Utvrđivanje lokacije oštećenja na konstrukciji dinamičkim mjerenjem

Krstić, Hrvoje; Sigmund, Vladimir

Source / Izvornik: **Tehnički vjesnik, 2008, 15, 17 - 24**

Journal article, Published version
Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:133:003954

Rights / Prava: Attribution 4.0 International/Imenovanje 4.0 međunarodna

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

GRAĐEVINSKI I ARHITEKTONSKI FAKULTET OSIJEK
Faculty of Civil Engineering and Architecture Osijek

Repository / Repozitorij:

Repository GrAFOS - Repository of Faculty of Civil Engineering and Architecture Osijek

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

dabar
DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

ISSN 1330-3651
UDC/UDK 624.042.8 : 624.92

UTVRĐIVANJE LOKACIJE OŠTEĆENJA NA KONSTRUKCIJI DINAMIČKIM MJERENJEM

Hrvoje Krstić, Vladimir Sigmund

Prethodno priopćenje

Dinamičke karakteristike konstrukcije predstavljaju osobnu iskaznicu konstrukcije i iz njih se može iščitati stanje konstrukcije. Konstruktivna oštećenja uzrokuju promjenu dinamičkih parametara (vlastitih frekvencija, formi osciliranja i koeficijenata prigušenja). Kako se često radi o malim, vizualno teško uočljivim oštećenjima, dinamičko mjerenje je idealna metoda za ispitivanje i utvrđivanje stanja konstruktivnih elemenata jer je jednostavna, brza i ne razorna metoda ispitivanja. Na osnovi razlike između dinamičkih karakteristika konstrukcije unutar dva razdoblja ispitivanja primjenom prijenosne funkcije (kao metode dinamičkog ispitivanja) moguće je zaključivati o bitnim promjenama u konstrukciji (krutost i masa) i o stanju konstruktivnih elemenata. Kvantifikacija oštećenja je teža od određivanja lokacije oštećenja. Ovim radom predložena je metoda za određivanje lokacije i intenziteta oštećenja na bazi poznatih rezultata iz dva mjerenja te je njena primjena pokazana na eksperimentalnom modelu.

Ključne riječi: *dinamičko ispitivanje, stanje konstrukcije, lokacija i intenzitet oštećenja*

Identification of structural damages using modal data

Prethodno priopćenje

The dynamic characteristics of the structure (natural frequencies, forms and damping) contain data about its structural state. Changes in one of them indicate the change of the structural state (damage). As actual damage is usually hard to visualize and locate the experimental modal analysis presents a useful tool as being fast, reliable and non-destructive. Based on the changes in dynamic characteristics between two measurements it is possible to draw the conclusion about the structural state. Qualitative location of damage is relatively easy to obtain, while the quantitative extent of damage is much harder to determine. The applicable methodology for the qualitative and quantitative extent of damage has been outlined and explained on a practical example in this paper.

Key words: *dynamical test, structural state, localization and extent of damage*

1
Uvod
Introduction

Dinamičkim ispitivanjem konstrukcije dolazi se do podataka o vlastitim periodima osciliranja konstrukcije, formama osciliranja konstrukcije i koeficijentima prigušenja. Sve eventualne promjene dinamičkih karakteristika nakon nekog zahvata ili katastrofalnog događaja indiciraju promjene i skrivena oštećenja u konstrukciji. Kako se često radi o malim, vizualno teško uočljivim oštećenjima, eksperimentalna dinamička analiza predstavlja idealnu metodu za utvrđivanje stanja konstruktivnih elemenata jer je jednostavna, brza i nerazorna metoda ispitivanja. Za mjerenje dinamičkih svojstava koriste se prinudne ili ambijentalne vibracije te impulsna pobuda. Pri analizi odgovora uporabom impulsne pobude koristi se prijenosna funkcija koja je konstanta mehaničkog sistema. Iz prijenosne funkcije, koju se definira kao izlazno-ulaznu vezu frekvencija između dvije točke na konstrukciji, mogu se odrediti dinamičke karakteristike konstrukcije. Na osnovu razlike dinamičkih karakteristika konstrukcije između dva razdoblja ispitivanja može se zaključivati o promjenama krutosti konstrukcije i stanju konstruktivnih elemenata. Pri određivanju stanja konstrukcije problem je dvojak: određivanje lokacije i određivanje intenziteta oštećenja.

2
Eksperimentalno utvrđivanje dinamičkih svojstava
Experimental dynamic analysis

Eksperimentalnim utvrđivanjem dinamičkih svojstava (modalna analiza) moguće je utvrditi stanje konstrukcije, ukoliko imamo početno mjerenje ili odgovarajući matematički model prije nekog događaja. Ispitivanjem konstrukcije dolazi se do stvarnih vrijednosti matrica krutosti i mase na osnovu eksperimentalnih rezultata i dedukcijom iz izmjerenih frekvencija i formi osciliranja. Iz njih je potom moguće utvrditi promjene u stanju konstrukcije na temelju razlika dinamičkih karakteristika između dva razdoblja u kojima mjerimo. Ukoliko postoji početno mjerenje (inicijalno stanje konstrukcije prije eksploatacije) moguće je pratiti promjene krutosti (degradaciju) konstrukcije za vrijeme uporabe. Dinamičke karakteristike (vlastite frekvencije, forme i koeficijenti prigušenja) su osnovna svojstva konstrukcije koja ovise o materijalnim karakteristikama konstrukcije (m, k, ξ) i rubnim uvjetima. Pri dinamičkom ispitivanju metodom impulsne pobude forme osciliranja dobivene su iz prijenosne funkcije (svojstva sistema) mjerenjem odgovora sustava na impulsnu pobudu. Pobuda se izaziva impulsnim čekićem (čekić sa montiranim pretvaračem sile), a odgovor se mjeri akcelerometrom pričvršćenim na konstrukciju. Numeričkom metodologijom (usrednjavanjem rezultata više mjerenja) svi šumovi sadržani u odgovoru, a koji nisu uzrokovani pobudom, eliminiraju se iz prijenosne funkcije sustava. Promjenom mjesta pobuđivanja i mjerenjem odziva na istom mjestu registrira se odgovor konstrukcije na raznim mjestima iz čega se normaliziranjem s odgovorom na mjestu gdje se nalazi akcelerometar može dobiti vlastita forma osciliranja konstrukcije za određenu vlastitu frekvenciju.

