

**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA
U OSIJEKU
GRAĐEVINSKI FAKULTET OSIJEK**

ZAVRŠNI RAD

Osijek, 15.10.2015.

Ivan Barišić

**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA
U OSIJEKU
GRAĐEVINSKI FAKULTET OSIJEK**

ZAVRŠNI RAD

**TEMA: UTJECAJ UZDUŽNE SILE I TEMPERATURE NA NAPREZANJE
DEFORMACIJE RAVNOG ŠTAPA**

Osijek, 15.10.2015.

Ivan Barišić

Sadržaj

1.Sažetak.....	1
2.Uvod.....	2
3.Aksijalno opterećen štap.....	3
3.1.Naprezanja.....	3
3.2.Deformacije.....	5
4. Statički neodređeni sistemi.....	7
5.Utejcaj temperature.....	8
6.Zadaci.....	10
7.Zaključak.....	27
8.Literatura.....	28

1.SAŽETAK

U ovome završnom radu smo pokazali kako utjecaj uzdužne sile i temperature djeluju na naprezanje i deformacije u ravnome štapu. Uvodni dio opisuje kako su sva realna tijela (također i štap) zbog utjecaja različitih vanjskih i unutarnjih sila, promjena temperature itd. sklona naprezanjima, koja kasnije dovode do deformacija. U teoretskom djelu smo razradili izvode formula za deformacije i naprezanja u ravnom štapu pod utjecajem uzdužne sile i temperature, na statički određenim i neodređenim sustavima. Riješeno je par primjera.

2.UVOD

U ovom radu će se obraditi slučaj kada je štap pod utjecajem uzdužne sile i temperature. Pri tome ćemo pretpostavljati da je štap od homogenog i izotropnog materijala čija mehanička svojstva poznajemo. U radu ćemo analizirati naprezanja i deformacije uslijed djelovanja uzdužne sile i temperature na statički određenim i neodređenim sistemima. Obradit ćemo naprezanja i deformacije koje mogu biti od same uzdužne sile, utjecaja temperature ili njihove kombinacije i zatim ćemo ih usporediti. U teorijskom djelu je dan prikaz problema i izvodi izraza koji su potrebni za proračun. Pri tome ćemo pretpostavljati da je štap od homogenog i izotropnog materijala čija mehanička svojstva poznajemo. Riješeno je nekoliko primjera.

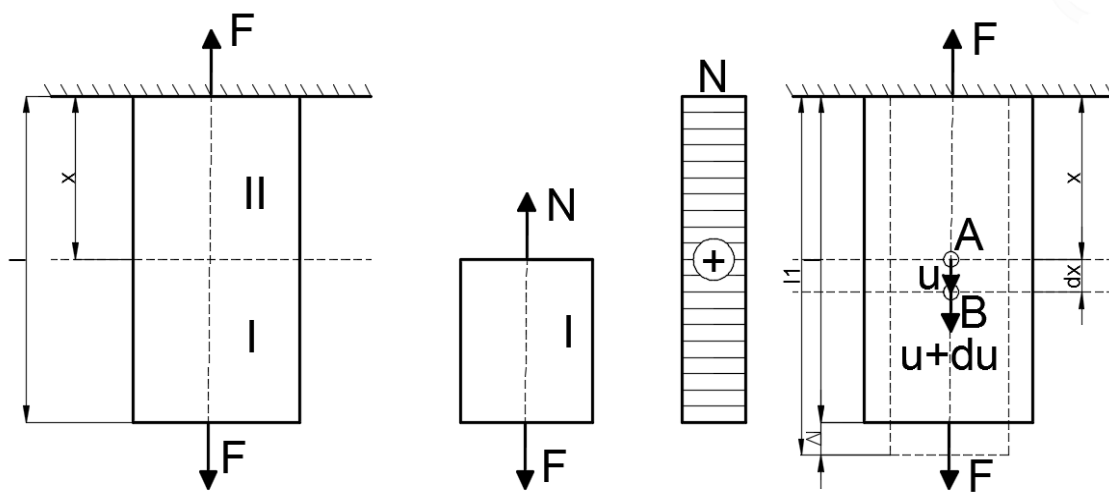
3. AKSIJALNO OPTEREĆEN ŠTAP

3.1. NAPREZANJA

Do rastezanja i pritiska ravnog štapa dolazi kada je on aksijalno opterećen . Kod aksijalno opterećenog štapa vanjske sile svode se na sile usmjerene uzduž osi štapa . U poprečnom presjeku postoji uzdužna sila N , a sve su ostale komponente unutarnjih sila jednake nuli .

Ako je u presjeku N usmjerena u smjeru vanjske normale ($N > 0$), štap je opterećen na rastezanje ili vlak , a ako je u presjeku N usmjerena suprotno od smjera vanjske normale ($N < 0$), štap je opterećen na pritisak ili tlak . Rastezanje se formalno razlikuje od pritiska samo po predznaku uzdužne sile N .

Promatramo ravni štap duljine l proizvoljnog, ali konstantnog poprečnog presjeka, koji je na jednom kraju upet, a na drugom opterećen uzdužnom silom F koja djeluje u težištu poprečnog presjeka.



Slika 1: Ravan štap duljine l , konstantnog poprečnog presjeka

Zamislamo da smo štap prerezali duž proizvoljno odabranog poprečnog presjeka a-a i promatramo dio I. štapa ispod presjeka. Zbog uzajamna djelovanja tih dvaju dijelova štapa u presjeku a-a pojavljuje se normalna naprezanje σ_x koja daju rezultantu unutarnjih sila, uzdužnu silu N . Iz uvjeta ravnoteže

$\sum F_x = 0$ dobivamo da je

$$\int_A \sigma_x dA = N = F.$$

Vidimo da je uzdužna sila N duž osi štapa konstanta i jednaka vanjskoj sili F . Pod djelovanjem te zadane sile F štap duljine l deformira, u uzdužnom se dijelu produlji i ima duljinu l_1 , a u poprečnom smjeru se suzi.

U procesu deformiranja šapa vrijedi hipoteza ravnih poprečnih presjeka. Poprečni presjeci štapa ostaju ravni i okomiti na os štapa, tako da je relativna deformacija uzdužnih vlakana u poprečnome presjeku $a - a$:

$$\varepsilon_{xx} = \text{konst.}$$

Prema Hookeovu zakonu za linijsko je stanje naprezanja:

$$\sigma_x = \varepsilon_{xx} E$$

Kombinacijom prethodnih izraza, dobit ćemo

$$\int_A E \varepsilon_{xx} dA = N = F.$$

Kod homogenog i izotropnog materijala pri $\varepsilon_{xx} = \text{konst.}$, $E \varepsilon_{xx}$ možemo izvući ispred znaka integrala, te dobivamo:

$$E \varepsilon_{xx} \int_A dA = E \varepsilon_{xx} A = N = F.$$

Primjenom prethodnog izraza. dobivamo:

$$\sigma_x A = N = F$$

I odatle je traženo naprezanje:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}.$$

Dobili smo da su normalna naprezanja u poprečnom presjeku $a - a$ štapa raspodijeljena jednoliko. To vrijedi za poprečne presjeke koji su dovoljno udaljeni od krajnjih presjeka štapa, neovisno o raspodjeli sila na krajevima. Bitna je veličina njihove rezultante F koja prolazi težištem poprečnog presjeka i djeluje u smjeru osi štapa (St. Venantov princip). U blizini mjesta na kojem djeluje koncentrirano opterećenje normalna su naprezanja raspoređena po složenom zakonu. Kod proračuna štapa uobičajeno je da se zanemari taj rubni efekt pa se uzima da su naprezanja jednoliko raspoređena po čitavoj duljini štapa, tako da je u štapu stanje naprezanja linijsko i homogeno.

