opcije u trenutku $t \in [0, T]$ iznosi:

$$\begin{aligned} LC(t) &= e^{-r(T-t)} E(S_T - m_0^T | \mathcal{F}(t)) \\ &= e^{-r(T-t)} E(S_T | \mathcal{F}(t)) - e^{-r(T-t)} E(m_0^T | \mathcal{F}(t)). \end{aligned}$$

Budući da je S_t martingal dobivamo

$$\begin{aligned} LC(t) &= e^{rt} E(e^{-rT} S_T | \mathcal{F}(t)) - e^{-r(T-t)} E(m_0^T | \mathcal{F}(t)) \\ &= e^{rt} e^{-rt} S_t - e^{-r(T-t)} E(m_0^T | \mathcal{F}(t)) \\ &= S_t - e^{-r(T-t)} E(m_0^T | \mathcal{F}(t)). \end{aligned}$$

Sljedeće ćemo oznake koristiti prilikom vrednovanja *lookback call* opcije.

$$\begin{aligned} X_t &= \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t, \\ Y_t &= \ln\left(\frac{M_t^T}{S_t}\right) = \max_{t \leq s \leq T} X_s, \\ y_t &= \ln\left(\frac{m_t^T}{S_t}\right) = \min_{t \leq s \leq T} X_s. \end{aligned}$$

Osim prethodnih oznaka, iskažimo leme koje ćemo koristiti prilikom vrednovanja *lookback call* opcije. Dodatno, označimo s $\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2$ i neka je $\Phi(x)$ funkcija distribucije standardne normalne slučajne varijable $\mathcal{N}(0, 1)$.

Lema 3.2. *Neka je $y \geq 0$. Tada*

$$P(Y_t \leq y) = \Phi\left(\frac{y - \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-y - \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Lema 3.3. *Neka je $y \leq 0$. Tada*

$$P(y_t \geq y) = \Phi\left(\frac{-y + \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{y + \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Prikažimo na koji se način može dobiti analitički izraz za vrijednost *floating lookback call* opcije:

$$\begin{aligned} LC(t) &= e^{-r(T-t)}E(S_T - \min(m_0^t, m_t^T)) \\ &= e^{-r(T-t)}E((S_T - m_0^t) + \max(m_0^t - m_t^T, 0)) \\ &= e^{-r(T-t)}E(S_T) - e^{-r(T-t)}E(m_0^t) + e^{-r(T-t)}E(\max(m_0^t - m_t^T, 0)) \\ &= S_t - e^{-r(T-t)}m_0^t + e^{-r(T-t)}E(\max(m_0^t - m_t^T, 0)). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Definiramo funkciju

$$h(S_t; T-t; m_0^t) = e^{-r(T-t)}E(\max(m_0^t - m_t^T, 0)). \tag{3.16}$$

Kako bismo lakše vrednovali opciju, izračunajmo prvo vrijednost funkcije u trenutku t definirane u izrazu (3.16):

$$\begin{aligned} h(S_t; T-t; m_0^t) &= e^{-r(T-t)}E(\max(m_0^t - m_t^T, 0)) \\ &= e^{-r(T-t)} \int_0^\infty P(m_0^t - m_t^T \geq x)dx. \end{aligned}$$

Budući da tražimo da minimum cijene dionice na intervalima $[0,t]$ i $[t,T]$, onda će za m_0^t i m_T^t uvijek vrijediti $0 \leq max(m_0^t - m_t^T, 0) \leq m_0^t$, stoga slijedi:

$$\begin{aligned} h(S_t; T-t; m_0^t) &= e^{-r(T-t)} \int_0^{m_0^t} P(m_0^t - m_t^T \geq x)dx \\ &= e^{-r(T-t)} \int_0^{m_0^t} P(m_t^T \leq m_0^t - x)dx \\ \text{neka je } z = m_0^t - x& \\ &= -e^{-r(T-t)} \int_{m_0^t}^0 P(m_t^T \leq z)dz \\ &= e^{-r(T-t)} \int_0^{m_0^t} P(m_t^T \leq z)dz \\ &= e^{-r(T-t)} \int_0^{m_0^t} P\left(\ln \frac{m_t^T}{S_t} \leq \ln \frac{z}{S_t}\right) dz \\ \text{nadalje, } y = \ln \frac{z}{S_t} \text{ i } z = S_t e^y& \\ &= e^{-r(T-t)} \int_0^{\ln \frac{m_0^t}{S_t}} S_t e^y P(y_t \leq y)dy. \end{aligned}$$