3
Prikaz dinamičkog mjerenja
Testing procedure

Eksperimentalno utvrđivanje dinamičkih svojstava olakšava razumijevanje i mogućnost interpretacije stanja sustava koristeći pri tome mali broj parametara i ekstrakciju mehaničkih svojstava iz izmjerenih podataka.

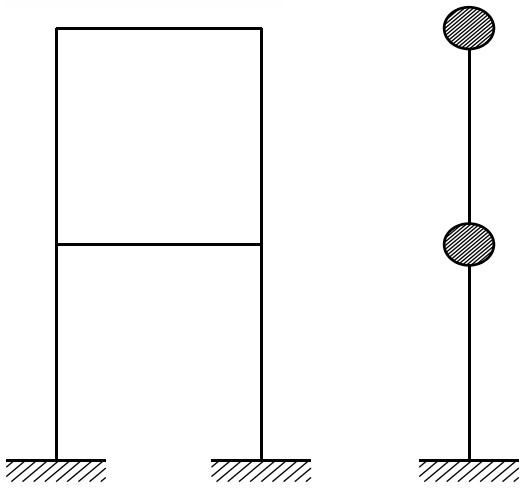
Prije početka ispitivanja potrebno je utvrditi mjerno područje frekvencija, mjesta na kojima mjerimo i predviđeno trajanje ispitivanja.

Posebna pozornost posvećuje se izboru akcelerometra (masa, osjetljivost i frekventno područje), načinu pričvršćivanja akcelerometra te načinu izazivanja impulsne pobude i mjerenju intenziteta pobude radi utvrđivanja dinamičke krutosti sustava.

Za konkretno ispitivanje je korišten modalni čekić proizvođača "Endveco" model 2303 koji pobuđuje konstrukciju konstantnom silom u željenom području frekvencija. Vrh čekića je obložen plastikom, kako bi se dobio meki vrh, koji pobuđuje niže frekvencije.



Sl. 1. Modalni čekić
Fig. 1. Modal hamer



Sl. 2. Prikaz modela s dva stupnja slobode
Fig. 2. Representation of a model with two grades of freedom

Za konstrukciju modela korišteno je drvo, i to za grede iverica dimenzija 19x100x406 mm, a za stupove lesonit dimenzija 0,30x100x1057 mm.

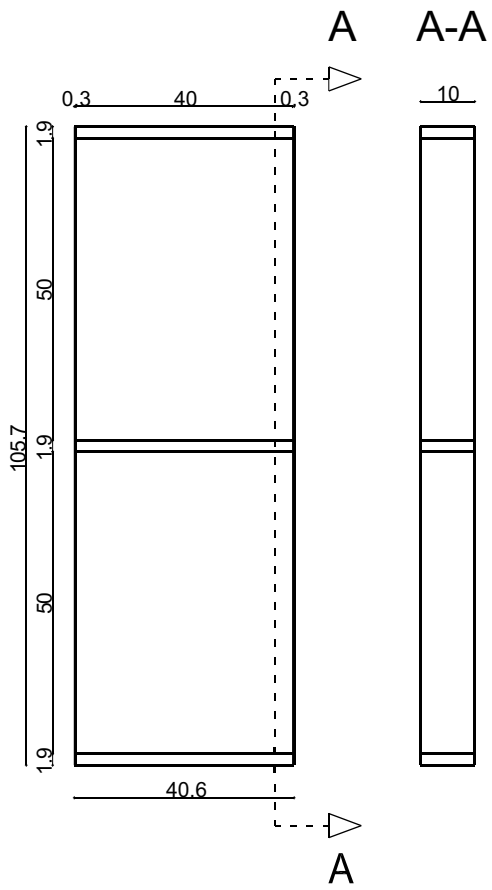
Mehaničke karakteristike materijala stupova utvrđene su eksperimentalno mjerenjem vlastite frekvencije osciliranja konzolnih stupova, odakle se na osnovi formule za osciliranje grede s distribuiranom masom određuje dinamički modul osciliranja stupova.

$$f = 1{,}9623 \cdot f_0 = \frac{\pi}{2L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\mu}}, \text{Hz} \quad \text{i} \quad f = 0{,}36 \cdot f_0 \qquad (1)$$

za konzolni stup.

Uvrštavanjem vrijednosti u izraz vrijednost modula elastičnosti je:

E=1,76·10^{10} N/m^2= 1,76·10^7 kN/m^2.



Sl. 3. Geometrijske karakteristike modela
Fig. 3. Geometric characteristics of model

4
Prijenosna funkcija
Transfer function

Mjerenje prijenosne funkcije je fundamentalno mjerenje kojim određujemo inherentna dinamička svojstva konstrukcije. Dinamičke karakteristike konstrukcije, vlastita frekvencija, prigušenje i modalni oblici, dobiveni su mjerenjem prijenosne funkcije. Prijenosna funkcija opisuje ulazno-izlaznu vezu između dvije točke na sustavu kao funkciju frekvencije.

$$F(\omega) \cdot [H(\omega)] = X(\omega)$$
$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \qquad (2)$$

Pri čemu je:
$X(\omega)$ - odgovor konstrukcije u frekventnoj domeni
$F(\omega)$ - pobuda (sila) u frekventnoj domeni.