3.2.DEFORMACIJE

Relativna dužinska deformacija u točki A iz slike 1. $\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx}$

Prirast pomaka: $du = \varepsilon_{xx} dx$

Primjenom prethodnog izraza dobivamo: $du = \frac{\sigma_x}{E} dx$

ili: $du = \frac{N}{AE} dx$

Integriranjem dobivamo:

$$u = \int \frac{N}{AE} dx + C \Rightarrow u = \frac{Nx}{AE} + C$$

Za $x=0$; $u=0$; $C=0$

Za $x=l$; $u=\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{Nl}{AE} = \frac{Fl}{AE}$ **apsolutna deformacija štapa**

Δl -Apsolutna deformacija štapa

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ -relativna dužinska deformacija

$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d}$ (ili ε_p) -relativna poprečna deformacija

ν – poissonov koeficijent \Rightarrow Određuje se kao omjer poprečnog smanjenja i uzdužnog produljenja nekog materijala prilikom vlačnog ispitivanja na kidalici

Formula za poissonov koeficijent:

$$\nu = \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon}$$

Izraz $\Delta l = \frac{Nl}{AE} = \frac{Fl}{AE}$ predstavlja Hookeov zakon za rastezanje ravnog štapa. Deformacija pri rastezanju razmjerna je sili F i duljina štapa l , a obrnuto razmjerna površini poprečnoga presjeka i modulu elastičnosti materijala.

Relativno produljenje štapa jest

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{AE} = \frac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_{xx}$$

Budući da se, formalno govoreći, rastezanje razlikuje od pritiska samo po predznaku uzdužne sile N, za pritisak bismo dobili:

$$\sigma_x = -\frac{F}{A}$$

a za skraćenje štapa :

$$\Delta l = -\frac{Fl}{AE}$$

Pri dimenzioniranju štapa moraju biti ispunjeni uvjet čvrstoće:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} \leq \sigma_{dop}$$

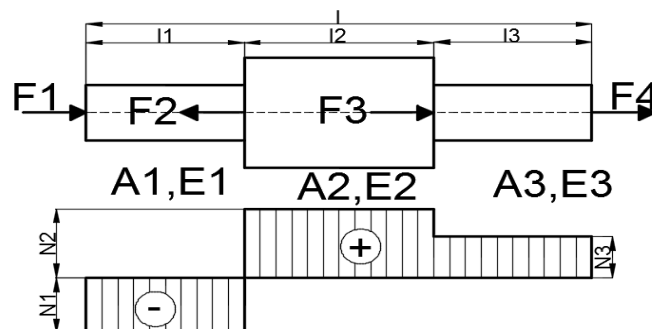
i uvjet krutosti:

$$\Delta l = \frac{Fl}{AE} \leq \Delta l_{dop}$$

U slučaju kada je štap promjenjive aksijalne krutosti opterećen nizom koncentriranih sila, dobivamo da je apsolutna deformacija štapa:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{A_i E_i}$$

Na dijelu štapa l_i aksijalna krutost i uzdužna sila su konstantne.



Slika2: Ravan štap sa naglom promjenom poprečnog presjeka

4.STATIČKI NEODREĐENI SISTEMI

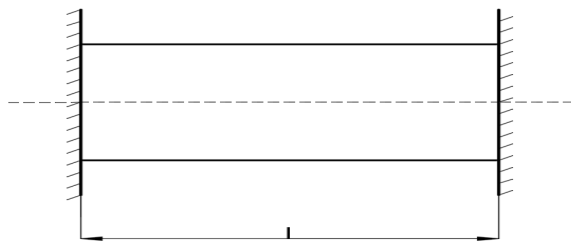
Ovdje ćemo promatrati konstrukcije sastavljene od štapova koji su opterećeni samo aksijalno. Uzdužne sile u štapovima određujemo metodom prereza iz uvjeta ravnoteže promatranog djela konstrukcije. Ako je pri određivanju sila u pojedinim štapovima konstrukcije potrebno više jednažbi nego što nam ih daju statički uvjeti ravnoteže, onda kažemo da je konstrukcija **statički neodređena**. Razlika između broja nepoznatih sila i broja nezavisnih jednažbi ravnoteže određuje broj prekobrojnih veza, odnosno stupanj statičke neodređenosti konstrukcije n . Da bismo mogli riješiti n puta statički neodređeni sistem moramo promatrati deformaciju konstrukcije i postaviti n dopunskih uvjeta deformacija.

Statički neodređeni sistemi su oni: kada je broj nepoznatih sila (n_1) veći od broja statičkih uvjeta ravnoteže (n_2); ($n_1 > n_2$)

Nepoznate sile ($n = n_1 - n_2$) se određuju - iz statičkih uvjeta ravnoteže + dopunski uvjeti deformacije

Pri rješavanju statički neodređenih konstrukcija postupamo ovako

- 1.Postavimo jednažbe ravnoteže za promatrane dijelove konstrukcije koji sadrže nepoznate sile. Zatim odredimo stupanj statičke neodređenosti sistema.
- 2.Utvrdimo vezu među deformacijama pojedinih dijelova konstrukcije na osnovi uvjeta kompatibilnosti deformacija postavimo potreban broj jednažbi kompatibilnosti deformacija, odnosno pomaka.
- 3.Pomoću Hookeovog zakona deformacije pojedinih dijelova konstrukcije izrazimo silama
- 4.Rješenjem postavljenog sustava jednažbi odredimo nepoznate veličine. Pri tom se kao osnovne nepoznate veličine mogu uzeti sile (**metoda sila**) ili pomaci odnosno deformacije (**metoda pomaka** odnosno **deformacija**).



Slika 3.

Slika 3.

Prikazuje štap konstantnog poprečnog presjeka koji je upet na oba kraja. Gore nacrtani sistem je statički neodređen što vidimo iz sljedećeg proračuna:

$$2x\check{C} - (\check{S} + K + L) = 2x2 - (1 + 0 + 6) = -4xSNS$$

Č-broj čvorova, Š-broj štapova, K-broj krutih veza, L-broj ležajnih reakcija

5. UTJECAJ TEMPERATURE

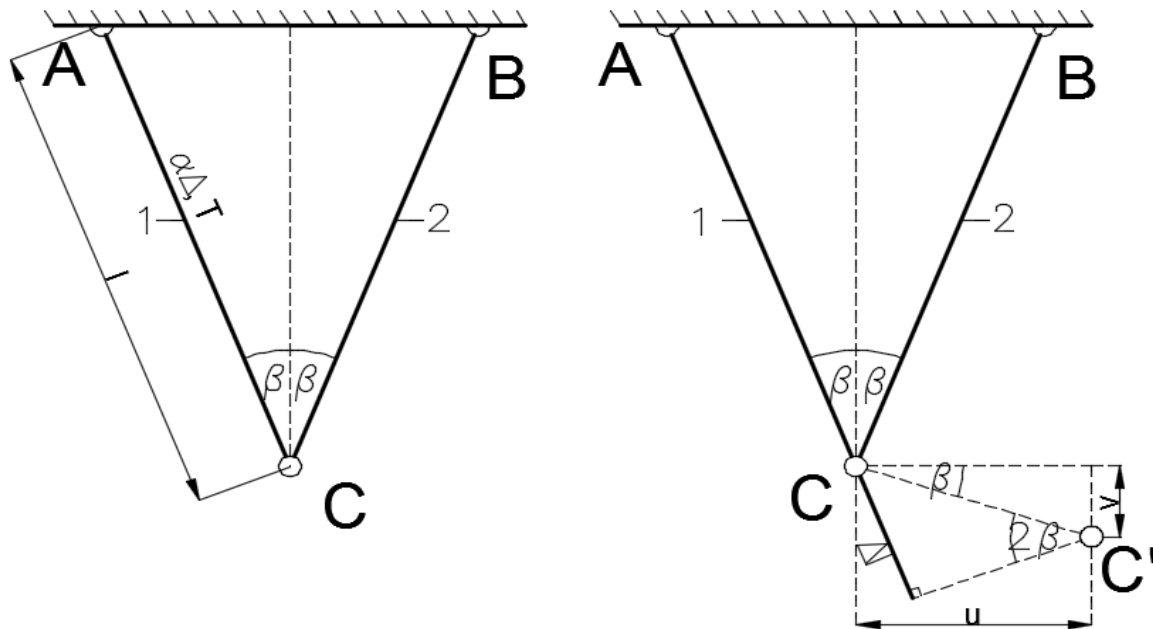
Budući da svako fizičko tijelo ima svojstva da se pri zagrijavanju širi, a pri hlađenju steže, potrebno je pri analizi deformacija uzeti u obzir utjecaj temperature.