Korištenjem prethodno iskazanih lema slijedi:

$$h(S_t;T-t;m_0^t)=e^{-r(T-t)}\int_0^{\ln\frac{m_0^t}{S_t}} S_te^y\left(\Phi\left(\frac{y-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)+e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}}\Phi\left(\frac{y+\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right)dy.$$

Neka je

$$d=\frac{\ln\frac{S_t}{m_0^t}+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Tada je izraz za funkciju $h(S_t;T-t;m_0^t)$ sljedeći:

$$\begin{aligned}h(S_t;T-t;m_0^t)=&-S_t\Phi(-d)+e^{-r(T-t)}m_0^t\Phi(-d+\sigma\sqrt{T-t})\\&+e^{-r(T-t)}\frac{\sigma^2}{2r}S_t\left(-e^{r(T-t)}\Phi(-d)+\left(\frac{S_t}{m_t^T}\right)^{\frac{-2r}{\sigma^2}}\Phi\left(-d+\frac{2r}{\sigma}\sqrt{T-t}\right)\right).\end{aligned}\tag{3.17}$$

Sada možemo do kraja izračunati izraz (3.15) za *floating lookback call* opciju.

$$\begin{aligned}LC(t)&=S_t-e^{-r(T-t)}m_0^t-S_t\Phi(-d)+e^{-r(T-t)}m_0^t\Phi(-d+\sigma\sqrt{T-t})\\&\quad+e^{-r(T-t)}\frac{\sigma^2}{2r}S_t\left(-e^{r(T-t)}\Phi(-d)+\left(\frac{S_t}{m_t^T}\right)^{\frac{-2r}{\sigma^2}}\Phi\left(-d+\frac{2r}{\sigma}\sqrt{T-t}\right)\right)\\&=S_t(1-\Phi(-d))-e^{-r(T-t)}m_0^t(1-\Phi(-d+\sigma\sqrt{T-t}))\\&\quad+e^{-r(T-t)}\frac{\sigma^2}{2r}S_t\left(-e^{r(T-t)}\Phi(-d)+\left(\frac{S_t}{m_t^T}\right)^{\frac{-2r}{\sigma^2}}\Phi\left(-d+\frac{2r}{\sigma}\sqrt{T-t}\right)\right)\\&=S_t\Phi(d)-e^{-r(T-t)}m_0^t\Phi(d-\sigma\sqrt{T-t})\\&\quad+e^{-r(T-t)}\frac{\sigma^2}{2r}S_t\left(\left(\frac{S_t}{m_t^T}\right)^{\frac{-2r}{\sigma^2}}\Phi\left(-d+\frac{2r}{\sigma}\sqrt{T-t}\right)-e^{r(T-t)}\Phi(-d)\right).\end{aligned}$$

Na sličan se način može izračunati analitička formula za *floating lookback put* opciju, vidi [4, str. 266].

$$\begin{aligned}LP(t)&=e^{-r(T-t)}E(\max(M_0^t,M_t^T)-S_T)\\&=e^{-r(T-t)}E(\max(M_t^T-M_0^t,0)-(S_T-M_0^t)\\&=h(S_t;T-t;M_0^t)-(S_T-M_0^t).\end{aligned}$$

Iz prethodnih smo razmatranja svake od opcija mogli uvidjeti kako raznim trenutcima odgovaraju razne opcije, tj. zadatak je investitora odabrati najbolju kako bi se što bolje zaštitio. U sljedećem ćemo poglavlju pogledati na simuliranim primjerima kako koristiti opcije, te koje su nearbitražne cijene opcija.

Poglavlje 4

4 Vrednovanje egzotičnih opcija

Ovo će se poglavlje baviti vrednovanjem prethodno objašnjenih egzotičnih opcija. Prilikom vrednovanja pretpostavit ćemo da cijene dionica prate geometrijsko Brownovo gibanje:

$$S_t = S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t}.$$

Glavni je cilj poglavlja uočavanje razlika u cijenama opcija, stoga ćemo koristiti jednake parametre prilikom vrednovanja svake od opcija. Za početak, definirajmo oznake:

- S_0 cijena dionice u trenutku $t = 0$,
- K cijena izvršenja,
- σ volatilnost,
- T trenutak izvršenja opcije,
- N broj podintervala na $[0, T]$, gdje je $[0, T]$ vrijeme života opcije,
- r neprekidna godišnja kamatna stopa,
- M broj Monte Carlo simulacija.

Za vrednovanje je opcija korišten softver Octave.