Odgovor konstrukcije na jednom mjestu je uzrokovan djelovanjem sile na drugom mjestu i mjeri se kao pomak, brzina ili akceleracija. Stvarne konstrukcije imaju beskonačan broj stupnjeva slobode, ali s istraživačkog stajališta stvarna konstrukcija prikazana je prostorno s proizvoljnim odgovarajućim brojem stupnjeva slobode. Samim time olakšan je postupak ispitivanja i mjerenje je svedeno na minimalni broj.

Prijenosna funkcija opisuje dinamička svojstva sustava neovisno o pobudi koja je korištena za mjerenje. Stoga je prijenosna funkcija primjerena za harmonijske, prolazne i

slučajne pobude. Tijekom ispitivanja mjeri se ili jedan cijeli redak (pobuda) ili cijeli stupac (odgovor) matrice prijenosne funkcije. Iz izmjerenih podataka moguće je izvršiti sintezu neizmjerenih podataka.

Matrica prijenosne funkcije $[H(\omega)]$ koja se sastoji od $N_0 \cdot N_i$ prijenosnih funkcija, može se načiniti koristeći podatke iz N_0 prijenosne funkcije, gdje je N_0 broj izmjerenih stupnjeva slobode na konstrukciji. N_0 se smatra većim od N_i i podrazumijevamo da sadrži N_i broj mjerenja broja stupnjeva slobode.

Općenit oblik matrice prijenosne funkcije $[H(\omega)]$ glasi:

$$[H(\omega)] = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \cdot & \cdot & H_{1m}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{m1}(\omega) & \cdot & \cdot & \cdot & H_{mm}(\omega) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Nakon što je prijenosna funkcija izmjerena ili određena, odgovor konstrukcije za bilo koju proizvoljnu pobudu moguće je predvidjeti ili izvršiti simulaciju. Za ilustraciju je naveden sustav s dva stupnja slobode i njegova odgovarajuća jednadžba.

$$\begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= H_{11}(\omega) \cdot F_1(\omega) + H_{12}(\omega) \cdot F_2(\omega) \\ X_2(\omega) &= H_{21}(\omega) \cdot F_1(\omega) + H_{22}(\omega) \cdot F_2(\omega) \end{aligned} \quad (5)$$

$X_1(\omega)$ i $X_2(\omega)$ su odgovor konstrukcije uslijed sila $F_1(\omega)$ i $F_2(\omega)$. Stoga se $X_1(\omega)$ i $X_2(\omega)$ mogu odrediti množenjem i zbrajanjem iz poznate prijenosne funkcije i funkcija sila. Odgovor sustava u vremenu, $x_1(\omega)$ i $x_2(\omega)$, moguće je odrediti inverznom Fourierovom transformacijom $X_1(\omega)$ i $X_2(\omega)$.

Generalno za sustav s N stupnjeva slobode vrijedi jednadžba:

$$\begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_N(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \cdot & \cdot & \cdot & H_{1N}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \cdot & \cdot & \cdot & H_{2N}(\omega) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{N1}(\omega) & H_{N2}(\omega) & \cdot & \cdot & \cdot & H_{NN}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_N(\omega) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$X_1(\omega) = H_{11}(\omega) \cdot F_1(\omega) + H_{12}(\omega) \cdot F_2(\omega) + \cdots + H_{1N}(\omega) \cdot F_N(\omega)$$

Teorijski, matrica prijenosne funkcije $[H(\omega)]$ sastoji se od $N \cdot N$ prijenosnih funkcija sustava s N stupnjeva slobode. Praktično gledano, broj izmjerenih prijenosnih funkcija matrice sastoji se od $N_0 \cdot N_i$ prijenosnih funkcija neovisno o broju modova N.

5
Dinamička svojstva konstrukcija i numerički model procijene stanja konstrukcije

Dynamic characteristics and numerical models for structural assessment

Strukturalne promjene uzrokuju promjene u frekvencijama i modalnim oblicima konstrukcije. Određena modalna svojstva konstrukcije u početnom stanju i nakon nekog vremena uporabe konstrukcije (promijenjeno stanje) omogućuju lociranje područja na konstrukciji na kojima je došlo do promjene i utvrđivanje intenziteta promjena.

Dinamičke karakteristike konstrukcije mogu se utvrditi eksperimentalno ili koristeći neku od numeričkih metoda. Jednadžba neprigušenog sustava s jednim stupnjem slobode glasi:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{X} = f(t) \quad (7)$$

Gdje je:
M - matrica masa,
K - matrica krutosti
A - vektor brzine
X - vektor pomaka
$f(t)$ - sila pobude

Kako bi se odredilo prirodne frekvencije i modalne oblike, potrebno je riješiti sljedeću jednadžbu:

$$(\mathbf{K} - \boldsymbol{\lambda}_i \cdot \mathbf{M}) \cdot \varphi_i = 0 \quad (8)$$

Gdje je:
$\boldsymbol{\lambda}_i$ - matrica w_i^2, $\boldsymbol{\lambda}_i = w_i^2$
w_i - prirodna frekvencija
φ_i - i-ti modalni oblik

Ova jednadžbu koristi se za utvrđivanje dinamičkih svojstava konstrukcije.

Kako bi se locirala mjesta na konstrukciji kod kojih je došlo do promjene, potrebno je utvrditi razlike u dinamičkim svojstvima konstrukcije između dva razdoblja, početnog i promijenjenog.