Dužinska deformacija zbog promjene temperature za ΔT može se izraziti u obliku

$$\varepsilon_t = \alpha \Delta T$$

Pri slobodnom širenju odnosno skupljanju tijela deformacije ε_t nastaju bez pojave napreznja u tijelu. Ako je širenje odnosno skupljanje spriječeno (tj. ako su deformacije podvrgnute nekim ograničenjima), onda zbog promjene temperature u tijelu nastaju napreznja koja nazivamo toplinska napreznja.

Kod statički određenih konstrukcija deformacije elementa nisu podvrgnute nikakvim ograničenjima pa kod njih nema pojave toplinskih napreznja. Primjer na slici 4.



Slika 4.

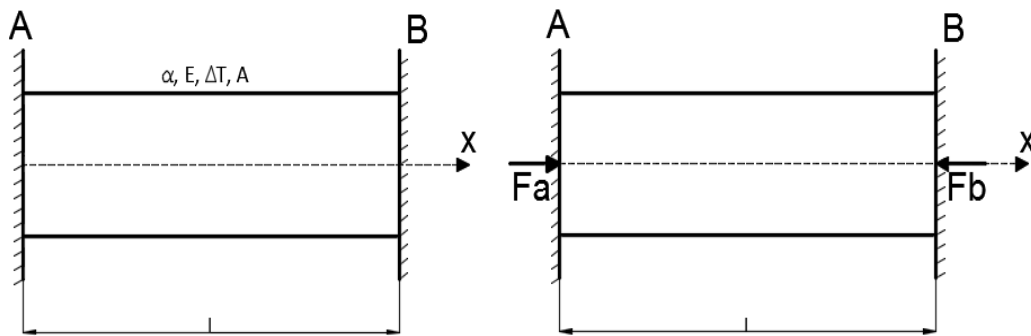
Slika 4.

Statički određen sistem koji se sastoji od dva štapa (štap A-C ima prirast temperature za ΔT) spojena u čvoru C.

Pripadajuće produljenje: $\Delta l_t = \varepsilon_t l = \alpha_t l \Delta t$

Pomak točke C: $\delta_c = CC_1 = \frac{\Delta l_t}{\sin 2\beta} = \frac{\alpha_t l \Delta t}{\sin 2\beta}$

Kod statički neodređenih konstrukcija pojavljuju se sile i naprezanja pri promjeni temperature pojedinih elemenata ili čitave konstrukcije. Primjer slika br.5.



Slika 5: Štap koji je upet između dviju krutih nepomičnih stjenki

Kod štapova koji su upeti između dvije krute nepomične stjenke, pri porastu temperature štap bi se produljio, ali tomu se suprotstavljaju oslonci u kojima se pojavljuju reakcije i koje ne dopuštaju produljenje štapa.

Pri porastu temperature za ΔT štap bi se produljio za:

$$\Delta l_t = \varepsilon_t l = \alpha \Delta T l$$

Tome se suprotstavljaju oslonci u kojima se pojavljuju reakcije F_A i F_B koje ne dopuštaju produljenje štapa. Iz uvjeta ravnoteže dobivamo:

$$F_A = F_B$$

Vidimo da je sistem statički neodređen. Potrebno je postaviti uvjet kompatibilnosti deformacija. Iz uvjeta pričvršćenja štapa slijedi da štap ne može mijenjati svoju duljinu, pa mora biti:

$$\Delta l = \Delta l_t - \Delta l_f = 0$$

Ili

$$\alpha \Delta T l = \frac{F_A l}{EA}$$

Dobivamo reakciju oslonca:

$$F_A = F_B = \alpha \Delta T E A$$

Naprezanja u štapu:

$$\sigma = \frac{F_A}{A} = \alpha_t \Delta T E$$

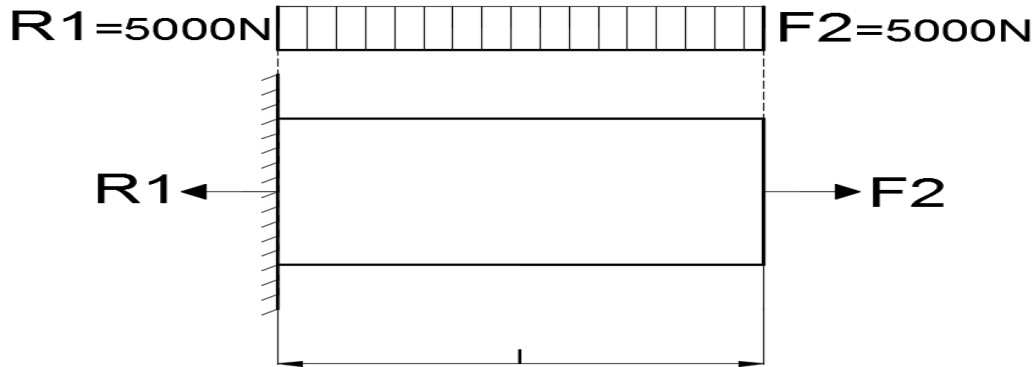
U ovom slučaju vidimo da naprezanje u štapu ne ovisi o površini poprečnog presjeka.

Za $\Delta T > 0$, tj. pri porastu temperature, naprezanje je u štapu tlačno, a za $\Delta T < 0$, tj. pri smanjenju temperature, naprezanje je u štapu vlačno.

6.ZADACI

1) Utjecaj uzdužne sile na statički određenom sustavu

Pri probi kidanja štapa površine $A = 45\text{cm}^2$ i duljine $l = 500\text{cm}$, podvrgnut je osnom opterećenju $F_2 = 5000\text{N}$. Odredite produljenje ravnog čeličnog štapa $E = 2 \times 10^4 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$ u točki 2.



Slika 6: Ravni čelični štap pravokutnog poprečnog presjeka

Postupak:

$$E = 2 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$A_1 = 45\text{cm}^2$$

$$l = 5\text{m} = 500\text{cm}$$

$$F_2 = 5000\text{N}$$

$$\sum F_x = 0;$$

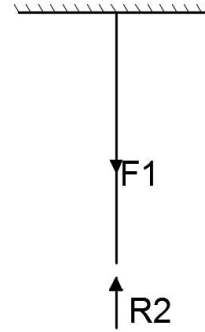
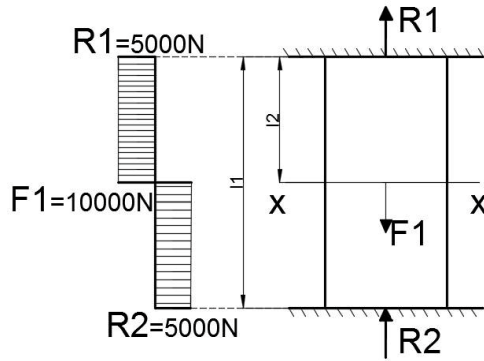
$$R_1 = F_2$$

$$R_1 = 5000\text{N}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = \frac{5000 \cdot 500}{2 \times 10^7 \cdot 45} = 0.0028\text{cm}$$

2) Utjecaj uzdužne sile na statički neodređenom sustavu

Odredite produljenje ravnog bakrenog štapa na središnjem presjeku x-x. Zadano je $F_1 = 10000N$,
 $E = 10^7 \frac{N}{cm^2}$, $A = 20cm^2$, $l = 1000cm$.