4.1 Call opcije

Ovo će se poglavlje baviti usporedbom cijena azijske, *barrier* i *lookback call* opcije s obzirom na europsku *call* opciju. Iako postoji analitička formula za izračunavanje europske *call* opcije, cijenu ćemo opcije također procijeniti Monte Carlo metodama. Prvo ćemo izračunati vrijednost europske *call* opcije. Parametri su sljedeći: $S_0 = 150$, $K = \{130, 140, 150, 160, 170\}$, $\sigma = 0.2$, $T = 2$, $N = 100$, $r = 0.05$, $M = 10000$. Jednake ćemo parametre koristiti i prilikom vrednovanja ostalih opcija kako bismo lakše uočili razlike u cijenama različitih *call* opcija. Za početak, objasnimo oznake koje ćemo koristiti u tablicama:

- ECO predstavlja dobivenu nearbitražnu vrijednost europske *call* opcije Monte Carlo metodama,
- SD predstavlja standardnu devijaciju uzorka niza dobivenih vrijednosti opcije u $t = 0$,
- 95%tni pouzdani interval označava 95%tni pouzdani interval za očekivanu cijenu; računa se kao $PI = [\text{cijena opcije} - 1.96 \cdot SD, \text{cijena opcije} + 1.96 \cdot SD]$.

Iste oznake koristimo u svim budućim tablicama.
Korištenjem Monte Carlo metode dobivamo sljedeće vrijednosti europske *call* opcije u $t = 0$:

K	ECO	SD (ECO)	95%tni pouzdani interval (ECO)
130	36.704	0.385	[35.948,37.460]
140	30.296	0.368	[29.573,31.019]
150	24.020	0.336	[23.362,24.679]
160	19.311	0.311	[18.702,19.920]
170	14.983	0.359	[14.439,15.527]

Tablica 4.1: Vrednovanje europske *call* opcije Monte Carlo metodom

U nastavku računamo vrijednost azijske *call* opcije za prethodno navedene parametre. Budući da smo prethodno dokazali teorem (3.1) očekujemo da će azijska *call* opcija biti povoljnija za investitora od europske *call* opcije. Vrijednosti su sljedeće:

K	ACO	SD (ACO)	95%tni pouzdani interval (ACO)	ECO-ACO
130	26.299	0.218	[25.870,26.727]	10.405
140	19.118	0.202	[18.721, 19.514]	11.178
150	12.847	0.176	[12.502,13.193]	11.173
160	8.425	0.147	[8.136,8.714]	10.886
170	5.315	0.121	[5.077,5.553]	9.668

Tablica 4.2: Vrednovanje azijske *call* opcije Monte Carlo metodom

Numerički su rezultati u skladu s prethodno dokazanim teoremom (3.1). Osim toga, primjećujemo manju standardnu devijaciju Monte Carlo metode prilikom izračunavanja nearbitražne vrijednosti azijske *call* opcije nego kod izračunavanja vrijednosti europske *call* opcije. Također, razlika između cijena opcija u odnosu na povećanje cijene izvršenja K nije značajna.

Nadalje, izračunat ćemo nearbitražnu vrijednost *barrier* opcije, koja zahtijeva još jedan uvjet - barijeru, u ovom slučaju $L = 100$. Prisjetimo se, *down and out barrier* opcija ima vrijednost ako je cijena dionice iznad prethodno definirane barijere L. Ako je cijena dionice $S_t < L$, opcija postaje bezvrijedna. Predefinirani rabat *barrier* opcije u našem slučaju iznosi 0. Budući da je ovdje $L = 100$, investitor će kupiti dionicu po njezinoj stvarnoj cijeni u trenutku t ako je $S_t < 100$.
Vrijednosti su *barrier* opcije sljedeće:

K	BCO	SD (BCO)	95%tni pouzdani interval (BCO)	ECO-BCO
130	35.472	0.384	[34.719,36.225]	1.232
140	30.139	0.368	[29.415, 30.862]	0.157
150	23.935	0.332	[23.284,24.585]	0.085
160	18.869	0.308	[18.265,19.473]	0.442
170	15.491	0.286	[14.931,16.052]	-0.505

Tablica 4.3: Vrednovanje *barrier call* opcije Monte Carlo metodom, $L = 100$

Iz prethodne je tablice jasno uočljivo da *barrier* opcija nije značajno povoljnija za investitora, primjećujemo izrazito male razlike u odnosu na europsku *call* opciju. Ovo je očekivano, s obzirom na to da smo prethodno spomenuli kako se *barrier* opcija ponaša kao europska opcija ako cijena dionice nije prešla prethodno definiranu barijeru L, što se kod nas nije dogodilo, pa pogledajmo što će se dogoditi ako postavimo barijeru na $L = 140$.