Za promijenjeno stanje vrijedi jednadžba:

$$(\mathbf{K}_c - \boldsymbol{\lambda}_{ci} \cdot \mathbf{M}) \cdot \varphi_{ci} = 0 \quad (9)$$

Gdje "c" u indeksu označava promijenjeno stanje, a $\mathbf{K}_c$ i $\mathbf{M}_c$ promjene u matricama krutosti i mase, pa slijedi da je:

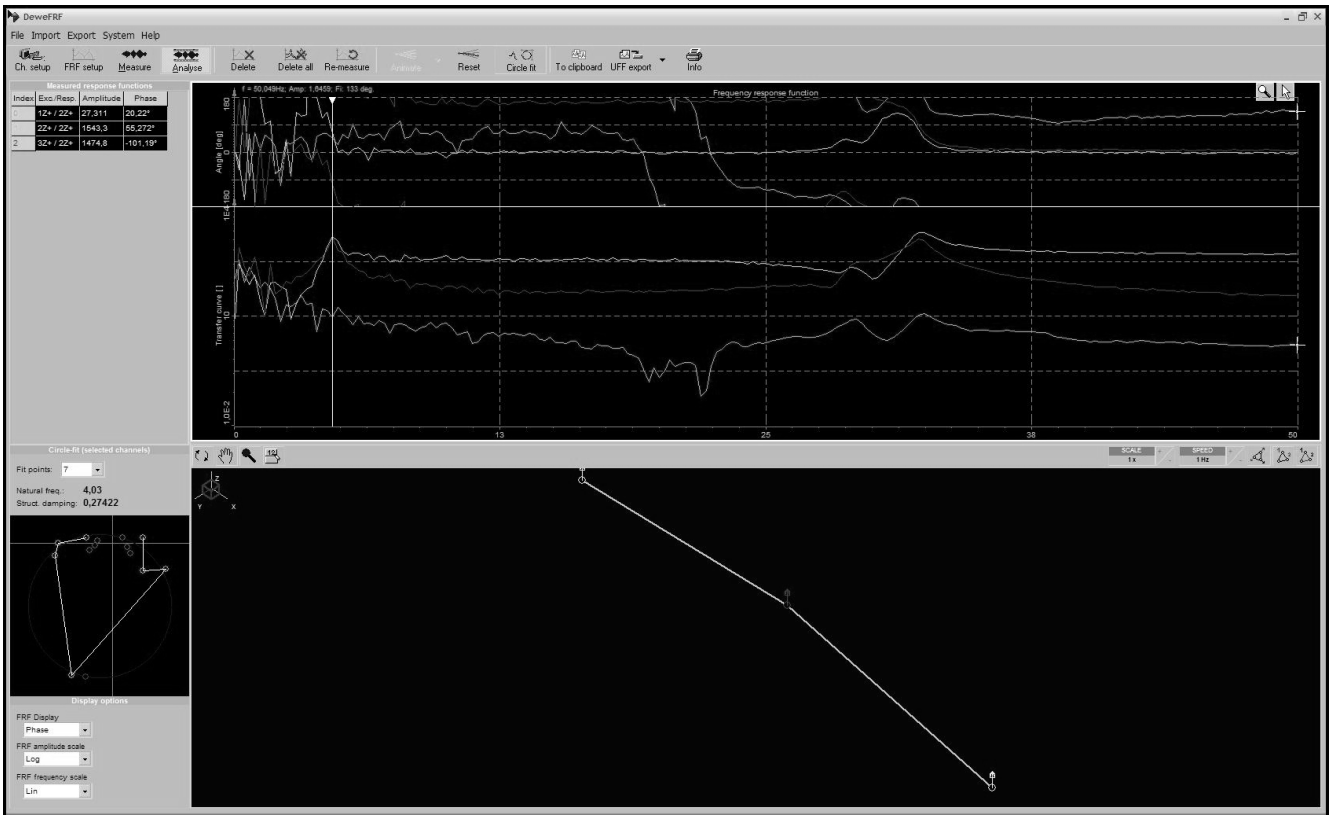
$$\begin{aligned} \mathbf{K}_c &= \mathbf{K} + \Delta\mathbf{K} \\ \mathbf{M}_c &= \mathbf{M} + \Delta\mathbf{M} \\ \boldsymbol{\lambda}_{ci} &= \boldsymbol{\lambda}_i + \Delta\boldsymbol{\lambda} \\ \varphi_{ci} &= \varphi_i + \Delta\varphi \end{aligned}$$

$\Delta\mathbf{K}$ i $\Delta\mathbf{M}$ predstavljaju promjenu matrice krutosti i mase. Uvrštavanjem u jednadžbu (1) i sređivanjem izraza slijedi:

$$(-\mathbf{K} - \boldsymbol{\lambda}_{ci} \cdot \mathbf{M}) \cdot \varphi_{ci} = (\Delta\mathbf{K} - \boldsymbol{\lambda}_{ci} \cdot \Delta\mathbf{M}) \cdot \varphi_{ci} \quad (10)$$

$$\mathbf{R}_i = (-\mathbf{K} - \boldsymbol{\lambda}_{ci} \cdot \mathbf{M}) \cdot \varphi_{ci} \quad (11)$$

$\mathbf{R}_i$ - vektor rezidualne sile



Sl. 4. Prikaz rezultata mjerenja (prijenosna funkcija i forma osciliranja)
Fig. 4. Representation of measured results (transfer function and form of oscillation)

Vektor rezidualne sile $\mathbf{R}_i$ lako se određuje ako su poznate frekvencije i forme osciliranja, gdje *i* označava broj stupnjeva slobode. Iz jednadžbe se vidi kako je vektor sile za *i*-ti stupanj slobode jednak nuli ako nije došlo do promjene u matrici krutosti i masi. Dakle, elementi vektora rezidualne sile $\mathbf{R}_i$ s pripadajućim elementima kod kojih je došlo do promjene različiti su od nule.