Slika 7: ravni bakreni štap pravokutnog poprečnog presjeka

Slika 8: Oslobodimo jedan kraj štapa

Postupak:

$$F_1 = 10000N$$

$$E = 10^7 N / cm^2$$

$$A_1 = 20cm^2$$

$$l_1 = 1000cm$$

$$l_2 = 500cm$$

$$\sum F_y = 0;$$

$$R_1 + R_2 - F_1 = 0$$

$$R_1 + R_2 = 10000N$$

$$\Delta l_A = 0 = \sum \frac{Nl}{AE}$$

$$\Delta l_A = 0 = \frac{10000 \times 500}{10^7 \times 20} - \frac{R_2 \times 1000}{10^7 \times 20}$$

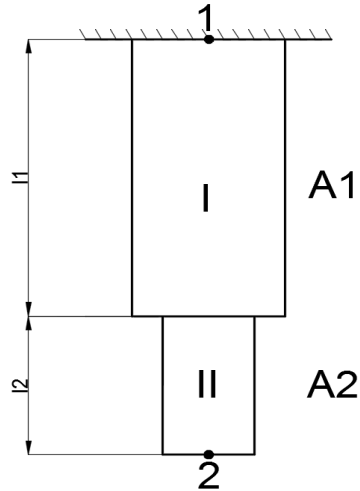
$$R_2 = 5000N$$

$$R_1 = 5000N$$

$$\Delta l_{x-x} = \frac{Nl}{AE} = \frac{5000 \times 500}{10^7 \times 20} = 0,0125cm$$

3) Utjecaj temperature na statički određenom sustavu

Treba izračunati produljenje štapa u točki 2 pod utjecajem temperature. Zadano je $l_1 = 500\text{cm}$, $l_2 = 300\text{cm}$, $\Delta T = 40^\circ\text{C}$, $\alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} \frac{1^\circ}{\text{C}}$.



Slika 9: ravni štap sa naglom promjenom poprečnog presjeka pod utjecajem temperature

Postupak:

$$l_1 = 5\text{m} = 500\text{cm}$$

$$l_2 = 3\text{m} = 300\text{cm}$$

$$\Delta T = 40^\circ\text{C}$$

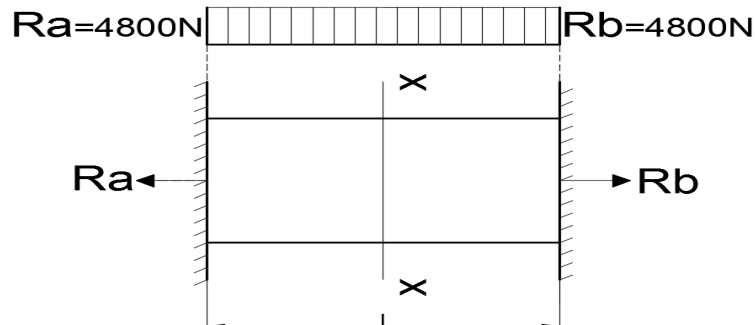
$$\alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} \frac{1^\circ}{\text{C}}$$

$$\Delta l_2 = \alpha_t \times \Delta T \times l_1 + \alpha_t \times \Delta T \times l_2$$

$$\Delta l_2 = 1,2 \times 10^{-5} \times 40 \times 500 + 1,2 \times 10^{-5} \times 40 \times 300 = 0,384\text{cm}$$

4) Utjecaj temperature na statički neodređenom sustavu

Odredite naprezanja ravnog štapa u središtu na presjeku x-x pod utjecajem temperature. Zadani podaci su $A = 20\text{cm}^2$, $\Delta T = -20^\circ\text{C}$, $l = 600\text{cm}$, $\alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} \frac{1^\circ}{\text{C}}$, $E = 10^7 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$.



Slika 10: ravan štap pravokutnog poprečnog presjeka pod utjecajem temperature

Postupak:

$$A = 20\text{cm}^2$$

$$\Delta T = -20^\circ\text{C}$$

$$l = 600\text{cm}$$

$$\alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} \frac{1^\circ}{\text{C}}$$

$$E = 10^7 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$R_A - R_B = 0$$

$$R_A = R_B$$

$$\Delta l_{\text{ukupni}} = 0$$

$$\Delta l_t = \Delta l_{\text{sile}}$$

$$\Delta l_A = 0 = \Delta l_{\text{sile}} - \Delta l_t$$

$$\sum = \frac{R_b \times 600}{10^7 \times 20} - 1,2 \times 10^{-5} \times 20 \times 600$$

$$R_A = R_B = 48000\text{N}$$

$$N_{x-x} = 48000\text{N}$$

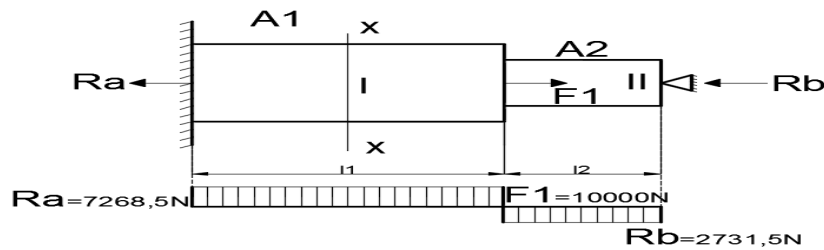
$$\sigma_{x-x} = \frac{N_{x-x}}{A} = \frac{48000}{20} = 2400\text{N} / \text{cm}^2$$

5) Utjecaj uzdužne sile + temperature na statički neodređenom sustavu

Odredite naprezanja na presjeku x-x, na ravnom štapu koji naglo promjeni poprečni presjek ako je

zadano $\alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} \frac{1}{C}$, $F_1 = 10000 N$, $E = 1,2 \times 10^5 N / cm^2$, $\Delta T = 20^\circ C$, $A_1 = 50 cm^2$,

$l_1 = 300 cm$, $A_2 = 25 cm^2$, $l_2 = 400 cm$.



Slika 11: Ravan štap sa naglom promjenom poprečnog presjeka

Postupak:

$$\alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} \frac{1}{C}$$

$$F_1 = 10000 N$$

$$E = 1,2 \times 10^5 N / cm^2$$

$$\Delta T = 20^\circ C$$

štap1

$$A_1 = 50 cm^2$$

$$l_1 = 300 cm$$

Štap2

$$A_2 = 25 cm^2$$

$$l_2 = 400 cm$$

$$\sum Fx = 0;$$

$$-R_A + F_1 - R_B = 0$$

$$R_A + R_B = F_1 = 10000$$

$$\Delta l_{Ukupni} = 0$$

$$\Delta l_{Ukupni} = \Delta l_{sile} + \Delta l_t$$

$$\Delta l_A = 0 = \sum = \frac{Nl}{EA} + \alpha_t \Delta T l = \frac{10000 \times 300}{1,2 \times 10^5 \times 50} - \frac{R_B \times 400}{1,2 \times 10^5 \times 25} - \frac{R_B \times 300}{1,2 \times 10^5 \times 50} + 1,2 \times 10^{-5} \times 20 \times 700$$

$$R_B = 2731,5 N$$

$$R_A = 7268,5 N$$

$$N_{x-x} = 2731,5 N$$

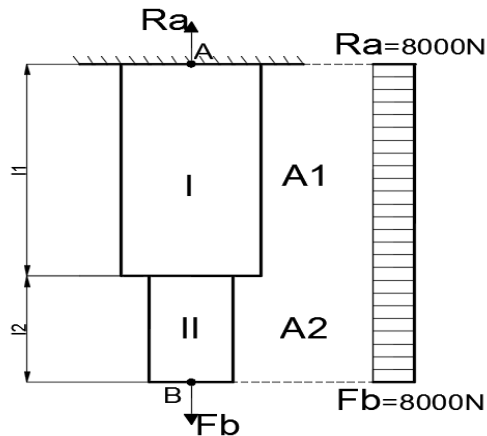
$$\sigma_{x-x} = \frac{N_{x-x}}{A_1} = \frac{2731,5}{50} = 54,63 N / cm^2$$