K	BCO	SD (BCO)	95%tni pouzdani interval (BCO)
150	0.00872	0.002	[0.004,0.012]
160	0.058	0.007	[0.0016,0.0128]
170	0.158	0.015	[0.128,0.187]

Tablica 4.4: Vrednovanje *barrier call* opcije Monte Carlo metodom, $L = 140$

Budući da je $L = 140$, vrijednost je *barrier* opcije za $K = \{130, 140\}$ jednaka 0, jer $K \leq L$. Vrijednosti za $K = \{150, 160, 170\}$ su vrlo male, zaključujemo da *barrier* opcija ima nisku vrijednost ako se cijena dionice kreće oko vrijednosti barijere L.

Jednake ćemo vrijednosti parametara iskoristiti i prilikom vrednovanja *lookback* opcije. Prisjetimo se, *lookback* opcije imaju najveće premije, međutim i najskuplje su. Pogledajmo hoće li cijene značajno odstupati od cijena ostalih *call* opcija.
Vrednovat ćemo fiksnu *lookback call* opciju definiranu na sljedeći način:

$$LC(T) = max(M_0^T - K, 0),$$

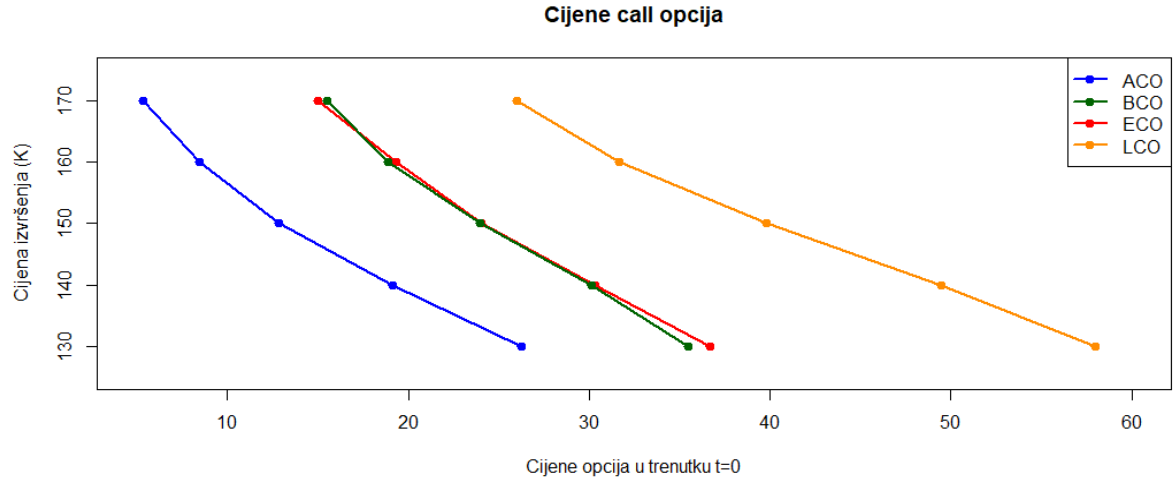
pri čemu je $M_0^T = \max_{0 \leq s \leq T} S_s$. Možemo reći da fiksna *lookback* opcija djeluje kao *call* opcija na maksimalnu realiziranu cijenu dionice.

Cijene fiksne *lookback* opcije u trenutku $t = 0$ su:

K	LCO	SD (LCO)	95%tni pouzdani interval (LCO)	ECO-LCO
130	57.994	0.347	[57.312,58.676]	-21.29
140	49.442	0.350	[48.755, 50.129]	-19.146
150	39.789	0.343	[39.116,40.462]	-15.769
160	31.669	0.344	[30.994,32.344]	-12.358
170	25.286	0.322	[24.655,25.917]	-10.303

Tablica 4.5: Vrednovanje *lookback call* opcije Monte Carlo metodom

Očekivano, *lookback* je opcija skuplja od europske *call* opcije. Primijetimo, razlika je najveća ako je cijena izvršenja K manja od $S_0 = 150$, u našem slučaju za $K = 130$, razlika između *lookback call* opcije i europske *call* opcije iznosi -21.29, dok za $K = 140$ razlika iznosi -19.146.
Zaključujemo, azijska je *call* opcija najpovoljnija za investitora, europska i *barrier call* opcija imaju približno jednake cijene, dok je *lookback* najskuplja. Na sljedećem će nam grafu biti jasniji odnos prethodno dobivenih cijena. *Barrier* se opcija navedena na grafu odnosi na *barrier* opciju s barijerom $L = 100$.