Teorijski, za lociranje tih elemenata kod kojih je došlo do promjene u matrici krutosti i mase potrebno je poznavati prirodne frekvencije i modalne oblike. U stvarnosti izmjereni podaci sadrže određene pogreške koje mogu lako dovesti do pogrešaka pri određivanju vektora rezidualne sile $\mathbf{R}_i$. Stoga je potrebno odrediti više prirodnih frekvencija i modalnih oblika

6
Mjerenje dinamičkih svojstava modela
Dynamic analysis of the model

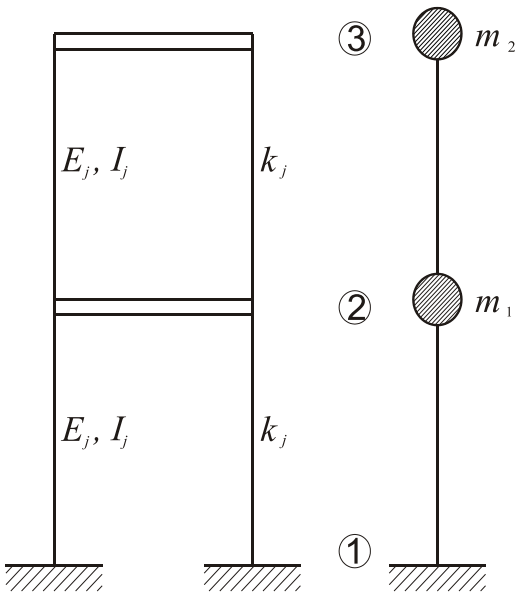
Za ispitivanje modelne konstrukcije rabljeni su već spomenuti uređaji, a za obradu podataka programski paket DeweFRF v6.4, modal analysis software.

Rezultati mjerenja dani su kao što je prikazano na slici 4. Mjereni su odzivi čvorova 1, 2 i 3, kako je prikazano na slikama 5 i 6.

Iz izmjerenih prijenosnih funkcija dobivene su normalizirane forme osciliranja za određene vlastite frekvencije. Mjerenja su izvršena na neoštećenom modelu s kojim je simulirano početno stanje i na oštećenom modelu, kako bi provjerili uporabljivost metode na praktičnom primjeru (slika 7 i slika 8).

Mjerenja su izvršena na sljedećim modelima:

A - Slučaj kada nema dodanih masa na modelu, promatra se i dinamički pobuđuje neoštećeni model A i model B s



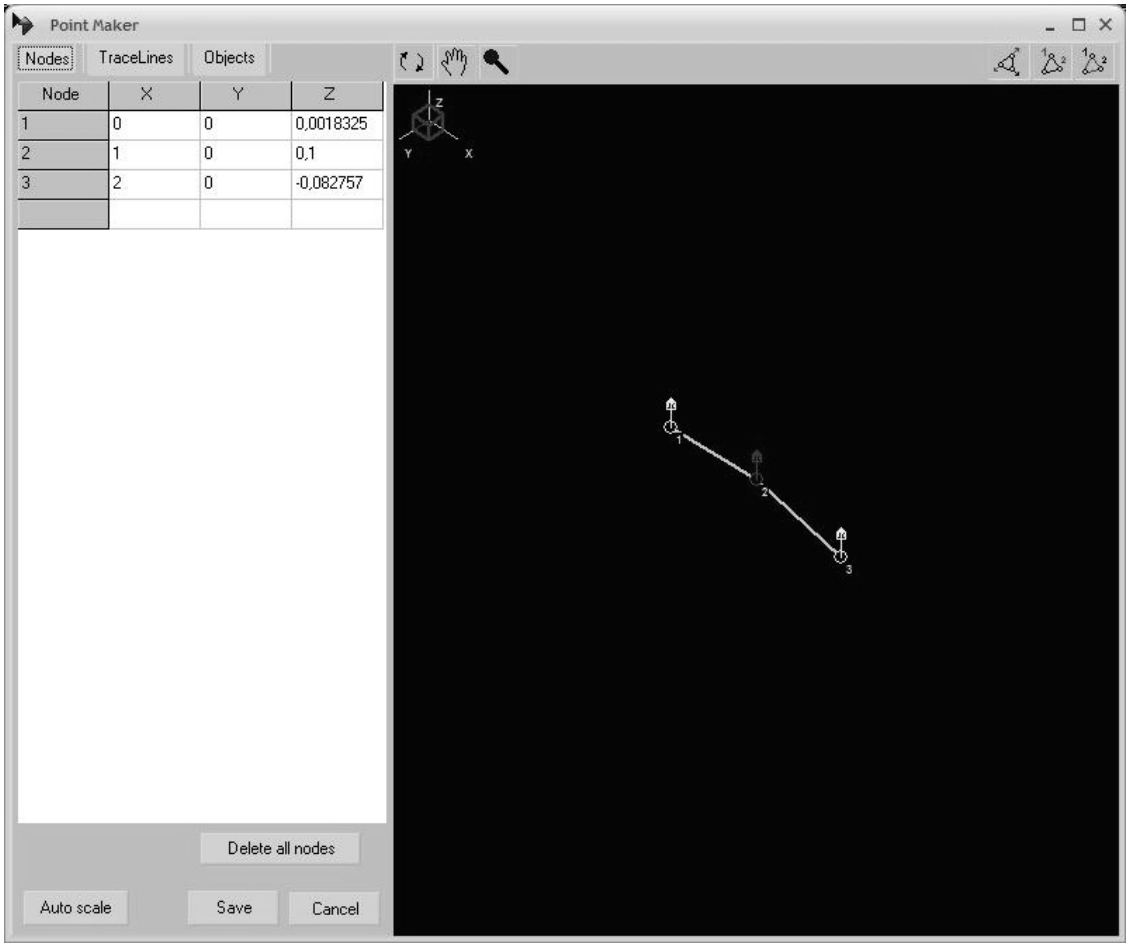
Sl. 5. Model s dva stupnja slobode i oznaka mjernih mjesta
Fig. 5. Model with two grades of freedom and mark of measured places

oštećenim gornjim stupom.

B - Slučaj s masom Δm_1 na prvoj etaži, promatra se i dinamički pobuđuje neoštećeni model A_1 i model s oštećenim gornjim stupom B_1.

C - Slučaj s dvije mase Δm_1 na prvoj etaži i Δm_2 na drugoj etaži, promatra se i dinamički pobuđuje neoštećeni model A_2 i model s oštećenim gornjim stupom B_2.