6) Utjecaj uzdužne sile + temperature na statički određenom sustavu

Za zadatak prikazan na slici 12. potrebno je odrediti produljenje u točki B. Ako je zadano

$$A_1 = 60\text{cm}^2, l_1 = 350\text{cm}, A_2 = 40\text{cm}^2, l_2 = 450\text{cm}, F_B = 8000\text{N}, E = 2,1 \times 10^{15} \frac{\text{N}}{\text{cm}^2},$$

$$\alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{C}}, \Delta T = 23^\circ \text{C}.$$



Slika 12: Ravan štap sa naglom promjenom poprečnog presjek

Postupak:

Štap1:

$$A_1 = 60\text{cm}^2$$

$$l_1 = 350\text{cm}$$

Štap2:

$$A_2 = 40\text{cm}^2$$

$$l_2 = 450\text{cm}$$

$$F_B = 8000\text{N}$$

$$E = 2,1 \times 10^{15} \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$\alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{C}}$$

$$\Delta T = 23^\circ \text{C}$$

$$\sum F_y = 0;$$

$$R_A = F_B$$

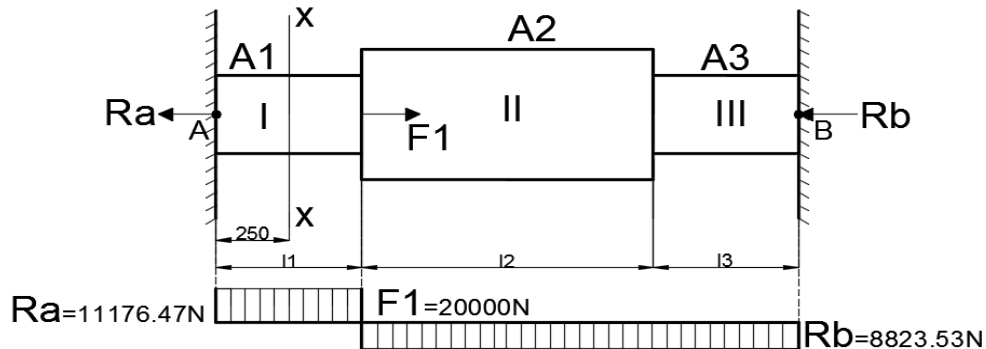
$$R_A = 8000\text{N}$$

$$\Delta l_B = \frac{F_B l_1}{EA_1} + \frac{F_B l_2}{EA_2} + \alpha_t \Delta T l_{uk}$$

$$\Delta l_B = \frac{8000 \times 350}{2,1 \times 10^{15} \times 60} + \frac{8000 \times 450}{2,1 \times 10^{15} \times 40} + 1,2 \times 10^{-5} \times 23 \times 800 = 0,22\text{cm}$$

7) Utjecaj uzdužne sile na ravan štap statički neodređenog sustava

Za ravan štap sa naglom promjenom poprečnog presjeka prikazan na slici 13. potrebno je odrediti produljenje štapa na presjeku x-x. Zadani podaci su: $F_1 = 20000N$, $l_1 = l_3 = 500cm$, $l_2 = 200cm$, $A_1 = A_3 = 30cm^2$, $A_2 = 50cm^2$, $E = 10^7 \frac{N}{cm^2}$.



Slika 13: Ravan bakreni štap sa naglom promjenom poprečnog presjek

Postupak:

$$F_1 = 20000N$$

$$l_1 = l_3 = 500cm$$

$$l_2 = 200cm$$

$$A_1 = A_3 = 30cm^2$$

$$A_2 = 50cm^2$$

$$E = 10^7 \frac{N}{cm^2}$$

$$\sum F_x = 0;$$

$$-R_A + F - R_B = 0$$

$$\Delta l_A = 0 = \sum \frac{Nl}{AE} = \frac{20000 \times 500}{10^7 \times 30} - \frac{R_B \times 500}{10^7 \times 30} - \frac{R_B \times 200}{10^7 \times 50} - \frac{R_B \times 500}{10^7 \times 30}$$

$$3,74 \times 10^{-6} R_B = 0,033$$

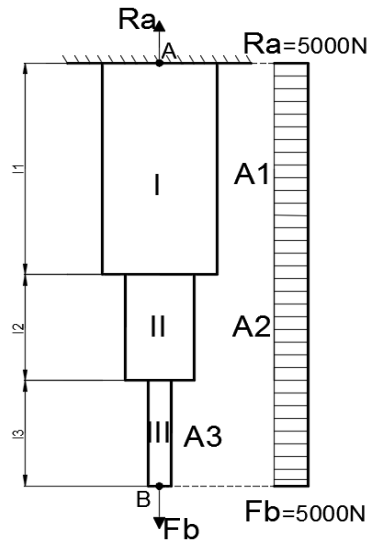
$$R_B = 8823,53N$$

$$R_A = 11176,47N$$

$$\Delta l_{x-x} = \frac{Nl}{AE} = \frac{11176,47 \times 250}{10^7 \times 30} = 0,0093cm$$

8) Utjecaj uzdužne sile + temperature na ravan štap statički određenog sustava

Za zadane podatke: $F_B = 5000\text{ N}$, $\Delta T = 25^\circ\text{ C}$, $\alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{C}}$, $E = 1,2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$, $l_1 = 100\text{ cm}$,
 $l_2 = l_3 = 200\text{ cm}$, $A_1 = 40\text{ cm}^2$, $A_2 = 30\text{ cm}^2$, $A_3 = 20\text{ cm}^2$, potrebno je odrediti produljenje štapa u
 točki B.



Slika 14: Ravan štap pravokutnog poprečnog presjeka koji naglo mijenja poprečni presjek

Postupak:

$$F_B = 5000\text{ N}$$

$$\Delta T = 25^\circ\text{ C}$$

$$\alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{C}}$$

$$E = 1,2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$l_1 = 100\text{ cm}$$

$$l_2 = l_3 = 200\text{ cm}$$

$$A_1 = 40\text{ cm}^2$$

$$A_2 = 30\text{ cm}^2$$

$$A_3 = 20\text{ cm}^2$$

$$\sum F_y = 0;$$

$$R_A = F_B$$

$$R_A = 5000\text{ N}$$

$$\Delta l_B = \frac{Nl}{AE} + \alpha_t \Delta T l = \frac{5000 \times 100}{1,2 \times 10^5 \times 40} + \frac{5000 \times 200}{1,2 \times 10^5 \times 30} + \frac{5000 \times 200}{1,2 \times 10^5 \times 20} + 1,2 \times 10^{-5} \times 25 \times 500$$