Slika 4.1: Cijene *call* opcija u trenutku $t = 0$

4.2 Put opcije

Ovo će se poglavlje baviti analizom razlika cijena *put* opcija. Pokušat ćemo odgovoriti na pitanje koju se *put* opciju najviše isplati kupiti investitoru ako želi prodati svoju dionicu po određenoj cijeni. Koristit ćemo sljedeće parametre: $S_0 = 150$, $K = \{130, 140, 150, 160, 170\}$, $\sigma = 0.2$, $T = 2$, $N = 100$, $r = 0.05$, $M = 10000$. Za početak, vrednujmo europsku *put* opciju Monte Carlo metodom.

K	EPO	SD (EPO)	95%tni pouzdani interval (EPO)
130	5.929	0.115	[5.704,6.154]
140	9.277	0.147	[8.987, 9.567]
150	13.029	0.179	[12.677,13.381]
160	18.689	0.212	[18.272,19.107]
170	24.030	0.244	[23.552,24.508]

Tablica 4.6: Vrednovanje europske *put* opcije Monte Carlo metodom

Započnimo s vrednovanjem azijske *put* opcije. Koristit ćemo jednake parametre kao i prilikom vrednovanja europske *put* opcije. Očekujemo manju cijenu azijske *put* opcije u odnosu na europsku *put* opciju.

K	APO	SD (APO)	95%tni pouzdani interval (APO)	EPO-APO
130	2.545	0.058	[2.430,2.661]	3.384
140	5.521	0.089	[5.346, 5.695]	3.721
150	10.033	0.122	[9.794,10.272]	2.996
160	15.983	0.152	[15.685,16.281]	2.706
170	22.838	0.174	[22.49,23.179]	1.192

Tablica 4.7: Vrednovanje azijske *put* opcije Monte Carlo metodom

Vrijednosti su azijske *put* opcije manje nego vrijednosti europske *put* opcije, međutim razlike nisu toliko značajne kao u primjeru azijske *call* i europske *call* opcije.

U nastavku izračunat ćemo vrijednost *barrier* opcije. Budući da se radi o *barrier* opciji dodali smo dodatan uvjet - barijeru, $L = 100$. Prisjetimo se, $S_0 = 150$. *Barrier* opcija gubi vrijednost ako cijena dionice padne ispod predefinirane barijere, tj. u našem slučaju ako cijena dionice bude manja od 100. Ova se vrsta *barrier* opcije naziva *down and out put* opcija.

Vrijednosti su *barrier put* opcije sljedeće:

K	BPO	SD (BPO)	95%tni pouzdani interval (BPO)	EPO-BPO
130	1.752	0.047	[1.659,1.846]	4.177
140	3.514	0.076	[3.365, 3.663]	5.763
150	6.414	0.11	[6.19,6.63]	6.615
160	10.134	0.145	[9.849,10.419]	8.555
170	14.375	0.181	[14.021,14.729]	9.655

Tablica 4.8: Vrednovanje *barrier put* opcije Monte Carlo metodom, $L = 100$

Iz prethodne tablice primjećujemo puno veće razlike europske i *barrier put* opcije nego europske i *barrier call* opcije. Nadalje, razlika između *put* opcija raste s porastom cijene izvršenja K, dok kod vrednovanja *call* opcija cijena opcije padala s obzirom na povećanje cijene izvršenja K.

U prethodnom smo poglavlju vrednovali fiksnu *lookback call* opciju, u ovom dijelu ćemo vrednovati fiksnu *lookback put* opciju koja je definirana na sljedeći način:

$$LP(T) = max(K - m_0^T, 0),$$

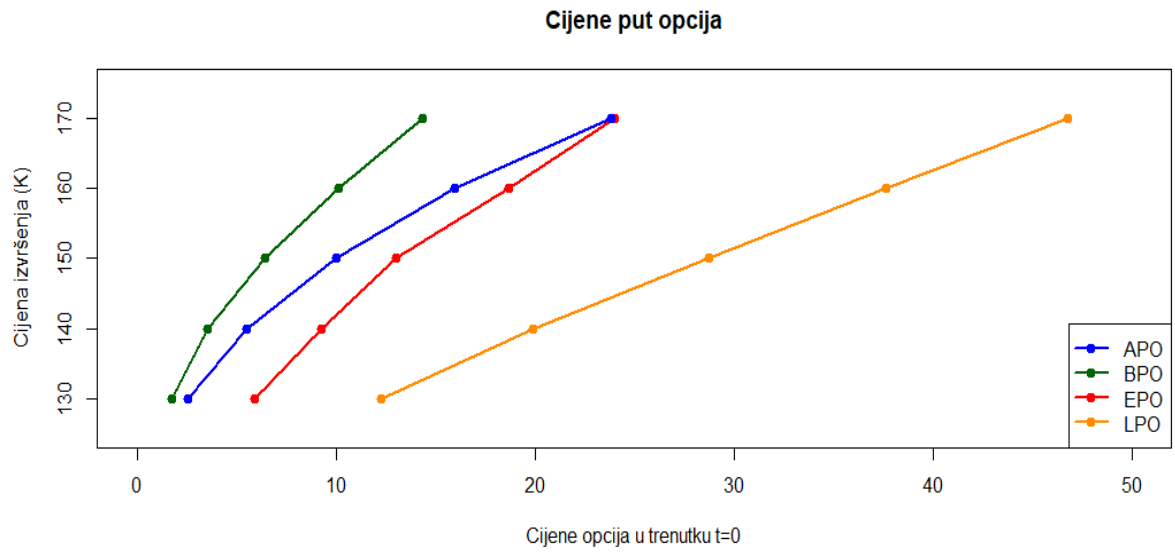
pri čemu je $m_0^T = \min_{0 \leq s \leq T} S_s$. *Lookback put* fiksna opcija je *lookback* opcija primijenjena na minimalnu realiziranu cijenu dionice tijekom *lookback* trajanja opcije. Očekujemo da će *lookback put* opcija biti najskuplja za investitora.
Vrijednosti *lookback put* opcije su:

K	LPO	SD (LPO)	95%tni pouzdani interval (LPO)	EPO-LPO
130	12.398	0.137	[12.129,12.668]	-6.469
140	19.879	0.156	[19.573, 20.184]	-10.602
150	28.731	0.15	[28.431,29.032]	-15.702
160	37.666	0.154	[37.363,37.967]	-18.977
170	46.798	0.153	[46.496,47.099]	-25.768

Tablica 4.9: Vrednovanje *lookback put* opcije Monte Carlo metodom

Iz prethodne tablice uočavamo velika odstupanja *lookback put* opcije od europske *call* opcije, štoviše razlika se između opcije povećava se s povećanjem cijene izvršenja K. Od svih izračunatih opcija, ovo je slučaj u kojem primjećujemo najveće razlike. Zaključujemo, investitor će najviše platiti *lookback* opciju ako želi prodati dionicu u budućnosti po cijeni izvršenja K.

Odnos je prethodno vrednovanih *put* opcija vidljiv iz sljedećeg grafa.



Slika 4.2: Cijene *put* opcija u trenutku $t = 0$

Nakon provedenih simulacija zaključujemo da je *barrier put* opcija najpovoljnija za investitora, azijska *put* opcija nešto je povoljnija od europske *put* opcije. *Lookback put* opcija, kao i *lookback call*, za investitora je najskuplja.

Literatura

[1] L. BACHELIER, *Théorie de la Spéculation, Annales Scientifique de l'École Normale Supérieure*, 3e série 17(1900), 21-86.

[2] J. BAZ, G. CHACKO, *Financial Derivatives, Pricing, Applications and Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[3] F. BLACK, M. SCHOLES, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy 81(1973), 637-654.

[4] N. BINGHAM, R. KIESEL, *Risk-Neutral Valuation, Pricing and Hedging of Financial Derivatives*, Springer-Verlag, London, 2004.

[5] P. BOYLE, *Options: A Monte Carlo Approach*, Journal of Financial Economics 4(1977), 323-338.

[6] A. CONZE, VISWANATHAN, *Path Dependent Options: The Case of Lookback Options*, The Journal of Finance 46(1991), 1893-1907.

[7] J. COX, S. ROSS, M. RUBINSTEIN, *Option pricing: A simplified approach*, The Journal of Financial Economics 7(1979), 229-263.

[8] R. DURRETT, *Essentials of Stochastic Processes*, Springer, North Carolina, 2016.

[9] P. GLASSERMAN, *Monte Carlo Methods in Financial Engeneering*, Springer, New York, 2003.