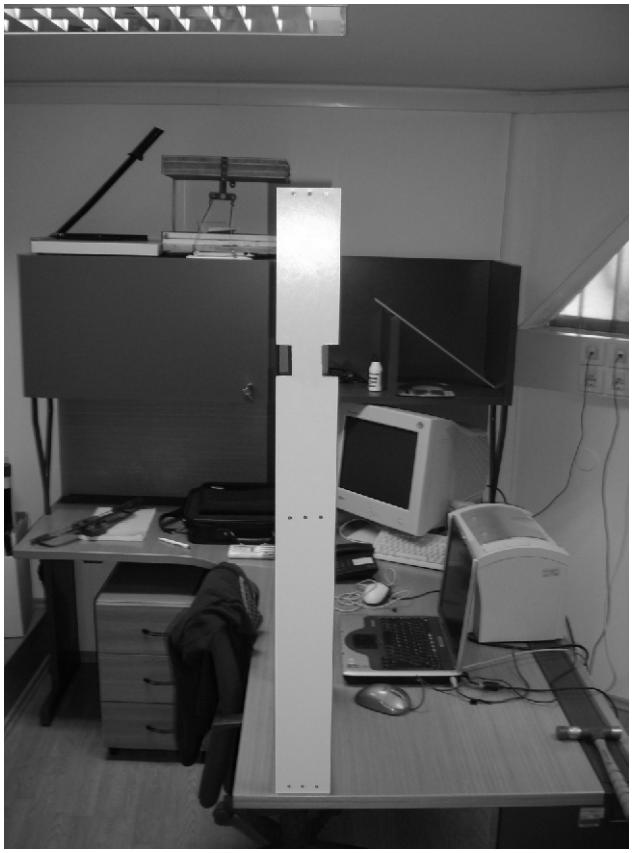
Proračunate su krutosti i momenti tromosti neoštećenog i oštećenog modela.



Sl. 6. Forme osciliranja stupnjeva slobode
Fig. 6. Oscillation forms of grades of freedom



Sl. 7. Neoštećeni model
Fig. 7. Undamaged model



Sl. 8. Oštećeni model
Fig. 8. Damaged model

Neoštećeni model (Stanje A)

$$I_1 = I_2 = \frac{b \cdot h^2}{12} = 2{,}25 \cdot 10^{10},\ \mathrm{m}^4 \tag{12}$$

$$k_j = \sum \frac{12 \cdot E \cdot I}{h^3} \text{ za element upet na oba kraja} \tag{13}$$

$$k_1 = k_2 = 2 \cdot \frac{12 \cdot E \cdot I}{h^3} = 0{,}76032 \ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \tag{14}$$

Oštećeni model (Stanje B)

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} = 2{,}25 \cdot 10^{10},\ \mathrm{m}^4 \tag{15}$$

$$I_2 = \frac{0{,}5 \cdot b \cdot h^3}{12} = 1{,}125 \cdot 10^{10},\ \mathrm{m}^4 \tag{16}$$

$$k_1 = 0{,}76032 \ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}$$

$$k_2 = \frac{12 \cdot E \cdot I_1}{h^3} + \frac{12 \cdot E \cdot I_2}{h^3} = 0{,}57024 \ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \tag{17}$$

Iz izmjerenih masa dijelova modela određene su mase m_1 i m_2.

Izmjerene vrijednosti mase:
Greda=0,4728 kg
Stup=0,2786 kg.

Odakle je:
m_1=0,7591 kg
m_2=0,6093 kg.

Na model su još dodane mase Δm_1 i Δm_2.
Δm_1=0,8959 kg
Δm_2=0,8959 kg.

Δm_2 i Δm_2 predstavljaju dodane mase, u prvom slučaju ispitan je model bez dodanih masa, drugi slučaj je slučaj kada je dodana masa Δm_1 na prvu etažu, a treći slučaj je slučaj kada je dodana masa Δm_1 na prvoj, i Δm_2 na drugoj etaži.

Iz izmjerenih vrijednosti određene su dinamičke mase modela:
m_1=0,0774 N·s^2/m
m_2=0,0621 N·s^2/m

i dodane mase:
Δm_1=0,0913 N·s^2/m
Δm_2=0,0913 N·s^2/m.

To omogućuje formiranje matrica masa za ispitivane slučajeve.

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \ \frac{\mathrm{kN} \cdot \mathrm{s}^2}{\mathrm{m}} \tag{18}$$

STANJE A - Neoštećeni model, matrica mase

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 0{,}0774 & 0 \\ 0 & 0{,}0621 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

STANJE A_1 - Neoštećeni model s dodanom jednom masom, matrica mase

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 0{,}1687 & 0 \\ 0 & 0{,}0621 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

STANJE A_2 - Neoštećeni model s dodane dvije mase, matrica mase

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 0{,}1687 & 0 \\ 0 & 0{,}1534 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

STANJE B - Oštećeni model, matrica mase

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 0{,}0774 & 0 \\ 0 & 0{,}0621 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

STANJE B_1 - Oštećeni model s dodanom jednom masom, matrica mase

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 0{,}1687 & 0 \\ 0 & 0{,}0621 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

STANJE B_2 - Oštećeni model s dodane dvije mase, matrica mase

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 0{,}1687 & 0 \\ 0 & 0{,}1534 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

7
Određivanje matrice vektora rezidualne sile
Residual force vector matrix elements calculation

Pretpostavimo li da je matrica masa dobro izračunata i da je mogućnost pogreške bila veća pri proračunu matrice krutosti, iz jednadžbe:

$$(\mathbf{K} - \boldsymbol{\lambda}_i \cdot \mathbf{M}) \cdot \varphi_i = 0 \tag{19}$$

gdje je:
m_i - matrica masa
$\boldsymbol{\lambda}_i$ - matrica w_i^2, $\boldsymbol{\lambda}_i = w_i^2$
w_i - prirodna frekvencija
φ_i - i-ti modalni oblik

može se izračunati matrica krutosti zadanog sustava.