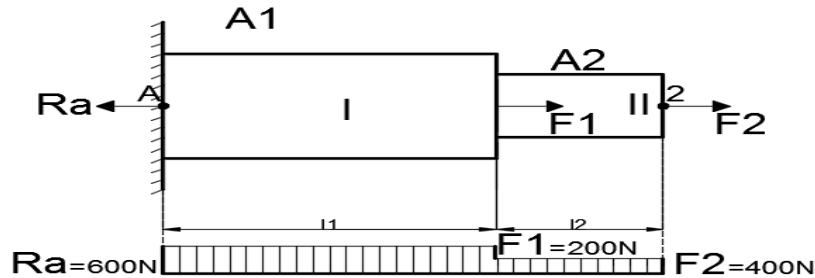
$$\Delta l_B = 0,104 + 0,278 + 0,417 + 0,15 = 0,949\text{ cm}$$

9) Utjecaj uzdužne sile + temperature na statički određenom sustavu

Za utjecaj dvaju sila $F_1 = 200N$, $F_2 = 400N$ treba odrediti produljenje u točki 2. Ako je zadano:

$$\Delta T = 20^\circ C, \alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} \frac{1}{C}, l_1 = 300cm, A_1 = 50cm^2, E_\epsilon = 2 \times 10^3 \frac{N}{cm^2}, l_2 = 200cm,$$

$$A_2 = 30cm^2, E_\epsilon = 1,2 \times 10^3 \frac{N}{cm^2}.$$



Slika 15: ravan štap pravokutnog poprečnog presjeka koji naglo mijenja poprečni presjek, sastavljen u dva djela (lijevi je čelični, a desni željezni)

Postupak:

$$F_1 = 200N$$

$$F_2 = 400N$$

$$\Delta T = 20^\circ C$$

$$\alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} \frac{1}{C}$$

Štap1:

$$l_1 = 300cm$$

$$A_1 = 50cm^2$$

$$E_\epsilon = 2 \times 10^3 \frac{N}{cm^2}$$

Štap2:

$$l_2 = 200cm$$

$$A_2 = 30cm^2$$

$$E_\epsilon = 1,2 \times 10^3 \frac{N}{cm^2}$$

$$\sum F_x = 0;$$

$$R_A = F_1 + F_2$$

$$R_A = 600N$$

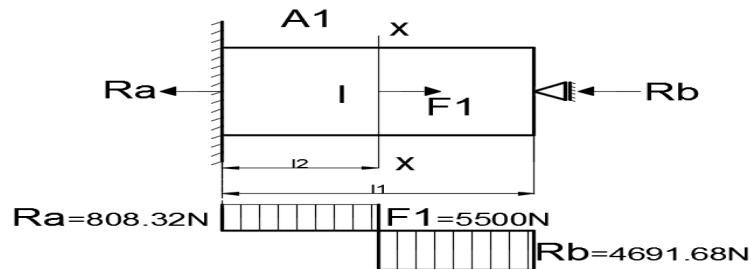
$$\Delta l_2 = \frac{Nl}{AE} + \alpha_t \Delta T l = \frac{200 \times 300}{2 \times 10^3 \times 50} + \frac{400 \times 200}{1,2 \times 10^3 \times 30} + \frac{400 \times 300}{2 \times 10^3 \times 50} + 1,2 \times 10^{-5} \times 20 \times 500$$

$$\Delta l_2 = 0,6 + 2,22 + 1,2 + 0,12 = 4,14cm$$

10) Utjecaj uzdužne sile i temperature na statički neodređenom sustavu

Pod utjecajem uzdužne sile i temperature treba odrediti naprezanja na presjeku x-x. Ako je zadano:

$$F_1 = 5500N, E = 1.2 \times 10^5 N / cm^2, \Delta T = 27^\circ C, \alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} \frac{1}{C}, A_1 = 50cm^2, l_1 = 400cm, l_2 = 200cm.$$



Slika 16: Ravan štap konstantnog, pravokutnog poprečnog presjeka

Postupak:

$$F_1 = 5500N$$

$$E = 1.2 \times 10^5 N / cm^2$$

$$\Delta T = 27^\circ C$$

$$\alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} \frac{1}{C}$$

$$A_1 = 50cm^2$$

$$l_1 = 400cm$$

$$l_2 = 200cm$$

$$\sum F_x = 0;$$

$$-R_A - R_B + F_1 = 0$$

$$R_A + R_B = 5500N$$

$$\Delta l_{ukupni} = 0 = \Delta l_{sile} + \Delta l_{temperature}$$

$$\Delta l_A = 0 = \frac{Nl}{AE} + \alpha_t \Delta T l = \frac{5500 \times 200}{1.2 \times 10^5 \times 50} - \frac{R_B \times 400}{1.2 \times 10^5 \times 50} + 1.2 \times 10^{-5} \times 27 \times 400$$

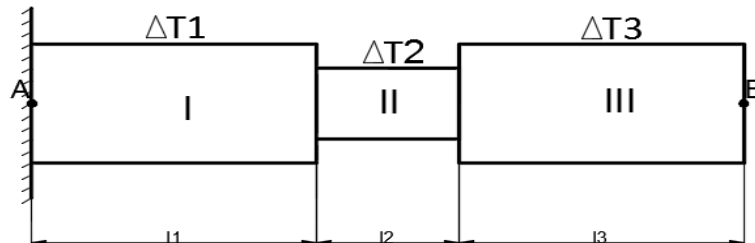
$$R_B = 4691.68N$$

$$R_A = 808.32N$$

$$\Delta l_{x-x} = \frac{Nl}{AE} + \Delta T \alpha_t l = \frac{808.32 \times 200}{1.2 \times 10^5 \times 50} + 1,2 \times 10^{-5} \times 27 \times 400 = 0,16cm$$

11) Utjecaj temperature na statički određenom sustavu

Pod utjecajem temperature na ravnom štapu prikazanom na slici 17. potrebno je odrediti uzdužnu deformaciju u točki B. Ako je zadano: $\alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} \frac{1}{C}$, $\Delta T_1 = 22^\circ C$, $l_1 = 300 \text{ cm}$, $\Delta T_2 = -24^\circ C$, $l_2 = 200 \text{ cm}$, $\Delta T_3 = 20^\circ C$, $l_3 = 350 \text{ cm}$.



Slika 17: Ravan štap pravokutnog poprečnog presjeka koji naglo mijenja poprečni presjek

Postupak:

$$\alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} \frac{1}{C}$$

Štap1:

$$\Delta T_1 = 22^\circ C$$

$$l_1 = 300 \text{ cm}$$

Štap2:

$$\Delta T_2 = -24^\circ C$$

$$l_2 = 200 \text{ cm}$$

Štap3:

$$\Delta T_3 = 20^\circ C$$

$$l_3 = 350 \text{ cm}$$

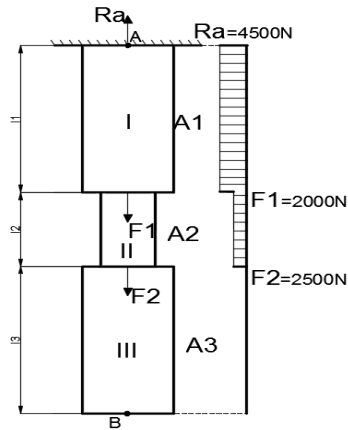
$$\Delta l_B = \Delta T_1 \alpha_t l_1 - \Delta T_2 \alpha_t l_2 + \Delta T_3 \alpha_t l_3$$

$$\Delta l_B = 33 \times 1,2 \times 10^{-5} \times 300 - 24 \times 1,2 \times 10^{-5} \times 200 + 20 \times 1,2 \times 10^{-5} \times 350$$

$$\Delta l_B = 0,106 \text{ cm}$$

12) Utjecaj uzdužne sile na statičkom određenom sustavu

Pod utjecajem uzdužne sile a ravan štap prikazan na slici 18, potrebno je izračunati uzdužnu deformaciju. Ako je zadano: $F_1 = 2000N$, $F_2 = 2500N$, $A_1 = 40cm^2$, $l_1 = 150cm$, $A_2 = 20cm^2$, $l_2 = 100cm$, $A_3 = 35cm^2$, $l_3 = 125cm$.