[10] E. HAUG, *The Complete Guide To Option Pricing Formulas*, McGraw-Hill, New York, 2007.

[11] J.C. HULL, *Options, Futures and Other Derivatives*, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2009.

[12] S. IACUS, *Simulation and Inference for Stohastic Differential Equations With R Examples*, Springer, New York, 2008.

[13] J. KALLSEN, *Computational Finance*, Lecture Notes, Christian-Albrechts-Universität, Kiel, 2016.

[14] A. KEMNA, A. VORST, *A pricing method for options based on average asset values*, Journal of Banking and Finance 14(1990), 113-129.

[15] R. MERTON, *Theory of Rational Option Pricing*, The Bell Journal of Economics and Management Science 4(1973), 141-183.

[16] T. MIKOSCH, *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ld., Singapur, 2000.

[17] K. NAGEL, M. SCHRECKENBERG, *A cellular automaton model for freeway traffic*, Journal de Physique I, EDP Sciences 2(1992), 2221-2229.

[18] A. OWEN, *Monte Carlo theory, methods and examples*, University of Stanford, Stanford, 2013.

[19] N. SARAPA, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 1986.

[20] M. STOUT, *Numerical Pricing of Equity Barrier Options with Local Volatility*, Delft University of Technology, Delft, 2014.

[21] Z. VONDRAČEK, *Financijsko modeliranje*, Predavanja, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2008.

[22] N. WIENER, *Differential space*, Journal of Mathematical Physics 2(1923), 131-174.

[23] H. ZHANG, *Pricing Asian Options using Monte Carlo Methods*, Uppsala University, Department of Mathematics, Uppsala, 2009.

[24] P. ZHANG, *Exotic options: a guide to second generation options*, World Scientific Publishing Co., Singapur, 1998.

Sažetak

Na početku rada predstavljen je model Brownovog gibanja. Za početak, objašnjena je konstrukcija i sama definicija Brownovog gibanja i osnovna svojstva. Nadalje, opisan je model geometrijskog Brownovog gibanja koji je prikladniji za modeliranje cijena dionica. Pokazano je na koji se način mogu simulirati Brownovo gibanje i geometrijsko Brownovo gibanje. Osim toga, predstavljena je Black-Scholes formula za europsku *call i put* opciju. U drugom su poglavlju navedena svojstva očekivanja i varijance Monte Carlo procjenitelja te kako koristiti Monte Carlo metode prilikom vrednovanja egzotičnih opcija. U trećem su poglavlju objašnjene redom azijska, *barrier i lookback* opcija te su istaknuta najvažnija svojstva svake pojedine opcije. Naposljetku, simulirane su cijene dionica i promatrani odnosi između cijena europskih *call i put* opcija i pripadajućih *call i put* egzotičnih opcija.

Ključne riječi: Brownovo gibanje, geometrijsko Brownovo gibanje, Black-Scholes formula, Monte Carlo metoda, europska opcija, azijska opcija, *barrier* opcija, *lookback* opcija.

Exotic options

Summary

At, its beginning this graduate thesis introduces Brownian motion model. The construction and the definition of Brownian motion are described. Basic properties of Brownian motion are also shown. Furthermore, geometric Brownian motion model is described since it is more suitable for modelling stock prices. Simulations of Brownian and geometric Brownian motion model are demonstrated. Additionally, Black-Scholes formula for European call and put options is introduced. In the second part of paper, expectation and variance of Monte Carlo estimator are formulated and proven, also the benefit of Monte Carlo methods while pricing exotic options is shown. In third part of paper, Asian, barrier and lookback options are explained, furthermore their most important properties are mentioned. Finally, stock prices are simulated, relations between prices of European call and put options and belonging call and put exotic options are observed.

Keywords: Brownian motion, geometric Brownian motion, Black-Scholes formula, Monte Carlo method, European option, Asian option, barrier option, lookback option.

Životopis

Rođena sam 2. prosinca 1994. godine u Osijeku. Obrazovanje sam započela 2001. godine u Osnovnoj školi Augusta Šenoe. Nastavljam školovanje 2009. godine u III. gimnaziji u Osijeku. Nakon završene srednje škole, 2013. godine odlučujem upisati Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku. Akademski naziv *prvostupnice matematike* stječem 2016. godine uz mentorstvo izv. prof. dr. sc. Dragane Jankov Maširević i završni rad *Važne nejednakosti u teoriji vjerojatnosti*. Dio je završnog rada objavljen u *Osječkom matematičkom listu 17*(2017), 125-137. U jesen iste godine upisujem Diplomski studij financijske matematike i statistike na Odjelu za matematiku u Osijeku. U posljednjem semestru diplomskog studija odlazim na Erasmus+ razmjenu na *University of Ljubljana* na *Faculty of mathematics and physics*. Tijekom studija istaknula bih stručnu praksu odrađenu u Hrvatskoj agenciji za hranu tijekom koje sam se bavila statističkom analizom baze podataka. Trenutačno sam zaposlena u Adacta d.o.o, na poziciji *business intelligence consultant*.