Ova jednadžba se koristi za utvrđivanje dinamičkih svojstava konstrukcije na osnovi izmjerenih i izračunatih matrica masa i krutosti. U ovom slučaju je to obrnuti problem, tj. iz izmjerenih podataka (f, ω, $\boldsymbol{\lambda}$, φ) na modelu računaju se matrice krutosti kako bi jednadžba $(\mathbf{K} - \boldsymbol{\lambda}_i \cdot \mathbf{M}) \cdot \varphi_i = 0$ bila zadovoljena!

Jednadžba $(\mathbf{K} - \boldsymbol{\lambda}_i \cdot \mathbf{M}) \cdot \varphi_i = 0$ može se pisati u matričnom obliku kao:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\left(\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

Potrebno je izračunati matricu krutosti [**K**] dakle nepoznanice su k_{11}, k_{12}, k_{21} i k_{22}. Gornje dvije jednadžbe daju 4 jednadžbe za izračun 4 nepoznanice!

Sada je moguće dobiti vektor rezidualne sile $\mathbf{R}_i$.

$$\left(-\mathbf{K}-\lambda_{ci}\cdot\mathbf{M}\right)\cdot\varphi_{ci}=\left(\Delta\mathbf{K}-\lambda_{ci}\cdot\Delta\mathbf{M}\right)\cdot\varphi_{ci} \tag{21}$$

$$\mathbf{R}_i=\left(-\mathbf{K}-\lambda_{ci}\cdot\mathbf{M}\right)\cdot\varphi_{ci} \tag{22}$$

Vektor rezidualne sile $\mathbf{R}_i$ lako se određuje ako su poznate frekvencije i forme osciliranja, gdje *i* označava broj stupnjeva slobode. Iz jednadžbe slijedi da je vektor sile za *i*-ti stupanj slobode jednak nuli ako nije došlo do promjene u matrici krutosti i mase. Dakle elementi vektora rezidualne sile $\mathbf{R}_i$ kod kojih je došlo do promjene različiti su od nule.

U ovom slučaju razlikuju se dva vektora rezidualne sile $\mathbf{R}_1$ i $\mathbf{R}_2$, gdje je prvi vektor rezidualne sile onaj koji se odnosi na prvu etažu, a drugi onaj koji se odnosi na drugu etažu. Očekuje se vrijednosti prvog vektora rezidualne sile koje su jednake nuli i vrlo male jer nije došlo do promjena, odnosno oštećenja na prvoj etaži, a vrijednost drugog vektora rezidualne sile trebale bi biti različite od nule jer je na drugoj etaži došlo do promjene, tj. oštećenja.

Iz poznatih vrijednosti modalnih oblika i matrica masa iz jednadžbe [20] moguće je izračunati proračunske krutosti. Raspisivanjem jednadžbe [20] slijedi izraz u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix}\varphi_{11}^{12}\cdot(k_{11}-\lambda_{1,2}\cdot m_1)+k_{12}\cdot\varphi_{21}^{22}\\ k_{21}\cdot\varphi_{11}^{12}+\varphi_{21}^{22}\cdot(k_{22}-\lambda_{12}\cdot m_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{23}$$

Što daje 4 jednadžbe:

$$\varphi_{11}\cdot k_{11}+k_{12}\cdot\varphi_{21}=\lambda_1\cdot m_1\cdot\varphi_{21} \tag{24}$$

$$\varphi_{11}\cdot k_{21}+\varphi_{21}\cdot k_{22}=\lambda_1\cdot m_2\cdot\varphi_{21} \tag{25}$$

$$\varphi_{12}\cdot k_{11}+\varphi_{22}\cdot k_{22}=\lambda_2\cdot m_2\cdot\varphi_{22} \tag{26}$$

$$\varphi_{12}\cdot k_{21}+\varphi_{22}\cdot k_{22}=\lambda_2\cdot m_2\cdot\varphi_{22} \tag{27}$$

iz kojih je moguće dobiti k_{ij}, odnosno matrice krutosti [**K**] za promatrano stanje (A i B, A_1 i B_1, A_2 i B_2).

Promatraju se sljedeći slučajevi i pripadajući vektori rezidualne sile:

I - Slučaj kada nema dodanih masa na modelu, promatra se i dinamički pobuđuje neoštećeni model A i model s oštećenim gornjim stupom B

$$R_1=\begin{Bmatrix}-0{,}2464\\-0{,}0770\end{Bmatrix}\qquad R_2=\begin{Bmatrix}2{,}5029\\-1{,}1149\end{Bmatrix}$$

II - Slučaj s masom Δm_1 na prvoj etaži, promatra se i dinamički pobuđuje neoštećeni model A_1 i model s oštećenim gornjim stupom B_1

$$R_1=\begin{Bmatrix}0{,}5776\\0{,}1264\end{Bmatrix}\qquad R_2=\begin{Bmatrix}-1{,}9004\\1{,}4811\end{Bmatrix}$$

III - Slučaj s dvije mase Δm_1 na prvoj etaži i Δm_2 na drugoj etaži, promatra se i dinamički pobuđuje neoštećeni model A_2 i model s oštećenim gornjim stupom B_2

$$R_1=\begin{Bmatrix}-0{,}4272\\-0{,}1222\end{Bmatrix}\qquad R_2=\begin{Bmatrix}-2{,}7001\\3{,}9669\end{Bmatrix}$$

IV - Slučaj kada promatramo i dinamički pobuđujemo neoštećeni model A i neoštećeni model A_1.

$$R_1=\begin{Bmatrix}1{,}4591\\-1{,}0865\end{Bmatrix}\qquad R_2=\begin{Bmatrix}2{,}9122\\2{,}7649\end{Bmatrix}$$

V - Slučaj kada promatramo i dinamički pobuđujemo neoštećeni model A i neoštećeni model A_2.

$$R_1=\begin{Bmatrix}1{,}6817\\-1{,}2101\end{Bmatrix}\qquad R_2=\begin{Bmatrix}5{,}8668\\4{,}2422\end{Bmatrix}$$