Slika 18: Ravan štap pravokutnog poprečnog presjeka koji naglo mijenja poprečni presjeka

Postupak:

$$F_1 = 2000N$$

$$F_2 = 2500N$$

Štap1:

$$A_1 = 40cm^2$$

$$l_1 = 150cm$$

Štap2:

$$A_2 = 20cm^2$$

$$l_2 = 100cm$$

Štap3:

$$A_3 = 35cm^2$$

$$l_3 = 125cm$$

$$\sum F_y = 0;$$

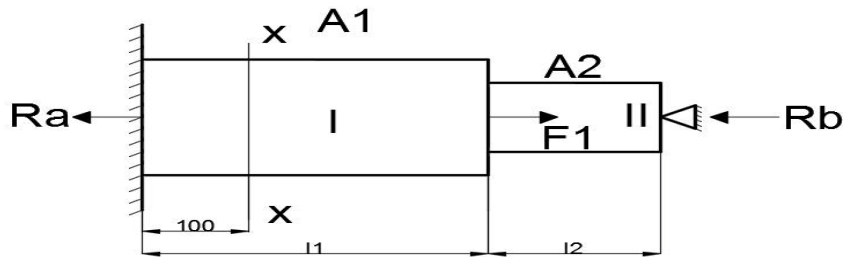
$$R_A - F_1 - F_2 = 0$$

$$R_A = 4500N$$

$$\Delta l_B = \frac{F_1 l_1}{A_1 E} + \frac{F_2 l_1}{A_1 E} + \frac{F_2 l_3}{A_2 E}$$

$$\Delta l_B = \frac{2000 \times 150}{2 \times 10^7 \times 40} + \frac{2500 \times 150}{2 \times 10^7 \times 40} + \frac{2500 \times 100}{2 \times 10^7 \times 20} = 0,0015cm$$

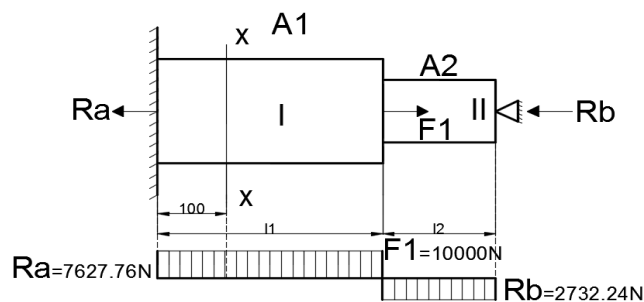
13) Odredite produljenje na presjeku x-x, na ravnom štapu koji naglo promjeni poprečni presjek ako je zadano $\alpha_t = 1,2 \times 10^{-5} \frac{1}{C}$, $F_1 = 10000 N$, $E = 1,2 \times 10^5 N / cm^2$, $\Delta T = 200^\circ C$, $A_1 = 50 cm^2$, $l_1 = 300 cm$, $A_2 = 25 cm^2$, $l_2 = 400 cm$.



Slika 19: Ravan štap sa naglom promjenom poprečnog presjeka

Izračunati naprezanja u presjeku x-x ako je štap opterećen:

a) Štap pod utjecajem sile $F_1 = 10000 N$



Slika 20: Ravan štap sa naglom promjenom poprečnog presjeka

$$\sum F_x = 0;$$

$$-R_A + F_1 - R_B = 0$$

$$R_A + R_B = F_1 = 10000$$

$$\Delta l_A = 0 = \Delta l_{sile}$$

$$\Delta l_A = 0 = \sum \frac{Nl}{EA} = \frac{10000 \times 300}{1.2 \times 10^5 \times 50} - \frac{R_B \times 400}{1.2 \times 10^5 \times 25} - \frac{R_B \times 300}{1.2 \times 10^5 \times 50}$$

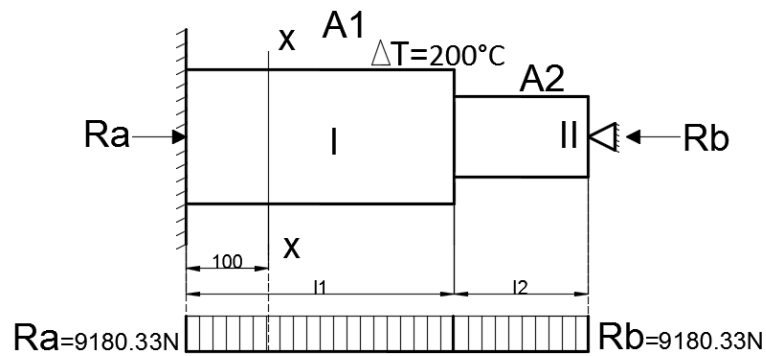
$$R_B = 2732.24 N$$

$$R_A = 7267.76 N$$

$$N_{x-x} = 7267.76 N$$

$$\sigma_{x-x} = \frac{R_A}{A_1} = \frac{7267.76}{50} = 145.36 N / cm^2$$

b) Štap pod utjecajem temperature $\Delta T = 200^\circ\text{C}$ na cijeloj dužini



Slika 21: Ravan štap sa naglom promjenom poprečnog presjeka

$$R_A - R_B = 0$$

$$R_A = R_B$$

$$\Delta l_{ukupno} = 0$$

$$\Delta l_{sile} = \Delta l_t$$

$$\Delta l_A = 0 = -\Delta l_{sile} + \Delta l_t$$

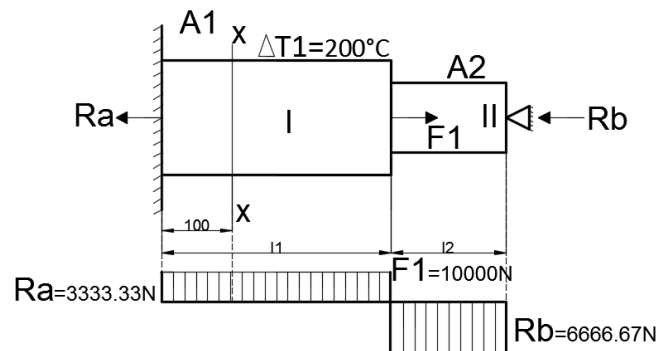
$$\sum = -\frac{R_B \cdot x \cdot 400}{1.2 \cdot 10^5 \cdot x \cdot 25} - \frac{R_B \cdot x \cdot 300}{1.2 \cdot 10^5 \cdot x \cdot 50} + 1.2 \cdot 10^{-5} \cdot x \cdot 200 \cdot x \cdot 700$$

$$R_B = R_A = 9180.33\text{N}$$

$$N_{x-x} = 9180.33\text{N}$$

$$\sigma_{x-x} = \frac{R_A}{A_1} = \frac{9180.33}{50} = 183.60\text{N} / \text{cm}^2$$

c) Štap pod utjecajem sile $F_1 = 10000\text{N}$ i pod utjecajem temperature $\Delta T = 200^\circ\text{C}$ na dijelu štapa l_1



Slika 22: Ravan štap sa naglom promjenom poprečnog presjeka

$$\sum F_x = 0;$$

$$-R_A + F_1 - R_B = 0$$

$$R_A + R_B = F_1 = 10000$$

$$\Delta l_A = 0 = \Delta l_{sile} + \Delta l_{temperature}$$

$$\Delta l_A = 0 = \sum = \frac{Nl}{EA} + \alpha_t \Delta T l = \frac{10000 \times 300}{1.2 \times 10^5 \times 50} - \frac{R_B \times 400}{1.2 \times 10^5 \times 25} - \frac{R_B \times 300}{1.2 \times 10^5 \times 50} + 1.2 \times 10^{-5} \times 200 \times 300$$