Dodatak

U nastavku navodimo algoritme korištene prilikom nearbitražnog vrednovanja europskih, azijskih, *barrier* i *lookback call* opcija. Za vrednovanje opcija korišten je softver *Octave*.

1. Europska opcija

```
function price=mc_call_eu(K,S0,r,sigma,T,N)
mean_price=0;
mean2_price=0;
for i=1:N
    g=randn();
    brownian=g()*sqrt(T);
    price_sample=max(0,S0*exp((r-0.5*sigma^2)*T+sigma*brownian)-K);
    mean_price=mean_price+price_sample;
    mean2_price=mean2_price+(price_sample)^2;
end
%Price%
price=exp(-r*T)*(mean_price/N)
error_price=sqrt(exp(-2*r*T)*mean2_price/N-(price)^2)/sqrt(N-1)
inf_price=price-1.96*error_price
sup_price=price+0.1,0.41.96*error_price
end
```

2. Azijska opcija

```
function price=mc_call_az(K,S0,R,sigma,T,N,M)
deltaT=T/N;
mean_price=0;
mean2_price=0;
for i=1:M %M is number of iterations
    S(1)=S_0;
    int_mean=S_0;
    for j=1:N-1 %time cycle
        g=randn();
        S(j+1)=S(j)*exp((R-1/2*sigma^2)*deltaT+sigma*g*sqrt(deltaT));
        int_mean=int_mean+S(j+1);
    end
    payoff_sample=max(0,int_mean/N-K);
    mean_price=mean_price+payoff_sample;
    mean2_price=mean2_price+payoff_sample^2;
end
price=exp(-R*T)*(mean_price/M)
error_price=sqrt(exp(-2*R*T)*(mean2_price/M)-(price)^2)/sqrt(M-1)
confmc = [price-1.96*error_price, price+1.96* error_price]
end
```

3. *Barrier* opcija

```
function price=mc_call_ba(K,S0,R,sigma,T,N,M,L)
deltaT=T/N;
mean_price=0;
mean2_price=0;
S=zeros(1,N+1);
for i=1:M %M is number of iterations
    S(1)=S_0;
    out=0;
    for j=1:N %time cycle
        g=randn();
        S(j+1)=S(j)*exp((R-1/2*sigma^2)*deltaT+sigma*g*sqrt(deltaT));
        if (S(j+1)<L)
            out=1;
            break;
        end
    end
        if (out==1)
            payoff_sample=0;
        else
            payoff_sample=max(0,S(N+1)-K);
        mean_price=mean_price+payoff_sample;
        mean2_price=mean2_price+payoff_sample^2;
    end
end
    price=exp(-R*T)*(mean_price/M)
error_price=sqrt(exp(-2*R*T)*(mean2_price/M)-(price)^2)/sqrt(M-1)
inf_price=price-1.96*error_price
sup_price=price+1.96*error_price
end
```

4. *Lookback* opcija

```
function price=mc_call_look(K,S0,R,sigma,T,N,M)
deltaT=T/N;
mean_price=0;
mean2_price=0;
for i=1:M %M is number of iterations
    S(1)=S_0;
    maximum=S_0; %call
    %minimum=S_0; %put
    for j=1:N-1 %time cycle
        g=randn();
        S(j+1)=S(j)*exp((R-1/2*sigma^2)*deltaT+sigma*g*sqrt(deltaT));
       % maximum=max(maximum,S(j+1)); %call
        minimum=min(minimum, S(j+1)); %put
    end
    payoff_sample=max(0,maximum-K); %%call
```

```
    %payoff_sample=max(0,K-minimum); %%put
    mean_price=mean_price+payoff_sample;
    mean2_price=mean2_price+payoff_sample^2;
end
price=exp(-R*T)*(mean_price/M)
error_price=sqrt(exp(-2*R*T)*(mean2_price/M)-(price)^2)/sqrt(M-1)
inf_price=price-1.96*error_price
sup_price=price+1.96*error_price
end
```