VI - Slučaj kada promatramo i dinamički pobuđujemo neoštećeni model B i neoštećeni model B_1.

$$R_1=\begin{Bmatrix}1{,}3379\\-0{,}8767\end{Bmatrix}\qquad R_2=\begin{Bmatrix}0{,}9678\\1{,}9610\end{Bmatrix}$$

VII - Slučaj kada promatramo i dinamički pobuđujemo neoštećeni model B i neoštećeni model B_2.

$$R_1=\begin{Bmatrix}1{,}4820\\-0.9498\end{Bmatrix}\qquad R_2=\begin{Bmatrix}1{,}6656\\2{,}1253\end{Bmatrix}$$

Rezultati su prikazani tablično, u tablici Tab. 1 prikazana je shema svih ispitanih slučajeva, a u Tab. 2 rezultati ispitivanje.

Tab. 1. Shematski prikaz svih ispitanih slučajeva
Tabl. 1. Shematical presentation of all test examples

Model	A	A1	A2	B	B1	B2
Neoštećeni model	+	+	+			
Oštećeni model				+	+	+
Dodana 1 masa		+	+		+	+
Dodana 2 masa			+			+

Tab. 2. Vrijednosti vektora rezidualne sile za sve ispitane slučajeve
Tab. 2. Values of residual force vector for all test examples

Slučaj	Opis	SS	Vektor rezidualne sile
A - B	Smanjenje krutosti 2 etaže za 25 %	1°	0,2582
		2°	2,7399
A_1 - B_1	Smanjenje krutosti 2 etaže za 25 % i povećanje mase 1 za 55 %	1°	0,3496
		2°	3,6275
A_2 - B_2	Smanjenje krutosti 2 etaže za 25 %, povećanje mase 1 za 55 % i mase 2 za 60 %	1°	0,4443
		2°	4,7936
A - A_1	Povećanje mase 1 neoštećenog modela za 55 %	1°	1,8192
		2°	4,0157
A - A_2	Povećanje mase 1 neoštećenog modela za 55 % i 2 etaže za 60 %	1°	2,0718
		2°	7,2398
B - B_1	Povećanje mase 1 oštećenog modela za 55 %	1°	1,5996
		2°	2,1868
B - B_2	Povećanje mase 1 oštećenog modela za 55 % i mase 2 za 60 %	1°	1,7602
		2°	2,7002

8
Zaključak
Conclusion

Ovim radom je na modelnom primjeru pokazana primjena dinamičkih mjerenja za utvrđivanje stanja konstrukcije primjenom metoda rezidualnih sila.

Ispitivanjem modela u neoštećenom i oštećenom stanju, na temelju razlika dinamičkih svojstava, utvrđena je veza između strukturalnih karakteristika modela kao što su krutost i masa te dinamičkih svojstava. Promjene u strukturi modela uzrokuju promjene u dinamičkim svojstvima. Vektor rezidualne sile $\mathbf{R}_i$ određen je iz izmjerenih dinamičkih svojstava. On je jednak nuli za *i*-ti stupanj slobode, ukoliko nije na tom stupnju slobode došlo do promjene u svojstvima konstrukcije. Vektor rezidualne sile je veći na mjestu veće promjene i manje je osjetljiv na promjene mase nego krutosti u konstrukciji.

Na modelu je pokazano da se metoda rezidualne sile uspješno može koristiti kako bi se utvrdilo postojeće stanje konstrukcije mjerenjem dinamičkog odgovora. Ispitivanjem modela u neoštećenom stanju i potom oštećenog sustava ovom metodom, utvrđeno je na kojoj etaži je došlo do konstruktivne promjene (oštećenje).

Iz rezultata se zaključuje kako manja promjena krutosti ima jednak utjecaj na promjenu vektora rezidualne sile kao i velika promjena mase. Male vrijednosti vektora rezidualne sile (one manje od 1 kN) dobivene su na mjestima na kojima nije došlo do promjene ili je promijenjena samo masa te su zanemarive.

Daljnja ispitivanja trebalo bi usmjeriti na utvrđivanje faktora koji će dati informacije o stupnju oštećenja konstrukcije, te pomoći u kvantifikaciji oštećenja na konstrukciji.

9
Literatura
References

[1] Harris, Harry; Sabnis, G.; Gajanan, M. Structural Modeling and experimental techniques, Library of Congress Cataloging in Publication Data, Washington D. C., USA, 1999.
[2] Muravljov, Mihailo; Jevtić, A.; Dragica, Lj. Građevinski materijali 2, Akademska misao, Beograd, Srbija, 2003.
[3] Flinn, Richard; Trojan, A.; Paul, K. Engineering Materials and Their Application, Houghton Mifflin Company, Boston, USA, 1990.
[4] Lozina, Z.; Vucina, D.; Sedlar, D. Dynamic Properties of Structures and Advanced Algorithms for Validation, 5th International Congress of Croatian Society of Mechanics, Split, Croatia, 2006.
[5] Ge, M.; Lui, Eric, M. Structural damage identification using system dynamic properties, Department of Civil and Environmental Engineering, Syracuse University, Syracuse, Computers and Structures 83 (2005) 21852196, United States, 2005.
[6] Čaušević, M. Dinamika konstrukcija - diskretni sustavi, Školska knjiga, Zagreb, Hrvatska, 2005.
[7] Chopra, A. K. Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering, Prentice Hall, USA, 2000.

Adrese autora
Author's Address

Hrvoje Krstić, dipl. ing. građ.
Građevinski fakultet u Osijeku
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera
Crkvena ulica 21, Osijek
e-mail: hrvojek@gfos.hr

prof. dr. sc. Vladimir Sigmund, dipl. ing. građ.
Građevinski fakultet u Osijeku
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera
Crkvena ulica 21, Osijek
e-mail: sigmund@gfos