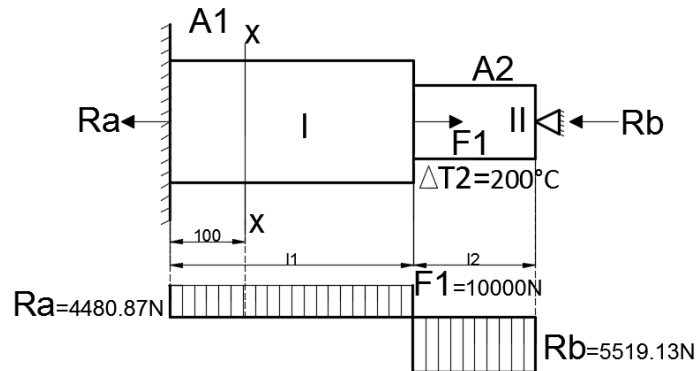
$$R_B = 6666.67\text{N}$$

$$R_A = 3333.33\text{N}$$

$$N_{x-x} = 6666.67\text{N}$$

$$\sigma_{x-x} = \frac{R_A}{A_1} = \frac{6666.67}{50} = 66.67\text{N/cm}^2$$

d) Štap pod utjecajem sile $F_1 = 10000\text{ N}$ i pod utjecajem temperature $\Delta T = 200^\circ\text{C}$ na djelu štapa l_2



Slika 23: Ravan štap sa naglom promjenom poprečnog presjeka

$$\sum F_x = 0;$$

$$-R_A + F_1 - R_B = 0$$

$$R_A + R_B = F_1 = 10000$$

$$\Delta l_{ukupni} = 0 = \Delta l_{sile} + \Delta l_t$$

$$\Delta l_A = 0 = \sum = \frac{Nl}{EA} + \alpha_t \Delta T l = \frac{10000 \times 300}{1.2 \times 10^5 \times 50} - \frac{R_B \times 400}{1.2 \times 10^5 \times 25} - \frac{R_B \times 300}{1.2 \times 10^5 \times 50} + 1.2 \times 10^{-5} \times 200 \times 400$$

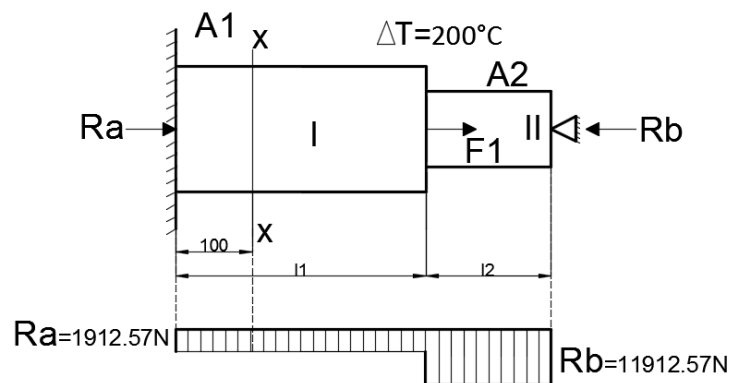
$$R_B = 7978\text{ N}$$

$$R_A = 2022\text{ N}$$

$$N_{x-x} = 2022\text{ N}$$

$$\sigma_{x-x} = \frac{R_A}{A_1} = \frac{2022}{50} = 40.44\text{ N / cm}^2$$

e) Štap pod utjecajem sile $F_1 = 10000N$ i pod utjecajem temperature $\Delta T = 200^\circ C$ na cijelom štapu



Slika 24: Ravan štap sa naglom promjenom poprečnog presjeka

$$\sum F_x = 0;$$

$$R_A + F_1 - R_B = 0$$

$$R_B = F_1 + R_A$$

$$\Delta l_{ukupni} = 0 = \Delta l_{sile} + \Delta l_t$$

$$\Delta l_A = 0 = \sum = \frac{Nl}{EA} + \alpha_t \Delta T l = \frac{10000 \times 300}{1.2 \times 10^5 \times 50} - \frac{R_B \times 400}{1.2 \times 10^5 \times 25} - \frac{R_B \times 300}{1.2 \times 10^5 \times 50} + 1.2 \times 10^{-5} \times 200 \times 700$$

$$R_B = 11912.57N$$

$$R_A = 1912.57N$$

$$N_{x-x} = 1912.57N$$

$$\sigma_{x-x} = \frac{R_A}{A_1} = \frac{1912.57}{50} = 38.25N/cm^2$$

Tablica:

	a)	b)	c)	d)	e)
N_{x-x}	7267.76N	9180.33N	6666.67N	2022N	1912.57N
σ_{x-x}	145.36N/cm ²	183.60N/cm ²	66.67N/cm ²	40.44N/cm ²	38.25N/cm ²

Objašnjenje: Iz gornjeg primjera i prikazanih rezultata vidljivo je da su naprezanja puno veća kada djeluje samo uzdužna sila, primjer a) ili samo temperatura, primjer b). U ovom zadatku do te pojave dolazi zato što je uzdužna sila suprotnok predznaka tj. djeluje u suprotnom smjeru od reakcija koju izaziva temperatura. Zbog tih smjerova djelovanja najmanje naprezanje je u slučaju e), zato što je tu naprezanje od temperature najveće, a i djeluje uzdužna sila koja je suprotnog predznaka pa se naprezanja oduzimaju.

7.ZAKLJUČAK

U ovom završnom radu je prikazan utjecaj uzdužne sile i temperature na naprezanja i deformaciju ravnog štapa. Sve sile koje djeluju na štap sveli smo na sile usmjerene uzduž osi štapa. To znači da se štap pod utjecajem uzdužne sile može deformirati u uzdužnom i poprečnom smjeru. Teoretske izvedbe formula smo primjenili na konkretnim primjerima , koje smo podjelili na statički određene i statički neodređene sisteme. Analiziran je posebno utjecaj temperature , a posebno utjecaj uzdužne sile, te njihove kombinacije na gore navedenim sustavima ravnih štapova. Povećavanjem uzdužne sile se povećavaju uzdužna naprezanja te uzdužna deformacija štapa. Kod zagrijavanja odnosno hlađenja doći će do rastezanja , odnosno skupljanja štapa , što povećava naprezanja a ujedno i deformacije štapa. Uzdužna sila i temperatura stvaraju naprezanja u štapu koja se zbrajaju te su tako ukupna naprezanja i deformacije veće. Možemo zaključiti da veća opterećenja stvaraju veća naprezanja, a samim time i veće deformacije koje mogu voditi do otkazivanja elementa (tj. štapa).

8.LITERATURA

1.V. Šimić, OTPORNOST MATERIJALA I

2.V. Sigmund, M.Bošnjak-Klečina, Otpornost materijala I (zbirka zadataka)

3.<http://maeresearch.ucsd.edu/~vlubarda/research/pdfpapers/VLubarda-OTPORNOST.pdf>

4.<http://gradst.unist.hr/Portals/9/docs/katedre/Teorija%20konstrukcija/ONK%20II/ONKII-6.pdf>

5.<http://www.unizd.hr/portals/1/nastmat/cvrstoca03.pdf>

6.http://www.sfsb.unios.hr/ksk/cvrstoca/web_cvrstoca/3_sadrzaj/index.htm

7.http://www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/cvr_kon/Pages/osoblje_files/Turkalj/C_K_Aksijalno%20opterecenje.pdf

8.<http://www.gfos.unios.hr/portal/images/stories/studij/sveucilisni-preddiplomski/otpornost-materijala-i/4-aksijalno-opterecenje.pdf>

9.<http://www.gfos.unios.hr/portal/images/stories/studij/sveucilisni-preddiplomski/otpornost-materijala-i/3-aksijalno-opterecenje.pdf>